

## یک الگوی فراگیر برای اجزای غشایی چهارپهلوی

محمد رضایی پژند و ندا بقیعی

**چکیده:** این مقاله با دیدگاه الگوهای جبری عاملدار، به بررسی اجزای چهارپهلوی غشایی با درجه های آزادی دورانی می پردازد. جای گرفتن عامل های آزاد در درایه های ماتریس سختی، سبب همانی شدن روش ها می شود و زمینه را برای بهینه ساختن کارایی جزء، فراهم می آورد. ماتریس سختی جزء، دارای دو بخش پایه و مرتبه بالا است. ماتریس سختی پایه، شرط های همگرایی را برقرار می کند و در آن یک عامل آزاد جا دارد. ماتریس سختی مرتبه بالا، با بهره جویی از راهکار کرنش انحرافی طبیعی فرضی و با بیست و چهار عامل آزاد، بر پا می گردد، به گونه ای که شرط های دقت و پایداری را برقرار سازد. از این رو، ماتریس سختی جزء، دارای هیچگونه حالت نادرستی نیست و در تحلیل قفل نمی نماید. الگوی پیشنهادی، می تواند با روش های پیشین وابستگی پیدا کند و نشان جزء را دست دهد.

**واژه های کلیدی:** اجزا با کارایی بالا، الگوی جبری عاملدار، درجه های آزادی دورانی، عامل آزاد، قالب جزء محدود.

شود. این شیوه، سبب پا گرفتن رابطه سازی کلی اجزای محدود گردید که قالب نام دارد [۲].

قالب جزء محدود، شکل جبری عاملداری است که با دادن مقدارهای عددی به عامل های آزاد، به اجزای محدود ویژه ای می پیوندد. قالب های اجزای محدود را فلیپا با بهره گرفتن از روش های ابتکاری برپا کرد. از این رو، قالب جزء محدود یک راهکار غیر قراردادی در اجزای محدود می باشد و زمینه مناسبی را برای آفرینش اجزای با کارایی بالا، فراهم می سازد.

آفرینش اجزای با کارایی بالا (HP)، یکی از پیشرفت های نوین اجزای محدود می باشد. فلیپا و میلیتو، این اجزا را این گونه تعریف می کنند: «اجزای ساده ای که با شبکه های درشت دلخواه، پاسخ هایی در محدوده دقت مهندسی داشته باشند» [۳، ۲].

در این مقاله، الگوی عاملدار فراگیری برای اجزای غشایی چهارپهلوی بر پا می شود. با در نظر گرفتن دوران ها در گوشه ها کارایی جزء بدون نیاز به گره های میانی بهبود می یابد. افزون بر این، برای بخش تنش صفحه ای در تحلیل پوسته های نازک با شش درجه آزادی در هر گره، به شایستگی می تواند به کار رود. زیرا، دوران های گوشه ای، مشکل های برپا نمودن الگو، برنامه نویسی و کارهای عددی رایانه ای را برطرف می سازند. یک جزء محدود غشایی به روش معمول دارای دو درجه آزادی انتقالی در هر گره می باشد. زمانی که چنین جزئی، با یک جزء صفحه ای که دارای یک درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی دورانی است، ترکیب می گردد، یک جزء پوسته ای تخت با پنج درجه آزادی در هر گره ساخته می شود. در اینجا، سومین درجه

### ۱. مقدمه

الگوهای ریاضی که توانایی پوشانیدن حالت های ممکن برای یک پدیده را دارا باشند، همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. این الگوها را نخست، فلیپا با جای دادن عامل های آزاد در تابعی های نگره کشسانی به دست آورد. این تابعی ها، اصل های تغییرات عاملدار نام گرفتند. اصل های تغییرات عاملدار (PVP)، از یک تابعی با عامل های آزاد تشکیل می شد به گونه ای که معادله های اویلر- لاگرانژ از این عامل ها مستقل باشند [۱]. فلیپا با کاربرد ماتریس عامل های آزاد، فضای پیوسته تابعی ها را با سه عامل آزاد برپا نمود. حرکت در این فضا، برابر با تغییر دادن وزن های معادله میدان به شمار می رفت. با دادن مقدارهای عددی ویژه به عامل های آزاد، تابعی های شناخته شده نگره کشسانی به دست می آمدند. نتیجه رابطه سازی PVP، برای گسسته سازی اجزای محدود، ظاهر شدن عامل های آزاد در سطح جزء بود. این شیوه، خانواده ای از اجزا را به دست می داد. رابطه سازی PVP، به کشف غیر منتظره ای انجامید. پیکربندی اجزایی که با این روش پدید آمدند، به سوی قانون های جبری ویژه ای میل نمودند. این پیکربندی، می توانست بدون بازگشت به PVP، عاملدار

مقاله در تاریخ ۱۳۸۲/۴/۲ دریافت شده و در تاریخ ۱۳۸۳/۱۲/۲۴ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر محمد رضایی پژند، استاد گروه عمران دانشگاه فردوسی مشهد  
mrpajand@yahoo.com

ندا بقیعی، دانشجوی دکترای سازه دانشگاه فردوسی مشهد،  
ne\_ba43@stu-mail.um.ac.ir

نمونه، چن، سن، لانگ و یائو در سال ۲۰۰۴ میلادی، با بهره گرفتن از مختصات سطحی چهارپهلوی غشایی نوینی را به دست آوردند که برای هر شبکه‌بندی دلخواهی پاسخ دقیقی دارد [۱۱]. در سال ۱۹۹۴ نیز، هوجن ماتریس سختی چهارپهلوی غشایی با کارایی بالا را با عامل‌های آزاد رابطه سازی نمود [۱۲].

چهار پهلوی پیشنهادی وی دارای مرتبه کافی نبود. چهارپهلوی پیشنهادی وی در شبکه دلخواه پاسخ مناسبی داشت. از میان روشهای گوناگونی که تا کنون برای آفرینش جزء چهار پهلوی غشایی به کار برده‌اند، روش نیگارد و هوجن با کار پژوهشی این مقاله همخوانی بیشتری دارد. چهارپهلوی پیشنهادی نیگارد به محاسبات دشواری نیاز داشت و زمان و هزینه زیادی می‌گرفت.

در اینجا با الگوهای عاملدار و قالب جزء محدود به آفرینش اجزای چهارپهلوی غشایی با کارایی بالا پرداخته می‌شود. به گونه‌ای که بدون داشتن حالت‌های نادرست و محاسبات پیچیده، از همان دقت جزء نیگارد و هوجن بر خوردار باشد.

## ۲. ویژگی‌های الگوی عاملدار

الگوی جبری عاملدار که قالب نام دارد، بایستی شرط‌های زیر را برآورد [۳]:

۱- سازگاری: آزمون جزء تکین را برای هرگونه هندسه حاکم بر جزء، پاسخگو باشد. این آزمون، گونه دیگری از آزمون وصله است، که برگان و هنسن، پایه گذار آن هستند.

۲- پایداری: ماتریس سختی، شرط‌های مرتبه درست و منفی نبودن را برقرار سازد.

۳- عاملدار کردن: معادله‌های سختی جزء، شامل عامل‌های آزاد باشند.

۴- نامتغیر بودن: از دیدگاه تحلیلی، معادله‌های جزء، نامتغیر باشند. به سخن دیگر، آنها باید نسبت به شماره گره‌ها و انتخاب دستگاه سنجش، مستقل کار کنند. شرط‌های ۱ و ۲، برای اطمینان از همگرایی است. شرط ۳، کارایی بهینه جزء و به همان اندازه، سازگار شدن اجزا را برای نیازهای ویژه فراهم می‌کند. ویژگی ۴، به پیش بینی خطاها و آزمون نشانه، کمک می‌کند.

## ۳. ساختار ماتریس سختی

ماتریس سختی در شیوه قالب‌های جزء محدود، به گونه‌ای است که در آن حالت‌های حرکت جسم سخت و کرنش ثابت، از حالت‌های مرتبه بالا جدا می‌شوند.

به سخن دیگر، ماتریس سختی به بخش پایه و مرتبه بالا تقسیم می‌گردد [۲]:

$$K = K_b + K_h = CLEL^T + bT_h^T ST_h \quad (1)$$

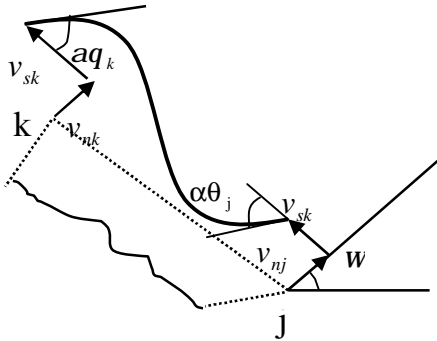
آزادی چرخشی از قلم می‌افتد. در نظر گرفتن این درجه آزادی در هر گوشه، برتری‌های زیر را دارد [۴]:

۱- کارایی جزء را بدون نیاز به گره‌های میانی بهبود می‌بخشد. یادآوری می‌کند، گره‌های میانی برای شبکه بندی و ساختن الگوها در تحلیل‌های غیرخطی و وابسته به زمان، مشکل آفرین هستند.

۲- برای تحلیل پوسته‌ها با شش درجه آزادی در هر گره، مشکلهای برپا نمودن الگو و برنامه نویسی و کارهای عددی رایانه‌ای را برطرف می‌سازد. الگوسازی اتصال‌های میان صفحه‌ای، پوسته‌ها و تیرها، با بهره گرفتن از این راهکار، به سادگی انجام می‌پذیرد. نخستین تلاشها برای آفرینش چنین اجزایی در سال‌های ۱۹۷۵-۱۹۶۴ انجام پذیرفت. اجزای غشایی سنتی با درجه‌های آزادی دورانی، نتیجه‌های رضایت بخشی نداشتند. در این اجزاء، درجه‌های آزادی دورانی به چرخش پهلوه‌ها وابسته می‌شدند. این شیوه، ناسازگاری‌هایی را پدید می‌آورد. روش دیگر، افزودن یک فنر پیچشی در هر گره بود. این راهکار را زینکوویچ به کار برد. به کار بردن فنر پیچشی، سبب ناسازگاری‌هایی در کارهای عددی می‌گردید و روش مناسبی نبود [۵]. به دنبال این تلاش‌ها، آلمن در سال ۱۹۸۴ [۶] و برگان و فلیپا در سال ۱۹۸۵ [۷]، راهکار موفقیت‌آمیزی را پیشنهاد نمودند. برگان و فلیپا با بهره گرفتن از تعریف دوران در مکانیک محیط‌های پیوسته، اجزا با درجه‌های آزادی دورانی را گسترش دادند. این اجزاء، کارایی بسیار بهتری از همتای سنتی خودشان نشان دادند. کارایی مناسب این اجزاء، اندیشه‌ها را به سوی گسترش اجزا با درجه‌های آزادی دورانی سوق داد و سبب برپا شدن اصل‌های تغییرات عاملدار با میدان دورانی به صورت یک میدان مستقل گردید. باید دانست، تا کنون راهکارهای گوناگونی برای گسترش اجزای چهار پهلوی غشایی با درجه‌های آزادی دورانی به کار رفته‌اند. آلمن، با بهره‌گرفتن از جزء‌مثلی پیشنهادی، جزء چهار پهلویی با درجه‌های آزادی دورانی را پیشنهاد داد. جزء چهار پهلوی آلمن، از چهار زیر مثلث تشکیل می‌شود [۸]. از سوی دیگر، نیگارد با بهره‌جویی از روش رابطه سازی آزاد، جزء چهار پهلویی را پدید آورد که در تحلیل‌های غیرخطی نتیجه‌های مناسبی دارد. جزء چهارپهلوی نیگارد، FFQ نام دارد و در برنامه تحلیل غیرخطی FENRIS به کار می‌رود [۴]. چهار پهلوی دیگری را مک نیل در سال ۱۹۸۸، برای درجه‌های آزادی دورانی پیشنهاد نمود [۹]. چهار پهلوی پیشنهادی وی دارای دو حالت کارمایه صفر بود.

با این وجود، در تحلیل‌های عددی نتیجه‌های مطلوبی داشت. به دنبال گسترش روش‌های تغییراتی با میدان دورانی مستقل، آبراهام بگویک، تیلور و ویلسون در سال ۱۹۹۰، جزء چهار پهلویی را پیشنهاد نمودند که برای تحلیل خطی پوسته‌ها بسیار مناسب بود [۱۰]. این جزء، با کاربرد اصل‌های تغییرات هاجزبرزی برپا گردید. بسیاری از اجزای غشایی چهارپهلوی که تاکنون ارائه شده‌اند، در شبکه‌های نامنظم پاسخ درستی ندارند. پژوهشگران برای برطرف کردن این مشکل، روش‌های ابتکاری و ریاضی فراوانی را به کار می‌برند. برای

$$\begin{Bmatrix} d_n \\ d_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{nj} & 0 & a_k y_{qj} & y_{nk} & 0 & a_k y_{qk} \\ 0 & y_{sj} & 0 & 0 & y_{sk} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_j \\ v_{nk} \\ v_{sk} \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (2)$$



شکل ۱. تغییر مکان پهلوی jk

$$\begin{aligned} y_{nk} &= \frac{1}{4}(1+x)^2(2-x) \\ y_{qj} &= \frac{1}{8}(1-x)^2(1+x) \\ y_{nj} &= \frac{1}{4}(1-x)^2(2+x) \\ y_{qk} &= -\frac{1}{8}(1+x)^2(1-x) \\ y_{sk} &= \frac{1}{2}(1+x) \\ y_{sj} &= \frac{1}{2}(1-x) \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه‌های (۳)، مختصات پهلویی هم عامل است که از مقدار (-1) در گره ج ( $s=0$ ) تا مقدار (+1) در گره ک ( $s=l_{jk}$ ) تغییر می‌کند. با رابطه (۴)،  $X$  تعریف می‌شود.

$$X = (2s/l_{jk}) - 1 \quad (4)$$

نیروهای گرهی ناشی از حالت تنش ثابت، با کاربرد ماتریس جایگزین کننده نیرو  $L$  و با رابطه (۵) به دست می‌آیند.

$$t_c = L\bar{S}_c \quad (5)$$

در این رابطه،  $C$  وارون حجم، سطح یا طول جزء،  $b$  ضریب مقیاس مثبت،  $L$  و  $T_{11}$  ماتریس‌های هندسی،  $E$  ماتریس مواد و  $S$  وابسته به رفتار هندسی و ویژگی‌های ماده و در برگیرنده عامل‌های آزاد است. در ادامه، ویژگی‌های ماتریس سختی خواهد آمد.

ماتریس سختی پایه ( $K_b$ ) برای همگرایی و توانایی ترکیب با سایر اجزا برپا می‌گردد. ماتریس سختی پایه، یک ویژگی کلی دارد و برای یک گروه از اجزا با پیکربندی مشخص، ثابت است. این ماتریس، با در نظر گرفتن حالت تنش ثابت و برقراری شرط‌های آزمون جزء تکین (IET) تشکیل می‌شود و از نظر مرتبه، ناکافی است.

هدف از تشکیل ماتریس سختی مرتبه بالا ( $K_h$ )، رسیدن به پایداری و دقت در تحلیل می‌باشد. این ماتریس، کافی نبودن مرتبه ماتریس پایه را جبران می‌کند.

همچنین، دقت پاسخ را در شبکه‌بندی‌های درشت، بالا می‌برد. در این ماتریس، عامل‌های آزاد جا دارند و بستر مناسبی را برای بهینه‌سازی کارکرد جزء فراهم می‌آورند. این ویژگی‌ها در روش‌های نوین اجزای محدود، بسیار با اهمیت است. ماتریس مرتبه بالا در یک گروه از اجزا با پیکربندی مشخص، ثابت نیست و از یک جزء به جزء دیگر تفاوت دارد. یادآوری می‌نماید، این شیوه تجزیه ماتریس سختی، اساس رابطه سازی آزاد و کرنش‌های طبیعی فرضی است.

#### ۴. وارد کردن شرط‌های همگرایی

شرط‌های همگرایی در ماتریس سختی پایه وارد می‌شوند. برای جزء غشایی، ماتریس سختی پایه با جای دادن حالت تنش ثابت در لبه‌های جزء، به صورت نیروهای گرهی سازگار، برپا می‌گردد. این نیروهای گرهی با در نظر گرفتن میدان تغییرمکان مرزی مناسب در پهلوه‌های جزء، محاسبه می‌شوند.

میدان تغییرمکان مرزی را باید به گونه‌ای تعریف کرد که سازگاری داخل جزء را برآورده نماید. در نتیجه، برآیند نیروهای گرهی دوتایی ناشی از حالت تنش ثابت، صفر می‌شود و می‌توان شرط آزمون جزء تکین را برآورده نمود [۷].

میدان تغییر مکان پهلوه‌های جزء ( $d_n, d_s$ )، در دستگاه سنجش ( $n, s$ )، با به کارگیری تابع‌های درجه سه، درونیایی می‌گردد. این دستگاه سنجش، دارای دو بردار عمود بر پهلو و در امتداد پهلوی جزء می‌باشد. برای روشن شدن این نکته، یکی از پهلوه‌های تغییرشکل یافته جزء ( $jk$ )، در شکل (۱) به نمایش در می‌آید.

تغییرمکان‌های پهلوها، با به کارگیری تابع‌های شکل  $Y$  به دست می‌آیند. برای تغییر مکان‌های دورانی گوشه‌ها از عامل  $a_b$  بهره جویی می‌شود.

این عامل، مقیاسی برای تابع‌های شکل است و تغییر مکان‌های عمود بر پهلوها را به دوران‌های گوشه، وابسته می‌کند. زیرنویس  $b$ ، نشانه‌ای برای ماتریس سختی پایه می‌باشد. میدان تغییر مکان پهلوها و تابع‌های شکل، با رابطه‌های (۲) و (۳) به دست می‌آید [۴].

$$K_b = \frac{1}{A} L_0 D_m L_0' + \frac{a}{A} (L_0 D_m L_1' + L_1 D_m L_0') + \frac{a_b^2}{A} L_1 D_m L_1' \quad (12)$$

مقدار بهینه برای عامل  $a_b$  را باید پیدا کرد. این مقدار، همواره بین ۱ تا ۲ تغییر می‌کند. باید دانست، این مقدار به ویژگی‌های ماده وابسته نیست. برای یافتن مقدار بهینه  $a_b$ ، از کمینه کردن کارمایه جزء، بهره جویی می‌شود. با این شیوه، مناسبترین مقدار برای عامل  $a_b$  برابر با 1.5 می‌باشد. با انتخاب مقدار بهینه عامل  $a_b$ ، ماتریس سختی پایه، آزمون جزء تکین را پاسخگو خواهد بود. به سخن دیگر، شرط‌های همگرایی به خودی خود در درایه‌های این ماتریس وارد می‌گردند.

یادآوری می‌کند، راهکار جبری مستقیم که دانشمندانی مانند برگان و هسنن، برای نخستین بار در سال ۱۹۷۵ آن را پایه نهادند، شرط‌های همگرایی را وارد رابطه‌های حاکم می‌نماید و به دانش پیشین از اصل‌های تغییرات و تابع‌های شکل نیازی ندارد [۱۳].

### ۵. پایداری

ویژگی پایداری جزء را می‌توان با بررسی کافی بودن مرتبه ماتریس سختی ارزیابی کرد. این کار تا آغاز سال ۱۹۸۰، کمتر مورد توجه بود. تا کنون راهکارهای گوناگونی، برای رسیدن به مرتبه درست ماتریس سختی به کار برده‌اند.

چنانچه از تابع‌های شکل، برای رابطه سازی بهره‌جویی شود، با افزودن جمله‌های مرتبه بالا، از وابسته شدن سطرها و ستون‌های ماتریس سختی پیشگیری خواهد شد. شیوه دیگر، بهره گرفتن از تابع اولیه‌گیری عددی کاهش یافته است.

باید دانست، کافی نبودن مرتبه ماتریس سختی، سبب پدید آمدن حالت کارمایه صفر و قفل نمودن جزء می‌شود. پژوهشگران تاکنون تلاش نموده‌اند تا چنین حالت‌هایی را در اجزا از میان ببرند.

هنگامی که اجزای با حالت‌های نادرست، برای تحلیل پویا به کار می‌روند، دارای بسامدهای خیلی بالا خواهند بود. این پدیده، نشانگر غیر واقعی بودن رفتار فیزیکی جزء است. پارک و فلگز، برای شناسایی و از میان بردن این حالت‌ها از تحلیل فوریه بهره گرفتند [۱۴].

راهکار آنها در مقایسه با شیوه تابع اولیه‌گیری کاهش یافته و انتخابی، که بسیار زمانبر و پر هزینه است، از برتری خوبی برخوردار بود. باید دانست، شناسایی ریشه حالت‌های نادرست در جزء مشکل است. بیشتر شیوه‌هایی که برای آفرینش جزء به کار می‌روند، از چگونگی رفتار جزء تعبیر فیزیکی مناسبی ندارند. به همین سبب، بروز چنین مشکل‌هایی اجتناب ناپذیرند. برای نمونه، در سال ۱۹۸۸، مک نیل و هاردنر چهارپهلوی غشایی را با دو حالت نادرست ارائه دادند. این پژوهشگران نتوانستند این حالت‌های نادرست را در جزء پیشنهادی از

برای محاسبه ماتریس  $L$  از روش کارمجازی بهره می‌جویند. برای نمونه، کارمجازی در راستای پهلوی  $jk$  ناشی از تغییر مکان مجازی در گره  $k$ ، به صورت رابطه (۶) درمی‌آید:

$$dW = \int_{jk} (dd_n \bar{s}_{nm} + dd_s \bar{s}_{ns}) ds = \quad (6)$$

$$\int_{jk} ((dd_{nk} y_{nk} + adq_j y_{qk}) \bar{s}_{nm} + sd_{sk} y_{sk} \bar{s}_{ns}) ds$$

کارمجازی در راستای پهلوی  $jk$  در دستگاه مختصات کلی، به صورت رابطه (۷) است:

$$dW = du_k t_{uk} + dv_k t_{vk} + dq_k t_{qk} \quad (7)$$

نیروهای گرهی ناشی از حالت تنش ثابت، در راستای هر پهلوی با رابطه‌های (۶) و (۷) به دست می‌آیند. برای محاسبه نیروهای گرهی نهایی، باید بارهای ناشی از حالت تنش ثابت در دو پهلوی مشترک از هر گره را به دست آورد. نیروهای گرهی، با رویهم گذاری نیروها در دسترس قرار می‌گیرند. برای نمونه، بارهای نهایی در گره  $j$ ، به شکل زیر می‌باشند:

$$f_j = L_j \cdot \bar{s}_c \quad (8)$$

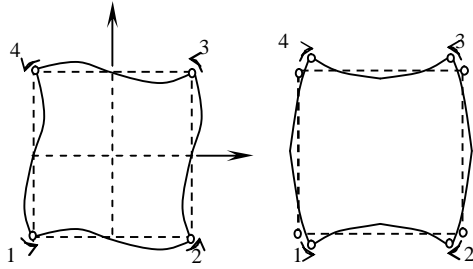
$$L_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_{ki} & 0 & -x_{ki} \\ 0 & -x_{ki} & y_{ki} \\ \frac{a_b}{6} (y_{ij}^2 - y_{kj}^2) & \frac{a_b}{6} (x_{ij}^2 - x_{kj}^2) & \frac{a_b}{3} (x_{kj} y_{kj} - x_{ij} y_{ij}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

ماتریس  $L$  برای سایر گره‌ها، با جابجایی چرخه‌ای  $(i, j, k, l)$  در رابطه (۹) پیدا می‌گردد. ماتریس جایگزین کننده نیرو برای جزء چهار پهلوی غشایی شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$L = \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \\ L_l \end{bmatrix} \quad (10)$$

در ماتریس  $L$ ،  $a_b$  مقیاسی برای وابستگی درجه‌های آزادی دورانی به تغییر مکان‌های پهلوهایی جزء است. اگر  $a_b = 0$  باشد، یک جزء چهار پهلوی با کرنش ثابت به دست می‌آید، که نیروهای گرهی تنها به تغییر مکان‌های انتقالی وابسته هستند. در حقیقت، ماتریس جایگزین کننده نیرو، با تعریف  $a_b$  عاملدار می‌شود:

$$L = L_0 + a_b L_1 \quad (11)$$



شکل ۲. حالت‌های نادرست در جزء چهارپهلوی غشایی [۱۲]

$$\hat{q} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} \right) \quad (15)$$

با به کار بردن ماتریس‌های تصویرکننده، می‌توان تغییر مکان‌های مرتبه بالا را از بردار تغییر مکان‌های جزء، به دست آورد:

$$\tilde{v} = H \cdot v \quad (16)$$

در اینجا،  $H$ ، ماتریس تصویرکننده می‌باشد.

چگونگی انتخاب درایه‌های ماتریس  $H$ ، روی مرتبه ماتریس سختی اثر می‌گذارد. در این مقاله، با بهره جویی از نرم افزار MATHEMATICA و محاسبه فضای صفر ماتریس سختی، بهترین درایه‌ها برای ماتریس  $H$  حساب می‌شود. این ماتریس در پیوست مقاله ارائه خواهد شد. شایان توجه است، آفرینش اجزایی که با بهره گرفتن از رابطه‌های پیشنهادی به دست می‌آیند، دارای هیچگونه حالت نادرستی نمی‌باشند. در حقیقت، الگوی ریاضی که رفتار جزء را تعریف می‌نماید، بسیار به واقعیت نزدیک است و فضای صفر ماتریس سختی دارای سه بردار می‌باشد. در ادامه، به چگونگی برانمودن ماتریس سختی مرتبه بالا پرداخته خواهد شد.

### ۶. ماتریس سختی مرتبه بالا

برای برانمودن ماتریس سختی مرتبه بالا از راهکار کرنش انحرافی طبیعی فرضی (ANDES) بهره جویی می‌شود. این شیوه، گونه دیگری از رابطه سازی کرنش طبیعی فرضی است و از انجام یک جابجایی در اصل کارمایه نهفته ریشه می‌گیرد. درحقیقت، به جای کرنش‌های وابسته به تغییر مکان‌های انتخابی، از میدان کرنش‌های فرضی مستقل در مختصات طبیعی جزء، بهره می‌جویند [۱۵]. در حالت کلی، این کرنش‌ها از تغییر مکان‌ها به دست نمی‌آیند. روش کرنش انحرافی طبیعی فرضی، به روش کرنش طبیعی فرضی برتری دارد. زیرا، شرط‌های همگرایی و آزمون جزء تکین را بر می‌آورد.

کرنش‌های انحرافی طبیعی، به صورت مستقیم و با قرار دادن محل درست کرنش سنج‌ها و خط‌های مرجع حاصل می‌گردند.

برای یک جزء چهارپهلوی، کرنش سنج‌ها را در گوشه‌های جزء قرار می‌دهند. برای هر گره، سه امتداد مرجع در نظر می‌گیرند. این امتدادها، محورهای  $x$  و  $h$  و قطر عبور کننده از دو گره همسایه آن گره‌اند. کرنش‌های هر گره را باید به بردار تغییر مکان‌های مرتبه بالا

میان ببرند. حالت‌های نادرست جزء آنها مانند شکل (۲) هستند [۱۲،۹]:

در حقیقت، این حالت‌ها غیر واقعی هستند و جزء چهارپهلوی غشایی دارای سه حالت حرکت جسم سخت می‌باشد. بنابراین، ماتریس سختی از نظر مرتبه ناکافی است.

مرتبه درست ماتریس سختی با کم کردن شمار حالت‌های حرکت جسم سخت از درجه‌های آزادی به دست می‌آید. بهره گرفتن از راهکار قالب‌های جزء محدود، امکان رسیدن به مرتبه درست سختی را فراهم می‌آورد. در ادامه، چگونگی برانمودن الگوی ریاضی پایدار و فراگیر برای اجزای غشایی چهار پهلوی شرح داده می‌شود.

یک جزء چهار پهلوی غشایی، دارای ۱۲ درجه آزادی و سه حالت حرکت جسم سخت می‌باشد.

بنابراین، مرتبه ماتریس سختی جزء، برابر با ۹ است. ماتریس سختی پایه، سه حالت کرنش ثابت را در بر می‌گیرد. از این رو، برای رسیدن به مرتبه درست ماتریس سختی جزء، ماتریس سختی مرتبه بالا باید دارای مرتبه ۶ باشد.

مرتبه ماتریس مزبور، شمار حالت‌های حرکتی مرتبه بالا را که در رابطه سازی در نظر می‌گیرند، تعیین می‌نماید.

باید دانست، برخی از حالت‌های حرکتی مرتبه بالا و کرنش‌های انحرافی به هم وابسته‌اند. این وابستگی، سبب ناپایدار شدن ماتریس سختی کل جزء می‌گردد. همانگونه که در شکل (۲) نشان داده شد، اجزای چهار پهلوی غشایی دارای دو حالت نادرست هستند. در حالت نخست، همه گره‌های گوشه‌ای به یک میزان، دوران می‌کنند. بنابراین، در دو حالت تغییر مکان‌های مرتبه بالا به یکدیگر وابسته هستند. از این رو، افزون بر شش حالت حرکتی مرتبه بالا، باید دو حالت تغییر مکانی برای پیشگیری از وابستگی آنها را در رابطه سازی‌ها گنجانید. بردار تغییر مکان‌های مرتبه بالا مانند رابطه (۱۳) دارای هشت درایه است:

$$\tilde{v}^T = [q'_1 \quad q'_2 \quad q'_3 \quad q'_4 \quad \bar{q} \quad \tilde{v}_x \quad \tilde{v}_y \quad \hat{q}] \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)،  $q'_i$ ، دوران‌های انحرافی گوشه‌ها و  $\tilde{v}_x$  و  $\tilde{v}_y$  تغییر مکان‌های انتقالی مرتبه بالا هستند. تغییر مکان‌های  $q'_i$  با رابطه (۱۴) به یکدیگر وابسته‌اند. برای پیشگیری از وابستگی آنها، حالت تغییر مکان پیچشی که همه گره‌ها به یک میزان  $\bar{q}$  می‌چرخند، در نظر گرفته می‌شود، که پنجمین درایه از ماتریس تغییر مکان‌های مرتبه بالاست.

از سوی دیگر، تغییر مکان‌های انتقالی مرتبه بالا نیز به یکدیگر وابسته هستند. وابستگی آنها سبب پدید آمدن دومین حالت نادرست در جزء می‌شود. با تعریف دوران  $\hat{q}$  به صورت زیر، چنین حالت نادرستی از میان می‌رود.

$$\sum_{i=1}^4 q'_i = 0 \quad (14)$$

آزادی که برای این قالب نو در نظر گرفته شده‌اند، میان روش‌ها همانی پدید می‌آورند. این عامل‌های آزاد، از یک جزء به جزء دیگر تفاوت دارند. از این رو، می‌توان آن‌ها را به صورت یک نشان برای جزء پنداشت [۲]. ویژگی‌های هر جزء، با مقادیر مشخص برای عامل‌های آزاد به دست می‌آیند. جدول (۱) عامل‌های آزاد قالب پیشنهادی را مشخص می‌کند. عامل آزاد  $a_b$  در ماتریس سختی پایه و عامل‌های آزاد  $a_i$  در ماتریس سختی مرتبه بالا جای دارند. عامل  $b_{sc}$  یک ضریب مقیاس برای عامل‌های آزاد ماتریس سختی مرتبه بالا می‌باشد.

تاکنون، پژوهشگران شمار زیادی از اجزای چهارپهلوی غشایی را برای تحلیل پیشنهاد نموده‌اند. یکی از نکته‌های بسیار جالب این راهکار، وابسته نمودن قالب پیشنهادی با اجزایی است که پژوهشگران دیگر آن‌ها را ساخته‌اند. برای نمونه، نشان جزء چهارپهلوی هوجن، یکی از حالت‌های ویژه این قالب می‌باشد. این ویژگی در جدول (۲) نشان داده شده است. یادآوری می‌شود، برای نخستین بار، هوجن الگوی عاملداری را برای اجزای غشایی چهارپهلوی ارائه نمود [۱۲]. چهارپهلوی پیشنهادی وی، یک حالت نادرست دارد.

همانگونه که آشکار شد، ستون نهم جدول (۲)، برابر با صفر است که نشانگر وجود یک حالت کارمایه صفر می‌باشد. در اجزایی که دو حالت نادرست دارند، افزون بر این، ستون ششم جدول نیز صفر است. می‌توان سایر اجزای چهارپهلوی، مانند جزء آلمن، مک نیل و ... را به این قالب وابسته نمود و نشان جزء را به دست آورد.

وابسته نمود. این وابستگی با ماتریس  $Q$  و به صورت زیر برقرار می‌گردد:

$$e_i = Q_i \cdot \tilde{v} \quad (17)$$

عامل‌های آزاد در ماتریس  $Q_i$  جا دارند. برای اجزای چهارپهلوی غشایی بیست و چهار عامل آزاد در نظر گرفته می‌شود. ماتریس‌های کرنش در دستگاه سنجش دکارتی، با ماتریس‌های تبدیل  $T$ ، رابطه زیر را دارند:

$$Bh_i = T_{ik} \cdot Q_i \quad (18)$$

ماتریس کرنش - تغییر مکان، برای جزء، با به کار گرفتن تابع‌های درونیاب دوخطی و ماتریس‌های  $Bh_i$  برپا می‌شود [۱۲]:

$$Bh(x, h) = \frac{1}{4}(1-x)(1-h)Bh_i + \frac{1}{4}(1+x)(1-h)Bh_j + \frac{1}{4}(1+x)(1+h)Bh_k + \frac{1}{4}(1-x)(1+h)Bh_l \quad (19)$$

ماتریس سختی مرتبه بالای جزء به قرار زیر است:

$$K_h = \int_A H^T \cdot Bh^T \cdot D_m \cdot Bh \cdot H \cdot dA \quad (20)$$

## ۷. وابسته کردن الگوی پیشنهادی با روش‌های پیشین

با شیوه کرنش انحرافی طبیعی فرضی، یک قالب کارآ و فراگیر که همه حالت‌های حرکتی جسم را می‌پوشاند، برپا گردید. عامل‌های

جدول ۱. عامل‌های آزاد قالب پیشنهادی

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	
$\alpha_b$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$a_{15}$	$a_{16}$	$b_{sc}$
	$a_{17}$	$a_{18}$	$a_{19}$	$a_{20}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	

جدول ۲. نشان جزء چهار پهلوی هوجن

	1	-1	-1	1	1	6	0	0	/10
$\alpha_b$	-1	-1	1	1	-1	0	-6	0	
	0	6	0	-6	0	0	0	0	

رابطه‌های نگره کشسانی برای میدان خمش خالص هستند. این شرط‌ها، همان آزمون وصله مرتبه بالاست که بر درایه‌های ماتریس سختی وارد می‌گردد.

سرانجام، عامل‌های آزاد  $a_b, a_5, a_8$ ، باقی می‌مانند. برای دست یافتن به مقدار بهینه عامل آزاد  $a_b$  در ماتریس سختی پایه از کمینه کردن کارمایه بهره‌جویی می‌شود.

## ۸. مقدارهای عددی عامل‌های آزاد

از الگوی عامل‌داری که برپا گردید می‌توان برای آفرینش جزء بهینه بهره گرفت. با به کار بردن فرآیند بهینه سازی گام به گام، این کار انجام خواهد شد. این شیوه، شمار عامل‌های آزاد را کاهش می‌دهد. دسته‌ای از محدودیت‌های بهینه سازی با شرط نامتغیر بودن ماتریس سختی به مختصات به دست می‌آیند. دسته دوم وابسته به

اینک، این عامل‌های آزاد باید به گونه‌ای تعیین شوند که کرنش‌های به دست آمده از ماتریس کرنشهای انحرافی، با کرنش‌های حاصل از رابطه‌های نگره کشسانی برابر باشد. نخست، کرنش‌های ناشی از میدان خمش خالص، مورد بررسی قرار می‌گیرند. میدان تغییرمکان برای خمش خالص، به صورت زیر است:

$$q = kx, u_y = \frac{1}{2}k(x^2 + ny^2), u_x = -kxy \quad (23)$$

$$k = \frac{M}{EI} \quad (24)$$

باید آگاه بود، که برای صفحه‌های نازک، در حالت خمش خالص، نگره دقیق با نگره مقدماتی، تفاوتی ندارد. از این رو، نیازی به تابع‌های ایری برای میدان تغییرمکان نیست.

تنها در حالت‌های ویژه‌ای مانند اثرهای سن ونان و پدیده شکست، بایستی از رابطه‌های دقیق بهره گرفت. کرنش‌های به دست آمده از این میدان تغییرمکان در زیر آمده‌اند:

$$g_{xy} = 0, e_y = kny, e_x = -ky \quad (25)$$

برابری کرنش‌های حاصل از رابطه‌های اجزای محدود با کرنش‌های رابطه (۲۵)، معادله‌های شرط دیگری را به دست می‌دهد:

$$a_6 = \frac{1}{2} - a_1, a_{18} = -a_6 - a_1 \quad (26)$$

رابطه میان عامل‌های آزاد  $a_5$  و  $a_{13}$ ، با توجه به کرنش‌های ناشی از میدان پیچشی تعیین می‌گردد. بدین گونه، معادله‌های شرط برای عامل‌های آزاد  $a_5$  و  $a_{13}$  حاصل می‌شود:

$$a_5 = -a_{13} \quad (27)$$

عامل‌های  $a_8$  و  $a_{16}$ ، وابسته به دوران‌های ناشی از انتقال‌های مرتبه بالا هستند. رابطه میان آنها به صورت زیر است:

$$a_8 = -a_{16} \quad (28)$$

اینک، با در نظر گرفتن قیدهای مورد بحث، ماتریس سختی جزء، به شکل زیر خواهد بود:

$$K = K_b(a_b) + K_h(a_1, a_5, a_8) \quad (29)$$

مرحله دیگر، یافتن مقدارهای بهینه برای این عامل‌های آزاد است. در این مرحله، عامل‌های آزاد با یکدیگر رابطه خطی ندارند. در ادامه به چگونگی تعیین این عامل‌های آزاد پرداخته می‌شود.

### ۸-۳. کمینه کردن کارمایه

همانگونه که پیشتر آمد، عامل  $a_b$  در ماتریس سختی پایه جا دارد و وابسته به شرط‌های همگرایی است. بنابراین، مقدارهای  $a_b$  روی کارایی جزء، تأثیر زیادی دارد.

باید دانست، عامل‌های آزاد  $a_1, a_5, a_8$ ، دقت جزء را در تحلیل بالا می‌برند. چنانچه این عامل‌ها مقدار صفر به خود بگیرند، ماتریس سختی جزء ناپایدار خواهد شد.

از این رو، این عامل‌ها دارای شرط پایداری نیز هستند. در ادامه این روش گام به گام شرح داده می‌شود.

### ۸-۱. نامتغیر بودن به مختصات

ماتریس سختی جزء باید از دیدگاه ناظر، نسبت به دستگاه مختصات، نامتغیر باشد. از این رو، بایستی رابطه میان عامل‌های آزاد این شرط را برقرار نماید.

چنانچه، هندسه جزء، متقارن باشد، این تقارن باید در معادله‌های سختی وارد گردد. برای نمونه، در یک جزء مربعی، باید شرط برابری میان برخی از درایه‌های ماتریس کرنش - تغییرمکان در نظر گرفته شود. معادله‌های قید نامتغیر بودن به مختصات، برای ماتریس سختی عاملدار پیشنهادی در زیر آمده‌اند:

$$\begin{aligned} a_4 &= -a_{10}, a_3 = -a_{11}, a_2 = -a_{12} \\ a_4 &= a_1, a_3 = a_2, a_2 = -a_1 \\ a_{22} &= a_{23}, a_{18} = -a_{20}, a_{17} = -a_{19} \\ a_{14} &= a_{17}, a_1 = -a_9, a_6 = a_{15} \end{aligned} \quad (21)$$

با کم کردن شمار معادله‌های شرط از عامل‌های آزاد قالب، دوازده عامل آزاد در ماتریس سختی مرتبه بالا باقی می‌ماند. افزون بر آنها، عامل آزاد  $a_b$  در ماتریس سختی پایه جا دارد.

بنابراین نخستین خانواده از اجزا، با سیزده عامل آزاد، پدید می‌آید که نسبت به دستگاه مختصات، نامتغیر هستند.

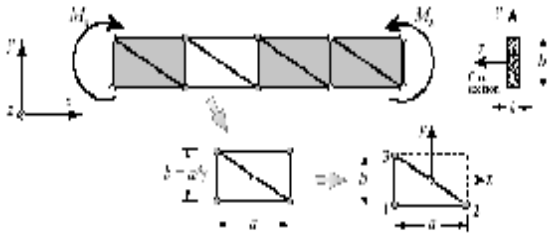
### ۸-۲. رابطه‌های کرنش - تغییرمکان

عامل‌های آزاد  $a_i$ ، در ماتریس کرنش‌های انحرافی جا دارند. کرنشهایی که با بهره گرفتن از این ماتریس محاسبه می‌شوند، بایستی با رابطه‌های دقیق نگره کشسانی مقایسه شوند.

این مقایسه، قیدهای دیگری را برای عامل‌های آزاد ایجاد می‌نماید. با توجه به شیوه کرنش انحرافی طبیعی فرضی و امتدادهایی که برای خط‌های مرجع در نظر گرفته می‌شود، پاره‌ای از این عامل‌های آزاد، مقدار صفر به خود می‌گیرند:

$$a_7 = a_{17} = a_{21} = a_{22} = a_{24} = 0 \quad (22)$$

این دسته از اجزا، دارای هشت عامل آزاد می‌باشند. در ماتریس کرنش‌های انحرافی، هفت عامل آزاد جا دارد. عامل‌های آزاد  $a_1$  و  $a_{18}$  و  $a_6$  وابسته به میدان خمش خالص و  $a_{13}$  و  $a_{16}$  و  $a_8$  و  $a_5$ ، وابسته به میدان انحرافی دورانی هستند.



شکل ۳. آزمون خمشی با لنگر ثابت در صفحه [۱۶]

در اینجا، برای اجزای چهارپهلوی غشایی از همین آزمون بهره گرفته می‌شود. به دلیل پیچیدگی رابطه‌ها، محاسبات ماتریس سختی با برنامه جبری رایانه‌ای ATHEMATICA انجام می‌پذیرد. رابطه‌های میدان تغییرمکان آزمایشی برای خمش خالص به صورت رابطه‌های (۲۳) و (۲۴) می‌باشد. اگر نسبت‌های هندسی را با  $r$  و کارمایه را با  $U$  نشان دهند، هنگامی که  $r \rightarrow \infty$  یا  $r \rightarrow 0$ ، کارمایه جزء نباید به سمت مقدارهای خیلی بزرگ ( $\infty$ ) و یا مقدارهای خیلی کوچک (۰) میل کند.

در این حالت، رابطه ریاضی میان عامل‌های آزاد خطی نیست و برای آن نمی‌توان شکل بسته ریاضی در نظر گرفت. برای این که جزء چهارپهلوی پیشنهادی، نسبت به شبکه بندی حساس نباشد، عامل‌های آزاد  $a_1, a_2, a_3$ ، بایستی مقدارهای کوچکی داشته باشند. این مقدارها به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$a_5 = a_8 = 0.15, \quad a_1 = 0.1 \quad (۳۳)$$

جزء چهارپهلوی پیشنهادی، در شبکه‌های نامنظم، سخت تر و یا نرمتر از مقدار واقعی نخواهد شد. این جزء، نسبت به شیوه تابع اولیه گیری عددی حساس نیست. باید افزود، تاکنون برای بهبود دقت و ریشه کن کردن پدیده قفل شدگی راهکارهای بسیاری پیشنهاد شده‌اند.

برای نمونه می‌توان راهکارهایی را مانند تعریف میدان‌های تغییرمکان زنگوله‌ای، افزودن درجات آزادی داخلی، اجزای تنش پیوندی، اجزای نیمه سازگار و روش‌های کرنش فرضی را نام برد. آبرونز و همکارانش آزمون وصله را برای اجزای ناسازگار ارائه دادند و مک نیل آزمون‌های نشانه‌ای ویژه‌ای را پیشنهاد نمود [۱۱].

در روش قالب‌های جزء محدود، شرط‌های همگرایی و آزمون وصله با رابطه سازی ماتریس سختی پایه برقرار می‌شود و مقدارهای عددی عامل‌های آزاد از میدان تغییرمکان خمش خالص به دست می‌آیند. این ویژگی‌ها در هیچ یک از روش‌های پیشنهادی دیگر وجود ندارد. وجود عامل‌های آزاد بستر مناسبی را برای آفرینش جزء با کارایی دلخواه پدید می‌آورند.

### ۹. نمونه‌های عددی

برای بررسی کارایی جزء پیشنهادی، از آزمون‌های نشانه‌ای بهره گرفته می‌شود. این آزمون‌ها، مسأله‌های استاندارد حالت تنش

برای یافتن مناسبترین مقدار عامل  $a_b$ ، باید از کمینه کردن کارمایه در جزء بهره گرفت [۴،۲]. با رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) کارمایه کرنشی وابسته به ماتریس سختی پایه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U_b = \frac{1}{2} v^t K_b v = U_{b00} + a_b U_{b01} + a_b^2 U_{b11} \quad (۳۰)$$

چنانچه  $U_{b11} > 0$  باشد، کارمایه کرنشی در ازای مقدار زیر برای  $a_b$ ، کمینه خواهد شد:

$$a_b = -U_{b01} / 2U_{b11} \quad (۳۱)$$

مقدار  $a_b$ ، همواره بین یک و دو، تغییر می‌نماید. بنابراین، مقدارهای میانگین  $a_b = 1.5$  برای ماتریس سختی پایه در نظر گرفته می‌شود.

### ۴-۸. مقدار بهینه عامل‌های آزاد در شبکه منظم

عامل‌های آزاد  $a_1, a_5, a_8$ ، دقت جزء را در تحلیل بالا می‌برند. برای این عامل‌ها نیز بایستی مقادیر بین یک تا دو برای شبکه‌های منظم برگزید. چنانچه این عامل‌ها مقدار صفر به خود بگیرند، ماتریس سختی جزء ناپایدار خواهد شد.

از این رو، این عامل‌ها دارای شرط پایداری نیز هستند. با حل مسأله‌های نمونه‌ای می‌توان تأثیر مقدارهای عامل‌های آزاد را بررسی نمود. در اینجا از نرم افزار MATHEMATICA بهره گرفته شده است. مقدارهای پیشنهادی برای عامل‌های مزبور، در رابطه (۳۲) آمده است.

$$a_1 = 1, \quad a_5 = a_8 = 1.2 \quad (۳۲)$$

با این مقدارها، تیر طره‌ای با برش در انتها و صفحه مربعی تحلیل شده‌اند.

### ۵-۸. مقدار بهینه عامل‌های آزاد در شبکه نامنظم

یکی از ویژگی‌های مورد انتظار جزء، حساس نبودن به هندسه شبکه است. برای رسیدن به این ویژگی، بایست رابطه‌های منطقی میان عامل‌های آزاد برقرار کرد. به دست آوردن این رابطه‌ها از نظر تحلیلی کار دشواری است.

ماتریس سختی پیشنهادی آزمون جزء تکین را پاسخگو است. این آزمون، گونه دیگری از آزمون وصله می‌باشد.

از این رو، هر معیار بهینگی بایستی بر پایه آزمون‌های وصله مرتبه بالاتر باشد. این روند به آزمون‌های خمشی جزء به صورت نسبت‌های کارمایه می‌انجامد [۱۶،۳].

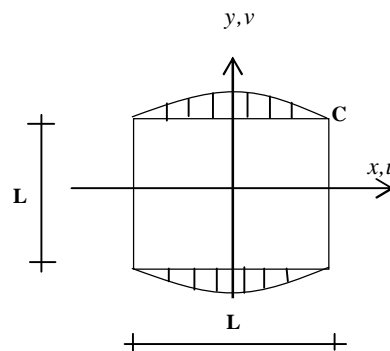
آزمون خمشی برای هر نسبت هندسی  $r$ ، در الگوسازی سازه‌های نازک و ترکیبی هوا - فضا اهمیت دارد. جزء بهینه خمشی بایستی برای نسبت‌های بسیار بالا و پایین  $r$  در تحلیل قفل ننماید. آزمون خمشی برای اجزای مثلثی در شکل ۳ می‌آید [۱۶]:



## ۹-۱. صفحه مربعی با کشش در لبه‌ها

اینک، صفحه مربع شکل همسانگرد با نسبت پواسون  $\nu = 0.3$  و ضریب کشسانی  $E = 1000$  تحلیل می‌شود. این مقادیر عددی یکا ندارند. کشش در لبه‌های این صفحه در رابطه (۳۴) آمده است [۸]. شکل ۴ این صفحه را با نیروهای لبه‌ای نشان می‌دهد. تغییر مکان‌های صفحه در گره C، با جزء پیشنهادی محاسبه و در جدول ۳ درج شده‌اند. در این جدول، نماد ALL-T نشانگر مثلث پیشنهادی آلمن و ALL-Q نشاندهنده چهارپهلوی پیشنهادی آلمن است.

$$s_y \Big|_{y=\pm(L/2)} = \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] s_0 \quad (34)$$



شکل ۴. صفحه مربعی با نیروی کششی در دو انتها

## جدول ۳. تغییر مکان‌های صفحه مربعی با کشش در لبه‌ها

شکل جزء	نام اجزا	$\frac{10^2 E u_C}{(1-\nu^2)\sigma_0 L}$		$\frac{10 E v_C}{(1-\nu^2)\sigma_0 L}$	
		شبه ۱×۱	شبه ۲×۲	شبه ۱×۱	شبه ۲×۲
مثلثی	ALL-T	2.4235	1.5751	1.4908	1.3286
چهارپهلوی	ALL-Q	1.455	1.2679	1.8657	1.4803
چهارپهلوی	پیشنهادی	1.545	1.3132	1.3234	1.5531

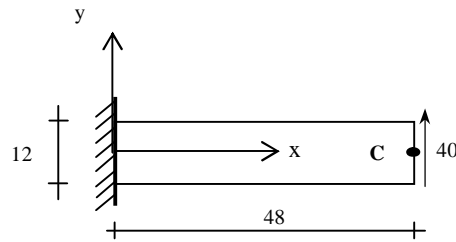
پاسخ‌های تحلیل برای اجزای پیشنهادی در جدول (۴) آمده‌اند. این نتیجه‌ها با اجزای پیشنهادی آلمن و اجزای پیشنهادی برگان و فلیپا مقایسه شده‌اند. اجزای آلمن نماد ALL را دارند. در هر یک از اجزای پیشنهادی آلمن، با تعداد نقطه‌های متفاوتی تابع اولیه‌گیری عددی انجام شده است. آشکار می‌باشد، اجزای آلمن نسبت به چگونگی تابع اولیه‌گیری عددی و شبکه‌بندی، حساس هستند. نماد FF، نشاندهنده جزء مثلثی غشایی پیشنهادی برگان و فلیپا و EFFAND همان جزء مثلثی غشایی فلیپا و میلیتو است. برگان و فلیپا از رابطه سازی آزاد [۷] و فلیپا و میلیتو از روش کرنش انحرافی طبیعی فرضی بهره جستند [۱۵]. در جدول ۴، تغییر مکان دقیق سر تیر برابر با صد است.

صفحه‌ای هستند و دارای یکا نمی‌باشند. جزء چهارپهلوی پیشنهادی، با سه گونه جزء مثلثی مقایسه خواهد شد. این اجزای مثلثی غشایی، دارای درجه‌های آزادی دورانی در گوشه‌ها هستند. نمادهای ALL, FF و EFFAND نشانگر اجزای مثلثی مزبور می‌باشند. ALL، نمایانگر جزء مثلثی پیشنهادی آلمن، در سال ۱۹۸۸ و FF نشاندهنده جزء مثلثی برگان و فلیپا در سال ۱۹۸۵ است. EFFAND را فلیپا و میلیتو پیشنهاد نمودند. باید دانست، برگان و فلیپا برای آفرینش اجزای مثلثی از رابطه سازی آزاد و فلیپا و میلیتو از رابطه سازی کرنش انحرافی فرضی بهره گرفتند. شایان توجه است، اجزایی که بر اساس رابطه سازی آزاد برپا می‌شوند، هنگام تحلیل زمان بیشتری می‌گیرند.

## ۹-۲. تیر طره‌ای با نیروی برشی

در اینجا، مانند شکل ۵، یک تیر طره‌ای با نسبت درازا به پهنای چهار به یک، تحلیل می‌شود. ضخامت تیر، یک است. این تیر، در یک سر گیردار می‌باشد و در سر دیگر، نیروی برشی  $P = 40$ ، اثر می‌نماید. ضریب کشسانی  $E = 30000$  و نسبت پواسون  $\nu = 0.25$  است. یاد آوری می‌شود، مقادیر عددی در این نمونه با هم سازگارند و دارای یکا نمی‌باشند. تغییر مکان دقیق تیر با رابطه‌های نگره کشسانی، مقدار زیر را دارد [۷]:

$$v_C = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{(4+5\nu)PL}{2EH} = 0.35583 \quad (35)$$

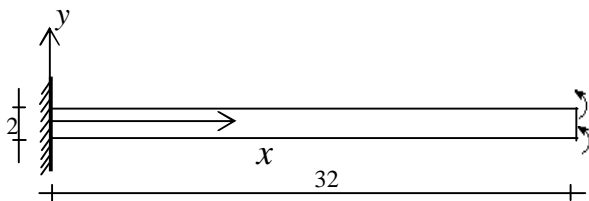


شکل ۵. تیر طره‌ای با نیروی برشی در انتها

جدول ۴. تغییر مکان سر تیر طره‌ای با برش

شکل جزء	نام جزء	شبكة 4×2	شبكة 2×2
	ALL-3i	82.27	42.53
	ALL-3m	54.23	12.39
	ALL-7i	70.71	26.16
	EFFAND	96.68	92.24
	FF	94.27	89.26
چهارپهلوی	پیشنهادی	91.32	94.66
	دقیق	100	100

گرفتند، پاسخهای دقیقی به دست می‌آید. یادآوری می‌کند که جزء پیشنهادی به محاسبات پیچیده و زمانبر نیازی ندارد.



شکل ۶. تیر طره‌ای با لنگر

نتیجه‌های تحلیل در جدول ۵ آمده‌اند. همانگونه که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، اجزای مثلثی که با روش رابطه سازی آزاد و رابطه سازی کرنش انحرافی فرضی برپا شده‌اند و چهارپهلوی پیشنهادی، نتیجه‌هایی در محدوده دقت مهندسی می‌دهند. دقت اجزای مثلثی پیشنهادی آلمن، با سه شیوه متفاوت تابع اولیه‌گیری، به صورت قابل ملاحظه‌ای پایین می‌آید. بنابراین، با چنین اجزایی، هر شبکه دلخواهی را نمی‌توان تحلیل نمود.

۹-۵. تیر طره‌ای با لنگر

در این نمونه، یک تیر طره‌ای لاغر که در شکل ۶ نشان داده شده، با لنگر انتهایی  $M = 100$  تحلیل می‌شود. ضریب کشسانی این تیر،  $E = 768$  و نسبت پواسون  $\nu = 0.25$  می‌باشد. هیچکدام از این مقادارها دارای یکا نیستند. ضخامت تیر یک است و شرطهای تکیه گاهی آن به صورت هستند [۱۷]:

$$q_{x1} = q_{x2} = q_{x3} = 0, \quad v_{y2} = 0 \quad (36)$$

$$v_{x1} = v_{x2} = v_{x3} = 0$$

تغییر مکان دقیق در سر آزاد تیر، از رابطه زیر به دست می‌آید:

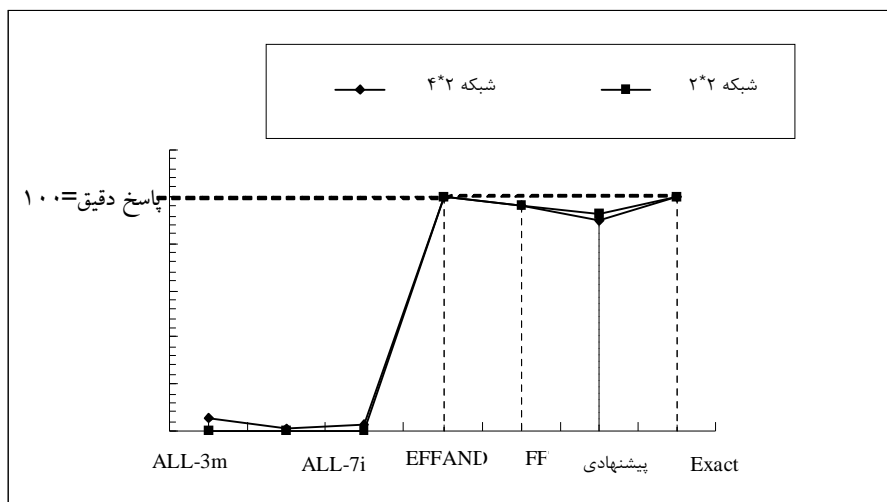
$$d_{tip} = \frac{ML^2}{2EI} \quad (37)$$

برای تحلیل تیر طره‌ای لاغر، از اجزای مستطیلی باریک بهره گرفته می‌شود. نسبت هندسی این اجزا در شبکه  $2 \times 2$ ،  $r = \frac{1}{16}$  می‌باشد.

انتظار می‌رود که این اجزای بسیار باریک و با این نسبت هندسی در تحلیل قفل کنند. ولی چنین حالتی رخ نمی‌دهد. با در نظر گرفتن مقدار بهینه برای عامل‌های آزاد که در بخش (۸-۵) مورد بحث قرار

جدول ۵. تغییر مکان سر تیر طره‌ای با لنگر

شکل جزء	نام جزء	شبكة 4×2	شبكة 2×2
	ALL-3i	5.42	0.39
	ALL-3m	.70	0.03
	ALL-7i	2.47	0.16
	EFFAND	99.96	100.07
	FF	96.34	96.27
چهارپهلوی	پیشنهادی	89.77	92.789
	دقیق	100	100



شکل ۷. نتیجه‌های تحلیل عددی نمونه (۳-۹)

ed. by . B. Nayroles, J. Etay and D. Renouard, ENS Grenoble, Grenoble, France, pp. 1– 42, 1994; Expanded Version in Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol. 113, 1994, pp. 109–139.

[2] Felippa, C.A., “Recent Advances in Finite Element Templates”, Chapter 4 in Computational Mechanics for the Twenty– First Century, ed. by B. H. V. Topping, Saxe–Coburn Publications, Edinburgh, 2000, pp. 71–98.

[3] Felippa, C.A., and Militello, C., “Construction of Optimal 3–node Plate Bending Elements by Templates”, Computational Mechanics Journal, Vol. 24/1, 1999, pp. 1–3.

[4] Alvin, K., Fuente, H.M., Haugen, B., and Felippa, C.A., “Membrane Triangles with Corner Drilling Freedoms: I. The EFF Element”, Finite Elem. Anal. Design, Vol. 12, 1992, pp. 163–187.

[5] Hughes, T.J.R., “Numerical Assessment of Some Membrane Element with Drilling Degree of Freedoms”, Computers & Structures, Vol. 55, 1995, pp. 297–314.

[6] Allman, D.J., “A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotation for Plate Elasticity Analysis”, Computer & Structures, Vol. 19, 1984, pp. 1–8.

[7] Bergan, P.G., and Felippa, C.A., “A Triangular Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom”, Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 50, 1985, pp. 25–69.

[8] Allman, D.J., “A Quadriateral Finite Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis”, Int. J. For. Num. Meth. Eng., Vol. 26, 1988, pp. 717–730.

[9] Macneal, R.H., and Harder, R.L., “A Refined Four–Noded Membrane Element with Rotational D.O.F.”, Computers & Structures, Vol. 28, 1988, pp. 75–84.

[10] Ibrahimbegovic, A., Taylor, R.L., and Wilson, E.L., “A Robust Quadriateral Membrane Finite Element with Drilling

### ۱۰. نتیجه گیری

با بهره گرفتن از روند معمولی آفرینش جزء، نمی‌توان میدان گسترده‌ای از الگوهای جزء محدود را مورد بررسی قرار داد. زیرا، روش‌های معمولی بر اساس یک فرض انتخابی از اصل تغییرات و تابع‌های شکل هستند. بنابراین، برای طرح اجزا با رفتار فیزیکی مشخص، کارآیی کافی ندارند.

در این مقاله، به چگونگی برپا نمودن الگوهای ریاضی فراگیر برای اجزای چهار پهلوی غشایی پرداخته شد. همچنین، برای پیشگیری از حالت‌های نادرست در جزء، رابطه سازی انجام شد.

این راهکار به روش‌های زمانبر و پرهزینه‌ای مانند تابع اولیه‌گیری کاهش یافته و انتخابی برتری دارد. افزون بر این، ریشه به وجود آمدن چنین حالت‌هایی را به آسانی می‌توان یافت. اجزایی که با بهره گرفتن از این الگوی ریاضی پدید می‌آیند در تحلیل‌ها قفل نمی‌نمایند و دارای کارایی بهتری هستند. برای آفرینش جزء با قالب پیشنهادی، با وجود شمار زیاد عامل‌های آزاد، از برنامه‌های جبری رایانه‌ای بهره جویی گردید. با جای گرفتن عامل‌های آزاد در رابطه‌ها، بستر گسترده‌ای از اندیشه‌های پیشین و نوین پدید می‌آید. این الگو را می‌توان رابطه سازی جامعی پنداشت که اندیشه سایر پژوهشگران را در زمینه اجزای چهارپهلوی غشایی با درجه‌های آزادی دورانی در بر می‌گیرد. با به کار بردن فرآیند بهینه سازی گام به گام، مقدارهای بهینه برای عامل‌های آزاد پیدا شدند و کارآیی جزء غشایی با نمونه‌های عددی مورد بررسی قرار گرفت.

### ۱۱. مراجع

[1] Felippa, C.A., “A Survey of Parametrized Variational Principles and Applications to Computational Mechanics”, Invited Chapter in Science and Perspectives in Mechanics,

$$u = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot h + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot x, \quad t = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot x$$

$$x_{ik} = x_i - x_k, \quad x_{jl} = x_j - x_l$$

$$y_{ik} = y_i - y_k, \quad y_{jl} = y_j - y_l$$

$$f = 16|J|$$

2. ماتریس تبدیل (T):

$$T_{ik}^{-1} = \begin{bmatrix} S_{x_x}^2 & S_{x_y}^2 & S_{x_x} S_{x_y} \\ S_{h_x}^2 & S_{h_y}^2 & S_{h_x} S_{h_y} \\ S_{j_l x}^2 & S_{j_l y}^2 & S_{j_l x} S_{j_l y} \end{bmatrix}$$

$$T_{jl}^{-1} = \begin{bmatrix} S_{x_x}^2 & S_{x_y}^2 & S_{x_x} S_{x_y} \\ S_{h_x}^2 & S_{h_y}^2 & S_{h_x} S_{h_y} \\ S_{i_k x}^2 & S_{i_k y}^2 & S_{i_k x} S_{i_k y} \end{bmatrix}$$

در این رابطه‌ها،  $s_x$  و  $s_\eta$  بردارهای یکه در امتدادهای  $\xi$  و  $\eta$  هستند. بردارهای یکه  $s_{ik}$  و  $s_{jl}$  در راستای قطرهای  $ij$  و  $kl$  می‌باشند و رابطه‌های زیر برقرار است:

$$s_x = \begin{Bmatrix} S_{x_x} \\ S_{x_y} \end{Bmatrix}, \quad s_h = \begin{Bmatrix} S_{h_x} \\ S_{h_y} \end{Bmatrix}, \quad s_{ik} = \begin{Bmatrix} S_{i_k x} \\ S_{i_k y} \end{Bmatrix}, \quad s_{jl} = \begin{Bmatrix} S_{j_l x} \\ S_{j_l y} \end{Bmatrix}$$

"Degrees of Freedom", Int. J. for Num. Meth. Eng., Vol. 30, 1990, pp. 445 – 457.

[11] Chen, X.M., Cen, S., Long, Y.Q., and Yao, Z.H., "Membrane Elements Insensitive to Distortion Using the Quadrilateral Area Coordinate Method", Computers & Structures, Vol. 82, 2004, pp. 35-54.

[12] Haugen, B., *Buckling, and Stability Problems for Thin Shell Structures Using High-Performance Finite Elements*, Ph.D. Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering Science, University of Colorado, Boulder, CO, 1994.

[13] Bergan, P.G., and Hanssen, L., "A New Approach for Driving 'Good' Finite Elements", in the Mathematics of Finite Elements and Applications, ed. by J. R. Whiteman, Academic Press, Vol. II, London, 1975, pp. 483-497.

[14] Park, K.C., and Flagg, D.L., "A Fourier Analysis of Spurious Mechanisms and Locking in the Finite Element Method", Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 46, 1984, pp. 65-81.

[15] Felippa, C.A., and Militello, C., "A Variational Justification of the Assumed Natural Strain Formulation of Finite Elements: I. Variational Principles", Computers & Structures, Vol. 34, 1990, pp. 431-438.

[16] Felippa, C.A., "Optimal Triangular Membrane Elements with Drilling Freedoms," Proc. First MIT Conf. Computational Solid and Fluid Mechanics, Elsevier, 2001.

[17] Felippa, C.A., and Alexander, S., "Membrane Triangles with Corner Drilling Freedoms: III. Implementation and Performance Evaluation", Finite Elem. Anal. Design, Vol. 12, 1992, pp. 203-239.

### پیوست

1. ماتریس تصویرکننده تغییرمکان‌های مرتبه بالا (H):

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .75 & -.25 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.25 & .75 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 & .75 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 & -.25 & .75 \\ \frac{x_j}{f} & \frac{x_k}{f} & \frac{x_{jl}}{f} & \frac{x_{ki}}{f} & \frac{y_j}{f} & \frac{y_{ik}}{f} & \frac{y_{jl}}{f} & \frac{y_{ki}}{f} & .25 & .25 & .25 & .25 \\ xh & -xh & xh & -xh & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & xh & -xh & xh & -xh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & t & -t & t & u & -u & u & -u & .25 & .25 & .25 & .25 \end{bmatrix}$$