نشریه بین المللی علوم مهندسی دانشگاه علم وصنعت ایران

ویژه‌نامه مهندسی عمران، جلد ۱۹، شماره ۸-۲، سال ۱۳۸۷، صفحه ۶۲-۵۳

A GENERALIZED FINITE DIFFERENCE FOR THE SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL DIFFUSION PROBLEMS

H. Arzani

, Department of Civil Engineering , Shahid Rajaee University,Tehran,Iran Arzani@iust.ac.ir

M. H. Afshar

, Department of Civil Engineering , Iran Unversity of Science and Technology, Tehran, Iran, MHAfshar@iust.ac.ir

Abstract: *Many meshless methods are presented in recent years for solving partial differential equations. In this paper, a Generalized Finite Difference meshless method was developed for the solution of two-dimensional elliptic problems. A fully Least Squares method is used in both function approximation and the discretization of the governing differential equations. The discretized equations are obtained via a discrete least squares method in which the sums of the squared residuals are minimized with respect to unknown nodal parameters in the inner and boundary nodes. In this process no numerical integration is needed and the obtained equations are symmetric and positive definite. The meshless shape functions are derived using the Moving Least Squares method of function approximation. The proposed method has the additional advantages of the producing symmetreic, possitive definite matrices even for non-self adjoint operators. The method is tested against two elliptic two-dimensional examples including Poisson and Seepage problems in steady state form.*

یک روش اختلاف محدود تعمیم یافته دوبعدی برای حل معادلات دیفرانسیل پخشی

حامد ارزانی و محمدهادی افشار

چکیده: روشهای بدون‌شبکه در دو دهه اخیر به مجموعه روشهای عددی اضافه شده و بستر مناسب و وسیعی در زمینه‌های علمی، تحقیقاتی گردیده است. شباهت نزدیک روش اختلاف محدود با روش بدون شبکه پیشنهادی در این مقاله انگیزه‌ای برای نامیدن روش به اختلاف محدود تعمیم یافته است. این شباهت بگونه‌ای است که بنظر می‌رسد بسیاری از مشکلاتی که در روش تفاضل‌محدود در گذشته وجود داشته و عامل رویکرد به اجزاء محدود شده است را برطرف می‌نماید. در این راستا یک روش اختلاف محدود تعمیم یافته برای حل معادلات دیفرانسیل پخشی پیشنهاد شده است. که در آن تلاش شده است از سادگی روش اختلاف محدود در گسسته‌سازی حوزه فیزیکی و از توانمندیهای موجود در روشهای پیشرفته عددی بطور توام در حل مسائل استفاده شود. مهمترین مزایای روش پیشنهادی، حذف فرآیندهای مورد نیاز برای انتگرالگیری عددی و نیز تشکیل ماتریسهای ضرائب به صورت متقارن و مثبت معین هستند. حذف روال انتگرالگیری عددی در بین روشهای بدون شبکه منجر به یک روش بدون شبکه واقعی می شود که مستقل از تعریف نقاط گوس با وزنهای مربوط است. همچنین متقارن و مثبت بودن ماتریس ضرائب در دستگاه معادلات جبری یک ایده آل محاسباتی برای بسیاری از روشهای عددی است. فرآیندهای گام به گام روش پیشنهادی در محیط ویژوال فرترن ۶/۵ برنامه

تاریخ وصول: ۸۶/۷/۱۰

تاریخ تصویب: ۸۸/۲/۷

دکتر حامد ارزانی، دانشکده *عمران*، دانشگاه *شهید رجائی*، Arzani@iust.ac.ir

دکتر محمدهادی افشار، دانشکده *عمران*، دانشگاه *علم وصنعت*، MHrAfshar@iust.ac.ir

نویسی شده است. صحت‌یابی روش اختلاف محدود تعمیم یافته ابتدا با حل معادله پواسون در یک حوزه مربعی با توزیع نقاط یکنواخت و غیریکنواخت ارائه شده است. سپس کارآئی روش در حل مسئله نشت که از انواع مسائل پتانسیلی است مورد ارزیابی قرار گرفته است.

واژه های کلیدی: روش اختلاف محدود، روش بدون شبکه، ، معادله پواسون، نشت

۱. مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی به بیان ریاضی با معادلات دیفرانسیل نمایش داده می‌شوند. حل بسیاری از این معادلات دیفرانسیل با استفاده ازروشهای تحلیلی ممکن نیست. لذا بررسی و تحلیل چنین پدیده‌هائی به دو روش مدلسازی فیزیکی و مدل عددی انجام می‌گردد. مدلسازی فیزیکی پدیده ها عموما کار مشکل و پرهزینه و همچنین فقط یک بار مصرف است و گاهی ساخت مدلهای با مشخصات واقعی یا کوچکتر امکان پذیر نیست. لذا رویکرد غالب در این گونه موارد به منظور حل معادلات دیفرانسیل پیچیده، استفاده از روشهای تقریبی و یا اصطلاحا روشهای عددی است. ضمن اینکه پیشرفت سریع و گسترده در فناوری رایانه نیز دلیل دیگری بر بکارگیری روشهای مذکور است. در همه روشهای عددی به کمک فرآیندهای خاص و البته با اعمال تقریب، معادلات دیفرانسیل به تعداد زیادی معادلات جبری تبدیل می شوند که با کمک رایانه و با استفاده از الگوریتم های حل دستگاه معادلات مجهولات تعیین می شوند .

روشهای عددی گوناگونی تاکنون ابداع و مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از مهمترین و پرسابقه ترین این روشها می‌توان به روشهای اختلاف محدود، اجزاءمحدود، احجام محدود و اجزاءمرزی اشاره کرد. انواع مختلفی از روش‌های بدون شبکه[۱] یا نقاط محدود[۲] نیز طی دو دهه گذشته و با انجام تحقیقات زیاد در نحوه تقریب تابع[۳] به مجموعه روشهای عددی اضافه شده است. هر یک از روشهای عددی دارای مزایا و معایب خاص خود در انواع حوزه های مسائل مهندسی می‌باشند بگونه ای که محققین و مهندسین فعال در حوزه های مختلف علوم، هر کدام نسبت به روش خاصی نظر مثبت دارند. اگرچه شروع استفاده از روشهای بدون شبکه همانند روشهای اجزاءمحدود از مسائل سازه‌ای بوده است ولی به تدریج بکارگیری آنها در سایر مسائل از جمله مسائل مربوط به سیالات در حال گسترش است. استفاده از روشهای بدون شبکه هنوز به گستردگی روشهای اجزاء محدود و احجام محدود در مسائل دینامیک محاسباتی سیالات نمی‌باشد ولی چه بسا فعلا این روشها شرایطی مشابه با زمانی که روش‌های اجزاء محدود و احجام محدود شروع به گسترش نمودند را سپری می‌نمایند. شباهت نزدیک و سادگی گسسته‌سازی حوزه فیزیکی در روش اختلاف محدود و روش بدون شبکه از یکطرف و نیز استفاده توانمندیهای موجود در روشهای متکی به المان یا شبکه همچون اجزاء محدود و احجام محدود، مهمترین عوامل موثر در شکل‌گیری و تکامل روشهای بدون شبکه بوده‌اند. روش هیدرودینامیک ذرات هموار [۱] بعنوان آغاز بکارگیری نقاط محدود اولین بار به منظور مدلسازی پدیده های نجومی همچون گسترش ستارگان و توده ابرهای غباری بکار گرفته شد. نرولز و همکاران [۲] تقریب مبتنی بر بسط سریهای محدود را با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک[۴] ارائه نمودند که آنرا روش جزء پخش[۵] نامیدند. این روش بعدها توسط بلیچکو و همکاران [۳] کامل شد و گالرکین مستقل از جزء[۶] نام گرفت. گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل در مرجع مذکور که از روش گالرکین استفاده می‌نماید، همانند روش اجزاء محدود به معادلات انتگرالی منجر می شود که حل آنها نیازمند انتگرالگیری عددی، معرفی نقاط گوس و وزنهای مربوطه همراه با شبکه‌بندی است. لذا این روش برخلاف نام آن از یک شبکه مجازی برای حل معادلات انتگرال استفاده می‌نمایند. مشکل دیگر در روش گالرکین مستقل از جزء عدم اعمال دقیق شرایط مرزی بعلت عدم ارضای شرط دلتای کرونکر برای توابع شکل[۷] است. این مشکل زمینه ساز دو ایده در روشهای بدون شبکه گردید. ایده اول استفاده ترکیبی المان و نقاط بگونه ای که المانهای مرزی منجر به اعمال شرایط مرزی بطور دقیق گردد که توسط کرونگاز و همکار [۴] پیشنهاد گردید. در ایده دوم نوع دیگری از انتگرالگیری عددی و معروف به انتگرال متکی به نقاط بجای انتگرال متکی به المان بکار گرفته شد. در این روش با استفاده از دیاگرامهای ورونئی انتگرالها محاسبه می شوند. این مطالعات زمینه ساز بکارگیری روش مذکور در اجزاء محدود و نهایتا ارائه روش اجزاء محدود پیشرفته و نیز معرفی المانهای طبیعی[۸] توسط سوکومار گردید [۵]. هم اکنون نیز تحقیقات وسیعی در این زمینه در حال انجام است. استفاده از روش هم‌مکانی‌نقطه‌ای برای حل معادله جابجائی-پخش توسط انیاته و همکاران [۵و۶] ارائه شد. در روش ایشان اگرچه به‌علت شباهت نزدیک روش به روش تفاضل محدود روال انتگرالگیری عددی حذف گردید اما مشکل معمول موجود در روش هم‌مکانی‌نقطه‌ای که عدم دقت کافی در نتایج به علت غیرمتقارن بودن ماتریس ضرائب را داراست. در ادامه تحقیقات

1. Meshless Methods
2. Finite Points
1. Function Approximation

2. Moving Least Square
3. Diffuse Element
4. Element Free Galerkin (EFG)
5. Shape Functions
6. Natural Element

در زمینه روشهای بدون شبکه مبتنی بر ذرات، بونت و همکاران [۷و۸] روش موسوم به هیدرودینامیک ذرات هموار اصلاح شده[۱] را بمنظور اصلاح دقت و سازگاری روش هیدرودینامیک ذرات هموار و با اعمال تصحیح بر روی توابع وزنی ارائه نمودند. در مقاله ایشان علاوه بر تصحیح توابع وزنی با تصحیح انتگرالگیری و استفاده از انتگرال نقطه‌ای، توانمندی روش با ارائه نتایج حل معادله پواسون در روش هیدرودینامیک ذرات هموار و هیدرودینامیک ذرات هموار اصلاح شده مقایسه گردید. زروکات و همکاران [۹] برای حل معادلات جابجائی-پخش خطی استفاده از روش بدون شبکه تابع پایه دایره‌ای[۲] را بدلیل ارائه نتایج خوب برای حل مسائل با توزیع نقاط تصادفی در صفحه دو بعدی ارائه نمودند.

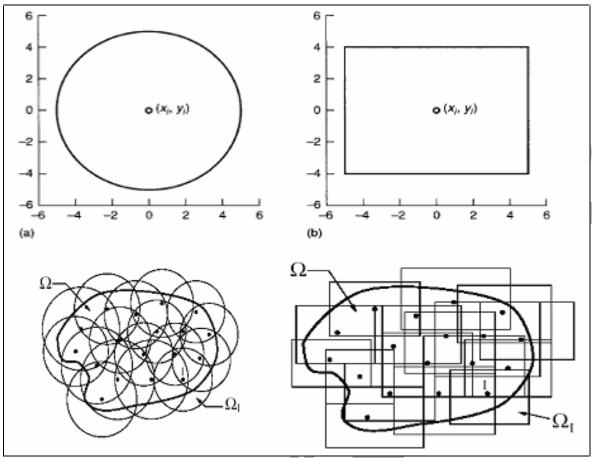
در بخش اول این مقاله مدل جدیدی از روش بدون‌شبکه ارائه شده است که ضمن حذف مراحل انتگرالگیری، گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل طی یک فرآیند خودکار منجر به تولید ماتریس ضرائب متقارن و معین می‌گردد. حداقل مربعات در این روش در دو مرحله اساسی یعنی در مرحله تقریب تابع و استخراج مقادیر توابع شکل و نیز در مرحله گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل بکار گرفته شده است. روش پیشنهادی مذکور توسط ارزانی و افشار در مراجع [۱۰و۱۱] برای حل انواع مختلفی از معادلات دیفرانسیل نسبتا ساده درحالت توزیع نقاط یکنواخت بکار گرفته شده است. ولی بزرگترین مزیت یک روش بدون شبکه را باید در توانائی حل مسائل با توزیع نقاط غیریکنواخت جستجو کرد که در این مقاله بررسی شده است. در بخش ۲ این مقاله به روش اختلاف محدود تعمیم یافته و گامهای اساسی آن پرداخته شده است. در بخش۳ مدل عمومی مثالهای عددی مورد توجه در این مقاله به روش پیشنهادی ارائه شده است. به منظور صحت یابی در این بخش نخست مقایسه نتایج حل عددی با روش پیشنهادی و حل تحلیلی برای معادله پواسون در حالت گسسته سازی یکنواخت و غیریکنواخت حوزه حل ارائه شده است. سپس مسئله نشت (تراوش) آب از زیر یک سپر حل شده است. بخش ۴ مربوط به نتایج است.

۲. روش اختلاف محدود تعمیم یافته (پیشنهادی)

گامهای اصلی در روش بدون شبکه اختلاف محدود تعمیم یافته بصورت زیر هستند.

۱-۲. گام اول: گسسته‌سازی حوزه فیزیکی

در تمامی روشهای بدون‌شبکه گسسته‌سازی حوزه فیزیکی مسئله با تعداد مناسبی از نقاط که هریک شامل زیرحوزه‌های متداخل با زیرحوزه‌های نقطه یا نقاط همسایه است انجام می‌شود. در واقع در این روش دو نقطه درصورتی با یکدیگر ارتباط دارند که در ناحیه مشترک حوزه تاثیرشان تعداد نقاط مشخصی که تامین کننده شرط معکوس‌پذیری ماتریسها است، وجودداشته باشد. یاوری و همکاران [۱۲] گرافهای مناسبی را بمنظور رتبه‌بندی نقاط و تامین ماتریسهای توپر در روشهای بدون شبکه ارائه نموده‌اند. نقطه مشترک در روشهای بدون شبکه توابع وزنی یا بعبارتی توابع پنجره‌ای می‌باشند و خصوصیت اصلی آن دارا بودن مقدار غیرصفر در داخل زیرحوزه و صفر در خارج از زیرحوزه می‌باشد. در مسائل دوبعدی زیرحوزه‌ها بصورت دایره یا مستطیل درنظر گرفته می‌شوند. همچنین بعضی از نقاط می‌توانند بصورت مشترک در تعدادی از حوزه‌های اثر وجود داشته باشند. شکل ۱ نحوه گسسته سازی حوزه فیزیکی را به کمک زیرحوزه های مربع مستطیل یا دایره ای نشان می دهد. نکته قابل توجه آنکه این مرحله در صورت استفاده از یک توزیع یکنواخت دوبعدی و انتخاب زیرحوزه دایره ای تعداد نقاط موجود در یک زیر حوزه معادل تعداد نقاط لازم برای تعیین مشتقات اول در روش اختلاف محدود مرکزی می باشد. به عبارت دیگر تعداد اطلاعات موجود در زیر حوزه نمونه در روش بدون شبکه معادل همان نقاط لازم برای تعین مقدار مشتقات در بسط تیلور در روش اختلاف محدود است.



شکل ۱. حوزه اثر دو بعدی دایره ای ومستطیلی

۲-۲. گام دوم: گسسته سازی معادله دیفرانسیل با روش حداقل مربعات گسسته

روشهای معمول گسسته سازی معادله دیفرانسیل در اجزاء محدود همچون روش گالرکین، حداقل مربعات و روشهای زیرحوزه‌ای همگی به خانواده روشهای باقیمانده وزنی متعلق بوده و اختلاف آنها تنها ناشی از معیارهای مختلف وزن‌دهی به معادلات باقیمانده‌ها است. در کلیه این روشها باقیمانده وزنی غالبا برروی حوزه انتگرال‌گیری شده و سپس برابر صفر قرار داده می‌شود. انتگرالگیری بر روی حوزه، خود منجر به تولید معادلات انتگرالی می‌شود که برای حل این معادلات از انتگرالگیری عددی استفاده می‌شود. در این بخش بنا به اهمیت کاربرد روش حداقل مربعات گسسته به نحوه دست‌یابی به مقادیر توابع شکل با استفاده از حداقل مربعات

7. Corrected Smooth Particle Hydrodynamics (CSPH)
8. Radial Basis Function (RBF)

متحرک و همچنین گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل باز هم با استفاده از روش حداقل مربعات می‌پردازیم. وزن باقیمانده‌ها در این روش شامل مشتق باقیمانده‌ها می‌باشد.

معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی زیر را درنظر بگیرید:

$$L(u)=f \qquad \text{در حوزه } \Omega \tag{۱}$$

$$B(u)=g \qquad \text{در مرز } \Gamma \tag{۲}$$

که درآن L و B عملگرهای دیفرانسیلی، f مقدار سمت راست معادله و g مقدار سمت راست عملگر دیفرانسیلی در مرزهاست. باقیمانده‌های حوزه ای (R_Ω) و باقیمانده‌های مرزی[1] (R_Γ) درنقاط داخلی و مرزی برحسب تابع تقریبی $(\hat{u})$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$R_\Omega = L(\hat{u}) - f \neq 0 \qquad \text{روی حوزه } \Omega \tag{۳}$$

$$R_\Gamma = B(\hat{u}) - g \neq 0 \qquad \text{روی حوزه } \Gamma \tag{۴}$$

فلسفه بکارگیری حداقل مربعات یافتن مقادیر توابع تقریبی در نقاط گسسته سازی حوزه حل است بگونه‌ای که نتایج دارای حداقل خطای باقیمانده درازای قرارگیری در معادلات۱ و۲ باشند. برای دست یابی به چنین جوابی فرض می‌شود معادله تقریب به صورت یک سری چند جمله ای است که مقادیر مربوط به ضرائب این چندجمله ایها از فرآیند حداقل سازی و مقادیر توابع از جایگزینی مختصات نقاط گسسته سازی شده در توابع تقریبی بدست می‌آیند.

$$\underline{u}(\underline{x}) \sim \hat{u}(\underline{a},\underline{x}) \tag{۵}$$

$\underline{a}$ بردار ضرائب مجهول و $\underline{x}$ متغیرهای مستقل حوزه می‌باشند.

گسسته سازی در روش حداقل مربعات گسسته، مجموع مربعات باقیمانده در تعدادی از نقاط محدود حوزه(ne) و مرز (nb) را بصورت زیر شامل می‌شود.

$$\mathrm{I_d}(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{ne}[R_\Omega(\underline{a},x_i)]^2 + \alpha\sum_{i=1}^{nb}[R_\Gamma(\underline{a},x_i)]^2 \tag{۶}$$

ضریب α درمعادلات۶ میزان بزرگی باقیمانده‌های مرزی را در مقایسه با باقیمانده‌های حوزه نشان می‌دهد. مقادیر بزرگتر این پارامتر منجر به اعمال دقیق تر شرایط مرزی می گردد، که در واقع معادل ضریب مربوط به اعمال شرایط مرزی در روش معمول تابع تاوانی است که در روشهای اجزاء محدود بکارگرفته می شود. با جایگزینی باقیمانده‌ها از معادلات ۳ و ۴ در معادله ۶ داریم:

$$\mathrm{I_d} = \sum_{i=1}^{ne}[L(\hat{u}) - f]_i^2 + \alpha\sum_{i=1}^{nb}[B(\hat{u}) - g]_i^2 \tag{۷}$$

درصورت جایگزینی مقادیر توابع تقریبی با مقادیر پارامترهای درون یابی شده توسط توابع شکل در معادله بالا برای نقطه دلخواه j داریم.

$$\hat{u}_j = \sum_{i=1}^{n}\left(N_i u_i\right)_j = \mathbf{Nu} \tag{۸}$$

$$\mathrm{I_d} = \sum_{i=1}^{ne}[L(\mathbf{Nu}) - f]_i^2 + \alpha\sum_{i=1}^{nb}[B(\mathbf{Nu}) - g]_i^2 \tag{۹}$$

با مشتق‌گیری از تابع $\mathrm{I_d}$ نسبت به پارامترهای گرهی دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود.

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \tag{۱۰}$$

در دستگاه معادلات جبری بالا مقدار درآیه lm ام از ماتریس ضرائب و نیز درآیه l ام از بردار سمت راست با روابط زیر قابل محاسبه است.

$$K_{lm} = \sum_{i=1}^{ne}[L(N_l)_i]^T[L(N_m)_i] + \sum_{i=1}^{nb}[B(N_l)]_i^T[B(N_m)]_i \qquad l,m=1,\ldots,\mathrm{n} \tag{۱۱}$$

$$F_l = -\sum_{i=1}^{ne}[L(N_l)]_i^T f_i + \sum_{i=1}^{nb}[N_l]_i^T g \qquad l,m=1,\ldots,\mathrm{n} \tag{۱۲}$$

لازم است قبل از انجام محاسبات مقادیر توابع شکل باید محاسبه شوند که در گام بعد آورده شده است.

۳-۲. گام سوم: تقریب تابع و تعیین مقادیر توابع شکل با روش حداقل مربعات متحرک

در این مرحله از روش اختلاف محدود تعمیم یافته از روش حداقل مربعات متحرک برای محاسبه توابع شکل استفاده می شود. با استفاده از قاعده کلی هرم پاسکال هر تابعی را می‌توان به صورت تابع چندجمله ای زیر نشان داد.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i^T(x)a_t(x) \equiv P^T(x)a(x) \tag{۱۳}$$

$a(x)$ بردار ضرائب تابع چند جمله ای و $P^T(x)$ بردار متغیرهای چند جمله ای که در حالت مرتبه اول و دوم یک و دو بعدی بصورت زیر می باشند.

1. Domain and Boundary Residuals

$$\mathbf{P}=\left(1,x\right) \quad , \quad \mathbf{P}=\left(1,x,y\right) \tag{۱۴}$$

$$\mathbf{P}=\left(1,x,x^{2}\right) \quad , \quad \mathbf{P}=\left(1,x,y,x^{2},xy,y^{2}\right) \tag{۱۵}$$

در این قسمت تابع هدفی متشکل از جمع مربعات وزنی مقادیر باقیمانده ها بصورت زیر کمینه‌سازی می شود.

$$J(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}W_k(x-x_k)[u_k-P^T(x)a(x)]^2 \tag{۱۶}$$

با مشتق گیری از تابع هدف $J(x)$ نسبت به $a(x)$ به منظور کمینه سازی آن و با تعریف ماتریس و بردارهای A و B به صورت زیر داریم:

$$A(x)=PW(\Delta x)P^T \tag{۱۷}$$

$$B(x)=W(\Delta x)P \tag{۱۸}$$

لذا توابع شکل در روش تفاضل محدود تعمیم یافته بصورت زیر است.

$$N_k(x)=PA^{-1}\ B_k \tag{۱۹}$$

نکته مهم در این روش اینست که تعیین مشتقات مرتبه بالاتر تابع شکل بصورت مشتق گیری صریح انجام می شود. در ضمن مرتبه تابع شکل علاوه بر مرتبه تابع چندجمله ای مطابق معادله ۱۴ و ۱۵ به تابع وزنی نیز وابسته است. لذا استفاده از توابع چندجمله ای مرتبه پایین کفایت لازم برای ارائه مشتقات مرتبه اول و دوم را داراست.

۱-۳-۲. بررسی توابع وزنی در تابع شکل

توابع وزنی درحالت کلی باید دارای مشخصه‌های زیر باشند.

الف) پیوسته و مثبت و قابل تفکیک درحوزه‌های تاثیر مسئله باشند و دارای مقدار بزرگتر از صفر در داخل حوزه و مقدار صفر در خارج از حوزه باشند. همچنین سطح زیر منحنی تابع وزنی در یک زیرحوزه معادل واحد باشد.(خاصیت نرمال)

ب) اندازه تابع وزنی برای یک نقطه مقدار بزرگتری نسبت به مقدار آن در سایر نقاط آن زیرحوزه داشته باشد.

ج) تعداد نقاط موجوددریک حوزه تاثیر(زیرحوزه) که مقادیر تابع وزنی در آن محاسبه می‌شود باید بزرگتر یا مساوی درجه تابع پایه (تعداد جملات تابع چندجمله‌ای) باشند.

با بکارگیری حوزه اثر دایره‌ای پارامتر s معرف فاصله دو نقطه از یکدیگر، r معرف شعاع تاثیر زیرحوزه، $w(r)$ تابع وزنی، s_{max} متناظر با اندازه حوزه و $r=s/s_{max}$ در فرمولبندی کلی می‌باشند.

سه تابع وزنی مطرح در روشهای بدون‌شبکه شامل توابع نمائی، اسپلاین درجه ۳ و اسپلاین درجه ۴ بصورت زیر می‌باشند.

تابع وزنی نمائی:

$$w(r)=\begin{cases} e^{-(r/\alpha)^2} & \text{if} \quad r\le 1 \\ 0 & \text{if} \quad r>1 \end{cases} \tag{۲۰}$$

تابع وزنی اسپلاین مرتبه سه:

$$w(r)=\begin{cases} \frac{2}{3}-4r^2+4r^3 & \text{if } r\le \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3}-4r+4r^2-\frac{4}{3}r^3 & \text{if } \frac{1}{2}<r\le 1 \\ 0 & \text{if } r\ge 1 \end{cases} \tag{۲۱}$$

تابع وزنی اسپلاین مرتبه چهار:

$$w(r)=\begin{cases} 1-6r^2+8r^3-3r^4 & \text{if } r\le 1 \\ 0 & \text{if } r>1 \end{cases} \tag{۲۲}$$

تمامی توابع وزنی مذکور در متن برنامه کامپیوتری معرفی شده‌اند و هر یک از توابع وزنی بسادگی با تغییر کد مربوطه قابل انتخاب است. از آنجائیکه مرتبه توابع وزنی در انواع مختلف آن حداقل از مرتبه سه و یا نمائی می‌باشد لذا این توابع برخلاف ظاهر متفاوت، در یک حوزه محدود بسیار به هم نزدیک می‌باشد[۲]. اجراهای متعدد برنامه با بکارگیری توابع وزنی مختلف نشان می‌دهد که نوع توابع وزنی تاثیر بسیار اندکی در نتایج دارد که موید مطلب فوق است.

۳. مثالهای عددی

در این بخش دو مثال عددی از انواع معادلات دیفرانسیل بیضوی بمنظور صحت یابی روش اختلاف محدود تعمیم یافته بررسی شده است. معادلات بیضوی از نوع مسائل مرز مقداری در حوزه های بسته هستند. در این دسته از معادلات خطوط مشخصه حقیقی وجود ندارد و تمام حوزه مساله، حوزه تاثیر و وابستگی آن می باشد. ضمنا جواب این مسائل در تمام حوزه مساله پیوسته بوده و هیچگونه ناپیوستگی در جواب وجود نخواهد داشت. معادله دیفرانسیل بیضوی در شکل عمومی آن با شرایط مرزی دیریچله و نیومن به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=S(x,y) \\ &\phi=\bar{\phi} \qquad\qquad \Gamma_u \ \text{درحوزه} \\ &D_n\frac{\partial\phi}{\partial n}=\bar{q} \qquad \Gamma_q \ \text{درمرز} \end{aligned} \tag{۲۳}$$

باقیمانده های حوزه ای و مرزهای دیریچله و نیومن مطابق روابط۳ و ۴ به صورت زیر هستند.

$$\mathbf{R}_{\Omega}=D_j\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2}-S\neq 0 \qquad j=1,2$$
$$\mathbf{R}_{\Gamma_u}=\phi-\bar{\phi} \qquad (۲۴)$$
$$\mathbf{R}_{\Gamma_q}=D_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}n_j-\bar{q}$$

j اندیس تکرار و نشانگر بعد مسئله است یعنی اگر $j=1$ باشد مسئله یک بعدی و $j=2$ معرف مسئله دوبعدی همانند معادله ۲۳ است. در معادله بالا n_j نشانگر j امین بردار نرمال خروجی از مرز Γ_q است. عملگرهای دیفرانسیلی و سایر پارامترها برای این نوع مسائل مطابق روابط ۱ و۲ بصورت زیر هستند.

$$L(\cdot)=\left[D_j\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j^2}\right] \quad \text{در حوزه } \Omega \quad \text{و} \quad j=1,2 \quad ، \quad f=S$$
$$B(.)=1.0 \quad : \quad g=\bar{\phi} \quad \Gamma_u \qquad (۲۵)$$
$$B(.)=D_j\frac{\partial(.)}{\partial x_j}n_j \quad : \quad g=\mathrm{q} \quad \Gamma_q$$

مطابق روابط ۱۱ و۱۲ دستگاه معادلات جبری به صورت $\mathbf{k}\ \varphi=\mathbf{f}$ قابل استخراج است. که ماتریس $\mathbf{k}$ و بردار $\mathbf{f}$ و نیز بردار مجهولات φ به صورت زیر هستند.

$$\mathbf{k}_{lm}=\sum_{i=1}^{ne}\left[D_j\frac{\partial^2 N_l}{\partial x_j^2}\right]_i^T\left[D_j\frac{\partial^2 N_m}{\partial x_j^2}\right]_i+$$
$$\alpha\sum_{i=1}^{nb}[BN_l]_i^T[BN_l]_i \qquad (۲۶)$$

$$\mathbf{f}_l=\sum_{i=1}^{ne}\left[D_j\frac{\partial^2 N_l}{\partial x_j^2}\right]_i^T S_i+\alpha\sum_{i=1}^{nb}[BN_l]_i^T g_i \qquad (۲۷)$$

$$\varphi=\left[\phi_1,\phi_2,........,\phi_n\right]^T \qquad (۲۸)$$

۱-۳. حل عددی معادله پواسون به روش اختلاف محدود تعمیم یافته

در این بخش حل معادله پواسون بصورت زیر مد نظر است.

$$\nabla^2 u(x,y)=\sin\pi x\cos\pi y$$
$$\Omega(x,y):\{0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1\}$$

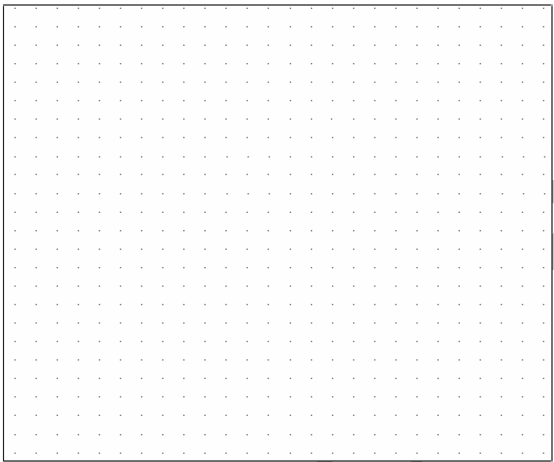
شرایط مرزی مسئله از نوع دیریخله به‌صورت زیر است.

$$u=0 \qquad x=0$$
$$u=0 \qquad x=1$$
$$u=0 \qquad y=0$$
$$u=0 \qquad y=1$$

این معادله توسط بونت و همکاران [۱۳] برای صحت یابی روش هیدرودینامیک ذرات هموار۱ برای بررسی توانمندی روش برای حوزه با توزیع تصادفی نقاط حل شده است. جواب تحلیلی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

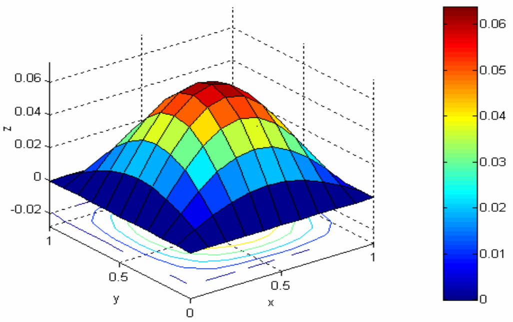
$$u=\frac{1}{2\pi^2}\sin\pi x\cos\pi y$$

حوزه مسئله با۱۲۱نقطه و۶۷۶ نقطه با توزیع یکنواخت(۱۱×۱۱) و (۲۶×۲۶) مطابق شکل۲ گسسته سازی شده است. تابع وزنی مورد استفاده در این مثال از نوع اسپلاین مرتبه۳ مطابق رابطه۲۱ است. در هر دو نوع گسسته سازی، تابع چند جمله ای مرتبه یک دوبعدی مطابق رابطه ۱۵ است(np=۱). تعداد نقاط موجود در هر زیرحوزه معادل۳ در هر بعد یعنی ۹ نقطه است(ns=۳). نتایج تحلیل عددی برای توزیع یکنواخت ۱۲۱ نقطه‌ای بصورت گراف سه بعدی مطابق شکل‌های ۳ و ۴ ارائه شده است. به منظور مقایسه نتایج حل عددی و جوابهای تحلیلی بصورت مقاطع در محور مرکزی و نزدیک به محور مطابق شکل‌های ۵ و۶ برای ۱۲۱ و ۶۷۶ نقطه ارائه شده است.



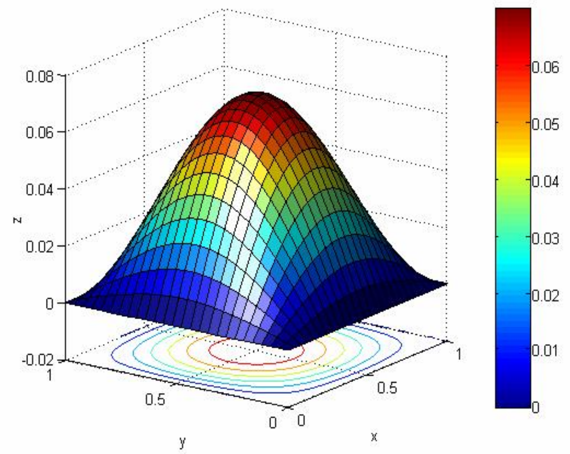
شکل ۲. توزیع یکنواخت نقاط (۲۶×۲۶) در حوزه و مرزها

$$\left(\Delta x=\Delta y=\frac{1}{25}=0.04\right)$$

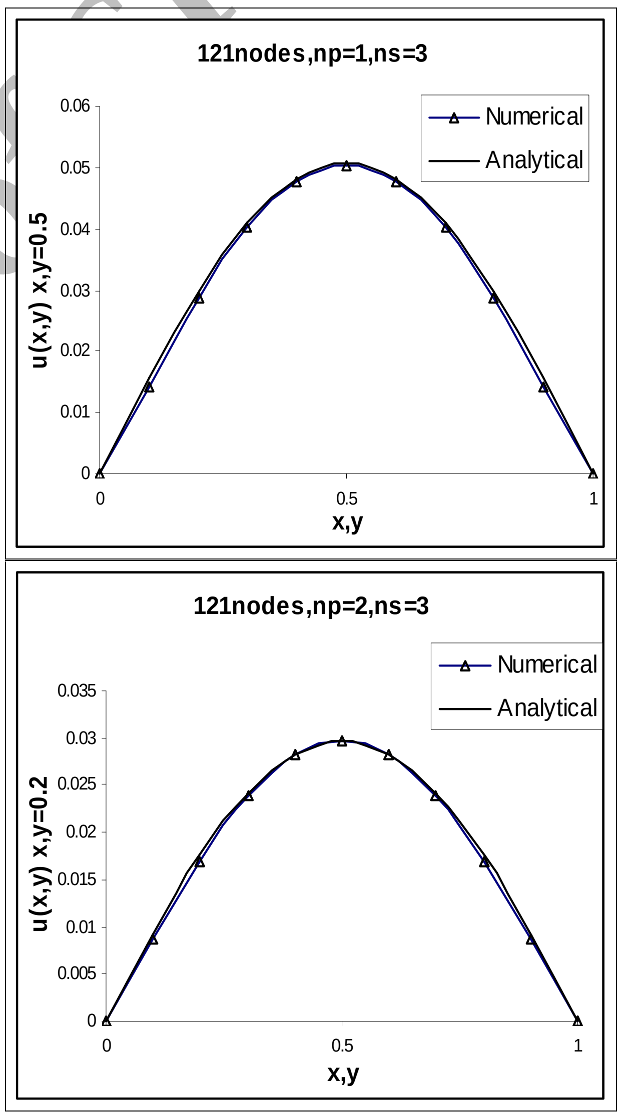


شکل۳. نتایج عددی حل معادله پواسون برای۱۲۱ نقطه داخل حوزه با توزیع یکنواخت

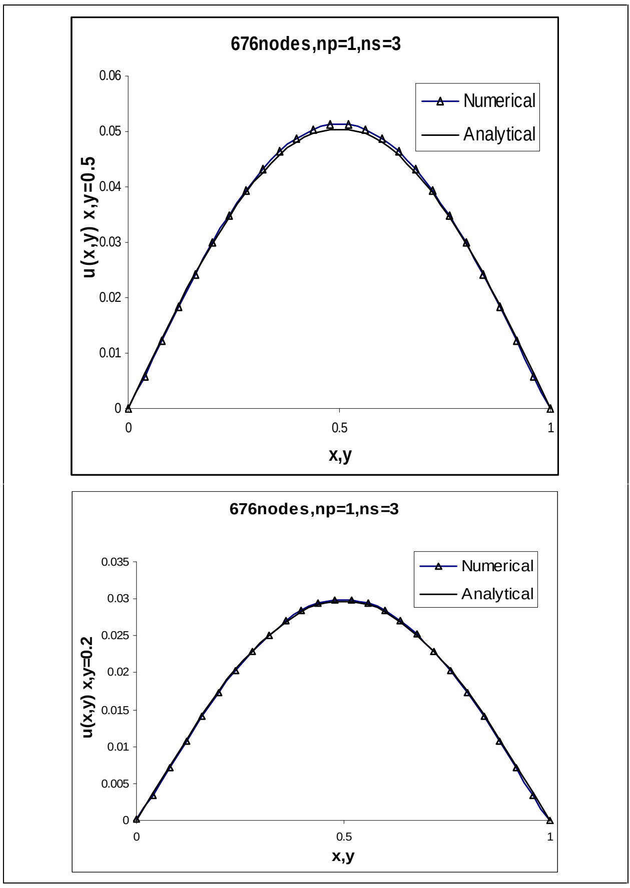
1. Smooth Particle Hydrodynamic (SPH)



شکل۴. نتایج عددی حل معادله پواسون برای۶۷۶ نقطه داخل حوزه با توزیع یکنواخت

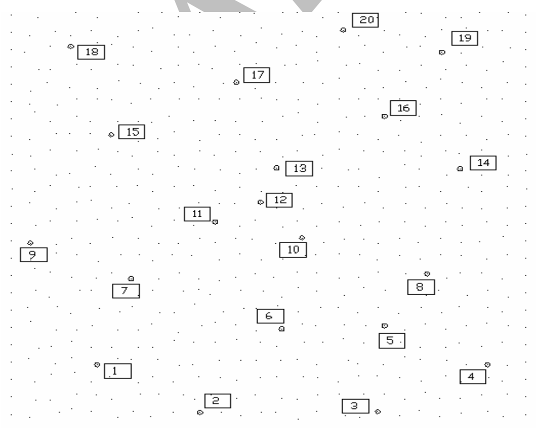


شکل۵. مقایسه نتایج تحلیلی و عددی معادله پواسون برای۱۲۱ نقطه داخل حوزه با توزیع های یکنواخت



شکل ۶. مقایسه نتایج تحلیلی و عددی معادله پواسون برای۶۷۶ نقطه داخل حوزه با توزیع های یکنواخت نقاط

برای بررسی کارآمدی روش حوزه حل مسئله با ۶۷۶ نقطه با توزیع غیریکنواخت مطابق شکل ۷ گسسته‌سازی شده است. از آنجائیکه در حالت توزیع غیریکنواخت ارائه نتایج به صورت سه بعدی دارای کیفیت مناسب نبوده و گویا نیست. لذا نتایج در این حالت به صورت جدول ۱ برای تعدادی از نقاط حوزه به طور تصادفی انتخاب شده اند نشان داده شده است.



شکل۷. توزیع یکنواخت نقاط در مرزها $(\Delta x = \Delta y = 0.04)$ و توزیع غیریکنواخت در داخل حوزه

جدول ۱ مقایسه نتایج حل عددی و تحلیلی معادله پواسون برای تعدادی از نقاط به طور تصادفی

نقاط نمونه	مختصات نقاط x	مختصات نقاط y	نتایج حل عددی	نتایج تحلیلی	درصد خطا
۱	۰/۱۶۴۷	۰/۱۵۴۰	۰/۰۱۰۴۰۳	۰/۰۱۱۷۲۶	۱۱/۲
۲	۰/۳۶۴۸	۰/۰۴۴۲	۰/۰۰۶۱۵۴	۰/۰۰۶۳۶۸	۳/۳
۳	۰/۷۱۰۱	۰/۰۴۶۲	۰/۰۰۵۶۹۹	۰/۰۰۵۷۷۴	۱/۳
۴	۰/۹۲۳۹	۰/۱۵۴۰	۰/۰۰۵۳۹۹	۰/۰۰۵۵۰۸	۱/۹
۵	۰/۷۲۳۸	۰/۲۴۴۲	۰/۰۲۷۳۱۴	۰/۰۲۶۷۵۳	۲/۰
۶	۰/۵۲۳۷	۰/۲۳۶۳	۰/۰۳۳۶۳۱	۰/۰۳۴۱۴۴	۱/۵
۷	۰/۲۳۱۴	۰/۳۵۲۰	۰/۰۲۸۴۳۰	۰/۰۳۰۲۱۱	۵/۸
۸	۰/۸۰۶۲	۰/۳۶۳۷	۰/۰۲۷۱۳۰	۰/۰۲۶۲۳۸	۳/۳
۹	۰/۰۳۵۳	۰/۴۳۴۳	۰/۰۰۵۳۱۴	۰/۰۰۵۶۴۲	۵/۸
۱۰	۰/۵۶۲۹	۰/۴۴۶۰	۰/۰۴۹۶۵۴	۰/۰۴۸۹۲۷	۱/۴
۱۱	۰/۳۹۴۲	۰/۴۸۳۳	۰/۰۴۷۱۹۳	۰/۰۴۷۸۷۸	۱/۴
۱۲	۰/۴۸۲۵	۰/۵۲۸۴	۰/۰۴۹۹۳۶	۰/۰۵۰۳۹۲	۰/۹
۱۳	۰/۵۱۳۹	۰/۶۰۶۸	۰/۰۴۷۳۵۷	۰/۰۴۷۷۸۳	۰/۸
۱۴	۰/۸۷۰۹	۰/۶۰۴۸	۰/۰۱۸۹۹۴	۰/۰۱۸۷۷۶	۱/۱
۱۵	۰/۱۹۲۲	۰/۶۸۳۲	۰/۰۲۳۲۴۵	۰/۰۲۴۲۴۰	۴/۱
۱۶	۰/۷۲۳۸	۰/۷۲۶۳	۰/۰۲۹۴۶۵	۰/۰۲۹۲۰۶	۰/۸
۱۷	۰/۴۳۵۴	۰/۸۰۴۷	۰/۰۲۷۴۷۳	۰/۰۲۸۵۹۰	۳/۹
۱۸	۰/۱۱۳۸	۰/۸۸۷۰	۰/۰۰۵۴۷۵	۰/۰۰۶۲۱۴	۱۱/۸
۱۹	۰/۸۳۵۶	۰/۸۷۳۳	۰/۰۰۹۷۹۸	۰/۰۰۹۶۴۳	۱/۶
۲۰	۰/۶۴۳۴	۰/۹۲۴۳	۰/۰۱۰۸۴۷	۰/۰۱۰۷۲۷	۱/۱

۲-۳. حل عددی نشت از زیر سپر به روش اختلاف محدود تعمیم یافته

معادله دیفرانسیل بیضوی در حالت غیر همگن و بدون مقدار سمت راست بنام معادله پواسون نامیده می شود و به صورت زیر است.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)=0$$

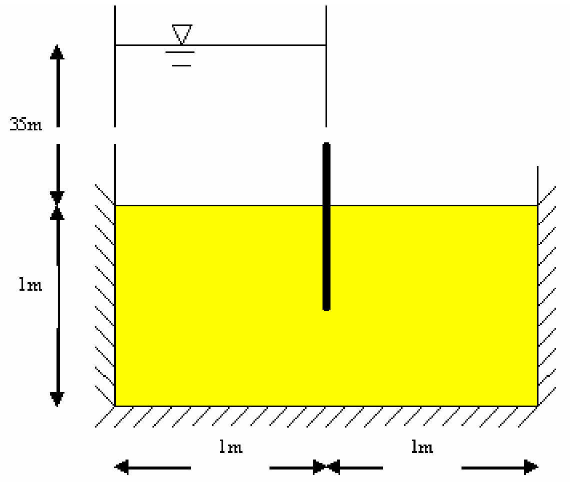
k_x, k_y در معادله بالا، ضرائب نفوذ پذیری در دو راستا و ϕ پتانسیل است .در حالت ایزوتروپیک ضرائب نفوذ پذیری در راستای x ,y با هم برابر هستند. معادله در حالت ایزوتروپیک و همگن بصورت زیر و با شرایط مرزی دیریخله و نویمان، معروف به مسئله نشت است.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y}=0$$

$$\phi=\bar{\phi}$$

$$k_n \frac{\partial \phi}{\partial n}=\bar{q}$$

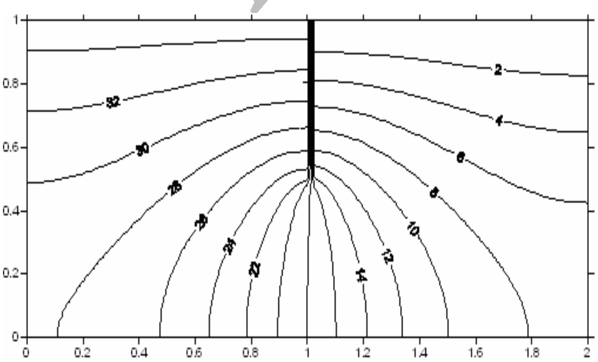
حوزه فیزیکی دو بعدی مسئله مطابق شکل ۸ به طول دو و عمق یک متر میباشد که یک پرده آب بند در وسط فاصله طولی (نقطه بطول یک متر) و در عمق ۰/۵ متری قرار گرفته است. مقدار پتانسیل(هد) در نیمه سمت چپ پرده آب بند معادل ۳۵ متر $\left(\bar{\phi}=35m\right)$ و در نیمه سمت راست معادل صفر $\left(\bar{\phi}=0m\right)$ است که معادل شرایط مرزی از نوع دیریچله برای مسئله می باشند. سرعتهای معادل صفر $\left(\bar{q}=0m/s\right)$ در جهت عمود بر مرزهای غیر از مرزهای دیریچله و نیز دو طرف بدنه سپر از شرایط مرزی نیومن می باشند. این پتانسیلهای یکنواخت و نامساوی در سمت چپ و راست سپر و نیز شرایط مرزی نیومن، توزیع ثابت و پایداری از پتانسیل را در داخل حوزه فیزیکی مسئله ایجاد می نمایند.



شکل۸. شماتیک حوزه فیزیکی مسئله نشت با ابعاد مربوطه

به منظور حل عددی حوزه فیزیکی مسئله با۳۳۲۱ نقطه(۴۱×۸۱) به فواصل یکنواخت در جهتهای x و y و به ترتیب معادل ۰/۰۲۵ متر گسسته سازی شده است. تابع وزنی مشابه مسئله قبل و از نوع اسپلاین مرتبه ۳ است. تابع چند جمله ای مورد استفاده مرتبه دو دوبعدی مطابق رابطه ۲۲ (np=۳) و تعداد نقاط موجود در هر زیرحوزه معادل۵ در هر بعد یعنی ۲۵ نقطه است(ns=۵).

نتایج مربوط به حل عددی مسئله روش اختلاف محدود تعمیم یافته در شکل۹ نشان داده شده است. اعمال دقیق شرایط مرزی دیریخله و نیز شرایط مرزی نویمان که در واقع عمود بودن خطوط پتانسیل بر مرزها است بخوبی با روش عددی پیشنهادی مدلسازی شده است.



شکل۹.حل معادله نشت از زیر سپر با ۳۳۲۱ نقطه (np=۲ , ns=۵)

۴. نتیجه گیری

روش ریاضی مبتنی بر حداقل مربعات در این مقاله در دو مرحله بکار گرفته شده است. در اولین مرحله معادله دیفرانسیل بکمک نوع گسسته حداقل مربعات، گسسته‌سازی و ماتریس ضرائب دستگاه معادلات جبری برحسب توابع شکل حاصل گردید. گسسته سازی هر نوع معادله دیفرانسیل به‌روش حداقل مربعات گسسته منجر به ماتریس ضرائب با خواص ویژه چون متقارن و مثبت‌معین می گردد. که این مزیت در بین روشهای متعدد عددی به لحاظ دقت وسرعت محاسبات ماشینی با اهمیت است. در مرحله دوم برای بدست‌آوردن مقادیر توابع شکل در هر نقطه فرضی در داخل حوزه حل از حداقل مربعات متحرک استفاده شده است. همانند بسیاری از روشهای بدون‌شبکه و برخلاف روش اجزاءمحدود تابع شکل و مشتقات آن بصورت صریح و از قبل مشخص شده، در فرمول بندی اعمال نمی‌شود، بلکه مقادیر توابع شکل با بکارگیری حداقل مربعات متحرک برای کلیه نقاط داخل حوزه و نقاط مرزی بدست می‌آید. بکارگیری حداقل مربعات متحرک در مرحله تعیین مقادیر توابع شکل یا تقریب تابع، منجر به ارائه پیوستگی های مرتبه بالاتری برای توابع شکل بازای چندجمله‌ایهائی با تعداد جملات کم می گردد. از آنجائیکه حداقل مربعات در مرحله گسسته سازی و تعیین تابع شکل بکار گرفته شده است لذا روش اختلاف محدود تعمیم یافته را باید کاملا مبتنی بر حداقل مربعات با تمام مزایای بکارگیری آن از منظر ریاضی دانست. از دیگر مزایای این روش حذف مراحل انتگرال‌گیری از روال محاسبه ماتریسهای ضرائب و همچنین پشتوانه بدون‌شبکه بودن آن در مفهوم واقعی و در مقایسه با روشهای المان محدود و احجام محدود است. توابع شکل در روش اختلاف محدود تعمیم یافته همانند توابع شکل اجزاءمحدود شرط دلتای کرونکر را ارضا نمی نمایند یعنی در نقطه مورد نظر مقدار تابع یک و در سایر نقاط صفر نمی باشد. این خاصیت اعمال کاملا دقیق شرایط مرزی را مشکل می کند. فرمولبندی روش با مثالهائی دوبعدی از معادلات دیفرانسیل بیضوی صحت‌یابی شده است.

علت انتخاب معادلات بیضوی برای صحت یابی روش، وجود مشتقات مرتبه دوم پارامترهای مجهول در معادله است لذا فرمولبندی روش بلحاظ دقت برای تقریب مشتق دوم بررسی شده است. در مثال اول نتایج حل عددی و تحلیلی معادله پواسون مقایسه و مشاهده شده است که نتایج تحلیل عددی دارای انطباق نسبی خوبی با جواب تحلیلی است. تجربه اجراهای مختلف برنامه نشان می‌دهد که با افزایش تعداد نقاط گسسته سازی حوزه مسئله روش از دقت مطلوب تری برخوردار است. بررسی نتایج حل عددی مثال‌یک برای یک حوزه با ۱۲۱ و۶۷۶ نقطه موید مطلب فوق است. در مثال دوم معادله نشت آب از زیر سپر در یک حوزه مستطیلی بررسی شده است. نتایج حل مسئله در این حالت دقت خوب روش را در اعمال شرایط مرزی و نیز نحوه توزیع خطوط هم پتانسیل را در حوزه به خوبی نشان می دهد. دقت جوابها در حل مثالهای متنوع این مقاله حکایت از توانمندی و قابل رقابت بودن روش در مقایسه با سایر روشهای عددی اعم از متکی به شبکه یا بدون شبکه دارد.

مراجع

[1] Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P., *"Generalizing the Finite Element Method Diffuse Approximation and diffuse Element*" Coput. Mech. 10, 1992, 307-318

[2] Belytschko, T., Krongauz., Y., Organ, D., Fleming, M., Krysl, P., "*Meshless Methods: An Overview and Recent Development"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139, 1996, 3-47

[3] Krongauz, Y., Belytschko., T., *"Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations Using Finite Elements.*" Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 131,1996, pp. 133-145

[4] Sukumar, N., Tabarraei., A., *"Conforming Polygonal Finite Elements"* Int. J. Numer. Meth. Engrg. Vol. 61, pp. 2045-2066,2004.

[5] Onate, E., Idelsohn, S., Zienkievicz, O.C., Taylor, R.L. Sacco, C., *"A Stabilized Finite Point Method for Analysis of Fluid Mechanics Problems*", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol.139, 1996, pp. 315-346.

[6] Onate, E., Idelsohn, S., Zienkievicz, O.C., Taylor, R.L., *"A Finite Point Method in Computational Mechanics Applications to Convective Transport and Fluid Flow*" Int. J. Numer. Meth.Engng.Vol.39pp. 3839-3866,1996.

[7] Javier Bonet, Sivakumar Kulasegaram *"A Simplified Approach to Enhance the Performance of Smooth Particle Hydrodynamics Methods"* Applied Mathematics and Computation 126, 2002, pp.133-155.

[8] Javier Bonet, B., Hassani, L.-T., Lok, S., Kulasegaram *"Corrected Smooth Particle Hydrodynamics- a Reproducing Kernel Meshless Method for Computational Mechanics in UK – 5th ACME Annual Conference,* 1997.

[9] Zerroukat, M., Djidjeli, K., Charafi, A., *"Explicit and Implicit Meshless Methods for Linear Advection-Diffusion- type Partial Differential Equation*" International Journal for Numerical Methods in Engng.Vol.48, 2000, pp. 19-35.

[10] Arzani, H., Afshar, M.H., *"Solving Poisson's Equations by the Discrete Least Square Meshless Method*" Paper presented at 28th Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods (BEM/MRM28)", Skiathos, Greece, 2006.

[۱۱] ارزانی ،ح و افشار ، م.ه ، مروری بر روشهای نقاط محدود و حل معادله دیفرانسیل جابجائی-پخش خطی، مجله بین- المللی علوم مهندسی دانشگاه علم وصنعت، شماره **۳**، جلد۱۶، ۱۳۸۵، ص۱۹-۱۰.

[12] Yavari, A., Kaveh, A., Sarkani, Sh., Rahimi, Hosein Ali., *Bondarabady Topological Aspects of Meshless*

Methods and Nodal Ordering for Meshless Discritization; Int. J. Numer. Meth. Engng. 52, 2001, pp. 921-938.

[13] Bonet Javier, Kulasegaram Sivakumar. *A Simplified Approach to Enhance the Performance of Smooth Particle Hydrodynamics Methods*. Applied Mathematics and Computation 2002;126:133-155.