نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولیـــد دانشگاه علم و صنعت ایران
جلد ۱۹، شماره ۴، زمستان ۱۳۸۷، صفحه ۲۷-۱۷

THE ROLE OF RANDOM NUMBERS IN SIMULATION AND PROVIDING A HYBRID RANDOM NUMBER GENERATOR

Abdollah Aghaie & Mahdi Zahedi Shoolami
Industrial Engineering Department, Kntoosi University, AAghaie@kntu.ac.ir

Abstract: Analyzing different issues of most systems, particularly their design, implementation, and development, requires some sort of techniques which are capable of studying their special conditions in stochastic states. Simulation is regarded as one of the most efficient methods for this purpose in the area of engineering, systems, and management. Studying and analyzing a system under special, critical, and stochastic conditions is one of the capabilities and advantages of simulation. This unique feature of simulation strongly depends on random numbers. Some of the simulation scientists believe that random numbers act as nuts and bolts of simulation. The more random numbers satisfy randomness criteria, the more effective the model and simulation results would be. In this paper, initially, different random number streams- in a more accurate term pseudo random number streams- will be studied. Then, some of the common and simple methods of random number generation will be elaborated. Obviously, the results show that random numbers which are generated by these simple methods suffer from dispersion. Ultimately we attempt to introduce an enhanced hybrid random number generation method based on a combination of these common methods.

نقش اعداد تصادفی در شبیه سازی و بررسی تحلیلی الگوریتم‌های تولید اعداد تصادفی و ارائه روش تلفیقی جدید

عـبدالـه آقـائـی و مهدی زاهدی شولمی

چکیده: در بسیاری از سیستمها برای تجزیه و تحلیل مسائل مختلف آن و یا اصولاً جهت طراحی، استقرار و توسعه سیستمها، تکنیک‌هایی لازم است که بتوانند حالتها و شرایط خاص و حالات تصادفی سیستم را نیز مورد بررسی و مطالعه قرار دهند. از جمله این تکنیکها و روشها در حوزه مهندسی، سیستمها و مدیریت، شبیه سازی بعنوان یکی از کارآمدترین تکنیکهای شناخته شده است.

از جمله توانمندیها و قابلیتهای شبیه سازی این است که سیستم مورد مطالعه را تحت شرایط خاص و بحرانی و احتمالی که سیستم با آن مواجه خواهد بود، بررسی و تجزیه و تحلیل می‌نماید. این قابلیت منحصر بفرد شبیه‌سازی وابستگی شدیدی به اعداد تصادفی دارد. بعبارت دیگر پایه اصلی توانمندی شبیه‌سازی بر اعداد تصادفی استوار است.

بنا به عقیده برخی از دانشمندان علم شبیه‌سازی، اعداد تصادفی در حکم پیچ و مهره‌های شبیه‌سازی مطرح هستند. از سوی دیگر هر چه تولید اعداد تصادفی با معیارهای تصادفی بودن سازگارتر باشند، بالطبع تاثیر بسزایی در جهت اثربخشی مدلسازی و تجزیه و تحلیل نتایج شبیه‌سازی خواهد داشت. در این مقاله ابتدا دنباله‌های مختلف اعداد تصادفی و یا بعبارت صحیح تر اعداد شبه تصادفی، مورد مطالعه و تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. سپس چند روش از روشهای معمول و ساده تولید اعداد تصادفی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج حاصل شده بخوبی نشان می‌دهد اگر چه این روشها ساده هستند اما تولید اعداد تصادفی توسط آنها

تاریخ وصول: ۸۳/۹/۳
تاریخ تصویب: ۸۴/۹/۱۲
دکتر عـبدالـه آقـائـی، دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، AAghaie@kntu.ac.ir
مهدی زاهدی شولمی، فارغ التحصیل دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

Archive of SID
www.SID.ir

دچار مشکل و به اصطلاح از هم پاشیدگی می‌شوند. پس از آن تلاش شده است با استفاده از نتایج تحلیلهای بدست آمده روش تلفیقی بر مبنای ترکیبی از روشهای موجود برای تولید اعداد تصادفی ارائه گردد.

واژه‌های کلیدی: اعداد تصادفی، دنباله‌های اعداد تصادفی، روش میان مربعی، روش میان ضربی، روش مضرب ثابت، روش تلفیقی

۱. مقدمه

نیاز رو به رشد بشر در سالهای اخیرو رشد شتابنده تنوع طلبی و کنجکاوی بشر، تغییرات روزافزون تکنولوژی و بالطبع پیچیدگی سیستم‌های مختلف ضرورت برنامه ریزی دقیق تر و تجزیه تحلیل کاملتر سیستمها را می طلبد. لذا امروزه علم شبیه‌سازی[۲] به عنوان یکی از کارامدترین تکنیکهای تصمیم سازی و حل مسئله بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته است. بی‌شک در این بین نمی‌توان نقش اعداد تصادفی را به عنوان یکی از مهمترین ابزارهای شبیه‌سازی، جهت پیش‌بینی شرایط تصادفی سیستم نادیده گرفت. تا جایی که برخی از دانشمندان اعداد تصادفی را به منزله پیچ و مهره‌های یک ماشین برای شبیه سازی معرفی کرده‌اند که این خود نشان از میزان اهمیت اعداد تصادفی در شبیه‌سازی دارد. از آنجایی که تعداد اعداد تصادفی موردنیاز در یک شبیه‌سازی بسیار زیاد می‌باشد، همواره الگوریتم‌هایی جهت تولید اعداد تصادفی مورد استفاده قرار می‌گرفته است. در این مقاله سعی براین است تا ضمن معرفی برخی از الگوریتم‌های تولید اعداد تصادفی[۳]، با انجام برخی آزمونهای معتبر بر روی این الگوریتم‌ها بتوان الگوریتمی که تصادفی‌ترین اعداد را تولید می‌کند انتخاب و یا طراحی و ارائه نمود.

۲. شبه تصادفی بودن اعداد تولید شده

یکی از راههای تولید اعداد تصادفی واقعی استفاده از یک کیسه حاوی تعدادی گوی و یا کارت همسان با اعداد مشخص و با احتمال مساوی بطوریکه هر گوی تنها یک شماره را نشان دهد، می باشد. در این حالت بایستی هر بار گوی درآورده شده به داخل کیسه برگردانده شود و گوی‌های داخل کیسه نیز به خوبی با یکدیگر جابجا شوند تا شرط تساوی احتمال برای گوی ها برقرار گردد. مسلماً انجام چنین عملی برای دسترسی به تعداد زیادی عدد تصادفی، که برای شبیه سازی سیستمهای مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد بسیار مشکل و حتی در شرایط واقعی ناممکن است. از این رو با توجه به نیاز به دسترسی به اعداد تصادفی به تعداد زیاد و در زمان سریع استفاده از روشهای دیگرجهت تولید اینگونه اعداد اجتناب ناپذیر است.

یکی از این راهها استفاده از دنباله ها و یا الگوریتم‌هایی جهت تولید اعداد تصادفی می‌باشد که با توجه به رشد روزافزون توانمندی کامپیوتر این امکان بوجود آمد که تولید اعداد تصادفی به تعداد و سرعت زیاد توسط این الگوریتم‌ها صورت پذیرد. اما با وجود تمامی این مزایا، تولید اعداد تصادفی توسط الگوریتم‌ها معایبی نیز دارد که در جای خود قابل بحث است. علاوه بر معایب خاص هر الگوریتم مشکلی که بصورت عام برای تمامی این الگوریتم‌ها وجود دارد این است که این اعداد هرگز اعداد واقعاً تصادفی نیستند بلکه تنها اعدادی شبه تصادفی[۴] می باشند. اما هرچه یک الگوریتم از جهت علمی و آماری قویتر باشد، آن الگوریتم جهت تولید اعداد شبه تصادفی مناسب‌تر است. در این مورد تست‌های آماری متعددی وجود دارد که عمدتا دو خاصیت اصلی اعداد تصادفی یعنی یکنواخت بودن و مستقل بودن آنها را مورد آزمون و بررسی قرار می دهد. همچنین از این پس در این مقاله بجای استفاده از کلمه اعداد شبه تصادفی، چنانکه مرسوم نیز هست، از همان کلمه اعداد تصادفی استفاده می‌شود [۱، ۲]. اعداد تصادفی، علاوه بر کاربردهای ذکر شده، کاربردهای فراوان دیگری نیز از جمله استفاده در تمامی بازی‌های کامپیوتری و نیز نرم‌افزارهایی که به پیش بینی عامل یا عواملی در آینده می‌پردازند دارد.

۳. روشهای تولید اعداد تصادفی

روشهای متعدد و مختلفی جهت تولید اعداد تصادفی وجود دارد که طی سالیان متمادی مورد استفاده قرار می گرفته است. از بین تمامی روشهای ارائه شده، مولدهای همنهشتی[۵] برای تولید اعداد تصادفی بیش از سایر روشها بکار رفته است. برای مثال یکی از مولدهای همنهشتی که برای مدت طولانی مورد استفاده قرارگرفته است عبارتست از [۱]:

$$X_{i+1} = \left(19{,}031X_i + +9{,}298X_{i-1}\right) \pmod{65{,}536}$$

اما مولد همنهشتی دیگری که ادعا شده است تمامی تستهای آماری جهت قوت و صحت اعداد تصادفی را بخوبی پاسخگو بوده است دنباله ذیل می باشد [۳]:

$$X_{i+1} = \left(107{,}374{,}182 + 104{,}104{,}480 X_{i-4}\right) \left(\bmod\ 2^{31} - 1\right)$$

[2] *Simulation*
[3] *Random Number Generators*
[4] *Pseudo-random numbers*
[5] *Congruential generators*

Archive of SID
www.SID.ir

که در آن X_i عبارتست از یک دنباله اعداد تصادفی و X_0 هسته اولیه. در جای دیگر یک دنباله تلفیقی برای تولید اعداد تصادفی که اجزاء این دنباله متعلق به خانواده‌های مختلف همنهشتی است توسعه داده شده است [۴]. همچنین یک دنباله تولید اعداد تصادفی همنهشتی ضربی[۶] از درجه دو با پیمانه‌ای برابر $2^{31}-1$ نیز ارائه گردیده است [۵]. در مورد این دنباله توضیح داده شده است که چنانچه ضرب کننده‌ها[7] (برای مثال a_1 و a_2) به دقت انتخاب شود، در این صورت طول پریود تولید اعداد تصادفی در این تابع همنهشتی برابر با $(2^{31}-1)^2-1$ خواهد شد. در مورد دنباله همنهشتی تولید اعداد تصادفی دیگری نیز عنوان شده است که دارای پریود طولانی برابر 2^{202} ویا 10^{61} می‌باشد [۶]. گذشته از روشهای همنهشتی که استفاده از آنها متداول و گسترده است روشهای دیگری وجود دارد که به جهت معایب عمده‌ای که در آنها وجود دارد، و در ادامه بررسی می‌گردند، تقریبا منسوخ شده تلقی می‌شوند. از آنجمله می‌توان به روشهای میان مربعی[۸]، مضرب ثابت[۹] و میان ضربی[۱۰] اشاره نمود [۷]. هدف از این مقاله آنست که با کمک الگوریتمی که در نرم افزار Excel تهیه شده است ضمن نشان دادن برخی عیوب این روشها، روشی جدید و ساده جهت تولید اعداد تصادفی ارائه گردد که در واقع تلفیقی از همین روشهای منسوخ شده و در عین حال ساده می‌باشد. در ادامه روش پیشنهادی مورد آزمون قرار می‌گیرد.

۴. روش میان ضربی

در این روش ابتدا دو عدد بعنوان هسته که تعداد ارقام آنها مساویست انتخاب می‌شود (مانند a و b). سپس حاصلضرب این دو عدد محاسبه می‌گردد و n رقم میانی آن عدد انتخاب می‌گردد (عدد c) و بر 10^n تقسیم می گردد. برای مثال اگر عدد انتخاب شده چهار رقمی باشد عدد بر ۱۰،۰۰۰ تقسیم می‌گردد تا عددی بین صفر و یک حاصل گردد. این بار عدد c در عدد b ضرب می‌شود و مجددا چهار رقم میانی آن عدد انتخاب می‌گردد (عدد d) و بر ۱۰،۰۰۰ تقسیم می‌گردد. این بار عدد d در عدد c ضرب می‌گردد و فعالیت‌های فوق بر روی آن ادامه می‌یابد .

- در سری اول تولید اعداد تصادفی از اعداد ۶۵۲۲ و ۷۲۲۹ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۴۸۲ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری دوم که با اعداد ۳۲۶۷ و ۴۱۸۳ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۳۲۵ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری سوم که با اعداد ۱۴۷۸ و ۹۶۳۲ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۴۲ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری چهارم که با اعداد ۲۱۶۳ و ۸۴۱۰ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۲۷۰عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری پنجم که با اعداد ۶۵۴۷ و ۹۷۱۲ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۸۰۷ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری ششم که با اعداد ۲۰۳۶ و ۶۳۹۵ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید. و به عدد صفر برخورد نشد. ولی، همانطور که از نمودار پیداست، به حلقه تکرار دیگری برخورد شد.
- در سری هفتم که با اعداد ۸۴۳۹ و ۵۷۹۱ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۶۶ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری هشتم که با اعداد ۲۵۶۴ و ۹۱۳۷ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۲۴۴ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری نهم که با اعداد ۹۰۸۱ و ۳۰۲۶ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۲۲۰ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری دهم که با اعداد ۳۶۲۵ و ۹۶۵۸ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۴۶۷ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می‌شود.

همانطور که در نتایج فوق و در نمودارهای مربوطه مشاهده می‌شود در نه مورد از ده مورد فوق به حلقه تکرار صفر و در یک مورد به حلقه تکرار اعداد برخورد شد و اعداد تصادفی به تعداد مورد نیاز تولید نگردید و در واقع دنباله از هم پاشیده می‌شود.

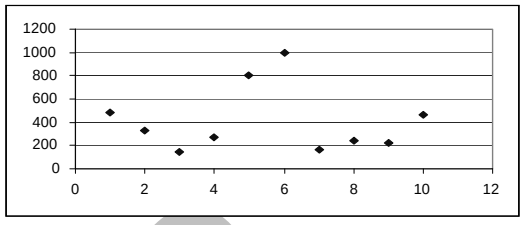
می‌توان گفت با توجه به تعداد اعداد تصادفی تولید شده در این روش (۴۸۲ و ۳۲۵ و ۱۴۲ و ۲۷۰ و ۸۰۷ و ۱۰۰۰ و ۱۶۶ و ۲۴۴ و ۲۲۰ و ۴۶۷ عدد) که بطور متوسط ۴۱۲ عدد می‌باشد، و با توجه به اینکه در شبیه‌سازی عملی تعداد اعداد تصادفی مورد نیاز به

---

[6] *Multiplicative Congruential Random Number Generator*
[7] *Multipliers*
[8] *Mid-product Method*
[9] *Mid-Square Method*
[10] *Mid-Product Method*

Archive of SID
www.SID.ir

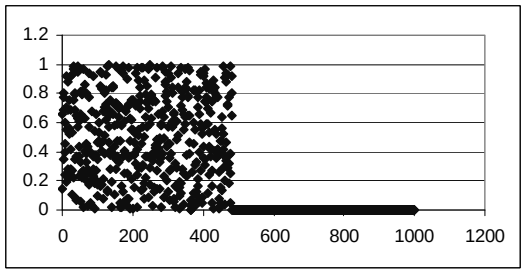
مراتب بیش از این تعداد است، لذا ایـن الگـوریتم بـه علـت از هـم پاشیدگی الگوریتم مناسـبی بـه شـمار نمـی‌رود. نمـودار زیرنـشان دهنده تعداد اعداد تصادفی تولید شده در این ده سری تولید اعـداد می‌باشد.



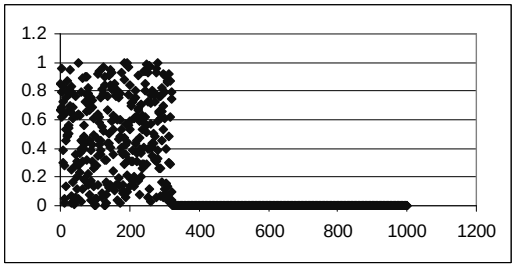
نمودار ۱. تعداد اعداد تصادفی تولید شده توسط روش میان ضربی

بررسی اعداد تصادفی تولید شده توسط الگوریتم میان‌ضربی از نظر زوج و فرد بودن (تابعRand)

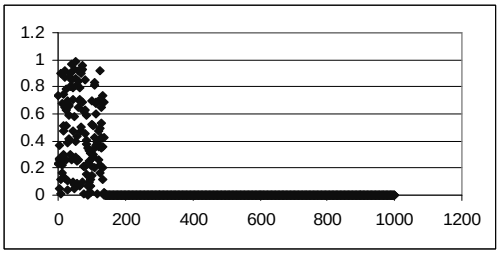
در این روش به علت برخورد به حلقه صفر بررسی زوج و فرد بودن اعداد عملا کاربردی ندارد. نمودارهای مربوط به اعداد تصادفی تولید شده با الگوریتم میان‌ضربی ذیلا آمده است.



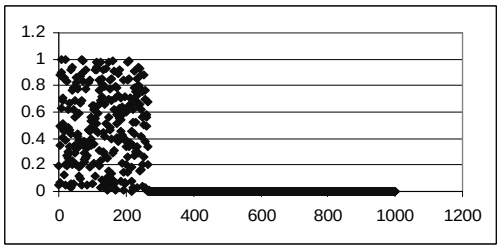
نمودار ۱-۲. سری اول تابع Rand



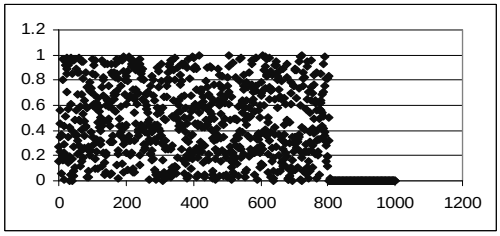
نمودار ۲-۲. سری دوم تابع Rand



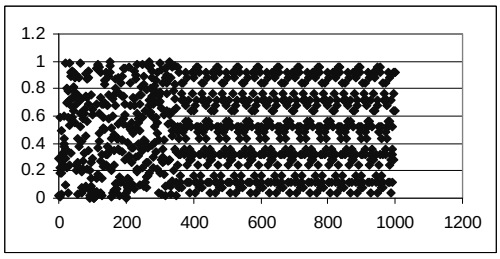
نمودار ۳-۲. سری سوم تابع Rand



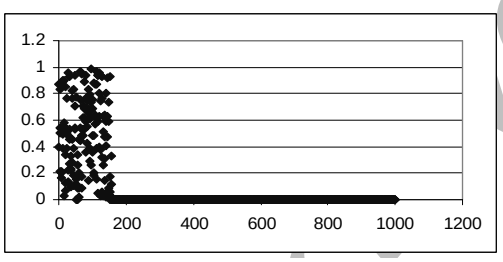
نمودار ۴-۲. سری چهارم تابع Rand



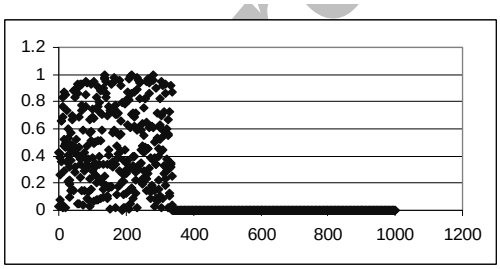
نمودار ۵-۲. سری پنجم تابع Rand



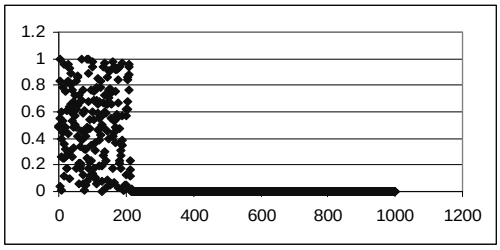
نمودار ۶-۲. سری ششم تابع Rand



نمودار ۷-۲. سری هفتم تابع Rand

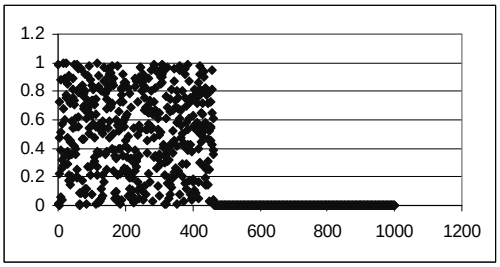


نمودار ۸-۲. سری هشتم تابع Rand



نمودار ۹-۲. سری نهم تابع Rand

Archive of SID
www.SID.ir



نمودار ۱۰-۲. سری دهم تابع Rand

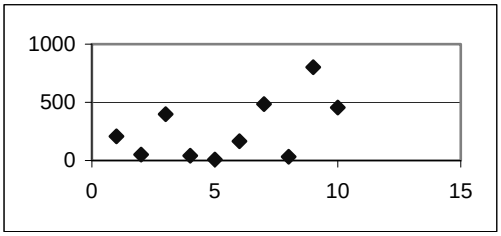
۵. روش مضرب ثابت

در این روش نیز ابتدا دو عدد بعنوان هسته که تعداد ارقام آنها مساویست انتخاب می‌شود (بطور مثال a و b). سپس این دو عدد در هم ضرب گردیده عدد حاصل را درنظر گرفته، n رقم میانی آن بعنوان عدد تصادفی انتخاب می‌گردد و چون اعداد تصادفی تولید شده باید بین ۰ و ۱ باشد، این عدد بر ۱۰^{n} تقسیم می‌گردد. برای مثال اگر عدد انتخاب شده چهار رقمی باشد عدد بر ۱۰۰۰۰ تقسیم می‌گردد تا حاصل در بازه صفر و یک قرار گیرد. سپس عدد چهاررقمی که بدست آمده است (فرض می‌کنیم عدد C) را در همان عدد a ضرب و مجدداً چهاررقم میانی را انتخاب کرده، این کار را ادامه می‌یابد، بدون آنکه عدد a تغییر کند. این روش، به دلیل استفاده از عدد ثابت a روش مضرب ثابت نامیده می‌شود.

خلاصه نتایج

- در سری تولید اعداد تصادفی که با اعـداد ۳۹۸۷ و ۷۲۲۳ شـروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شـود، ۲۰۸ عـدد تـصادفی تولیـد گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۸۳ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری دوم که با اعداد ۲۵۴۱ و ۶۳۹۸ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۵۱ عدد تصادفی تولید گردید، امـا بعـد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۳۵ عدد وارد شده و ایـن اعـداد تـا پایـان تکرار می‌شود.
- در سری سوم که با اعداد ۲۰۱۴ و ۸۲۳۴ شروع گردیـد، همـانطور که ملاحظه می‌شود، ۳۹۸ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۴۲۵ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری چهارم که با اعداد ۲۳۸۷ و ۱۲۹۸ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۴۱ عدد تصادفی تولید گردید، امـا بعـد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۱۸۷ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری پنجم که با اعداد ۵۶۴۱ و ۲۳۶۹ شروع گردید، همـانطور که ملاحظه می‌شود، ۸ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۷۵ عدد وارد شده و ایـن اعـداد تـا پایـان تکرار می‌شود.
- در سری ششم که با اعداد ۲۴۲۸ و ۱۹۳۰ شروع گردید، همـانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۶۶ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعـد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۱۰۷ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری هفتم که با اعداد ۲۰۳۱ و ۳۱۲۸ شروع گردید، همـانطور که ملاحظه می‌شود، ۴۸۵ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۲۵۹ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری هشتم که با اعداد ۵۶۳۷ و ۸۵۲۷ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۳۲ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعـد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۲۰ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری نهم که با اعداد ۳۰۱۰ و ۴۷۶۳ شروع گردیـد، همـانطور که ملاحظه می‌شود، ۸۰۲ عدد تصادفی تولید گردیـد، امـا بعـد از آن به عدد صفر رسیده و این عدد تا پایان تکرار می‌شود.
- در سری دهم که با اعداد ۲۳۹۳ و ۴۷۶۵ شروع گردید، همـانطور که ملاحظه می‌شود، ۴۵۵ عدد تصادفی تولید گردیـد، امـا بعـد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۸۴ عدد وارد شده و این اعـداد تـا پایان تکرار می‌شود.

همـانطور کـه در نتـایج فـوق و در نمودارهـای مربوطـه مـشاهده می‌گردد در نه مورد از ده مورد فوق به حلقه تکرار اعـداد و در یـک مورد به حلقه تکرار صفر برخورد شد و اعداد تصادفی به تعداد مورد نیاز تولید نگردید و عملا دنباله از هم پاشیده مـی شـود. مـی‌تـوان نتیجه گرفت با توجه به تعداد اعـداد تـصادفی تولیـد شـده در ایـن روش (۲۰۸ و ۵۱ و ۳۹۸ و ۴۱ و ۸ و ۱۶۶ و ۴۸۵ و ۳۲ و ۸۰۲ و ۴۵۵ عدد)، که بطور متوسط ۲۶۵عدد می‌باشد و با توجه به اینکـه در شبیه‌سازی عملی تعداد اعداد تصادفی مورد نیاز، به مراتب بیش از این اعداد است، لـذا ایـن الگـوریتم، بـه علـت از هـم پاشـیدگی الگوریتم مناسبی نمی‌باشد. نمودار زیر نـشان دهنـده تعـداد اعـداد تصادفی تولید شده در این آزمون می‌باشد.



نمودار ۳. تعداد اعداد تصادفی تولید شده توسط روش مضرب ثابت

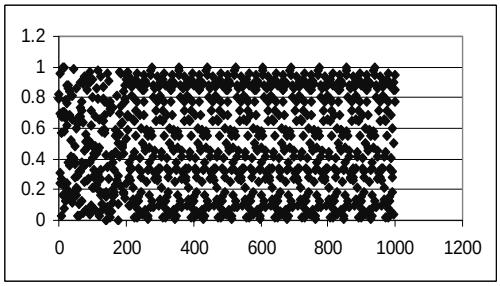
Archive of SID
www.SID.ir

بررسی اعداد تصادفی تولید شده توسط الگوریتم مضرب ثابت از نظر زوج و فرد بودن

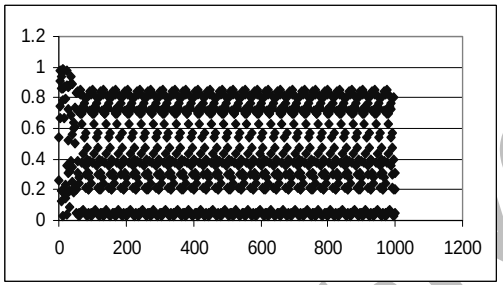
در اینجا اعداد تصادفی تولید شده توسط روش مضرب ثابت از نظر زوج و فرد بودن مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور اعدادی که توسط این روش در قسمت‌های قبل تولید شده بود، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. نتایج تحلیل بطور خلاصه در زیر آمده است :

- در سری اول از تولید اعداد تصادفی تعداد اعداد زوج ۴۳۰ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۷۰ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می‌گردد.
- در سری دوم تعداد اعداد زوج ۳۸۳ عدد و تعداد اعداد فرد ۶۱۷ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، اعداد فرد دارای توالی بیشتری بودند و بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، این مساله تا پایان ادامه داشت.
- در سری سوم تعداد اعداد زوج ۴۹۴ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۰۶ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می‌گردد.
- در سری چهارم تعداد اعداد زوج ۴۸۶ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۱۴ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می‌گردد.
- در سری پنجم تعداد اعداد زوج ۴۶۶ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۳۴ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می‌گردد.
- در سری ششم تعداد اعداد زوج ۴۹۴ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۰۶ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، در ابتدا توالی اعداد زوج کمی بیشتر بود، ، اما پس از ورود به حلقه تکرار به نسبت قابل قبول بود، اما وجود حلقه تکرار، باعث ایجاد نقصی بزرگ شد.
- در سری هفتم تعداد اعداد زوج ۵۱۷ عدد و تعداد اعداد فرد ۴۸۳ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می‌گردد.
- در سری هشتم تعداد اعداد زوج ۴۵۱ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۴۹ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می‌گردد.
- در سری نهم تعداد اعداد زوج ۵۹۳ عدد و تعداد اعداد فرد ۴۰۷ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فردبه علت برخورد به عدد صفر وارد دور تکرار می‌گردد.
- در سری دهم تعداد اعداد زوج ۵۲۶ عدد و تعداد اعداد فرد ۴۷۴ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می‌گردد.

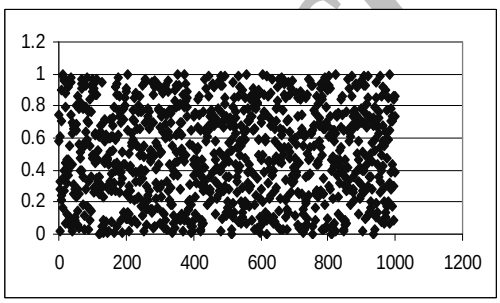
نمودارهای مربوط به اعداد تصادفی تولید شده با الگوریتم مضرب ثابت ذیلا آمده است:



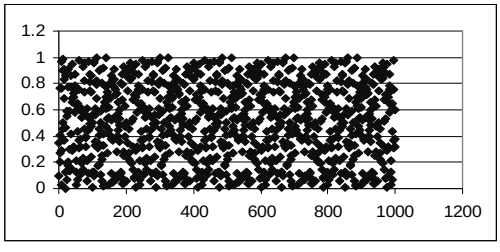
نمودار ۱-۴. سری اول RN اعداد تصادفی با ا.ل.پ



نمودار ۲-۴. سری دوم RN اعداد تصادفی با ا.ل.پ

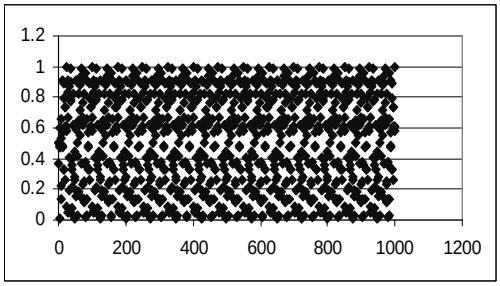


نمودار ۳-۴. سری سوم RN اعداد تصادفی با ا.ل.پ

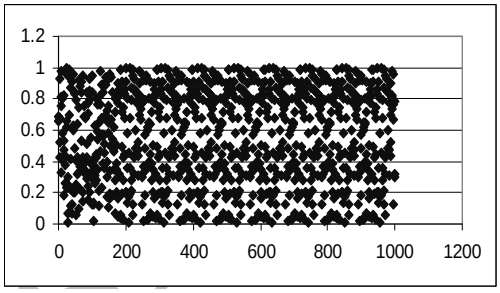


نمودار ۴-۴. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.پ

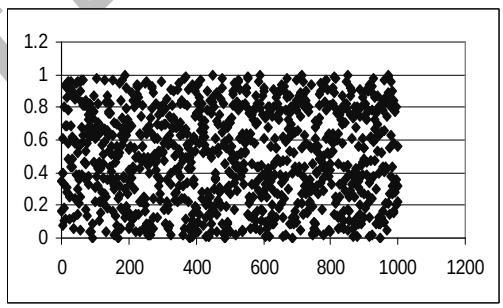
Archive of SID
www.SID.ir



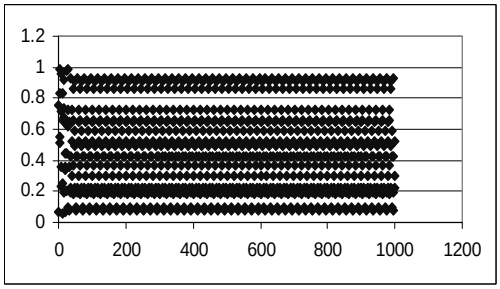
نمودار ۴-۵. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب



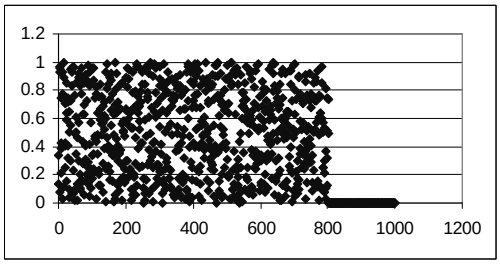
نمودار ۴-۶. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب



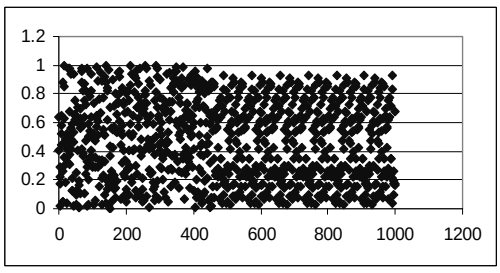
نمودار ۴-۷. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب



نمودار ۴-۸. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب



نمودار ۴-۹. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب



نمودار ۴-۱۰. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب

۶. روش میان مربعی

در این روش که در سال ۱۹۴۰ میلادی ابداع گردید، ابتدا یک عدد (a) گرفته می‌شود، سپس این عدد به توان دو می‌رسد و n رقم میانی آن عدد انتخاب می‌گردد (b) و بر ۱۰^{n} تقسیم می گردد. برای مثال اگر عدد انتخاب شده چهار رقمی باشد عدد بر ۱۰،۰۰۰ تقسیم می‌گردد تا عددی بین صفر و یک حاصل گردد. این بار عدد b به توان دو می‌رسد و چهار رقم میانی آن عدد انتخاب می‌گردد (عدد c) و بر ۱۰،۰۰۰ تقسیم می‌گردد و کار به همین ترتیب ادامه می‌یابد.

نتایج و نمودارهای مربوطه نشان می‌دهد، در تمامی ده سری اعداد تصادفی تولید شده به حلقه تکرار برخورد شده و تولید اعداد تصادفی به تعداد مورد نیاز ادامه پیدا نمی کند. جالب اینکه در ۸ مورد از ۱۰ مورد به اعداد ۲۱۰۰ و ۴۱۰۰ و ۶۱۰۰ و ۸۱۰۰ برخورد شد. وجه مشترک این اعداد وجود ۱۰۰ در انتهای آنهاست و جالب‌تر اینکه پس از تهیه سری‌هایی با هسته ۱۱۰۰ و ۳۱۰۰ و ۷۱۰۰ و ۹۱۰۰ هم دقیقاً به همین اعداد برخورد شد و فقط در مورد عدد ۵۱۰۰، تماماً به عدد ۱۰۰ برخورد گردید. لذا می‌توان بطور کلی عنوان کرد که در این روش هرگاه به عددی برخورد شود که سه رقم سمت راست آن ۱۰۰ باشد در آن سری به حلقه تکرار برخورد خواهد شد.

لذا می‌توان گفت با توجه به تعداد اعداد تصادفی تولید شده در این روش (۴۳ و ۹ و ۳۴ و ۱۳ و ۳۵ و ۷ و ۹۹ و ۵۶ و ۶۴ و ۱۱ عدد) که حداکثر ۹۹ عدد می‌باشند و با توجه به اینکه در شبیه‌سازی عملی تعداد اعداد تصادفی مورد نیاز به‌مراتب بیش از این اعداد است لذا این الگوریتم الگوریتم مناسبی جهت تولید اعداد تصادفی نمی‌باشد. در این روش به علت برخورد به حلقه تکرار بررسی زوج و فرد بودن اعداد عملا کاربرد ندارد.

۷. روش تلفیقی تولید اعداد تصادفی

همانطور که مشاهده گردید هیچ‌یک از روش‌های ذکر شده برای تولید تعداد زیادی عدد تصادفی مناسب نیستند و هریک به‌دلایلی از جمله برخورد با حلقه تکرار، برخورد به عدد صفر و غیره توانایی تولید اعداد تصادفی به تعداد مورد نیاز را ندارند و عملا از هم

Archive of SID
www.SID.ir

پاشیده می‌شود. پس از بررسی تکنیک های مختلف جهت تولید اعداد تصادفی روشی تدوین گردید که هرگاه در دنباله به عددی برخورد کردیم که وارد حلقه تکرار یا صفر می‌شود، یکی از اعداد هسته تغییر کند. در اینجا برای حفظ ماهیت اعداد تصادفی، باید عددی که بعنوان جایگزین هسته انتخاب می‌شود نیز خود عددی تصادفی باشد. در این روش که به‌میزان قابل قبولی توانایی تولید اعداد تصادفی را داراست که در ادامه نشان داده می‌شود، با استفاده از ترکیب دو روش تولید اعداد تصادفی میان‌ضربی و مضرب ثابت، که البته هیچ یک به تنهایی قابلیت‌های لازم را ندارند، روشی حاصل می‌شود که اعداد تصادفی را به‌خوبی تولید می‌کند. تمامی محاسبات و عملیات ریاضی و آ ماری با کمک الگوریتمی که در محیط نرم افزار Excel نوشته شده است انجام می‌پذیرد.

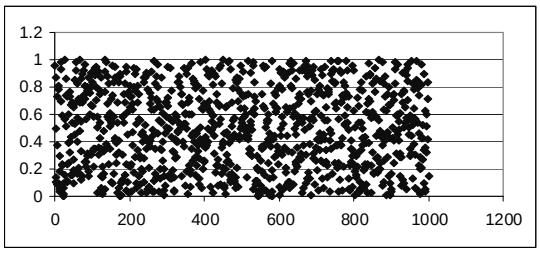
در ایـن روش ابتـدا دو عـدد بعنـوان هـسته کـه تعـداد ارقـام آنهـا مساویست انتخاب می شود (بطور مثال a وb) سپس همانگونه کـه در روش میان‌ضربی توضیح داده شد تعدادی عدد تـصادفی بـه‌روش میان‌ضربی تولید می‌گردد. همزمان بـا اسـتفاده از همـین دو عـدد، بعنوان هسته، در جایی دیگر تعـدادی عـدد تـصادفی بـا اسـتفاده از روش مضرب ثابت تولید می‌گردد. همانطور که مـشاهده گردیـد بـه احتمال زیاد در روش میان‌ضربی به عدد صفر برخورد خواهد شـد و سپس عدد صفر تا پایان تکرار خواهد شـد. در روش جدیـد پـس از برخورد با عدد صفر و یا تکرار یک عدد از دنباله اعـداد تولیـد شـده توسط روش مضرب ثابـت، یکـی از اعـداد تولیـد شـده در آن روش بعنوان هسته‌ای جدید بـرای ادامـه تولیـد اعـداد تـصادفی بـه روش میان‌ضربی استفاده می‌گردد و اگر در جای دیگر نیز بـه عـدد صـفر برخورد شد و یا عددی تکرار گردید مجدداً بـه همـین ترتیـب یـک عـدد تـصادفی تولیـد شـده توسـط روش مـضرب ثابـت جـایگزین می‌گردد. چون هسته نیز در اینجا بـصورت تـصادفی انتخـاب شـده است، خللی به مفهوم اعداد تصادفی وارد نمی‌شود.

۸. بررسی تحلیل روش تلفیقی میان‌ضربی و مضرب ثابت

تحلیل داده ها مربوط به ۱۰ با تکرار تولید اعداد تصادفی ذیلا آمـده است:

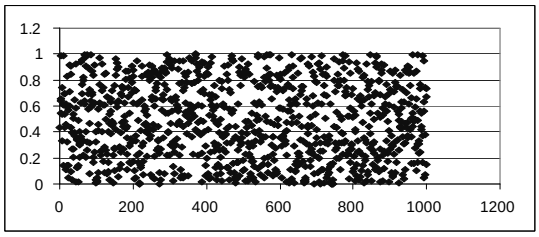
- در سـری اول از تولیـد اعـداد تـصادفی کـه بـا اعـداد ۱۸۴۳ و ۱۴۷۴شروع گردید همانطور کـه ملاحظـه مـی‌شـود، ۱۰۰۰ عـدد تصادفی تولید گردید یک بار هم به عدد صفر برخـورد گردیـد کـه اصلاح گردید. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
- در سری دوم از تولید اعداد تصادفی که بـا اعـداد ۵۷۲۱ و ۹۳۴۰ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۰۰۰ عـدد تـصادفی تولید گردید دو بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شـد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
- در سری سوم از تولید اعداد تصادفی که بـا اعـداد ۱۱۹۰ و ۴۸۵۹ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۰۰۰ عـدد تـصادفی تولید گردید پنج بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
- در سری چهارم از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۱۳۳۵ و ۲۵۶۷ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۰۰۰ عـدد تـصادفی تولید گردید سه بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
- در سری پنجم از تولید اعداد تصادفی که با اعـداد ۸۰۳۲ و ۵۴۷۳ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۰۰۰ عـدد تـصادفی تولید گردید به عدد صفر هم برخورد نگردید. مـشکل خاصـی نیـز مشاهده نشد.
- در سری ششم از تولید اعداد تصادفی که با اعـداد ۱۴۹۶ و ۱۲۸۳ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۰۰۰ عـدد تـصادفی تولید گردید یک بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
- در سری هفتم از تولید اعداد تصادفی که با اعـداد ۱۷۶۲ و ۹۶۲۴ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۰۰۰ عـدد تـصادفی تولید گردید به عدد صفر هم برخورد نگردید. مـشکل خاصـی نیـز مشاهده نشد.
- در سری هـشتم از تولیـد اعـداد تـصادفی کـه بـا اعـداد ۱۷۳۹ و ۹۸۲۱شروع گردید، همانطور کـه ملاحظـه مـی‌شـود، ۱۰۰۰ عـدد تصادفی تولید گردید یک بار هم به عدد صفر برخـورد گردیـد کـه اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
- در سری نهم از تولید اعداد تصادفی کـه بـا اعـداد ۹۸۳۴ و ۲۱۷۶ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می‌شود، ۱۰۰۰ عـدد تـصادفی تولید گردید پنج بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
- در سری دهم از تولید اعداد تصادفی که با اعـداد ۵۶۸۹ و ۴۱۳۸ شروع گردید، همانطور که ملاحظـه مـی‌شـود، ۱۰۰۰ عـدد تـصادفی تولید گردید یک بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصـلاح شـد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.

نمودارهای مربوط به اعداد تصادفی تولید شده به روش تلفیقـی ذیـلا آمده است:

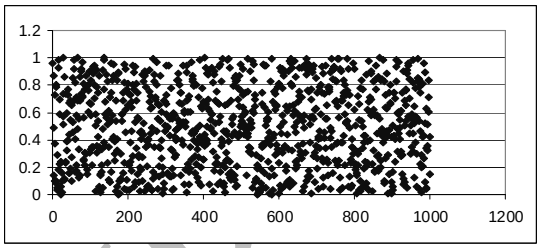


نمودار ۱-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی

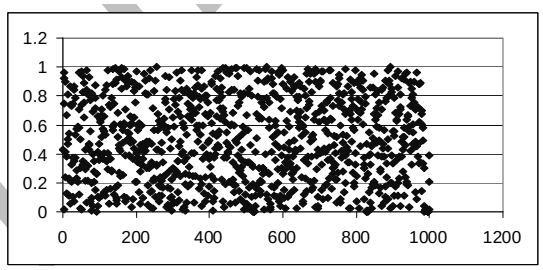
Archive of SID
www.SID.ir



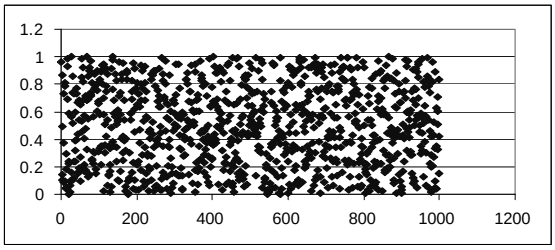
نمودار ۲-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



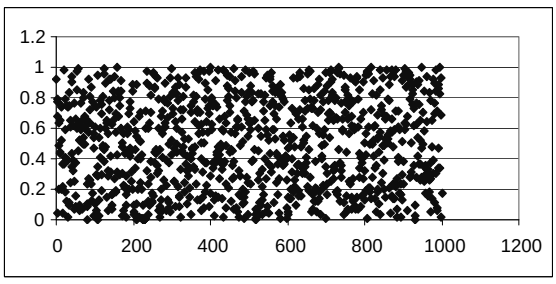
نمودار ۳-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



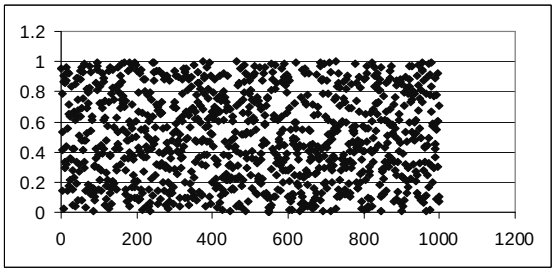
نمودار ۴-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



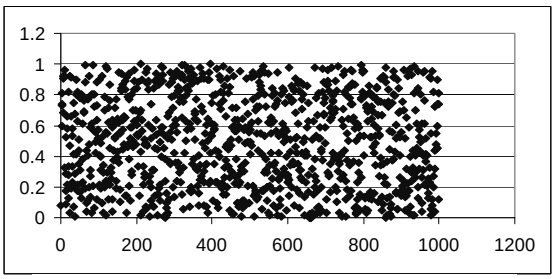
نمودار ۵-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



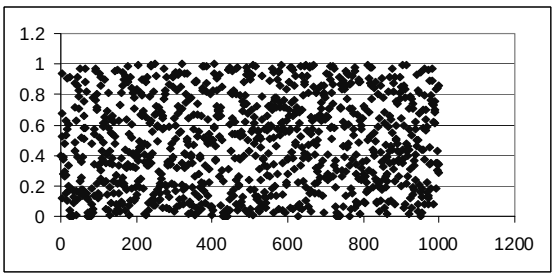
نمودار ۶-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



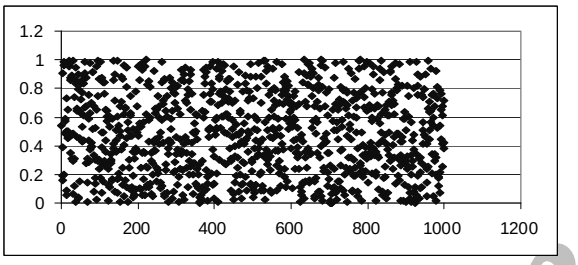
نمودار ۷-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



نمودار ۸-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



نمودار ۹-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



نمودار ۱۰-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی

همانطور که در نتایج و نمودارهای فوق مشاهده می‌شود در روش تلفیقی مشکل خاصی شبیه آنچه در بررسی روشهای **میان مربعی، میان ضربی و مضرب ثابت** به وجود آمد مشاهده نمی‌شود.

۹. شمارش تعداد اعداد زوج و فرد

از آنجا که اعداد تصادفی در بسیاری از مواقع جهت تصمیم گیری در موارد بولین صفر و یک به مفهوم انجام یا عدم انجام کاری استفاده می‌گردند، لذا همواره تبدیل اعداد تصادفی بین صفر و یک به بولین مورد توجه بوده است. این امر با روش‌هایی چون تقسیم محدوده بین صفر و یک به دو ناحیه بطور مثال بیشتر از ۰/۵ معادل یک و کمتر از ۰/۵ معادل صفر و یا تقسیم‌بندی اعداد به دو دسته زوج معادل یک و فرد معادل صفر صورت می‌گیرد. در ادامه با استفاده از تابع Rand به تولید تعدادی عدد تصادفی پرداخته می‌شود و سپس با استفاده از الگوریتم تهیه شده در محیط Excel آن اعداد مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند.

۱۰. بررسی اعداد تصادفی تولید شده از نظر زوج و فرد بودن

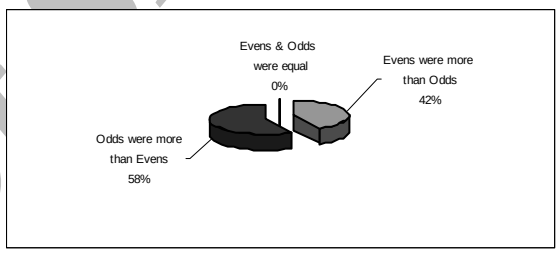
با کمک توابع نوشته شده در ضمن تحقیق براحتی می‌توان به کرات آزمایش مربوط به زوج و فرد بودن اعداد را (تنها با فشردن

Archive of SID
www.SID.ir

دکمه F9)تکرار نمود و با استفاده از شمارنده های ایجاد شده آمار موردنظر را بررسی نمود. بطور مثال در یک آزمایش برای اعداد تولید شده توسط تابع Rand در ۵۰ مرحله تکرار گردید. خلاصه نتایج یکی از این آزمایشات به شرح زیر است:

تعداد کل آزمایشات : ۵۰
تعداد دفعاتی که تعداد اعداد زوج بیشتر است: ۲۱
تعداد دفعاتی که تعداد اعداد فرد بیشتر است: ۲۹
تعداد دفعاتی که تعداد اعداد زوج و فرد برابر است: صفر
دفعاتی که اختلاف اعداد زوج و فرد بیش از ۲۰ است: ۲۷
تعداد کل اختلافات بین اعداد زوج و فرد : ۱۲۴۸

این آزمایش ۱۰ بار متوالی انجام گردید و نتایج در جدول شماره ۱ آمده است. همچنین نمودار زیر مقایسه درصد دفعاتی که تعداد اعداد زوج بیشتر، کمتر یا مساوی تعداد اعداد فرد است را نشان می‌دهد.



نمودار ۶. درصد دفعات تولید اعداد زوج و فرد

بطور خلاصه این داده‌ها بیانگر آنست که:

- در ۲۵۱ آزمایش از ۵۰۰ آزمایش، تعداد اعداد زوج بیشتر از تعداد اعداد فرد بود.
- در ۲۳۴ آزمایش از ۵۰۰ آزمایش، تعداد اعداد فرد بیشتر از تعداد اعداد زوج بود.
- در ۱۵ آزمایش از ۵۰۰ آزمایش، تعداد اعداد فرد و زوج برابر بود.
- در ۲۵۴ آزمایش از ۵۰۰ آزمایش، اختلاف تعداد اعداد زوج و فرد بیش از ۲۰ بود.
- در مجموع، تعداد کل اختلافات بین اعداد زوج و فرد، برابر ۱۲۷۴۰ بود.

علاوه بر موارد مذکور این امکان نیز وجود دارد که با استفاده از امکانات نرم‌افزار Excel تکرار شدن تعداد زیادی اعداد زوج یا فرد بصورت متوالی مورد بررسی قرار گیرد.

۱۱. نتیجه گیری

پس از تولید اعدادتصادفی با روش‌های مختلف و انجام آزمون بر روی آنها نتایج زیر حاصل گردید:

در تولید اعداد تصادفی با روش میان مربعی، در تمامی موارد، بعد از تولید تعداد کمی عدد تصادفی، به حلقه تکرار برخورد شد که در هشت مورد از ده مورد، حلقه تکرار شامل اعداد ۲۱۰۰ و ۴۱۰۰ و ۶۱۰۰ و ۸۱۰۰ بود. در تولید اعداد تصادفی با روش میان ضربی، در نه مورد از ده مورد، پس از تولید تعداد معدودی عدد تصادفی به عدد صفر برخورد شد که پس از برخورد به آن عملاً تولید اعداد تصادفی متوقف می‌گردد. در یک مورد دیگر نیز به حلقه تکرار برخورد شد. در تولید اعداد تصادفی با روش مضرب ثابت، در نه مورد از ده مورد، پس از تولید تعداد معدودی عدد تصادفی به حلقه تکرار برخورد شد. در یک مورد دیگر نیز به عدد صفر برخورد شد که پس از آن عملاً تولید اعداد تصادفی متوقف گردید.

جدول ۱. مقایسه تعداد اعداد زوج و فرد

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تعداد کل آزمایشات	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰
تعداد دفعاتی که اعداد زوج بیشتر بود	۲۴	۲۱	۳۰	۲۴	۲۸	۲۶	۲۸	۱۸	۱۹	۳۳
تعداد دفعاتی که اعداد فرد بیشتر بود	۲۵	۲۷	۲۰	۲۵	۲۲	۲۱	۲۰	۳۰	۲۷	۱۷
تعداد دفعاتی که اعداد زوج و فرد برابر بود	۱	۲	۰	۱	۰	۳	۲	۲	۴	۰
تعداد دفعاتی که اختلاف اعداد زوج و فرد بیش از ۲۰ بود	۲۴	۲۴	۲۱	۲۷	۲۶	۲۵	۲۷	۲۳	۲۶	۳۱
تعداد کل اختلافات بین اعداد زوج و فرد	۱۱۰۸	۱۳۳۰	۱۲۹۲	۱۳۱۲	۱۲۸۰	۱۲۵۴	۱۳۰۸	۱۲۲۲	۱۲۷۸	۱۳۵۶

پس از تحلیل روشهای فوق و مشاهده مشکلات موجود، روشی بعنوان روش تلفیقی تولید اعداد تصادفی بر پایه دو روش میان ضربی و مضرب ثابت ارائه گردید تا برخی از مشکلات ذکر شده و از هم پاشیدگی دنباله در آن مرتفع گردد.

Archive of SID
www.SID.ir

نتایج بررسی‌ها روی روش تلفیقی نشان داد که نه تنها بر خلاف سه روش ذکر شده تعداد زیادی عدد تصادفی تولید می‌کند بلکه از جهت آزمون‌های معمول نظیر زوج و فرد بودن نیز قابل اطمینان است.

منابع

[1] Pidd, M., *Computer Simulation in Management Science*, 4th Edition, John Wiley & Sons, 1998.

[2] Banks, J., Carson, J., *Discrete-Event System Simulation*, Prentice-Hall, 1984.

[3] L'Ecuyer, P., *"Uniform Random Number Generation, Annuls of Operations Research,"* , 1994, Vol. 23.

[4] L'Ecuyer, P., Granger-Piche, J., *"Combined Generators with components from Different Families,"* Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 62, No. 3, 2003, PP. 395-404.

[5] Chiang, k., Wong, J.Y., *"Random Number Generators with Long and Sound Statistical Properties,"* Computers and Mathematics with Applications, Vol. 36, No. 3, 1998, PP. 113-121.

[6] Marsaglia, G., Tsang W.W., *"The 64-bit Universal RNG,"* Statistics and Probability Letters, Vol. 66, No. 2, 2004, PP. 183-187.

[7] Banks, J., Handbook of Simulation, EMP Books and Wiley International Publication, 1998.

[8] Proceedings of 35th Annual Simulation Symposium, California, 14-18 April.

[۹] محلوجی، هاشم.، شبیه‌سازی سیستم‌های گسسته پیشامد، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۶.

Archive of SID

www.SID.ir