International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2015)

june 2015, Volume 26, Number 1
pp. 99-115

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

An Inventory Control Model for Deteriorating Products with Back-Ordering and Delayed Payment

Mahdi Heydari[a*], Mohammadreza Nematollahi[a], Ata Allah Taleizadeh[b]

Mahdi Heydari: *School of Industrial Engineering, Iran University of Science & Technology, Tehran, Iran.*
Mohammadreza Nematollahi*: School of Industrial Engineering, Iran University of Science & Technology, Tehran, Iran.*
Ata Allah Taleizadeh*: School of Industrial and Systems Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.*

Keywords

EOQ model,
Delayed payment,
Backordering,
Deterioration

ABSTRACT

In this paper, an economic order quantity model to manage deteriorating products considering backordering shortages is proposed. The seller offers the delayed payment strategy and therefore the purchaser is allowed to pay the purchasing cost at a later date than the time of receipt. The permissible delay in setting account is determined by the seller and is considered to be fixed. In the investigated model, single item inventory control is assumed. Moreover, deterioration and demand rates are deterministic and lead time is zero. An exact solution procedure is proposed to determine the optimal solution. Finally, two numerical examples with sensitivity analysis are reported to investigate the efficiency of the proposed solution procedure.

نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنـــایع و مدیـــریت تولیـــد

شمـــاره ۱، جلـــد ۲۶، بهار ۱۳۹۴

صفحـــــه ۱۱۵-۱۰۰

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

ارائه یک مدل کنترل موجودی برای کالاهای فسادپذیر با در نظر گرفتن کمبودپس افت و سیاست پرداخت معوقه

مهدی حیدری، محمدرضا نعمت الهی، عطا الله طالعی زاده

کلمات کلیدی

مدل مقدار سفارش اقتصادی،
پرداخت معوقه،
کمبود پس افت،
کالاهای فسادپذیر.

چکیده:

در این مقاله یک مدل کنترل موجودی و سفارش اقتصادی بهینـه کالاهـای فسـادپذیر در شـرایط کمبـود مجاز و حالت پس افت ارائه می‌شود. همچنـین امکـان پرداخـت هزینـه کالاهـای خریـداری شـده توسـط فروشنده در زمانی دیرتر از زمان بازپرسازی (دریافت کالا) وجـود دارد. یعنـی تـأمین کننـده بـه واسـطه‌ی اعتبار فروشنده این اجازه را به او می‌دهد تا هزینه‌ی خرید را با تأخیر پرداخت نماید. حـداکثر مـدت زمـان این تأخیر در پرداخت از قبل توسط تأمین کننده تعیین و ثابت فرض شده اسـت. سیسـتم موجـودی تـک کالایی، نرخ تقاضا و فساد ثابت و مدت تحویل صفر است. به کمک اثبات محدب بودن تابع هدف که کمینه سازی هزینه کل موجودی فروشنده است، روش حل دقیقی برای تعیین جواب بهینـه ارائـه مـی‌شـود و در ادامه نیز برای نشان دادن کارایی روش حل پیشنهادی دو مثال عددی ارائه و برای هر یک آنالیز حساسیت ارائه شده است.

۱. مقدمه و مرور ادبیات

در مدل‌های سنتی کنترل موجودی، فاکتورهایی انگیزشی جدیدی نظیر پیش پرداخت، حراج، پرداخت معوقه، تورم و خرابی محصولات در طول مدت نگهداری و حمل و نقل درون کارخانه ای در نظر گرفته نشده‌اند. از طرف دیگر در شرایط واقعی، عواملی همچون فرصت‌های سرمایه گذاری از دست رفته به علت سرمایه درگیر در موجودی‌ها، خرابی و فسادپذیری محصولات به دلایل پیش بینی نشده و یا ساختاری و غیره، توجه خاص به این فاکتورها را الزامی می‌نماید.

تاریخ وصول: ۹۱/۲/۱۳

تاریخ تصویب: ۹۱/۱۲/۱

***نویسنده مسئول مقاله:**

* مهدی حیدری: دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم وصنعت ایران؛ Mheydari@iust.ac.ir

محمدرضا نعمت الهی دانشکده مهندسی صـنایع، دانشـگاه علـم وصنعت ایرانnamatollahi@ind.iust.ac.ir

عطا الله طالعی زاده: اسـتاد گـروه مهندسـی صـنایع، پـردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران؛ Taleizadeh@iust.ac.ir

بطور خاص می‌توان به محصولاتی از قبیل مواد دارویی و محصولات لبنی و غیره به عنوان محصولاتی که مدل قابل اعمال بر روی آن‌ها می‌باشد، اشاره کرد.

از لحاظ پیشینه تاریخی Ghare and Schrader [1] اولین بار مسئله فسادپذیری محصولات را وارد مسایل کنترل موجودی کردند. بعد از آن Eilon&Mallaya [2]، مدل فوق را گسترش داده و تقاضای وابسته به قیمت محصول را مطرح کردند. Cohen [3] مدلی برای سیستم موجودی با در نظر گرفتن کمبود برای اقلام فسادپذیر با نرخ خرابی که از توزیع نمایی پیروی می‌کند، ارایه داد. Kang and Kim[4] مدل Cohen را گسترش دادند و سیستم موجودی با نرخ تولید محدود و بدون در نظر گرفتن کمبود را مدل کردند.

Aggrawal and Jaggi [5] در مقاله خود به وجود یک نقص در مدل Cohen اشاره کرده و روش ساده تری را برای محاسبه قیمت محصول و سیاست تولیدی بهینه ارائه دادند. بعد از آن Wee [6] مدل فوق را برای اقلام فسادپذیر که نرخ خرابی آن‌ها از توزیع وایبول پیروی می‌کرد، ارایه داد. Ghosh و Chaudhuri [7] یک مدل مقدار سفارش اقتصادی برای کالاهای فسادپذیر با فرض مجاز بودن کمبود را در شرایطی که تقاضا وابسته به زمان بوده و از تابع تقاضای درجه دوم تبعیت

می‌کند، توسعه داده‌اند. در این مدل افق زمانی نامحدود در نظر گرفته شده است. Mukhopadhyay و همکاران [8] مدل مقدار سفارش اقتصادی را برای کالاهای فساد پذیر، در شرایطی که تقاضا تابعی از قیمت است، را توسعه داده‌اند. در مدل ایشان نرخ فساد از تابع وایبول تبعیت می‌نماید. Dye [9] یک مدل یکپارچه کنترل موجودی و قیمت گذاری را برای کالاهای فاسد شدنی توسعه داد که در آن فرض شده است که کمبود پس افت جزئی می‌شود و تقاضا نیز تابعی از قیمت و زمان است. در زمینه پرداخت معوقه نیز Ouyang و همکاران [10] یک مدل مقدار سفارش اقتصادی را برای کالاهای فساد پذیر با در نظر گرفتن سیاست پرداخت معوقه بدون کمبود توسعه داده‌اند.Hu and Liu [11] مدل مقدار تولید اقتصادی را که در آن کمبود مجاز است و سیاست پرداخت معوقه در نظر گرفته شده است، را توسعه دادند. Aggrawal and [12] Jaggi مدلی را که در آن کمبود مجاز نبوده توسعه و برای یافتن جواب بهینه یک الگوریتم حل ابتکاری ارائه دادند.Mohan and Gopalakrishnan[13] مدل مقدار سفارش اقتصادی چند محصولی را ارائه داده‌اند که در آن محدودیت بودجه و پرداخت معوقه در نظر گرفته شده است. Changو همکارانش [14] مدل کنترل موجودی را برای کالاهای فسادپذیر بدون کمبود ارائه دادند که در آن سیاست پرداخت معوقه و تورم به کار رفته است. Hu and Liu[15] مدل مقدار تولید اقتصادی را با در نظر گرفتن سیاست پرداخت معوقه و کمبود پس افت توسعه دادند. Jamal و همکارانش [16]نیز مدل مقدار سفارش اقتصادی را در شرایط کمبود پس افت جزئی همراه با سیاست پرداخت معوقه و فساد توسعه دادند اما ایشان جواب بهینه دقیقی را ارائه نکردند.

در این مقاله با توجه به شکاف تحقیقاتی موجود، ابتدا مدل مقدار سفارش اقتصادی برای کالاهای فساد پذیر در شرایط کمبود مجاز در حالت پس افت و همچنین سیاست پرداخت معوقه، توسعه داده خواهد شد، سپس با اثبات محدب بودن تابع هدف، روشی برای تعیین جواب بهینه (دقیق) ارائه می‌شود. در ادامه مقاله در قسمت دوم مسئله مد نظر تعریف می‌شود. در قسمت سوم مدل ریاضی مسئله پیشنهادی توسعه داده خواهد شد. در بخش چهارم روش حل ارائه می‌شود و نهایتاً نیز در بخش‌های پنجم و ششم به ترتیب مثال عددی و آنالیز حساسیت بر روی پارامترهای مدل ارائه خواهند شد.

۲. تعریف مسئله

در این مقاله سعی شده است مدل کنترل موجودی و سفارش اقتصادی بهینه کالاهای فسادپذیر زمانی که کمبود مجاز بوده و حالت پس افت می‌یابد بررسی شود. همچنین امکان پرداخت هزینه کالاهای خریداری شده توسط فروشنده در زمانی دیرتر از زمان بازپرسازی (دریافت کالا) وجود دارد. یعنی تأمین کننده به واسطه‌ی اعتبار فروشنده این اجازه را به او می‌دهد تا هزینه‌ی خرید را با تأخیر پرداخت نماید. حداکثر مدت زمان این تأخیر در پرداخت از قبل توسط تأمین کننده تعیین شده و ثابت فرض شده است. سایر فرضیات عبارتند از:

۱. سیستم موجودی تک کالایی و قطعی است.
۲. نرخ تقاضا ثابت و برابر D است.
۳. کمبود مجاز بوده و به طور کامل قابل جبران است.
۴. نرخ فساد ثابت و مشخص بوده و در هر زمان کسری از موجودی در دست است.
۵. زمان تحویل صفر است.
۶. در شرایطی که هنوز هزینه معوقه پرداخت نشده است، درآمد حاصل از فروش کالا در یک حساب بانکی نگهداری می‌شود و به آن سود تعلق می‌گیرد.

۳. توسعه مدل

۳.۱. نمادها

در فرآیند مدلسازی نمادهای زیر استفاده شده‌اند.

A: هزینه هر بار سفارش کالا
C: هزینه خرید هر واحد کالا
D: نرخ تقاضای کالا در واحد زمان
$I_{(t)}$: سطح موجودی انبار در زمان t
I_c: نرخ بهره‌ی پرداختی در واحد زمان
I_e: نرخ بهره‌ی دریافتی در واحد زمان
I_h: هزینه‌ی نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان
M: مدت زمان مجاز برای پرداخت هزینه‌ی خرید از زمان دریافت سفارش
V: قیمت فروش هر واحد کالا
θ: ضریب فساد موجودی در دست در واحد زمان $0<\theta<1$
π: هزینه‌ی کمبود برای هر واحد کالا در واحد زمان
T: طول هر دوره‌ی سفارش دهی (طول یک سیکل)
T_1: زمانی که موجودی کالا در انبار به صفر می‌رسد
I_b: بیشترین مقدار مواجهه با کمبود در هر دوره
I_m: بیشترین سطح موجودی در هر دوره
Q: میزان سفارش در هر بار سفارش دهی

TC_A: هزینه‌ی سفارش دهی در واحد زمان

TC_h: مجموع هزینه‌ی نگهداری کالا در واحد زمان

TC_P: مجموع هزینه‌ی خرید در واحد زمان

TC_S : مجموع هزینه‌ی مواجهه با کمبود در واحد زمان

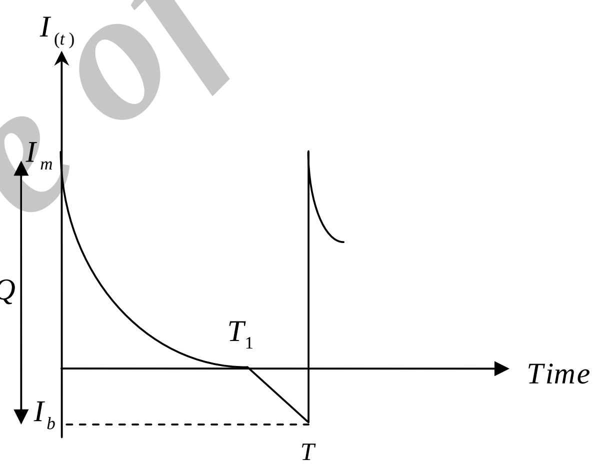
TIC : مجموع بهره‌ی پرداختی در واحد زمان

TIE : مجموع بهره‌ی دریافتی در واحد زمان

TC : مجموع هزینه‌ها در واحد زمان

۳.۲. مدلسازی

فرض کنید $I_{(t)}$ نشان دهنده سطح موجودی در زمان t است. مشخص است سطح موجودی در طول زمان تحت تأثیر دو عامل فساد و تقاضا کاهش می‌یابد. فساد کالا تنها زمانی رخ می‌دهد که موجودی مثبت است و کالا در انبار وجود دارد $[0,T_1]$ و زمانی که کالا در انبار وجود ندارد $[T_1,T]$ میزان فساد برابر صفر است. این شرایط در شکل (۱) نیز نشان داده شده است.



شکل ۱. نمودار کنترل موجودی

با توجه به فرضیات مدل و توضیحات، تغییرات موجودی در واحد زمان عبارتست از:

$$\begin{cases} \dfrac{dI_{(t)}}{dt}+\theta I_{(t)}=-D & 0\le t\le T_1 \\ \dfrac{dI_{(t)}}{dt}=-D & T_1\le t\le T \end{cases} \quad (۱)$$

با حل معادلات دیفرانسیل داریم:

$$\begin{cases} I_{(t)}=\dfrac{D}{\theta}\left[e^{\theta(t_1-t)}-1\right] & 0\le t\le T_1 \\ I_{(t)}=-D(t-t_1) & T_1\le t\le T \end{cases} \quad (۲)$$

با توجه به معادلات بدست آمده، بیشترین مقدار سطح موجودی و بیشترین مقدار کمبود به ترتیب عبارتند از:

$$I_m=I_{(0)}=\frac{D}{\theta}\left[e^{\theta(T_1)}-1\right] \quad (۳)$$

$$I_b=D\left(T-T_1\right) \quad (۴)$$

و مقدار سفارش در هر دوره نیز برابر است با:

$$Q=I_m+I_b=\frac{D}{\theta}\left[e^{\theta(T_1)}-1\right]+D\left(T-T_1\right) \quad (۵)$$

باید توجه داشت که نمودار کنترل موجودی و تابع هزینه، کاملاً وابسته به زمان پرداخت هزینه معوقه است. به عبارت دیگر نمودارهای کنترل موجودی بر حسب اینکه زمان پرداخت هزینه معوقه قبل از T_1 باشد یا بعد از آن با همدیگر متفاوت خواهند بود. در ادامه ابتدا به معرفی و محاسبه هزینه های مشترک این دو نمودار یعنی هزینه ثابت سفارش دهی، نگهداری، کمبود و خرید پرداخته و در انتها به بررسی هزینه های متفاوت این دو نمودار که بهره‌ی دریافتی و پرداختی است می‌پردازیم.

۳.۲.۱. هزینه ثابت سفارش دهی

هزینه سفارش دهی در هر بار سفارش برابر Aاست و در نتیجه مقدار کل هزینه سفارش دهی در واحد زمان برابر است با:

$$TC_A=\frac{A}{T} \quad (۶)$$

۳.۲.۲.هزینه نگهداری

در طول دوره سفارش دهی، کالا از لحظه شروع سیکل تا لحظه وقوع کمبود در انبار نگهداری می‌شود. برای محاسبه‌ی مجموع هزینه نگهداری در طی افق زمانی، ابتدا به محاسبه‌ی متوسط موجودی در هر سیکل بر اساس رابطه (۷) پرداخته و سپس بر اساس رابطه‌ی (۸) هزینه نگهداری در واحد زمان محاسبه می‌گردد.

$$\bar{I}=\int_0^{T_1} I_{(t)}dt=\int_0^{T_1}\frac{D}{\theta}\left[e^{\theta(T_1-t)}-1\right]dt=\frac{D}{\theta}\left[-\frac{1}{\theta}-T_1+\frac{e^{\theta t_1}}{\theta}\right]=\frac{D}{\theta^2}\left[e^{\theta T_1}-\theta T_1-1\right] \quad (۷)$$

$$TC_h = \frac{I_h C\bar{I}}{T} = \frac{I_h CD}{T\theta^2}\left[e^{\theta T_1} - \theta T_1 - 1\right] \quad (۸)$$

جهت ساده سازی مجموع هزینه نگهداری در واحد زمان، با توجه به کوچک بودن θ و با استفاده از تقریب بسط تیلور برای $e^{\theta k}$ یعنی $e^{\theta k} = 1+\theta k + \frac{1}{2}(\theta k)^2$ خواهیم داشت:

$$TC_h = \frac{I_h C\bar{I}}{T} = \frac{I_h CD}{T\theta^2}\left[e^{\theta T_1} - \theta T_1 - 1\right] = \frac{I_h CD\left(\theta T_1\right)^2}{2T\theta^2} = \frac{I_h CD T_1^{\,2}}{2T} \quad (۹)$$

۳.۲.۳. هزینه کمبود

هزینه کمبود در هر دوره سفارش دهی از لحظه وقوع کمبود تا پایان سیکل سفارش دهی و دریافت کالا رخ می‌دهد. برای محاسبه مجموع هزینه کمبود ابتدا به محاسبه متوسط میزان کمبود در هر سیکل پرداخته و در ادامه به محاسبه مجموع هزینه کمبود در واحد زمان می‌پردازیم.

متوسط میزان کمبود در هر سیکل عبارتست از:

$$\bar{B} = \int_{t_1}^{T} I_{(t)} dt \quad (۱۰)$$

با توجه به شکل (۱) و مساحت زیر نمودار در این ناحیه داریم:

$$\bar{B} = \frac{D(T - T_1)^2}{2} \quad (۱۱)$$

هزینه کمبود در واحد زمان نیز عبارتست از:

$$TC_S = \frac{\bar{B}\pi}{T} = \frac{\pi D(T - T_1)^2}{2T} \quad (۱۲)$$

۳.۲.۴. هزینه خرید

با توجه به اینکه در هر سیکل $Q = I_m + I_b$ واحد سفارش داده می‌شود بنابراین مجموع هزینه خرید در واحد زمان برابر است با:

$$TC_p = \frac{QC}{T} = \frac{CD}{T}\left[\frac{1}{\theta}\left[e^{\theta(T_1)} - 1\right] + \left(T - T_1\right)\right] \quad (۱۳)$$

با استفاده از رابطه $e^{\theta k} = 1+\theta k + \frac{1}{2}(\theta k)^2$ داریم:

$$TC_p = \frac{QC}{T} = \frac{CD}{T}\left[\frac{1}{\theta}\left[e^{\theta(T_1)} - 1\right] + \left(T - T_1\right)\right] = \frac{CD}{T}\left[\frac{1}{\theta}\left(e^{\theta(T_1)} - 1 - \theta T_1\right) + T\right] = \frac{CD}{T}\left(\frac{\theta T_1^{\,2}}{2} + T\right) \quad (۱۴)$$

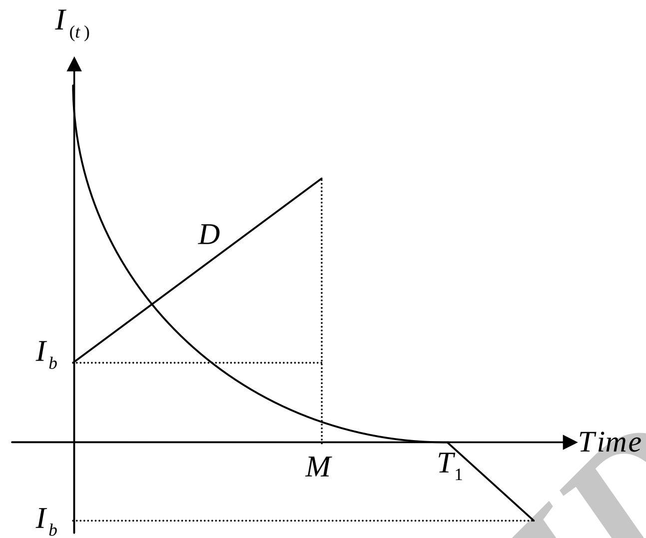
۳.۲.۵. بهره اکتسابی و قابل پرداخت

در این مدل فرض می‌شود درآمد حاصل از فروش محصولاتی که هنوز هزینه خرید آن‌ها پرداخت نشده است در بانک نگهداری می‌شود و برای آن سود در نظر گرفته می‌شود.همچنین برای کالاهای داخل انبار در شرایطی که هنوز هزینه‌ی خرید پرداخت نشده است نباید هزینه سرمایه را لحاظ نمود. حال وابسته به اینکه زمان پرداخت هزینه معوقه قبل از T_1 و یا بعد از آن باشد باید دو حالت متفاوت بررسی شود.

۳.۲.۵.۱. حالت اول (a): $M \le T_1$

وقتی زمان پرداخت هزینه معوقه قبل از T_1 است، فرض می‌شود درآمد حاصل از فروش محصولات در بانک نگهداری شده و به آن سود تعلق می‌گیرد. با توجه به شکل (۲) در این حالت بهره‌ی دریافتی در واحد زمان عبارتست از:

$$TIE_1 = \frac{VI_e}{T}\left[MI_b + \int_0^M Dtdt\right] = \frac{VI_e}{T}\left[MD(T - T_1) + \frac{DM^2}{2}\right] = \frac{VI_e MD}{T}\left(T - T_1 + \frac{M}{2}\right) \quad (۱۵)$$



شکل ۲.نمایش بهره پرداختی و دریافتی وقتی $M \le T_1$

در این حالت، از زمان پرداخت هزینه معوقه تا زمانی که در انبار موجودی وجود دارد می‌بایست هزینه سرمایه کالاهایی که هزینه خرید آن‌ها پرداخت شده است را در نظر بگیریم. در این حالت بهره‌ی پرداختی مربوطه در واحد زمان عبارتست از:

$$TIC_1=\frac{CI_c}{T}\left[\int_M^{T_1} I_{(t)}dt\right]=\frac{CI_c}{T}\left[\int_M^{T_1}\frac{D}{\theta}\left[e^{\theta(T_1-t)}-1\right]dt\right]=\frac{CI_cD}{T\theta}\left[-\frac{1}{\theta}-T_1+\frac{e^{\theta(T_1-M)}}{\theta}+M\right] \qquad (۱۶)$$

با استفاده از رابطه $e^{\theta k}=1+\theta k+\frac{1}{2}(\theta k)^2$ داریم:

$$TIC_1=\frac{CI_cD}{2T}(T_1-M)^2 \qquad (۱۷)$$

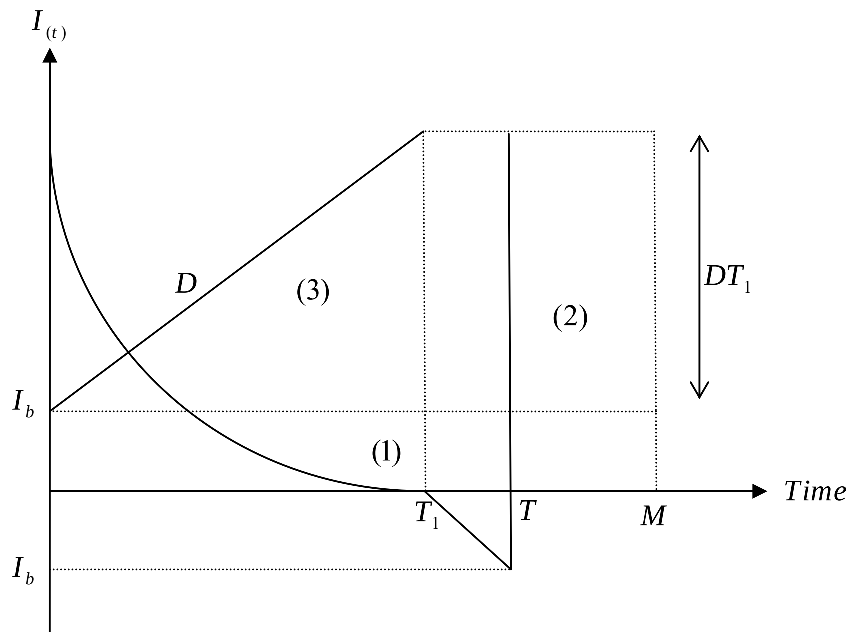
برای بدست آوردن تابع هزینه کل می‌بایست تمامی هزینه ها را با یکدیگر جمع کرده و نهایتاً بهره‌ی دریافتی از درآمد حاصل از فروش که در حساب بانکی به عنوان ودیعه نگهداری می‌شود را از مجموع هزینه‌ها کسر نمود. با توجه به روابط فوق تابع هزینه کل در شرایطی که $M \le T_1$ است عبارت خواهد بود از:

$$TC_a(T_1,T)=\frac{A}{T}+\frac{I_hCDT_1^2}{2T}+\frac{\pi D(T-T_1)^2}{2T}+\frac{CD}{T}\left(\frac{\theta T_1^2}{2}+T\right)+\frac{CI_cD}{2T}(T_1-M)^2-\frac{VI_eMD}{T}\left(T-T_1+\frac{M}{2}\right) \qquad (۱۸)$$

۳.۲.۵.۲. حالت دوم (b) : $M > T_1$

زمانی که هزینه پرداخت معوقه پس از T_1 پرداخت می‌شود، هزینه سرمایه و بهره‌ی پرداختی صفر است. چرا که هزینه‌ی کالاهای موجود در انبار، زمانی که موجودی مثبت می‌باشد پرداخت نشده است. در این حالت فرض می‌شود درآمد حاصل از فروش محصولات در بانک نگهداری شده و به آن سود تعلق می‌گیرد. با توجه به شکل (۳) و مساحت زیر نمودار به محاسبه این بهره‌ی دریافتی در هر سال می‌پردازیم. قابل ذکر است جهت سادگی محاسبات، مساحت زیر نمودار، به سه قسمت تقسیم شده است.

$$TIE_{(2)} = \frac{VI_e}{T}\left[\overbrace{MI_b}^{(1)} + \overbrace{(M - T_1)DT_1}^{(2)} + \overbrace{\frac{DT_1^{\,2}}{2}}^{(3)}\right] = \frac{VI_eD}{T}\left[M(T - T_1) + (M - T_1)T_1 + \frac{T_1^{\,2}}{2}\right]$$
$$= \frac{VI_eD}{T}\left(MT - \frac{T_1^{\,2}}{2}\right) \qquad (۱۹)$$



شکل ۳.نمایش بهره پرداختی و دریافتی وقتی $M > T_1$

با توجه به روابط فوق تابع هزینه کل در شرایطی که $M > T_1$است عبارت خواهد بود از:

$$TC_b\left(T_1,T\right) = \frac{A}{T} + \frac{I_hCDT_1^{\,2}}{2T} + \frac{\pi D(T - T_1)^2}{2T} + \frac{CD}{T}\left(\frac{\theta T_1^{\,2}}{2} + T\right) - \frac{VI_eD}{T}\left(MT - \frac{T_1^{\,2}}{2}\right) \qquad (۲۰)$$

و نهایتاً تابع هزینه‌ی مدل عبارت است از:

$$TC(T_1,T) = \begin{cases} TC_a(T_1,T) & , \quad M \le T_1 \\ TC_b(T_1,T) & , \quad M > T_1 \end{cases} \qquad (۲۱)$$
$$S\,t: \qquad T_1,T > 0$$

۴. روش حل

به منظور یافتن جواب بهینه مدل، ابتدا به بررسی محدب بودن و در ادامه به محاسبه‌ی جواب بهینه متغیرهای تصمیم یعنی T و T_1در هر یک از حالت‌ها می‌پردازیم.

۴.۱. اثبات تحدب تابع هدف

به منظور بررسی محدب بودن توابع هزینه کل ابتدا به محاسبه عبارت ماتریس هیشین هر یک از توابع می‌پردازیم. در مورد تابع هدف حالت اول، وقتی $M \le T_1$ است، خواهیم داشت {به ضمیمه (۱) مراجعه شود}:

$$\begin{pmatrix} T_1 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 TC_a}{\partial T_1^2} & \frac{\partial^2 TC_a}{\partial T_1 \partial T} \\ \frac{\partial^2 TC_a}{\partial T\, \partial T_1} & \frac{\partial^2 TC_a}{\partial T^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T \end{pmatrix} = \frac{2A}{T} + \frac{CI_c DM^2}{T} - \frac{VI_e DM^2}{T} \ge 0 \qquad (۲۲)$$

با فرض $CI_c \ge VI_e$ و با توجه به مثبت بودن T، حاصل عبارت (۲۲) همواره مثبت است. با توجه به اینکه این توابع از جنس هزینه هستند و می‌بایست کمینه شوند، مثبت بودن رابطه (۲۲) نشان دهنده تحدب تابع $TC_a(T_1,T)$ است. حال با مساوی صفر قرار دادن مشتقات تابع $TC_a(T_1,T)$ نسبت به T و T_1 به محاسبه مقادیر بهینه این متغیرها می‌پردازیم {به ضمیمه (۲) مراجعه شود}.

$$\frac{\partial TC_a(T_1,T)}{\partial T_1} = 0 \;\rightarrow\; T_1 = \frac{CI_c DM - VI_e MD + \pi DT}{I_h CD + \pi D + CD\theta + CI_c D} \qquad (۲۳)$$

$$\frac{\partial TC_a(T_1,T)}{\partial T} = 0 \;\rightarrow\; T = \sqrt{\frac{\begin{matrix} 2A + I_h CDT_1^2 + \pi DT_1^2 + CD\theta T_1^2 + CI_c DT_1^2 + CI_c DM^2 \\ -2CI_c DMT_1 + 2VI_e MDT_1 - VI_e M^2 D \end{matrix}}{\pi D}} \qquad (۲۴)$$

با توجه به اینکه حاصل هر یک از متغیرهای T و T_1 بر حسب دیگری است، با توجه به ضمیمه ۳، با جایگزینی T_1 در T داریم:

$$T_a = T = \sqrt{\frac{\begin{matrix} 2AI_h C + 2A\pi + 2AC\theta + 2ACI_c \\ +(CI_c - VI_e)(CI_h DM^2 + \pi DM^2 + CDM^2\theta + DVM^2 I_e) \end{matrix}}{C\pi DI_h + C\pi D\theta + C\pi I_c D}} \qquad (۲۵)$$

با قرار دادن T_a در رابطه (۲۳) و محاسبه T_{1a} خواهیم داشت:

$$T_{1a} = \frac{CI_c DM - VI_e MD + \pi DT_a}{I_h CD + \pi D + CD\theta + CI_c D} \qquad (۲۶)$$

در مورد تابع هدف حالت دوم، وقتی $M > T_1$ است، خواهیم داشت {به ضمیمه (۴) مراجعه شود}:

$$\begin{pmatrix} T_1 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 TC_b}{\partial T_1^2} & \frac{\partial^2 TC_b}{\partial T_1 \partial T} \\ \frac{\partial^2 TC_b}{\partial T\, \partial T_1} & \frac{\partial^2 TC_b}{\partial T^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T \end{pmatrix} = \frac{2A}{T} \ge 0 \qquad (۲۷)$$

که با توجه به نتیجه حاصله این تابع نیز محدب است. اکنون با مساوی صفر قرار دادن مشتقات تابع هزینه $TC_b(T_1,T)$ نسبت به T و T_1، به محاسبه مقادیر بهینه این متغیرها می‌پردازیم (به ضمیمه ۵ مراجعه شود).

$$\frac{\partial TC_b(T_1,T)}{\partial T_1} = 0 \rightarrow T_1 = \frac{\pi DT}{I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D} \qquad (۲۸)$$

$$\frac{\partial TC_b(T_1,T)}{\partial T} = 0 \rightarrow T = \sqrt{\frac{2A + I_h CDT_1^2 + \pi DT_1^2 + CD\theta T_1^2 + VI_e DT_1^2}{\pi D}} \qquad (۲۹)$$

با توجه به اینکه حاصل هر یک از متغیرهای T_b و T_{1b} بر حسب دیگری است، با جایگزینی T_1 در T داریم (ضمیمه ۶):

$$T_b = T = \sqrt{\frac{2A(I_h C + \pi + C\theta + VI_e)}{C\pi DI_h + C\pi D\theta + V\pi I_e D}} \qquad (۳۰)$$

و برای T_{1b} نیز داریم:

$$T_{1b} = \frac{\pi DT_b}{I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D} \qquad (۳۱)$$

در ادامه، الگوریتم یافتن جواب بهینه ارائه خواهد شد.

۴.۲. الگوریتم یافتن جواب بهینه

با استفاده از الگوریتم زیر که توسعه یافته روش حل ارائه شده توسط Aggrawal and Jaggi [12] می‌باشد، به یافتن مقادیر بهینه T^* و T_1^* می‌پردازیم:

۱- اگر $M \le T_{1a}$ و $M > T_{1b}$ است، آنگاه $TC_a\left(T_{1a}, T_a\right)$ و $TC_b\left(T_{1b}, T_b\right)$ را مقایسه نمایید. در صورتی که $TC_a\left(T_{1a}, T_a\right) < TC_b\left(T_{1b}, T_b\right)$ است آنگاه $T_1^* = T_{1a}$ و $T^* = T_a$ قرار داده و در غیر این صورت $T_1^* = T_{1b}$ و $T^* = T_b$ قرار دهید.

۲- اگر $M \le T_{1a}$ و $M \le T_{1b}$ است، آنگاه T_{1b} را برابر M قرار داده و مقدار T_b را به ازاء $T_{1b} = M$ با استفاده از رابطه‌ی (۲۹) بدست آورید. سپس $TC_a\left(T_{1a}, T_a\right)$ و $TC_b\left(M, T_b\right)$ را با توجه به مقدار جدید T_b مقایسه نمایید. در صورتی که $TC_a\left(T_{1a}, T_a\right) < TC_b\left(M, T_b\right)$ است آنگاه $T_1^* = T_{1a}$ و $T^* = T_a$ قرار داده و در غیر این صورت $T_1^* = M$ و $T^* = T_b$ قرار دهید.

۳- اگر $M > T_{1a}$ و $M > T_{1b}$ است، آنگاه T_{1a} را برابر M قرار داده و مقدار T_a را به ازاء $T_{1a} = M$ با استفاده از رابطه‌ی (۲۴) بدست آورید. سپس $TC_a\left(M, T_a\right)$ و $TC_b\left(T_{1b}, T_b\right)$ را با توجه به مقدار جدید T_a مقایسه نمایید. در صورتی که $TC_a\left(M, T_a\right) < TC_b\left(T_{1b}, T_b\right)$ است آنگاه $T_1^* = M$ و $T^* = T_a$ قرار داده و در غیر این صورت $T_1^* = T_{1b}$ و $T^* = T_b$ قرار دهید.

۴- اگر $M > T_{1a}$ و $M \le T_{1b}$ است، آنگاه T_{1a} را برابر M قرار داده و مقدار T_a را به ازاء $T_{1a} = M$ با استفاده از رابطه‌ی (۲۴) بدست آورید. همچنین T_{1b} را برابر M قرار داده و مقدار T_b را به ازاء $T_{1b} = M$ با استفاده از رابطه‌ی (۲۹) بدست آورید. سپس $TC_a\left(M, T_a\right)$ و $TC_b\left(M, T_b\right)$ را با توجه به مقادیر جدید T_a و T_b مقایسه نمایید. در صورتی که $TC_a\left(M, T_a\right) < TC_b\left(M, T_b\right)$ است آنگاه $T_1^* = M$ و $T^* = T_a$ قرار داده و در غیر این صورت $T_1^* = M$ و $T^* = T_b$ قرار دهید.

۵. مثال عددی

مدل ارائه شده در بسیاری از کسب و کارها جهت تعیین سیاست بهینه‌ی سفارش دهی قابل استفاده است. به منظور نشان دادن عملکرد مدل ارائه شده در این مقاله مثال‌های زیر ارائه می‌شوند.

مثال ۱. فروشنده ای را در نظر بگیرید که کالای فسادپذیری همچون مواد غذایی را از تأمین کننده در یافت نموده و به فروش می‌رساند. فرض می‌کنیم ضریب فساد این کالا کوچک و ثابت بوده و برابر با ۵ درصد (θ) از موجودی در دست در هر زمان می‌باشد. همچنین تأمین کننده برای این فروشنده سیاست پرداخت معوقه در نظر می‌گیرد. یعنی از زمان تحویل کالا به این فروشنده به وی ۲ ماه $\left(M = \dfrac{2}{12}\right)$ مهلت می‌دهد تا هزینه‌ی خرید کالاهای خریداری شده را پرداخت و اقدام به تسویه حساب نماید. در صورت مواجهه با کمبود مشتریان تا زمان رسیدن سفارش منتظر می‌مانند، اما با توجه به اینکه این امر برای آن‌ها خوشایند نیست لذا موجب کاهش اعتبار فروشنده می‌گردد. فرض شده است هزینه‌ی این بدنامی به ازای هر واحد کالا کمبود در واحد زمان برابر ۱۱ تومان (π) است. هزینه‌ی انتقال کالاها از انبار تأمین کننده به انبار فروشنده (هزینه‌ی سفارش دهی) به عهده‌ی فروشنده بوده و برابر ۳۰۰ تومان (A) در هر بار سفارش می‌باشد. فروشنده هر واحد کالا را به قیمت ۲۵ تومان (C) خریده و با قیمت ۳۰ تومان (V) به فروش می‌رساند. با توجه به اطلاعات آماری می‌دانیم نرخ تقاضای مشتریان برای این فروشنده برابر ۵۰۰ عدد (D) در واحد زمان می‌باشد. همچنین جهت نگهداری کالاها در انبار، فروشنده هزینه‌ی ۰.۳ تومان (I_h) به ازای هر واحد کالا در واحد زمان را در نظر می‌گیرد. نرخ بهره‌ی پرداختی برابر ۱۲ درصد (I_c) در واحد زمان و نرخ بهره‌ی دریافتی برابر با ۷ درصد (I_e) در واحد زمان می‌باشد. هدف یافتن مقدار بهینه‌ی سفارش در هر بار سفارش دهی (Q^*)، طول سیکل (T^*) و طولی از سیکل که موجودی مثبت است (T_1^*) برای فروشنده به گونه ای است که مجموع هزینه های مرتبط با موجودی کمینه شود. با توجه به اطلاعات داده شده در مثال و با استفاده از روش حل ارائه شده در مقاله به تعیین سیاست بهینه‌ی سفارش دهی فروشنده می‌پردازیم. با استفاده از اطلاعات داده شده در مثال و روش حل ارائه شده در مقاله مقادیر بهینه طول سیکل و طولی از سیکل که می‌بایست موجودی مثبت باشد برابر خواهند بود با:

$$T^* = 170 \text{ روز}$$

$T_1^* = 85$ روز

که این مقادیر مربوط به حالت اول $(M \le T_1)$ می‌باشد. با قرار دادن این دو مقدار در تابع هزینه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$TC_a(T_1,T) = 13607$$

همچنین با استفاده از روابط (۳)، (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$Q^* = 232.75, I_m^* = 116.18, I_b^* = 116.57$$

مثال ۲. فرض می‌کنیم مقادیر پارامترهای ثابت مسئله در مثال (۱) تغییر کرده و عبارتند از : $A = 200$، $I_e = 0.10$، $I_c = 0.14$، $D = 1000$، $C = 10$، $\theta = 0.1$، $V = 12$، $M = 3/12$، $I_h = 0.2$، $\pi = 4$. با توجه به مقادیر جدید و مجدداً با استفاده از روش حل ارائه شده در مقاله مقادیر بهینه طول سیکل و طولی از سیکل که می‌بایست موجودی مثبت باشد برابر خواهند بود با:

$T^* = 0.4419 = 161$ روز

$T_1^* = 0.2155 = 79$ روز

که این مقادیر مربوط به حالت دوم یعنی $(M > T_1)$ می‌باشد. با قرار دادن این دو مقدار در تابع هزینه‌ی (۲) خواهیم داشت:

$$TC_b(T_1,T) = 10605$$

همچنین با استفاده از روابط (۳)، (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$Q^* = 444.20, I_m^* = 217.87, I_b^* = 226.32$$

۶- تحلیل حساسیت

تغییر در مقادیر پارامترهای مسئله منجر به عدم قطعیت در تصمیم گیری می‌شود. در این قسمت بر روی مثال‌های عددی ارائه شده آنالیز حساسیتی به ازای مقادیر مختلف پارامترها ارائه می‌شود. در جدول‌های (۱) الی (۳) مقادیر متغیرهای تصمیم به ازای مقادیر مختلف نرخ فساد، زمان مجاز پرداخت و مقادیر مختلف تقاضا محاسبه شده‌اند. در جدول‌های (۴) الی (۶) نیز مقادیر تابع هدف به ازای ترکیب‌های مختلفی از دو پارامتر متفاوت، برای مثال یک محاسبه شده‌اند. در جدول (۴) تغییرات تابع هزینه نسبت به تغییرات نرخ فساد و زمان پرداخت معوقه در مثال (۱) به طور همزمان بررسی شده است. در جدول (۵) تغییرات تابع هزینه نسبت به تغییرات نرخ فساد و نرخ تقاضا به طور همزمان مورد بررسی قرار گرفته‌اند و در جدول (۶) نیز تغییرات تابع هزینه نسبت به تغییرات نرخ تقاضا و زمان پرداخت معوقه بررسی شده است.

جدول ۱. نتایج مثال (۱) به ازای مقادیر مختلف نرخ فساد

θ	T^*	T_1^*	I_m^*	I_b^*	Q^*	$TC^*(N^*,F^*)$
0.05	170	85	116	117	233	13607
0.15	163	73	101	123	224	13671
0.25	157	65	90	127	217	13721
0.50	148	50	70	135	205	13809

جدول ۲. نتایج مثال (۱) به ازای مقادیر مختلف زمان مجاز پرداخت

M	T^*	T_1^*	I_m^*	I_b^*	Q^*	$TC^*(N^*,F^*)$
0	168	82	112	119	231	13806
30	169	83	114	118	232	13703
90	172	87	119	117	236	13518
180	172	87	119	117	236	13255

جدول ۳. نتایج مثال (۱) به ازای مقادیر مختلف تقاضا

D	T^*	T_1^*	I_m^*	I_b^*	Q^*	$TC^*(N^*,F^*)$
250	239	118	82	82	164	7072
500	170	85	116	117	233	13607
750	140	70	144	143	287	20056
1000	121	61	165	168	333	26460

جدول ۴. تغییرات تابع هزینه نسبت به تغییرات نرخ فساد و زمان پرداخت معوقه در مثال (۱)

Total Cost		M			
		0	30	90	180
θ	0.05	13806	13703	13518	13255
	0.15	13865	13764	13583	13320
	0.25	13911	13813	13633	13371
	0.50	13994	13898	13722	13459

جدول ۵. تغییرات تابع هزینه نسبت به تغییرات نرخ فساد و نرخ تقاضا در مثال (۱)

Total Cost		D			
		250	500	750	1000
θ	0.05	7072	13607	20056	26460
	0.15	7116	13671	20135	26552
	0.25	7150	13721	20197	26624
	0.50	7212	13809	20305	26749

جدول ۶. تغییرات تابع هزینه نسبت به تغییرات نرخ تقاضا و زمان پرداخت معوقه در مثال (۱)

Total Cost		D			
		250	500	750	1000
M	0	7173	13806	20349	26846
	30	7121	13703	20196	26644
	90	7025	13518	19924	26285
	180	6892	13255	19530	25760

۴ در ادامه به آنالیز حساسیت پارامترهای مختلف مثال (۲) می‌پردازیم. در جدول‌های (۷) الی (۹) مقادیر متغیرهای تصمیم به ازای مقادیر مختلف نرخ فساد، زمان مجاز پرداخت و مقادیر مختلف تقاضا محاسبه شده‌اند.

در جدول‌های (۱۰) الی (۱۲) نیز مقادیر تابع هدف به ازای ترکیب‌های مختلفی از دو پارامتر متفاوت برای مثال دو محاسبه شده‌اند.

جدول ۷. نتایج مثال (۲) به ازای مقادیر مختلف نرخ فساد

θ	T^*	T_1^*	I_m^*	I_b^*	Q^*	$TC^*(N^*,F^*)$
0.05	167	87	238	220	458	10577
0.15	157	73	201	233	434	10630
0.25	151	63	174	243	417	10670
0.50	141	47	131	259	390	10737

جدول ۸. نتایج مثال (۲) به ازای مقادیر مختلف زمان مجاز پرداخت

M	T^*	T_1^*	I_m^*	I_b^*	Q^*	$TC^*(N^*,F^*)$
0	160	76	211	229	440	10915
30	160	77	213	227	440	10809
90	162	79	218	227	445	10605
180	162	79	218	227	445	10305

جدول ۹. نتایج مثال (۲) به ازای مقادیر مختلف تقاضا

D	T^*	T_1^*	I_m^*	I_b^*	Q^*	$TC^*(N^*,F^*)$
750	187	91	190	196	386	8059
1000	161	79	218	227	445	10605
1250	145	71	244	253	497	13137
2000	132	65	267	277	544	15659

جدول ۱۰. تغییرات تابع هزینه نسبت به تغییرات نرخ فساد و زمان پرداخت معوقه در مثال (۲)

Total Cost		M			
		0	30	90	180
θ	0.05	10889	10782	10577	10277
	0.15	10939	10833	10630	10330
	0.25	10976	10871	10670	10370
	0.50	11041	10937	10737	10437

جدول ۱۱. تغییرات تابع هزینه نسبت به تغییرات نرخ فساد و نرخ تقاضا در مثال (۲)

Total Cost		D			
		750	1000	1250	1500
θ	0.05	8034	10577	13105	15624
	0.15	8080	10630	13164	15689
	0.25	8114	10670	13209	15738
	0.50	8173	10737	13284	15820

جدول ۱۲. تغییرات تابع هزینه نسبت به تغییرات نرخ تقاضا و زمان پرداخت معوقه در مثال (۲)

Total Cost		D			
		750	1000	1250	1500
M	0	8293	10915	13524	16121
	30	8212	10809	13391	15962
	90	8059	10605	13137	15659
	180	7834	10305	12762	15209

همان طور که مشخص است همواره با افزایش نرخ فساد کالا میزان هزینه های موجودی افزایش می‌یابد. بنابراین شایسته است با بکارگیری روش‌های مناسب نگهداری کالا و کاهش نرخ فساد تا حد امکان هزینه های موجودی را کاهش داد. علاوه بر این مشاهده می‌شود هرچه نرخ فساد افزایش می‌یابد می‌بایست میزان سفارش در هر بار سفارش دهی را کاهش و در مقابل تعداد دفعات سفارش دهی را افزایش داد تا از فساد کالا و افزایش هزینه جلوگیری شود.

همچنین با توجه به تحلیل حساسیت انجام شده می‌توان دریافت با تغییر مدت زمان مجاز برای پرداخت هزینه‌ی خرید (M)، سیاست سفارش دهی یعنی میزان سفارش (Q) و فاصله‌ی زمانی بین سفارشات (T) و همچنین نحوه‌ی مواجهه با کمبود (T_1) تغییر چندانی نمی‌کند. اما می‌بایست توجه نمود هرچه زمان پرداخت هزینه‌ی خرید افزایش می‌یابد میزان هزینه های موجودی کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توان با انتخاب فروشنده ای که با حفظ کیفیت محصول، مدت زمان پرداخت هزینه‌ی خرید طولانی‌تری را برای مشتریان خود در نظر می‌گیرد تا حد امکان هزینه های موجودی را کاهش داد.

۳- جمع بندی

در این مقاله یک مدل سفارش اقتصادی جهت تعیین سیاست بهینه‌ی سفارش دهی کالاهای فسادپذیر زمانی که کمبود مجاز بوده و حالت پس افت می‌یابد ارائه شد. در دنیای واقعی، تأمین کنندگان همواره سعی دارند با استفاده از سیاست‌های انگیزشی مختلف از جمله سیاست پرداخت معوقه و تسهیل شرایط پرداخت، مشتریان بیشتری را جذب نموده و یا حس وفاداری مشتریان کنونی خود را افزایش دهند. به همین علت به بررسی مدل در شرایطی که سیاست پرداخت معوقه وجود دارد پرداختیم.

علاوه بر این سیستم موجودی تک کالایی، نرخ تقاضا و فساد ثابت و مدت تحویل نیز صفر فرض شدند. به کمک اثبات محدب بودن تابع هدف که کمینه سازی هزینه کل موجودی بود، ابتدا روش حل دقیقی برای تعیین جواب بهینه ارائه شده و در ادامه نیز برای نشان دادن کارایی روش حل پیشنهادی دو مثال عددی و برای هر یک نیز آنالیز حساسیت صورت گرفت. مدل ارائه شده در این مقاله می‌تواند به بهبود سیاست کنترل موجودی و سفارش دهی در کسب و کارهایی که با کالاهای فسادپذیر همچون مواد غذایی روبرو هستند کمک نماید. ابتدا می‌بایست پارامترهای مدل جمع آوری و یا تخمین زده شده، سپس با استفاده از مدل و روش حل، سیاست بهینه‌ی سفارش دهی را تعیین نمود. برای تحقیقات آتی نیز می‌توان اضافه کردن فرضیات واقعی‌تر همچون سیاست پس افت جزئی، نرخ فساد وابسته به زمان، تقاضای احتمالی و نرخ تورم به مدل را در نظر گرفت.

مراجع

[1] Ghare P.M., &Schrader G.F., *"A model for exponentially decaying inventory"*,

Journal of Industrial Engineering, Vol. 14, No. 5, 1963, PP. 238-43.

[2] Eilon S., &Mallaya R.V., *"Issuing and pricing policy of semi-perishables"*, Proceedings of the 4th International Conference on Operational Research, New York: Wiley-Interscience, 1996.

[3] Cohen M.A., *"Joint pricing and ordering policy for exponentially decaying inventory with known demand"*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 24, 1997, PP. 257-68.

[4] Kang S., &Kim I., *"A study on the price and production level of the deteriorating inventory system"*, International Journal of production Research, Vol. 21, 1983, PP. 899-908.

[5] Aggarwal S.P., &Jaggi C.K., "*Ordering policy for decaying inventory*", International Journal of Systems Science, Vol. 20, 1989, PP. 151-5.

[6] Wee H.M., *"A replenishment policy for items with a price-dependent demand and varying rate of deterioration"*, Production Planning and Control, Vol. 8, 1997, PP. 494-9.

[7] Ghosh S.K., &Chaudhuri K.S., *"An EOQ model with a quadratic demand, time-proportional deterioration and shortages in all cycles"*, International Journal of Systems Science, Vol. 37, No. 10, 2006, PP. 663-672.

[8] Mukhopadhyay S., &Mukherjee R.N., &Chaudhuri K.S., *"An EOQ model with two-parameter Weibull distribution deterioration and price-dependent demand"*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 36, No. 1, 2005, PP. 25-33.

[9] Dye C.Y., *"Joint pricing and ordering policy for a deteriorating inventory with partial backlogging"*, The International Journal of Management Science, Vol. 35, 2007, PP. 184-189.

[10] Ouyang L.Y., &Chang C.T., &Teng J.T., *"An EOQ model for deterioration items under trade credits"*, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 56, No. 6, 255, PP. 719-726.

[11] Hu F., &Liu D., *"Optimal replenishment policy for the EPQ model with permissible delay in payments and allowable shortages"*, Applied Mathematical Modeling, Vol. 34, No. 10, 2010, PP. 3108-3117.

[12] Aggarwal S.P., & Jaggi C.K., "*Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments*", Journal of the Operational Research Society, Vol. 46, No. 5, 1995, PP. 658–662.

[13] Mohan S., &Gopalakrishnan M., *"Analytical framework for the multi-item, economic order quantity model with permissible delay in payment and a budget constraint. A note"*, Production Planning and Control, Vol. 18, 2007, PP.361-363.

[14] Chang C.T., &Wu S.J., &Chen L.C., *"Optimal payment time with deteriorating items* under *inflation and permissible delay in payments"*, International Journal of Systems Science, Vol. 40, 2009, PP. 985-993.

[15] Hou K.L., &Lin L.C., *"An EOQ model for deteriorating items with price- and stock-dependent selling rates under inflation and time value of money"*, International Journal of Systems Science, Vol. 37, 2006, PP. 1131-1139.

[16] Jamal M.M., &Sarker B.R., &Wang S., *"An ordering policy for deteriorating items with allowable shortage and permissible delay in payment"*, The Jourrnal of the Operational Research Society, Vol. 48, No. 8, 1997, PP. 826-833.

ضمیمه ۱. اثبات تحدب تابع هزینه a

$$TC_a(T_1,T)=\frac{A}{T}+\frac{I_hCDT_1^2}{2T}+\frac{\pi D(T-T_1)^2}{2T}+\frac{CD}{T}\left(\frac{\theta T_1^2}{2}+T\right)+\frac{CI_cD}{2T}(T_1-M)^2$$
$$-\frac{VI_eMD}{T}\left(T-T_1+\frac{M}{2}\right)$$

$$\frac{\partial TC_a(T_1,T)}{\partial T_1}=\frac{I_hCDT_1}{T}+\frac{\pi D(T_1-T)}{T}+\frac{CD}{T}(\theta T_1)+\frac{CI_cD}{T}(T_1-M)+\frac{VI_eMD}{T}$$

$$\frac{\partial^2 TC_a(T_1,T)}{\partial T_1^2}=\frac{I_hCD}{T}+\frac{\pi D}{T}+\frac{CD\theta}{T}+\frac{CI_cD}{T}$$

$$\frac{\partial TC_a(T_1,T)}{\partial T}=-\frac{A}{T^2}-\frac{I_hCDT_1^2}{2T^2}+\frac{\pi D}{2}\left(1-\frac{T_1^2}{T^2}\right)-\frac{CD\theta T_1^2}{2T^2}-\frac{CI_cD}{2T^2}(T_1-M)^2$$
$$-VI_eMD\left(\frac{T_1}{T^2}-\frac{M}{2T^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 TC_a(T_1,T)}{\partial T^2}=\frac{2A}{T^3}+\frac{I_hCDT_1^2}{T^3}+\frac{\pi DT_1^2}{T^3}+\frac{CD\theta T_1^2}{T^3}+\frac{CI_cD}{T^3}(T_1-M)^2$$
$$-VI_eMD\left(-\frac{2T_1}{T^3}+\frac{M}{T^3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 TC_a(T_1,T)}{\partial T_1\partial T}=-\frac{I_hCDT_1}{T^2}-\frac{\pi DT_1}{T^2}-\frac{CD\theta T_1}{T^2}-\frac{CI_cD(T_1-M)}{T^2}-\frac{VI_eMD}{T^2}$$

$$\begin{pmatrix}T_1 & T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 TC_a}{\partial T_1^2} & \frac{\partial^2 TC_a}{\partial T_1\partial T}\\ \frac{\partial^2 TC_a}{\partial T\,\partial T_1} & \frac{\partial^2 TC_a}{\partial T^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T\end{pmatrix}$$

$$X_1=\frac{I_hCD}{T}T_1+\frac{\pi D}{T}T_1+\frac{CD\theta}{T}T_1+\frac{CI_cD}{T}T_1-\frac{I_hCDT_1}{T}-\frac{\pi DT_1}{T}-\frac{CD\theta T_1}{T}$$
$$-\frac{CI_cD(T_1-M)}{T}-\frac{VI_eMD}{T}$$

$$X_2=-\frac{I_hCDT_1^2}{T^2}-\frac{\pi DT_1^2}{T^2}-\frac{CD\theta T_1^2}{T^2}-\frac{CI_cD(T_1-M)T_1}{T^2}-\frac{VI_eMDT_1}{T^2}+\frac{2A}{T^2}$$
$$+\frac{I_hCDT_1^2}{T^2}+\frac{\pi DT_1^2}{T^2}+\frac{CD\theta T_1^2}{T^2}+\frac{CI_cD}{T^2}(T_1-M)^2-VI_eMD\left(-\frac{2T_1}{T^2}+\frac{M}{T^2}\right)$$

$$\begin{pmatrix}X_1 & X_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T\end{pmatrix}=\frac{I_hCD}{T}T_1^2+\frac{\pi D}{T}T_1^2+\frac{CD\theta}{T}T_1^2+\frac{CI_cD}{T}T_1^2-\frac{I_hCDT_1^2}{T}$$
$$-\frac{\pi DT_1^2}{T}-\frac{CD\theta T_1^2}{T}-\frac{CI_cDT_1^2}{T}+\frac{CI_cDMT_1}{T}-\frac{VI_eMDT_1}{T}$$
$$-\frac{I_hCDT_1^2}{T}-\frac{\pi DT_1^2}{T}-\frac{CD\theta T_1^2}{T}-\frac{CI_cD(T_1-M)T_1}{T}-\frac{VI_eMDT_1}{T}$$
$$+\frac{2A}{T}+\frac{I_hCDT_1^2}{T}+\frac{\pi DT_1^2}{T}+\frac{CD\theta T_1^2}{T}+\frac{CI_cD}{T}(T_1-M)^2-VI_eMD\left(-\frac{2T_1}{T}+\frac{M}{T}\right)$$

پس از ساده سازی و با توجه به فرض $CI_c\geq VI_e$ داریم:

$$\begin{pmatrix}T_1 & T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 TC_a}{\partial T_1^2} & \frac{\partial^2 TC_a}{\partial T_1\partial T}\\ \frac{\partial^2 TC_a}{\partial T\,\partial T_1} & \frac{\partial^2 TC_a}{\partial T^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T\end{pmatrix}=\frac{2A}{T}+\frac{CI_cDM^2}{T}-\frac{VI_eM^2D}{T}\geq 0$$

ضمیمه ۲.محاسبه متغیرهای تابع هزینه‌ی a بر حسب یکدیگر

$$\frac{\partial TC_1(T_1,T)}{\partial T_1}=\frac{I_hCDT_1}{T}+\frac{\pi D(T_1-T)}{T}+\frac{CD}{T}(\theta T_1)+\frac{CI_cD}{T}(T_1-M)+\frac{VI_eMD}{T}=0$$

$$\rightarrow \frac{I_hCDT_1}{T}+\frac{\pi DT_1}{T}-\frac{\pi D}{T}T+\frac{CD}{T}\theta T_1+\frac{CI_cD}{T}T_1-\frac{CI_cD}{T}M+\frac{VI_eMD}{T}=0$$

$$\rightarrow I_hCDT_1+\pi DT_1-\pi DT+CD\theta T_1+CI_cDT_1-CI_cDM+VI_eMD=0$$

$$\rightarrow T_1=\frac{CI_cDM-VI_eMD+\pi DT}{I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD}$$

$$\frac{\partial TC_1(T_1,T)}{\partial T}=-\frac{A}{T^2}-\frac{I_hCDT_1^2}{2T^2}+\frac{\pi D}{2}\left(1-\frac{T_1^2}{T^2}\right)-\frac{CD\theta T_1^2}{2T^2}-\frac{CI_cD}{2T^2}(T_1-M)^2-VI_eMD\left(\frac{T_1}{T^2}-\frac{M}{2T^2}\right)=0$$

$$\rightarrow -2A-I_hCDT_1^2+\pi DT^2-\pi DT_1^2-CD\theta T_1^2-CI_cDT_1^2-CI_cDM^2+2CI_cDMT_1-2VI_eMDT_1+VI_eM^2D=0$$

$$\rightarrow T=\sqrt{\frac{2A+I_hCDT_1^2+\pi DT_1^2+CD\theta T_1^2+CI_cDT_1^2+CI_cDM^2-2CI_cDMT_1+2VI_eMDT_1-VI_eM^2D}{\pi D}}$$

ضمیمه ۳.یافتن مقادیر نهایی متغیرهای تابع هدف a

$$T=\sqrt{\frac{2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D+T_1^2(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)+T_1(2VI_eMD-2CI_cDM)}{\pi D}}$$

$$\rightarrow T=\sqrt{\frac{2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D+\left(\frac{CI_cDM-VI_eMD+\pi DT}{I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD}\right)^2(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)+\left(\frac{CI_cDM-VI_eMD+\pi DT}{I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD}\right)(2VI_eMD-2CI_cDM)}{\pi D}}$$

$$\rightarrow T=\sqrt{\frac{2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D+\frac{(CI_cDM-VI_eMD+\pi DT)^2}{I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD}+\frac{(CI_cDM-VI_eMD+\pi DT)(2VI_eMD-2CI_cDM)}{I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD}}{\pi D}}$$

$$\rightarrow T=\sqrt{\frac{(2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D)(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)+(CI_cDM-VI_eMD+\pi DT)^2+(CI_cDM-VI_eMD+\pi DT)(2VI_eMD-2CI_cDM)}{\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)}}$$

$$\rightarrow T=\sqrt{\frac{(2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D)(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)+(CI_cDM-VI_eMD+\pi DT)(CI_cDM-VI_eMD+\pi DT+2VI_eMD-2CI_cDM)}{\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)}}$$

$$\rightarrow T=\sqrt{\frac{(2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D)(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)+(CI_cDM-VI_eMD+\pi DT)(VI_eMD-CI_cDM+\pi DT)}{\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)}}$$

$$\rightarrow T=\sqrt{\frac{(2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D)(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)+(\pi DT)^2-(CI_cDM-VI_eMD)^2}{\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)}}$$

$$\rightarrow T^2-\frac{(\pi DT)^2}{\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)}=\frac{(2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D)(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)-(CI_cDM-VI_eMD)^2}{\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)}$$

$$\rightarrow \frac{T^2\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)-(\pi DT)^2}{\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)}=\frac{(2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D)(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)-(CI_cDM-VI_eMD)^2}{\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)}$$

$$\rightarrow T^2\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)-(\pi DT)^2=(2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D)(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)-(CI_cDM-VI_eMD)^2$$

$$\rightarrow T^2=\frac{(2A+CI_cDM^2-VI_eM^2D)(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)-(CI_cDM-VI_eMD)^2}{\pi D(I_hCD+\pi D+CD\theta+CI_cD)-\pi^2D^2}$$

$$\rightarrow T^2=\frac{2AI_hCD+2A\pi D+2ACD\theta+2ACI_cD+C^2I_cI_hD^2M^2+CI_cD^2M^2\pi+C^2I_cD^2M^2\theta+C^2I_c^2D^2M^2-VCI_eI_hM^2D^2}{C\pi D^2I_h+C\pi D^2\theta+C\pi I_cD^2}$$

$$+\frac{-V\pi I_eM^2D^2-CVI_eM^2D^2\theta-CVI_cI_eM^2D^2-C^2I_c^2D^2M^2-V^2I_e^2M^2D^2+2CVI_cI_eM^2D^2}{C\pi D^2I_h+C\pi D^2\theta+C\pi I_cD^2}$$

$$\rightarrow T^2=\frac{2AI_hCD+2A\pi D+2ACD\theta+2ACI_cD+C^2I_cI_hD^2M^2-CVI_eI_hM^2D^2+C\pi I_cD^2M^2-V\pi I_eM^2D^2+C^2I_cD^2M^2\theta}{C\pi D^2I_h+C\pi D^2\theta+C\pi I_cD^2}$$

$$+\frac{-CVI_eM^2D^2\theta+C^2I_c^2D^2M^2-CVI_cI_eM^2D^2-C^2I_c^2D^2M^2-V^2I_e^2M^2D^2+2CVI_cI_eM^2D^2}{C\pi D^2I_h+C\pi D^2\theta+C\pi I_cD^2}$$

$$\rightarrow T^2=\frac{2AI_hCD+2A\pi D+2ACD\theta+2ACI_cD+CI_hD^2M^2(CI_c-VI_e)+\pi D^2M^2(CI_c-VI_e)}{C\pi D^2I_h+C\pi D^2\theta+C\pi I_cD^2}$$
$$+\frac{CD^2M^2\theta(CI_c-VI_e)+CI_cD^2M^2(CI_c-VI_e)-D^2M^2(CI_c-VI_e)^2}{C\pi D^2I_h+C\pi D^2\theta+C\pi I_cD^2}$$

$$\rightarrow T^2=\frac{2AI_hCD+2A\pi D+2ACD\theta+2ACI_cD+CI_hD^2M^2(CI_c-VI_e)+\pi D^2M^2(CI_c-VI_e)}{C\pi D^2I_h+C\pi D^2\theta+C\pi I_cD^2}$$
$$+\frac{CD^2M^2\theta(CI_c-VI_e)+D^2M^2(CI_c-VI_e)(CI_c-CI_c+VI_e)}{C\pi D^2I_h+C\pi D^2\theta+C\pi I_cD^2}$$

$$\rightarrow T^2=\frac{2AI_hCD+2A\pi D+2ACD\theta+2ACI_cD+CI_hD^2M^2(CI_c-VI_e)+\pi D^2M^2(CI_c-VI_e)}{C\pi D^2I_h+C\pi D^2\theta+C\pi I_cD^2}$$
$$+\frac{CD^2M^2\theta(CI_c-VI_e)+D^2M^2(CI_c-VI_e)(VI_e)}{C\pi D^2I_h+C\pi D^2\theta+C\pi I_cD^2}$$

$$\rightarrow T^2=\frac{2AI_hC+2A\pi+2AC\theta+2ACI_c+CI_hDM^2(CI_c-VI_e)+\pi DM^2(CI_c-VI_e)+CDM^2\theta(CI_c-VI_e)+DM^2(CI_c-VI_e)(VI_e)}{C\pi DI_h+C\pi D\theta+C\pi I_cD}$$

$$\rightarrow T=\sqrt{\frac{2AI_hC+2A\pi+2AC\theta+2ACI_c+(CI_c-VI_e)(CI_hDM^2+\pi DM^2+CDM^2\theta+DVM^2I_e)}{C\pi DI_h+C\pi D\theta+C\pi I_cD}}$$

ضمیمه ۴.اثبات تحدب تابع هزینه b

$$TC_2(T_1,T)=\frac{A}{T}+\frac{I_hCDT_1^2}{2T}+\frac{\pi D(T-T_1)^2}{2T}+\frac{CD}{T}\left(\frac{\theta T_1^2}{2}+T\right)-\frac{VI_eD}{T}\left(MT-\frac{T_1^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial TC_2(T_1,T)}{\partial T_1}=\frac{I_hCDT_1}{T}+\frac{\pi D(T_1-T)}{T}+\frac{CD}{T}(\theta T_1)+\frac{VI_eD}{T}T_1$$

$$\frac{\partial^2 TC_2(T_1,T)}{\partial T_1^2}=\frac{I_hCD}{T}+\frac{\pi D}{T}+\frac{CD\theta}{T}+\frac{VI_eD}{T}$$

$$\frac{\partial TC_2(T_1,T)}{\partial T}=-\frac{A}{T^2}-\frac{I_hCDT_1^2}{2T^2}+\frac{\pi D}{2}\left(1-\frac{T_1^2}{T^2}\right)-\frac{CD\theta T_1^2}{2T^2}-VI_eD\left(\frac{T_1^2}{2T^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 TC_2(T_1,T)}{\partial T^2}=\frac{2A}{T^3}+\frac{I_hCDT_1^2}{T^3}+\frac{\pi DT_1^2}{T^3}+\frac{CD\theta T_1^2}{T^3}+\frac{VI_eDT_1^2}{T^3}$$

$$\frac{\partial^2 TC_1(T_1,T)}{\partial T_1\partial T}=-\frac{I_hCDT_1}{T^2}-\frac{\pi DT_1}{T^2}-\frac{CD\theta T_1}{T^2}-\frac{VI_eDT_1}{T^2}$$

$$\begin{pmatrix}T_1 & T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2TC_2}{\partial T_1^2} & \dfrac{\partial^2TC_2}{\partial T_1\partial T}\\ \dfrac{\partial^2TC_2}{\partial T\,\partial T_1} & \dfrac{\partial^2TC_2}{\partial T^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_3 & X_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T\end{pmatrix}$$

$$X_3=\frac{I_hCD}{T}T_1+\frac{\pi D}{T}T_1+\frac{CD\theta}{T}T_1+\frac{VI_eD}{T}T_1-\frac{I_hCDT_1}{T}-\frac{\pi DT_1}{T}-\frac{CD\theta T_1}{T}-\frac{VI_eDT_1}{T}=0$$

$$X_4=-\frac{I_hCDT_1^2}{T^2}-\frac{\pi DT_1^2}{T^2}-\frac{CD\theta T_1^2}{T^2}-\frac{VI_eDT_1^2}{T^2}+\frac{2A}{T^2}+\frac{I_hCDT_1^2}{T^2}+\frac{\pi DT_1^2}{T^2}+\frac{CD\theta T_1^2}{T^2}+\frac{VI_eDT_1^2}{T^2}$$
$$=\frac{2A}{T^2}$$

$$\begin{pmatrix} T_1 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 TC_2}{\partial T_1^2} & \dfrac{\partial^2 TC_2}{\partial T_1 \partial T} \\ \dfrac{\partial^2 TC_2}{\partial T\,\partial T_1} & \dfrac{\partial^2 TC_2}{\partial T^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T \end{pmatrix} = \frac{2A}{T} \geq 0$$

ضمیمه ۵.محاسبه‌ی متغیرهای تابع هزینه‌ی b بر حسب یکدیگر

$$\frac{\partial TC_2(T_1,T)}{\partial T_1} = \frac{I_h CDT_1}{T} + \frac{\pi D(T_1 - T)}{T} + \frac{CD}{T}(\theta T_1) + \frac{VI_e D}{T} T_1 = 0$$

$$\rightarrow I_h CDT_1 + \pi DT_1 - \pi DT + CD\theta T_1 + VI_e DT_1 = 0$$

$$\rightarrow T_1 = \frac{\pi DT}{I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D}$$

$$\frac{\partial TC_2(T_1,T)}{\partial T} = -\frac{A}{T^2} - \frac{I_h CDT_1^2}{2T^2} + \frac{\pi D}{2}\left(1 - \frac{T_1^2}{T^2}\right) - \frac{CD\theta T_1^2}{2T^2} - VI_e D\left(\frac{T_1^2}{2T^2}\right) = 0$$

$$\rightarrow -2A - I_h CDT_1^2 + \pi DT^2 - \pi DT_1^2 - CD\theta T_1^2 - VI_e DT_1^2 = 0$$

$$\rightarrow T = \sqrt{\frac{2A + I_h CDT_1^2 + \pi DT_1^2 + CD\theta T_1^2 + VI_e DT_1^2}{\pi D}}$$

ضمیمه ۶.یافتن مقادیر نهایی متغیرهای تابع هدف b

$$T = \sqrt{\frac{2A + I_h CDT_1^2 + \pi DT_1^2 + CD\theta T_1^2 + VI_e DT_1^2}{\pi D}}$$

$$\rightarrow T = \sqrt{\frac{2A + T_1^2(I_h CDT_1^2 + \pi D + CD\theta + VI_e D)}{\pi D}}$$

$$\rightarrow T = \sqrt{\frac{2A + \left(\dfrac{\pi DT}{I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D}\right)^2 (I_h CDT_1^2 + \pi D + CD\theta + VI_e D)}{\pi D}}$$

$$\rightarrow T = \sqrt{\frac{2A(I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D) + \pi^2 D^2 T^2}{\pi D(I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D)}}$$

$$\rightarrow T^2 \pi D(I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D) - \pi^2 D^2 T^2 = 2A(I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D)$$

$$\rightarrow T^2 = \frac{2A(I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D)}{\pi D(I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D) - \pi^2 D^2}$$

$$\rightarrow T^2 = \frac{2A(I_h CD + \pi D + CD\theta + VI_e D)}{C\pi D^2 I_h + \pi^2 D^2 + C\pi D^2\theta + V\pi I_e D^2 - \pi^2 D^2}$$

$$\rightarrow T = \sqrt{\frac{2A(I_h C + \pi + C\theta + VI_e)}{C\pi DI_h + C\pi D\theta + V\pi I_e D}}$$