International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2014)

January 2014, Volume 25, Number 1
pp. 395-403

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

Robust Control Chart for Time Series Data

N. Shariati & H. Shahriari*

Nima Shariati, *Ph.D. Student, Industrial Engineering Department, Iran University of Science and Technology; shariatinima@yahoo.com*
Hamid Shahriari, *Associated Professor, Industrial Engineering Department, K. N. Toosi University of Technology; hshahriari@kntu.ac.ir*

Keywords

Autocorrelation,
Classical Estimator,
Robust Estimator,
Robust Control Chart,
Outlier,
IRFFT Method

[1]**ABSTRACT**

Control charts are the most useful tools for controlling the processes statistically. The construction of the control charts requires the estimation of the process parameters using random sample data. Usually the classical estimators of the process parameters are used to construct the control charts. The classical estimators of the parameters of the processes generating autocorrelated data are sensitive to the presence of the outlier observations. Applying classical methods of estimation while outliers are present, introduce biased estimates of the model parameters which result in wrong interpretation of the control chart. In this research a method called Iteratively Robust Filtered Fast Tau (IRFFT) which is insensitive to the presence of the outliers is proposed for estimating the parameters of the autocorrelated models. The newly introduced estimators are used to construct robust control chart for autocorrelated data. The suggested robust control chart is compared with the control chart whose parameters are estimated using LS method. Results of the simulation study for the two methods indicate that the ARL for the suggested robust control chart is much smaller under different scenarios. The findings may be extended to the other time series models.

© 2014 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 24, No. 4, All Rights Reserved

Archive of SID

* **Corresponding author. Hamid Shahriari**
Email: *hshahriari@kntu.ac.ir*

www.SID.ir

نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنـــایع و مدیـــریت تولیـــد

شمـــاره ۴، جلـــد ۲۴، اسفنـــد ۱۳۹۲
صفحـــه ۴۰۳-۳۹۶

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

نمودار کنترل استوار برای داده‌های سری‌های زمانی

نیما شریعتی* و حمید شهریاری

کلمات کلیدی

سری‌های زمانی، خودهمبستگی، نمودار کنترل استوار، برآورد استوار، روش IRFFT، داده‌پرت

چکیده:

نمودارهای کنترل از جمله مهم‌ترین ابزارهای کنترل آماری فرایندها می‌باشند. طراحی مناسب نمودارهای کنترل نیازمند برآورد کردن مقادیر پارامترهای فرایند با استفاده از داده‌های نمونه‌ای است. در روش‌های معمول طراحی نمودارهای کنترل، عموماً از برآوردکننده‌های کلاسیک برای برآورد کردن پارامترهای فرایند استفاده می‌شود. برآوردگرهای کلاسیک پارامترها در مدل‌هایی با مشاهدات خودهمبسته، به انواع مختلف مشاهدات دورافتاده حساس بوده و حضور آنها منجر به معرفی برآوردهای اریب و در نتیجه تفسیرهای اشتباه نمودارهای کنترل می‌شود. در این مقاله از روشی تحت عنوان برآورد τ سریع فیلتر شده‌ی استوار تکراری (IRFFT) که روشی مطلوب و غیر حساس به آلودگی است برای برآورد کردن پارامترهای مدل‌های اتورگرسیو و طراحی نمودارهای کنترل استوار برای مشاهدات خودهمبسته استفاده شده است. نمودار کنترل استوار IRFFT طراحی شده با نمودار کنترل بر پایه‌ی برآورد حداقل مربعات براساس یکی از مهم‌ترین معیارهای ارزیابی نمودارهای کنترل، متوسط طول دنباله، و با داده‌های شبیه‌سازی شده مقایسه شده است. نمودار کنترل پیشنهادی بر حسب تمامی معیارهای مورد بررسی، دارای خواص مطلوبی بوده و به راحتی قابل تعمیم به مشاهداتی با هر مدل سری زمانی می‌باشد..

۱. مقدمه

مناسب‌ترین شیوه برای پایش و بهبود کیفیت، کنترل آماری فرایند *SPC* می باشد. نمودارهای کنترل از جمله مهمترین ابزارهای کنترل آماری فرایندها می‌باشند. طراحی نمودارهای کنترل سنتی بر پایه‌ی فرضیات نرمال بودن توابع توزیع مشخصه‌های کیفی مورد نظر و استقلال داده‌های فرایند پایدار می‌باشند. از آنجایی که در عمل یکی یا هر دو این فرض ها مکرراً نقض می‌شود، این امر منجر به جایگزینی‌های اشتباه در حدود کنترل و در نتیجه کاهش کارایی آن خواهدشد. لذا هدف این تحقیق، ارائه‌ی نمودارهای کنترلی است که در حضور انواع مختلف آلودگی و داده‌های پَرت در فرایندهای خودهمبسته، توانایی کنترل فرایند با کارایی بالا را داشته باشند. این آلودگی‌ها در فاز I که فاز تعیین حدود کنترل بوده بسیار تأثیر گذار خواهند بود. به منظور طراحی نمودارهای کنترل، نیاز به برآورد پارامترهای فرایند به گونه‌ای می‌باشیم که هم در صورت آلوده بودن و هم در صورت عدم آلودگی داده‌ها، دارای عملکرد مناسبی در برآورد پارامترهای آن باشد. این برآوردکننده‌ها، برآوردکننده‌های استوار نامیده می‌شوند. برای طراحی مناسب نمودارهای کنترل نیازمند به مقادیر پارامترهای فرایند می‌باشیم. در بسیاری از موارد کاربردی، مقادیر دقیق پارامترهای فرایند نامعلوم بوده و نیاز است که پارامترها با استفاده از داده‌های نمونه‌ای برآورد شوند. در روش‌های معمول طراحی نمودارهای کنترل، عموماً از برآوردکننده‌های کلاسیک برای برآورد پارامترهای فرایند استفاده می‌شود.

این برآوردکننده‌ها تحت مفروضات خاصی قابل کاربرد می‌باشند که در شرایط عملی به ندرت رخ می‌دهند. در این مقاله نمودار

تاریخ وصول: ۹۰/۶/۹

تاریخ تصویب: ۹۲/۲/۱

نیما شریعتی، دانشجوی دکترای مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، shariatinima@yahoo.com

*نویسنده مسئول مقاله: **دکتر حمید شهریاری**، دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، hshahriari@kntu.ac.ir

Archive of SID

www.SID.ir

کنترل بر اساس تخمین پارامترهای مدل‌های سری‌های زمانی به روش استوار *IRFFT* [۱] که توسط شریعتی و همکاران [۱] ارائه شده است، برای فرایندهای خودهمبسته طراحی شد تا از آثار نامطلوب جلوگیری شود.

روش *IRFFT*، روش برآورد τ سریع فیلترشده‌ی استوارِ تکراری برای تخمین پارامترهای مدلهای *AR* می‌باشد که روشی جدید با معیارهای بسیار مطلوب کارایی و استواری همزمان، مانند میانگین مربعات خطا، تابع تأثیر و نقطه‌ی شکست برای داده‌های خودهمبسته می‌باشد. در ادامه از برآوردکننده‌ی مذکور برای طراحی نمودارهای کنترل استفاده شده‌است. به طور کلی در صورت نامعلوم بودن پارامترها، تمامی انواع نمودارهای کنترل برای داده‌های خودهمبسته به نوعی به تخمین بردار پارامترهای $\lambda = (\phi, \mu)$ و نیز تخمین پراکندگی باقیمانده‌ها σ_u^2 (در اینجا مدل *AR(1)* را مد نظر قرار داده‌ایم.) ارتباط دارند؛ عدم دقت در تخمین هر چه بهتر این پارامترها، منجر به کاهش حساسیت و کارایی نمودارهای کنترل مربوطه در کشف حالات خارج از کنترل خواهدشد.

برای مواجهه با آلودگی‌ها و نقض فرض نرمال بودن داده‌ها در نمودارهای کنترل با مشاهدات مستقل، دو و سا[۲] [۲] نمودار کنترل $\bar{X}$ را برای این نوع از داده‌ها زمانی که چولگی مثبت دارند ارائه کرده‌اند. وو و ونگ[۳] [۳]، بسط *کورنیش - فیشر* را برای ساخت نمودار کنترل $\overline{X}$ به کار گرفته‌اند. برای کاهش اثر داده‌های پرت، امر[۴] [۴] بر پایه میانه قدر مطلق انحراف از میانه نمونه ای (*MAD*)[۵]، نمودار کنترل *R* را ارائه کرده‌است. خو[۶] [۵] نمودارهای کنترل MAR_Q ، $EWMAR_Q$ که دارای حساسیت بیشتری در مقابل کشف حالات خارج از کنترل بود را برای این نوع از داده‌ها ارائه کرده‌است.

نمودارهای کنترل استوار برای فرایندهای چندمتغیره توسط اِستفاتوس و همزه[۷] [۶] ارائه شده‌است. شهریاری و همکاران [۷]، نمودارهای کنترل استواری بر پایه برآورد کننده‌ی *M* برای نمونه‌ی تکی با اندازه $m*n$ پیشنهاد کرده‌اند. همچنین شهریاری و همکاران [۸]، نمودار کنترل *R* را بر پایه‌ی برآوردکننده‌ی دو مرحله‌ای جدید پراکندگی، برای زیر گروه‌های *n* تایی در شرایط آلودگی کلی و محلی ارائه داده‌اند.

در سری‌های زمانی بر خلاف داده‌های مستقل، انواع مختلفی از داده‌های پرت وجود دارند که شامل داده‌های پرت افزایشی[۸]، داده‌های پرت جانشینی[۹] و داده‌های پرت ابداعی[۱۰] می‌باشند [۹]. بر این اساس کروکس[۱۱] و همکاران [۱۰] نمودار کنترل استوار را برای داده‌های سری‌های زمانی بر اساس پیش‌بینی به روش استوار هالت وینترز[۱۲] ارائه داده‌اند که دارای حساسیت کمی بوده و منطق آن بر اساس کاهش اثر داده‌های پرت به دلیل آشکار شدن اختلاف زیاد آن داده‌ها با مقادیر پیش‌بینی‌شده بنا شده‌است.

در این نمودار ، حدود کنترل برای پایش خطای یک قدم جلوتر[۱۳] طراحی شده‌است که بر تخمین استوار پارامتر مقیاس[۱۴] یا پراکندگی بر اساس برآورد گر τ که در آن از مقادیر پیش‌بینی به روش استوار هالت وینترز استفاده می‌شود تکیه دارد. این روش تنها برای پایش خطای یک قدم جلوتر و صرفاً برای کاهش اثر داده پرت بدون توجه به نوع آن در مدل‌های سری‌های زمانی و نیز تغییرات در میانگین فرایند کاربرد دارد. روش مطرح شده در این مقاله بر اساس روش بسیار رقابتی *IRFFT* [۱] به تخمین پارامترهای مدل‌های سری‌های زمانی می‌پردازد که در تمامی انواع نمودارهای کنترل برای داده‌های خودهمبسته قابل کاربرد می‌باشد.

نمودار کنترل طراحی شده بر اساس برآوردکننده‌ی *IRFFT* ، نمودار کنترل استوار *IRFFT* نامیده شده‌است. سپس این نمودار کنترل با نمودار کنترل باقیمانده‌ها بر اساس تخمین‌های روش حداقل مربعات توسط معیارهای ارزیابی نمودارهای کنترل مقایسه شده‌است. این مقایسه با شبیه‌سازی (با استفاده از نرم‌افزار *MATLAB*) تمامی حالات ترکیبی ممکن انواع آلودگی‌های سری‌های زمانی و شیفت در میانگین در فاز I و سپس وقوع تمامی حالات ترکیبی ممکن انواع آلودگی‌های سری‌های زمانی و شیفت در میانگین در فاز II با معیارهای مذکور صورت پذیرفته است. در بخش دوم نمودار کنترل برای فرایندهای خودهمبسته طراحی شده و اثر برآورد پارامترها در کارایی آن مشخص شده‌است. در بخش سوم ارزیابی نمودارهای کنترل برای فرایندهای خودهمبسته به همراه نتایج شبیه‌سازی به‌منظور ارزیابی نمودار کنترل استوار *IRFFT* در برابر روشهای کلاسیک برای داده‌های خودهمبسته آورده شده‌است. در انتها نیز نتیجه‌گیری گنجانده شده‌است.

[1] *Iteratively Robust Filtered Fast Tau*
[2] *Dou and Sa*
[3] *Wu and Wang*
[4] *Omar*
[5] *Median Absolute Deviation*
[6] *Khoo*
[7] *Stefatos & Hamza*
[8] *Additive Outliers*
[9] *Replacement Outliers*
[10] *Innovation Outliers*
[11] *Croux*
[12] *Robust Holt-Winters*
[13] *One-step-ahead forecast error*
[14] *Robust Scale Estimate*

www.SID.ir
Archive of SID

۲. طراحی نمودار کنترل برای فرایندهای خودهمبسته و بررسی اثر برآورد پارامترها در کارایی آن

یکی از نمودارهای کنترل که دارای مزایای بسیاری خصوصاً از لحاظ کاربردی می باشد، *نمودارهای کنترل باقیمانده‌ها*[1] می‌باشد[۱۱]. در اینجا از نمودار کنترل باقیمانده‌ها به دلیل استفاده از پیش‌بینی مشخصه کیفی ناشی از همبستگی فرایند، قابلیت کشف *عوامل بادلیل انحراف* مختلف، کاربرد نرم افزاری آسان برای تعیین هر مدل پیچیده‌ی سری‌زمانی و نیز قابلیت استفاده از تمامی فروض *SPC* سنتی و ابزارهای آن [۱۲]، به عنوان نمونه‌ای برای نشان‌دادن اثرات تخمین‌های استوار در کنترل فرایندهای خودهمبسته استفاده شده‌است. این اثرات به تمامی انواع نمودارهای کنترل نیز قابل تعمیم می باشد.

در نمودار کنترل باقیمانده ها و یا نمودار علت خاص[2] *(SCC)*، اگر شیفتی در میانگین فرایند رخ دهد، این تغییر بر اساس مونتگومری و ماسترانگلو [۱۳]، خودش را در میانگین باقیمانده‌ها نیز نشان می‌دهد. این مقادیر باقیمانده از برازش مدل مناسب سری زمانی بر روی داده‌ها اتفاق می افتد و اگر این برازش به خوبی صورت گرفته باشد، اثرات شیفت در میانگین در باقیمانده ها منعکس خواهدشد.

برای مدل *AR(1)* ، باقیمانده‌ها به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$R_t = X_t - \hat{X}_{t-1}(1) = X_t - \mu(1-\phi) - \phi X_{t-1} \qquad (۱)$$

که در آن $\hat{X}_{t-1}(1)$ به معنای امید ریاضی پیش‌بینی مقدار X_t در زمان *t-1* است.

$$\hat{X}_{t-1}(1) = E(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) \qquad (۲)$$

R_t مقدار محاسباتی u_t با فرض معلوم بودن ϕ و μ است. با فرض معلوم و نیز ثابت بودن ϕ و μ ، R_t همان u_t می باشد. اگر در زمان T ، عوامل بادلیل انحراف منجر به شیفت به اندازه‌ی $\delta\sigma_X$ در میانگین فرایند شده باشند و ما از وقوع آن آگاهی نداشته باشیم، اثر این تغییر بر باقیمانده‌های واقعی به صورت زیر خواهد بود:

$$u_t = \begin{cases} (X_t - \mu) - \phi(X_{t-1} - \mu) & t < T \\ (X_t - (\mu + \delta\sigma_X)) - \phi(X_{t-1} - \mu) & t = T \\ (X_t - (\mu + \delta\sigma_X)) - \phi(X_{t-1} - (\mu + \delta\sigma_X)) & t > T \end{cases} \qquad (۳)$$

به عبارتی دیگر در صورت ثابت نبودن μ خواهیم داشت:

$$u_t = \begin{cases} R_t & t < T \\ R_t - \delta\sigma_X & t = T \\ R_t - (1-\phi)\delta\sigma_X & t > T \end{cases} \qquad (۴)$$

و یا

$$R_t = \begin{cases} u_t & t < T \\ u_t + \delta\sigma_X & t = T \\ u_t + (1-\phi)\delta\sigma_X & t > T \end{cases} \qquad (۵)$$

در واقع R_t ها مقادیر باقیمانده‌هایی است که ما اندازه می‌گیریم که بعد از شیفت با مقدار باقیمانده‌ی واقعی آن تفاوت خواهد داشت و همین امر منجر به کشف شیفت خواهدشد. از آنجایی که در صورت ثابت و معلوم بودن ϕ و μ ، R_t از همان جنس u_t بوده و می دانیم که $u_t \sim i.i.d(0,\sigma^2)$، لذا R_t ها از هم مستقل بوده و می توان از روش های پایش داده‌های مستقل برای آنها استفاده کرد.

لذا اگر فرایند از کنترل خارج شود، اثرات آن در باقیمانده‌های محاسباتی R_t منعکس خواهدشد که این امر فلسفه‌ی استفاده از نمودارهای کنترل باقیمانده‌ها می‌باشد. تبدیل رابطه (۳) به روابط (۴) و (۵)، با فرض معلوم بودن ϕ و μ و استفاده از رابطه (۱) صورت گرفته است. اما در عمل نیاز به تخمین این پارامترها داریم. در صورت تخمین پارامترهای ϕ و μ، در واقع *تخمینی* از R_t در دسترس است، لذا رابطه (۱) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} &R_t = X_t - \hat{X}_{t-1}(1) = \\ &X_t - \mu(1-\phi) - \phi X_{t-1} = \\ &X_t - \hat{\mu}(1-\hat{\phi}) - \hat{\phi} X_{t-1} - \pi = e_t - \pi \end{aligned} \qquad (۶)$$

در نتیجه $e_t = R_t + \pi$ که در آن π متغیر تصادفی خطای تخمین غیر دقیق پارامترهای ϕ و μ به علت وجود آلودگی‌ها و داده‌های پرت می باشد. در این صورت به عنوان نمونه رابطه (۵) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$e_t = \begin{cases} u_t + \pi & t < T \\ u_t + \delta\sigma_X + \pi & t = T \\ u_t + (1-\phi)\delta\sigma_X + \pi & t > T \end{cases} \qquad (۷)$$

[1] *Residual Control Chart*
[2] *Special Cause Chart*

www.SID.ir
Archive of SID

هر چه این تخمین ها به دلیل وجود آلودگی‌ها و داده‌های پرت نادقیق‌تر صورت گیرند، $|\pi|$ مقادیر بزرگتری نسبت به صفر خواهد داشت. مثلاً در رابطه (۷)، خط مرکزی نمودار کنترل به μ_π وابسته است که مقدار آن نیز نامعلوم است. لذا کارایی نمودار کنترل مربوطه در کشف حالات خارج از کنترل نسبت به حالات تئوری آن (به عنوان نمونه رابطه (۵) برای شیفت در μ) به شدت کاهش خواهد یافت.

این مطلب علاوه بر تغییر μ، به سایرحالت های خارج از کنترل نیز قابل تعمیم است که اهمیت تخمین دقیق پارامترها را در صورت وجود آلودگی‌ها و داده‌های پرت پررنگ تر می کند.

از آنجایی که پایش باقیمانده‌ها، با نمودارهای کنترل با خط مرکزی $CL=0$ که نشانگر میانگین باقیمانده‌هاست و حدود کنترل $\pm k\sigma_u$ (رابطه (۸)) و نه $\pm k\sigma_X$ صورت می‌گیرد [۱۲]، لذا در شرایط وجود آلودگی علاوه بر ϕ و μ، تخمین دقیق σ_u نیز در تعیین حساسیت و کارایی نمودارهای کنترل نقش بسزایی خواهد داشت (رابطه ۸) که این امر از لحاظ معیارهای مختلف در قسمت‌های بعدی شرح داده خواهدشد.

$$\begin{cases} UCL = +k\sigma_u \\ CL = 0 \\ LCL = -k\sigma_u \end{cases} \qquad (۸)$$

۳. ارزیابی نمودار کنترل استوار IRFFT برای داده‌های خودهمبسته

یکی از متداول ترین و معتبرترین معیارها برای ارزیابی نمودار کنترل، متوسط طول دنباله *(ALR)* می‌باشد. این معیار در واقع نشانگر متوسط تعداد نقاطی است که در نمودار کنترل ترسیم می شود تا نقطه‌ای وضعیت خارج از کنترل را نشان دهد. برای ارزیابی نمودارهای کنترل، عموماً نمودارها به گونه‌ای طراحی می‌شوند که احتمال ارتکاب خطای نوع I(α) در آنها تقریباً یکسان باشد. این موضوع سبب می‌شود که این نمودارها برای حالت تحت کنترل دارای *ARL* های برابر باشند. از بین این نمودارها، نموداری مطلوب‌تر است که حساسیت بالاتری در کشف حالات خارج از کنترل داشته باشد. به عبارت دیگر به ازای مقدار معینی از تغییر در پارامتر فرایند، احتمال ارتکاب خطای نوع II پایین‌تر بوده و در نتیجه *ARL* کوچکتری داشته باشد. کوچک بودن *ARL* خارج از کنترل برای یک نمودار در واقع بدین معنی است که در صورت خروج فرآیند از کنترل، به طور متوسط تحت کنترل نبودن فرایند سریع‌تر کشف می‌شود.

محاسبه‌ی شاخص *ARL* به صورت جبری بسیار پیچیده خواهد بود، لذا از شبیه سازی برای یافتن آنها بهره می‌جوییم. برای مقایسه *ARL* نمودار کنترل پیشنهادی و نمودار کنترل حداقل مربعات، ابتدا بایستی خطای نوع I (α) و یا *ARL(0)* را برای آنها با تعیین ضریب مناسب حدود کنترل (k) یکسان نماییم. بدین منظور در فاز I سری‌ای غیرآلوده بدون وجود آلودگی‌ها از انواع *IO* و *AO* $(\mu_V = 0, \sigma_I = \sigma_u)$ را به طول ۲۰۰ تولید کرده و پارامترهای ϕ، μ و σ_u را با روشهای *IRFFT* و *LS* تخمین می‌زنیم. آلودگی‌های *AO* و *IO* به شرح زیر است [۹]:

$$\begin{aligned} &AO: Y_t = X_t + v_t, \\ &X_t = \mu(1-\phi) X_{t-1} + u_t, \\ &v_t \sim (1-\varepsilon_1)\delta_0 + \varepsilon_1 N(\mu_V, \sigma_V^2). \qquad (۹) \\ &IO: X_t = \mu(1-\phi) X_{t-1} + u_t, \\ &u_t \sim (1-\varepsilon_2) N(0, \sigma_u^2) + \varepsilon_2 N(0, \sigma_I^2). \end{aligned}$$

سپس مجدداً سری زمانیِ غیرآلوده‌ی جدیدی به عنوان فاز II تولید کرده و با استفاده از تخمین های فاز I ، باقیمانده‌های آنها را با هر دو روش به دست آورده و تعداد نقاطی که به ازای k های ثابت، خارج از حدود کنترل $\pm k\sigma_u$ قرار می گیرند را اندازه می‌گیریم.

اگر این تعداد از *ARL(0)=370.37* $(\alpha = 0.0027)$ بزرگتر بود، k را کاهش داده و اگر کوچکتر بود، k را افزایش می‌دهیم. این فرایند را ۱۰۰۰ بار تکرار کرده و از تقسیم ۲۰۰*۱۰۰۰ بر مجموع تعداد نقاط خارج از حدود کنترل، *ARL(0)* را به ازای k ای مشخص به دست می‌آوریم. این فرایند با k ای اصلاح شده بارها انجام می‌شود تا سرانجام تفاوت بین مقادیر *ARL(0)* و ۳۷۰,۳۷ ، از عددی بسیار کوچک (۰,۰۰۱) کوچکتر شود. k متناظر با آخرین *ARL(0)* به دست آمده، k نهایی برای ساخت حدود کنترل می‌باشد. مقادیر k برای تنظیم خطای نوع I یکسان $(\alpha = 0.0027)$ برای روشهای *LS* و *IRFFT* به صورت زیر خواهد بود:

$$k_{LS} = 3.049 \qquad k_{IRFFT} = 3.276 \qquad (۱۰)$$

با این حدود کنترل، خطای α دو نمودار کنترل یکسان شده و از آن برای مقایسه‌ی خطای نوع II (β) یا *ARL(1)* آنها استفاده خواهیم کرد.

پس از یافتن ضرایب حدود کنترل، قصد داریم نشان دهیم که به ازای ترکیبات مختلف از آلودگی‌های *IO* و *AO* در فاز I و در پی

Archive of SID

www.SID.ir

آن هر پیشامدی شامل ترکیبات مختلف از آلودگی‌های *IO* ، *AO* و شیفت در میانگین فرایند *(LSh)* در فاز II، نمودار کنترل پیشنهادی دارای عملکرد بهتری نسبت به روش حداقل مربعات از لحاظ معیارهای کارایی می باشد.

جدول (۱) نشان دهنده‌ی حالات مختلف از آلودگی‌های *IO* و *AO* در فاز I است. بر طبق رابطه (۹)، μ_V نشانگر شیفت در میانگین آلودگی و σ_I نشانگر واریانس آلودگی از نوع *IO* بوده که در اینجا هر دو بر اساس ضریبی از انحراف معیار خطا، σ_u بیان می‌شوند. هر یک از ترکیبات مذکور در فاز I ، پارامترهای ϕ، μ و σ_u خاص خود را با هر دو روش *IRFFT* و *LS* برآورد خواهند کرد. برای نشان دادن همه‌ی ترکیبات مختلف از آلودگی‌های *IO* ، *AO* و شیفت در میانگین فرایند *(LSh)* در فاز II، تمامی ترکیبات دوتایی آنها را بررسی خواهیم کرد.

جدول۱. حالات مختلف از آلودگی‌های IO و AO در فاز I

IO variance (σ_I) / Shift in AO mean ($+\mu_V$)	$1\sigma_u$	$2\sigma_u$	$3\sigma_u$	$4\sigma_u$
$0\sigma_u$	$\phi_{111},\mu_{111},\sigma_{u111}$	⋯	⋯	$\phi_{141},\mu_{141},\sigma_{u141}$
$1\sigma_u$	⋮	⋱		⋮
$2\sigma_u$	⋮		⋱	⋮
$3\sigma_u$	$\phi_{411},\mu_{411},\sigma_{u411}$	⋯	⋯	$\phi_{441},\mu_{441},\sigma_{u441}$

جداول (۲)، (۳) و (۴) به ترتیب ترکیبات *AO-IO* ، *LSh-IO* و *AO-LSh* که قرار است در فاز II مورد بررسی قرار گیرند را نشان می‌دهند:

جدول۲. حالات مختلف از آلودگی‌های *IO* و *AO* در فاز II

IO variance (σ_I) / Shift in AO mean ($+\mu_V$)	$1\sigma_u$	$2\sigma_u$	$3\sigma_u$	$4\sigma_u$
$0\sigma_u$	$\phi_{112},\mu_{112},\sigma_{u112}$	⋯	⋯	$\phi_{142},\mu_{142},\sigma_{u142}$
$1\sigma_u$	⋮	⋱		⋮
$2\sigma_u$	⋮		⋱	⋮
$3\sigma_u$	$\phi_{412},\mu_{412},\sigma_{u412}$	⋯	⋯	$\phi_{442},\mu_{442},\sigma_{u442}$

جدول۳. حالات مختلف از آلودگی IO و شیفت در میانگین فرایند (LSh) در فاز II

IO variance (σ_I) / Shift in process mean ($+\mu$)	$1\sigma_u$	$2\sigma_u$	$3\sigma_u$	$4\sigma_u$
$0\sigma_X$	$\phi_{113},\mu_{113},\sigma_{u113}$	⋯	⋯	$\phi_{143},\mu_{143},\sigma_{u143}$
$1\sigma_X$	⋮	⋱		⋮
$2\sigma_X$	⋮		⋱	⋮
$3\sigma_X$	$\phi_{413},\mu_{413},\sigma_{u413}$	⋯	⋯	$\phi_{443},\mu_{443},\sigma_{u443}$

جدول۴. حالات مختلف از شیفت در میانگین فرایند (LSh) و آلودگی AO در فاز II

Shift in AO mean ($+\mu_V$) / Shift in process mean ($+\mu$)	$0\sigma_u$	$1\sigma_u$	$2\sigma_u$	$3\sigma_u$
$0\sigma_X$	$\phi_{114},\mu_{114},\sigma_{u114}$	⋯	⋯	$\phi_{144},\mu_{144},\sigma_{u144}$
$1\sigma_X$	⋮	⋱		⋮
$2\sigma_X$	⋮		⋱	⋮
$3\sigma_X$	$\phi_{414},\mu_{414},\sigma_{u414}$	⋯	⋯	$\phi_{444},\mu_{444},\sigma_{u444}$

مقادیر شیفت در میانگین *(LSh)* ، بر اساس ضریبی از انحراف معیار داده‌ی اصلی (σ_X) است که برای مدل *AR(1)* برابر $\sigma_u / \sqrt{(1-\phi)^2}$ می باشد. نقطه‌ی وقوع شیفت در میانگین نیز همانند آلودگی‌های *IO* و *AO* به صورت تصادفی در طول سری زمانی تولیدی انتخاب می‌شود و طول آن برابر *[N/20]* است که در آن *N* طول سری‌زمانی می باشد. لازم به ذکر است که برای شبیه‌سازی، پارامترهای ثابت دیگر $N = 200, \mu = 20, \phi = 0.7, \sigma_u = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05,$ $\sigma_V = 2\sigma_u = 2$ می‌باشند. برای جلوگیری از نادیده گرفتن اثرات پراکندگیِ تخمین در پارامترها بر روی معیارهای ارزیابی، بایستی فاز I که فاز تخمین پارامترهاست و فاز II که فاز پایش آن است، به طور توأم و پی در پی در محاسبه‌ی *ARL(1)* نقش داشته باشند. به عنوان مثال ترکیب $\mu_V = 0 + 2\sigma_u$ و $\sigma_I = 3\sigma_u$ را در فاز I در نظر بگیرید.

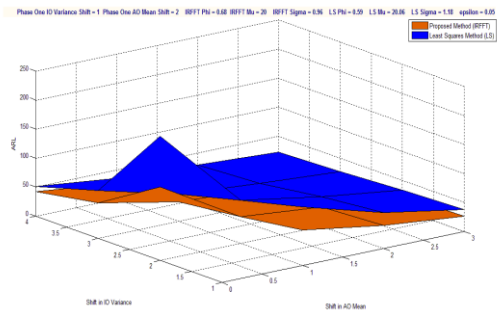
در هر دور شبیه‌سازی، به ازای تولید سری‌زمانی با ترکیب $\mu_V = 0 + 2\sigma_u$ و $\sigma_I = 3\sigma_u$، پارامترهای ϕ، μ و σ_u از روش های *IRFFT* و *LS* به دست می آیند. برای هر یک از ترکیبات جداول (۲)، (۳) و (۴)، *ARL'* با تولید سری زمانی جدید در فاز II و پایش آن بر اساس پارامترهای ϕ، μ و σ_u از فاز I و k های تعیین شده در قبل برای هر دو روش مذکور به دست می آیند. این فرایند ۱۰۰۰ بار تکرار شده و *ARL* نهایی به ازای ترکیب $\mu_V = 0 + 2\sigma_u$ و $\sigma_I = 3\sigma_u$ در فاز I و هریک از ترکیبات جداول (۲)، (۳) و (۴) در فاز II به شکل *رویه‌ای*[1] خاص (هر جدول یک رویه) به دست خواهد آمد. همین پروسه برای تمامی خانه‌های جدول (۱) انجام خواهدشد که در مجموع ۴۸=۳*(۴*۴) رویه به دست می‌آید.

لازم به ذکر است به ازای ترکیب $\mu_V = 0$ و $\sigma_I = \sigma_u$ در فاز I و ترکیبات غیرآلوده‌ی فاز II ، *ARL(0)* به دست خواهد آمد که برای هردو روش یکسان و تقریباً برابر ۳۷۰ است. گذشته

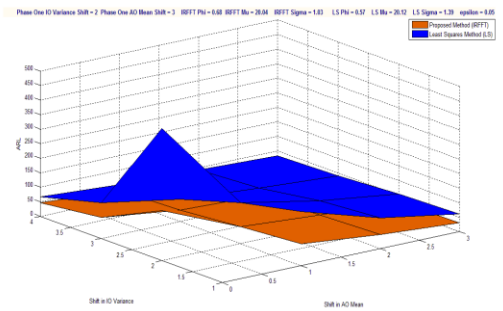
[1] *Surface*

Archive of SID
www.SID.ir

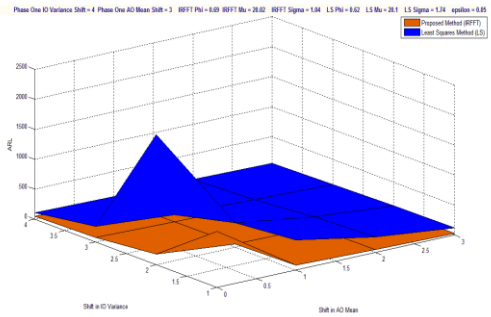
از این حالت، در تمامی حالات دیگر جداول (۲)، (۳) و (۴)، نمودارهای کنترل به روش استوار پیشنهادی دارای *ARL* کمتر و عملکردی بهتر نسبت به روش *LS* می باشند. از طرف دیگر، هر چه نمودارهای کنترل از تخمین ها در شرایط آلودگی‌های بزرگتری در فاز I ساخته شده باشند، اختلاف بین عملکرد این دو نوع روش بیشتر شده و روش استوار پیشنهادی *(IRFFT)* عملکردی به مراتب بهتر را از خود نشان می دهد. در بعضی از موارد به دلیل کاهش دادن مقیاس و نشان دادن اختلاف، نقطه‌ی مربوط به عدم آلودگی در فاز II از *رویه* حذف شده‌است و در بعضی از موارد نیز بزرگ بودن اختلاف در بعضی از نقاط، منجر به ملموس نبودن اختلافات در نقاط دیگر شده‌است. به عنوان نمونه تعدادی از این *رویه‌ها* برای ترکیب‌های مختلف از آلودگی‌های *AO* و *IO* ، $\mu_V = 0+2\sigma_u$ با $\sigma_I = 1\sigma_u$ ، $\mu_V = 0+3\sigma_u$ با $\sigma_I = 2\sigma_u$ و $\mu_V = 0+3\sigma_u$ با $\sigma_I = 4\sigma_u$ در فاز I و ترکیبات *AO-IO* ، *LSh-IO* و *AO-LSh* با نقاطی بر طبق جداول (۲)، (۳) و (۴) در فاز II به ترتیب در شکل های (۱)، (۲)، (۳)، (۴)، (۵)، (۶)، (۷)، (۸) و (۹) نشان‌داده شده‌است. لازم به ذکر است که برای تمامی حالات جدول (۱) و تمامی ترکیبات جداول (۲)، (۳) و (۴) نیز نتایج مشابهی حاصل گردیده است که به دلیل حجم بالا از آوردن آنها صرفنظر شده‌است.



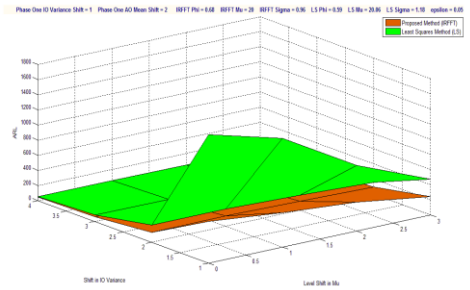
شکل ۱. نمودار ARL ترکیب AO-IO در فاز II با حدود ساخته شده از حالت آلودگی $\mu_V = 0+2\sigma_u$ و $\sigma_I = 1\sigma_u$ در فاز I



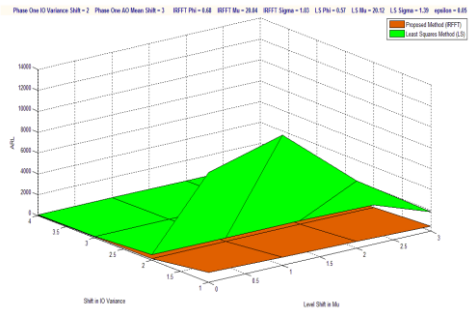
شکل ۲. نمودار ARL ترکیب AO-IO در فاز II با حدود ساخته شده از حالت آلودگی $\mu_V = 0+3\sigma_u$ و $\sigma_I = 2\sigma_u$ در فاز I



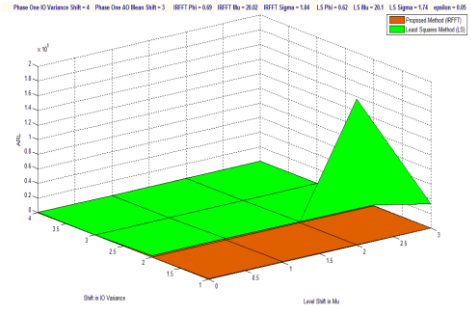
شکل ۳. نمودار ARL ترکیب AO-IO در فاز II با حدود ساخته شده از حالت آلودگی $\mu_V = 0+3\sigma_u$ و $\sigma_I = 4\sigma_u$ در فاز I



شکل ۴. نمودار ARL ترکیب LSh-IO در فاز II با حدود ساخته شده از حالت آلودگی $\mu_V = 0+2\sigma_u$ و $\sigma_I = 1\sigma_u$ در فاز I

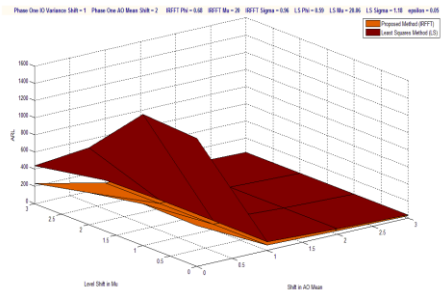


شکل ۵. نمودار ARL ترکیب LSh-IO در فاز II با حدود ساخته شده از حالت آلودگی $\mu_V = 0+3\sigma_u$ و $\sigma_I = 2\sigma_u$ در فاز I

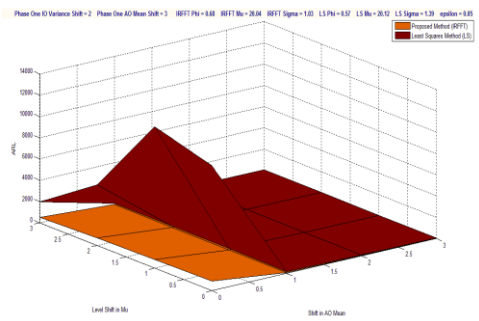


شکل ۶. نمودار ARL ترکیب LSh-IO در فاز II با حدود ساخته شده از حالت آلودگی $\mu_V = 0+3\sigma_u$ و $\sigma_I = 4\sigma_u$ در فاز I

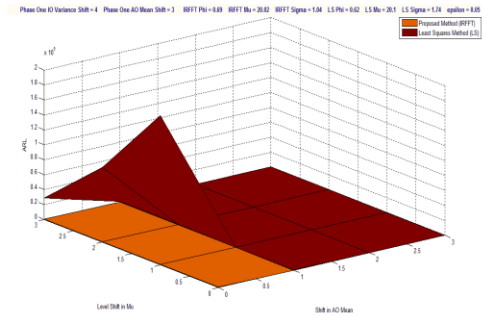
www.SID.ir



شکل ۷. نمودار ARL ترکیب AO-LSh در فاز II با حدود ساخته شده از حالت آلودگی $\mu_v = 0+2\sigma_u$ و $\sigma_I = 1\sigma_u$ در فاز I



شکل ۸. نمودار ARL ترکیب AO-LSh در فاز II با حدود ساخته شده ازحالت آلودگی $\mu_v = 0+3\sigma_u$ و $\sigma_I = 2\sigma_u$ در فاز I



شکل ۹. نمودار ARL ترکیب AO-LSh در فاز II با حدود ساخته شده ازحالت آلودگی $\mu_v = 0+3\sigma_u$ و $\sigma_I = 4\sigma_u$ در فاز I

۴. جمع بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله از برآوردکننده‌ی τ سریعِ فیلتر شده‌ی استوارِ تکرارشونده (*IRFFT*) که روشی رقابتی و مطلوب برای تخمین پارامترهای مدل‌های اتورگرسیو است، برای طراحی نمودارهای کنترل برای مشاهدات خودهمبسته استفاده شد. نمودار کنترل باقیمانده‌های استوار *IRFFT* ساخته‌شده بر حسب معیار مورد بررسی، دارای خواص مطلوبی بود که در نبود آلودگی در فرایند در فاز I ، دارای عملکردی تقریباً نزدیک به نمودارهای کنترل کلاسیک و در حضور آلودگی در این فاز از فرایند، دارای عملکردی بسیار بهتر از نمودارهای کنترل کلاسیک و متعارف می‌باشد. عملکرد نمودارهای کنترل باقیمانده‌ها بر اساس دو روش مذکور و معیار *ARL* با توجه شرایط تخمین پارامترها در فاز I و II ، در جدول (۵) مورد بررسی قرارگرفته و نمودار کنترل ارجح در شرایط مختلف و از لحاظ هر معیار با علامت * مشخص شده‌است. نمودار کنترل *IRFFT* قابل تعمیم به مشاهداتی با تمامی مدل‌های سری‌های‌زمانی می‌باشد.

جدول۵. مقایسه نمودار کنترل باقیمانده‌های استوار پیشنهادی و حداقل مربعات

معیار	شرایط در فاز I و II		نمودار کنترل باقیمانده‌ها براساس برآوردکننده به روش	
	فاز I	فاز II	*IRFFT*	*LS*
ARL	غیرآلوده	غیرآلوده		*
	غیرآلوده	آلوده	*	**
	آلوده	غیرآلوده	*	
	آلوده	آلوده	*	
MSD	غیرآلوده	غیرآلوده		*
	غیرآلوده	آلوده		*
	آلوده	غیرآلوده	*	
	آلوده	آلوده	*	

مراجع

[1] Shariati, N., Shahriari, H., Shafaei, R. "*Parameter Estimation of Autoregressive Models Using Iteratively Robust Filtered Fast-τ Method.*" Communications in Statistics - Theory and Methods, 2012. DOI: 10.1080/03610926. 2012.72505.

[2] Dou, Y., Sa, P. "*One-Sided Control Charts for the Mean of Positively Skewed Distribution.*" Total Quality Management, Vol. 13, 2002, pp. 1021-1033.

[3] Wu, C., Wang, Z. "*A Synthetic Control Chart Based on the Cornish-Fisher Expansion.*" Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, Vol. 25, 2009, pp. 257-265.

[4] Omar, M. "*A Simple Robust Control Chart Based on MAD.*" Journal of Mathematics and Statistics, Vol. 4, 2008, pp. 102-107.

[5] Khoo, B. C. "*Robust Time Weighted Control Charts for the Process Variance*" International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 12, No. 5, 2005, pp. 439-458.

www.SID.ir

[6] Stefatos, G., Hamza, A.B., "*Fault Detetion Using Robust Multivariate Control Cahrt.*" Expert System with Applications, Vol. 36, No. 3, 2009, pp. 5888-5894.

[7] Shahriari, H., Maddahi, A., Shokouhi, A. H., "*A Robust Dispersion Control Chart Based on M-estimate.*" Journal of Industrial and Systems Engineering, Vol. 2, 2009, pp. 297-307.

[8] Shahriari, H., Ahmadi, O., Shokouhi, A. H., "*A Robust R Control Chart Based on a Two-Step Estimator of the Process Dispersion.*" Journal of Applied Statistic. Journal of Quality Engineering, Vol. 36, 2011, pp. 118-143.

[9] Maronna, R. A., Martin, R. D., Yohai, V. J. "*Robust Statistics: Theory and Methods*." West Sussex, England: Wiley and Sons, 2006.

[10] Croux, C., Gelper, S., Mahieu, K., "*Robust Control Charts for Time Series Data.*" Expert System with Applications, Vol. 38, 2011, pp. 13810-13815

[11] Alwan, L.C, Roberts, H.V., "*Time Series Modeling for Statistical Process Control.*" Vol. 6, 1988, PP. 87–95.

[12] Wardell, D. G., Moskowitz, H. and Plante, R. D., "*Run-length Distributions of Special-cause Control Charts for Correlated Processes.*" Technometrics, Vol. 36, No. 1, 1994, pp. 3-27.

[13] Montgomery, D. C. and Mastrangelo, C. M., "*Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data*." Journal of Quality Technology, 1991, Vol. 23, No. 3, pp. 179-204.

Archive of SID

www.SID.ir