مروری بر روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو[1]

امیربهداد سلامی*

امروزه استفاده از انواع روش‌های شبیه‌سازی در عرصه علوم مختلف عمومیت یافته‌است. هرچند از مدت‌ها پیش است که بهره‌گیری از این ابزار در علوم انسانی و اقتصاد نیز رایج شده‌است، اما استفاده وسیع از آن به همین اواخر بازمی‌گردد. آشنایی با این ابزرا کارآمد و شناسایی نقاط ضعف و قوت آن امکانات جدیدی را در اختیار محققین، اساتید، دانش آموختگان و کارشناسان اقتصاد قرار خواهدداد. از میان روش‌های مختلف شبیه‌سازی، روش مونت‌کارلو برای تحقیقات و محاسبات مالی و اقتصادی از سایر شیوه‌ها مناسب‌تر است. این مقاله سعی در معرفی این روش و ابزارهای پیشرفته‌تری نظیر شبیه‌سازی شبه مونت کارلو و مونت‌کارلو ادغامی دارد. در این راستا، به مثالی در زمینه‌ی بازار ابزار مشتقه نیز اشاره شده‌است.

کلید واژه‌ها:
شبیه‌سازی، مونت کارلو، مونت کارلو ادغامی، شبه مونت کارلو، نظریه بلک ـ شولز، قرارداد حق انتخاب

1- Monte Carlo Simulation (MCS)

* - امیربهداد سلامی؛ دانشجوی دوره دکتری دانشگاه علامه طباطبایی.
E-mail: amir.salami@parsian-bank.net

مقدمه

در اقتصاد، مالیه، صنایع و فنون مرتبط به آنها نظیر؛ بانکداری، بیمه، جهانگردی، بازرگانی، مدیریت مالی، مدیریت ریسک، بازاریابی، ارزیابی طرح‌های سرمایه‌گذاری و...، اغلب تصمیم‌گیری‌ها بر پایه روابطی اتخاذ می‌شود که حداقل یک جز آن، از محاسبه ارزش‌های تنزیل‌یافته یک یا چند متغیر مربوط به آینده تا زمانی معلوم (به‌طور معمول، زمان حال)، به‌دست آمده‌است. از آنجایی که در بیشتر مواقع، ارزش‌های آتی چنین متغیرهایی، از پیش قطعیت نداشته و نامعلوم است، تصمیم‌گیری بر پیش‌بینی مبتنی می‌گردد.

بر همین اساس، بخش وسیعی از تلاش جمعی دانشمندان این علوم و فنون، صرف ساخت و دستیابی به شیوه‌های کارآمدتر پیش‌بینی متغیرها شده‌است.[1] رسیدن به این پیش‌بینی، نیازمند مدلی با توانایی تفکیک دو جزء تعیین‌پذیر و تصادفی می‌باشد که در آن ویژگی‌های جزء دوم نظیر نوع توزیع احتمال، میانگین، فواصل اطمینان و واریانس نیز معرفی شده‌است. سپس مدل طراحی شده جهت محاسبه پیش‌بینی‌ها به کار گرفته می‌شود. شبیه‌سازی روشی است که از طریق آن می‌توان رفتاری مشابه جزء تصادفی الگوی طراحی شده را ایجاد کرد. به این ترتیب امکانی فراهم می‌شود تا پیش‌بینی به همراه درجه اطمینان و به عبارتی درجه ریسک آن قابل محاسبه شود.

شبیه‌سازی مونت کارلو یکی از انواع این روش‌هاست. در گزارش حاضر سعی شده‌است در نهایت سادگی، مباحث مهم و کاربردی این شیوه و بدیل‌های آن مرور شود. در ضمن، زمینه‌های استفاده از این روش در مالیه نیز شناسایی خواهدشد. این گزارش بدین شکل سازمان یافته‌است که ابتدا تعریفی مختصر از شبیه‌سازی ارایه می‌شود، سپس در بخش‌های دو الی چهار؛ روش‌های مونت کارلو، شبه مونت کارلو[2] و

۱- ممکن است این شیوه‌ها در حوزه سایر علوم کشف یا خلق شده‌باشد، لذا فقط کافی است پس از یادگیری، در حوزه‌های اقتصادی و مالی به کار رود.

2- Quasi-MCS

مونت کارلو ادغامی[1] معرفی و نقد خواهندشد. بخش پنج، به مرور کاربرد این روش‌ها در اقتصاد و مالیه می‌پردازد و در ادامه، در بخش شش، سایر تحولاتی که در این عرصه در شرف وقوع است، معرفی می‌گردد و در نهایت در بخش پایانی، نتیجه‌گیری و زمینه‌های تحقیقاتی آینده ارایه و پیشنهاد می‌شود.

۱ـ تعریف شبیه‌سازی

شبیه‌سازی عبارت است از ایجاد محیطی ساختگی و استفاده از یک مدل نظری، برای تخمین رفتار یک سازمانه یا سیستم موجود در جهان واقعی. محیط ساختگی یا مصنوعی، فضایی معادل حقیقی یا مجازی است که در آن تحلیل‌گر تلاش می‌کند تا سازمانه واقع در جهان حقیقی را الگوبندی کند. برای مثال؛ در مالیه که در آن به‌طور معمول با مدلی حسابداری از جریانات نقدی ورودی یا خروجی کار می‌کنیم، باتوجه به شناختی (فروضی) که در مورد رفتار اجزای اثرگذار و سازنده متغیر تحت بررسی، و چگونگی ارتباط میان آنها (باتوجه به همان مدل نظری) موجود است و یا در محیطی نظیر رایانه؛ می‌توان به‌طور مصنوعی ارقامی برای متغیر در حال مطالعه تولید کرد. با تکرار این عمل در حد کفایت امکان شناسایی هرچه بیشتر رفتار متغیر، قبل از وقوع و مشاهده مکرر آن در محیط حقیقی فراهم می‌آید.

بسته به اینکه از شبیه‌سازی چه هدفی دنبال می‌شود و چه محدودیت‌هایی در به‌کارگیری آن وجود دارد، می‌توان چهار نوع شبیه‌سازی را از یکدیگر تفکیک کرد که در کارهای تجربی به‌طور منفرد یا جمعی مورد استفاده قرار می‌گیرد:

۱ـ شبیه‌سازی مولد (نمونه‌سازی)[2]

۲ـ شبیه‌سازی تحلیلی یا تکنیکی[3]

1- Hybrid-MCS

2- Sample Generator Simulation

3- Tactical or Sensitivity Analysis Simulation

۳ـ شبیه‌سازی راهبردی یا پی‌گردی[1]

۴ـ شبیه‌سازی ذهنی یا شهودی[2]

اولین نوع از این شبیه‌سازی‌ها، زمانی به کار می‌رود که به دلیلی نتوان داده نمونه را برای متغیر تحت بررسی به‌دست آورد؛ زیرا هنوز وقوع نیافته و یا ثبت نشده‌است و یا اینکه، نمونه‌گیری از آن اقتصادی نیست. تنها دانشی که به ما در شبیه‌سازی کمک می‌کند، اطلاعات پیرامون جمعیتی است که نمونه‌گیری باید در آن صورت بگیرد. این نوع شبیه‌سازی را برای پیش‌بینی از طریق مدل‌های رگرسیونی حاوی اختلال‌های تصادفی نیز می‌توان به‌کار برد. برای مثال؛ فرض می‌کنیم رابطه زیر بین Y، X و W وجود داشته‌باشد: $Y= a + bW + cX + e$ که در آن y متغیر مورد مطالعه، W متغیری با نمونه قابل دسترس، X متغیری مثبت با میانگین $\overline{X}$ و توزیع احتمال مشخص و غیرقابل نمونه‌گیری و e جمله‌ی اختلال با توزیع نرمال به میانگین μ و واریانس σ^2 است. در این حالت به منظور بررسی رفتار Y، باید مقدار X و e شبیه‌سازی شوند.

دومین نوع، زمانی مورد استفاده است که سوال اصلی، نحوه رفتار مدل یا متغیر تحت بررسی ـ در صورت بروز تغییری در پارامترهای الگو ـ باشد. برای مثال؛ اگر بخواهیم در رابطه $Y=a+bX+cX^2$ حساسیت Y را نسبت به تغییرات c بسنجیم، می‌توانیم از طریق ایجاد تغییرات ساختگی، این موضوع را شبیه‌سازی کنیم.

نوع سوم شبیه‌سازی، بیشتر در مواقعی به کار گرفته می‌شود که چگونگی اثر تغییر متغیری تحت کنترل بر متغیر مورد مطالعه مدنظر است. فرض کنید در مثال بالا متغیر X تحت کنترل است، یعنی، مقداری که اختیار می‌کند به تصمیم و اقدام بررسی‌کننده بستگی دارد و قصد داریم بدانیم اگر آن را از مقدار اولیه X_0 به X_1 تغییر دهیم چه اتفاقی برای Y می‌افتد. آزمون این سوال نیز از طریق شبیه‌سازی مدلی که

1- Strategic or Exploratory Simulation

2- Interactive

یک بار توسط مشاهدات تاریخی تأیید شده، میسر است و به آن شبیه‌سازی نیز «چه اتفاق می‌افتد اگر؟» می‌گویند.

و بالاخره آخرین نوع شبیه‌سازی در واقع همان الگوبرداری از فرایند تصمیم‌گیری مغز انسان در مورد متغیرهای اثرگذار است که پس از نسخه‌برداری در ساخت هوش‌های مصنوعی به کار گرفته می‌شود. در حقیقت این ذهن، تجربیات، و دانش بشر است که شبیه‌سازی می‌شود. در این مورد می‌توان، دستگاه‌های شبیه‌سازی پرواز را مثال زد.

روش‌های گروه مونت کارلو؛ در دسته اول از انواع شبیه‌سازی‌ها می‌گنجند. لذا مطالعه حاضر تنها این نوع را پوشش می‌دهد.

۲ـ شبیه‌سازی مونت کارلو

عبارت مونت کارلو یک واژه بسیار عمومی است. روش‌هایی که در این گروه قرار می‌گیرند، از فنون آمار و احتمالات استفاده می‌کنند. این روش‌ها در همه علوم از فیزیک هسته‌ای گرفته تا ژنتیک و اقتصاد، کاربرد پیدا کرده‌است. البته، شیوه‌ای که این علوم در به‌کارگیری روش‌های مونت کارلو دارند، بسیار متفاوت از یکدیگر است. اما همگی یک وجه تشابه دارند، یعنی تمامی آنها از اعداد تصادفی برای آزمون و شبیه‌سازی یک پدیده طبیعی و حقیقی بهره می‌برند. بنابراین، برای اینکه به یک آزمون عنوان مونت کارلو اطلاق شود، کافی است مشاهده گردد که در آن، از شیوه‌های خلق اعداد تصادفی، استفاده شده‌است یا خیر؟

این نوع از شبیه‌سازی، به این دلیل که برای اولین بار در قمارخانه‌های محله مونت کارلو (شهری در کشور موناکو) به کار گرفته شد، روش مونت کارلو نام گرفت. از آنجایی که مونت کارلو، یک فن برای محاسبه نااطمینانی موجود در پیش‌بینی یک پیشامد احتمالی (نظیر پدیدار شدن عدد ۶ در یک بار تاس انداختن) است، به آن شبیه‌سازی اعداد تصادفی نیز می‌گویند.

روش مونت کارلو نیازمند یک الگوی ریاضی ـ آماری با دو جز کلی تعیین‌پذیر و تصادفی، برای متغیر تحت بررسی است. به منظور روشن شدن بحث، مثال زیر را دنبال کنید. فرض کنید، کشف ویژگی‌های آماری متغیر Y که دارای توزیع احتمالی ناشناخته است و امکان نمونه‌گیری از آن به دلایل فوق‌الذکر وجود ندارد، موضوع تحقیق باشد. در ضمن فرض کنید، دانشمندان فعال در حوزه مربوطه نشان داده‌اند که Y در ارتباط با متغیر یا متغیرهای تصادفی دیگر به نام X است که توزیع شناخته شده‌ای دارد و ارتباط میان این دو نیز در قالب اصول، قوانین و نظریه‌های قابل قبول اندیشمندان آن حوزه (علم فیزیک، شیمی، اقتصاد، مالی و...) معرفی شده‌است. حال می‌توان از روش مونت کارلو برای تخمین ویژگی‌های توزیع Y بهره گرفت.

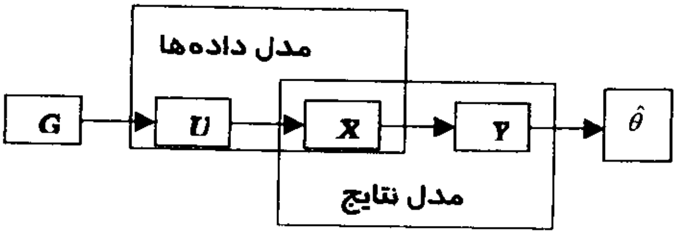
شیوه عملی به‌طور خلاصه در زیر آمده‌است:

- ابتدا، به‌وسیله یک دستگاه مولد[1]، سری اعدادی تصادفی از یک توزیع احتمال یکنواخت با یک مقدار اولیه تولید می‌شوند.[2] (G)
- سپس، این اعداد را به راحتی می‌توان به سری اعدادی با توزیع احتمال یکنواخت بین صفر و یک (U) تبدیل کرد و از آن؛
- در ایجاد سری اعدادی تصادفی با هر نوع توزیع احتمال شناخته شده دیگر بهره جست. (X)
- از این سری به‌عنوان داده ورودی رابطه نظری برای تولید متغیری که توزیع آن شناخته شده نیست نیز استفاده می‌شود. (Y)
- (Y) به‌عنوان نمونه‌ای از جامعه اصلی به حساب می‌آید و از این طریق می‌توان، پارامترهای مربوط به ویژگی‌های توزیع آن را تخمین زد.

شمای زیر، این مراحل را به نحوی دیگر بیان می‌کند:

۱- در گذشته نه‌چندان دور این کار تنها با کمک ابر رایانه‌ها امکان‌پذیر بود، اما امروزه رایانه‌های شخصی نیز پس از نصب برنامه‌هایی کم حجم، توانایی چنین کاری را دارند.

۲- الگوریتم‌های مختلفی برای ایجاد این اعداد طراحی شده؛ اما معروف‌ترین آنها الگوریتم تولید اعداد تصادفی پسدو (Pseudo Random Number Generator) است.



اگرچه X و Y به ترتیب داده‌های ورودی و خروجی شبیه‌سازی شده هستند، از مدل‌هایی با توابع مشخص و داده شده‌ای به‌دست می‌آیند، تبدیل اعداد تصادفی به داده‌های ورودی و در ادامه به داده‌های خروجی یا نتایج، می‌تواند به حدی پیچیده باشد که مدل احتمال داده‌های خروجی از دید سخت بودن بررسی آن، کماکان ناشناخته باقی بماند. از این روست که محاسبه ویژگی‌های توزیع احتمال Y یا همان بردار θ از طریق تخمین ($\hat{\theta}$)، آن هم با توسل به روش مونت کارلو دنبال می‌شود.

در هر دور شبیه‌سازی، «T» عدد تصادفی تولید می‌شود که در نهایت به همین تعداد داده خروجی می‌انجامد. اما، برای دستیابی دقیق به پارامترهای مشخصه توزیع احتمال مورد بررسی، به بیش از یک دور شبیه‌سازی نیاز است (N). محاسبات مونت کارلو آسان است و با هر دور تکرار صحت و دقت آن بیشتر می‌شود، اما سرعت این بهبود بسیار کم است. برای مثال؛ اگر هدف، بالا بردن درجه دقت تا یک رقم اعشار باشد، باید ۱۰۰ دور شبیه‌سازی تکرار شود ($N=۱۰۰$) و اگر ارتقای آن تا ۳ رقم اعشار مدنظر است، تعداد دورهای لازم تکرار شبیه‌سازی یک میلیون دفعه می‌باشد. دلیل بروز این ایراد استفاده از الگوریتم خلق اعداد تصادفی پسدو است که اگرچه تصادفی است، اما چنان مورد نیاز است که یکنواخت به نظر نمی‌رسد. رفع این نقص و کاستی، با استفاده از الگوریتم‌هایی ممکن گشته‌است که قادر است سری اعدادی را تولید کند که در فاصله‌ای معین، و به‌طور یکنواخت توزیع شده‌است. به این سری از اعداد به دلیل شیوه‌ای که در تولید آنها اعمال می‌شود، به اصطلاح اعداد «شبه تصادفی» می‌گویند و آن شبیه‌سازی که این اعداد را مورد استفاده قرار می‌دهد نیز، شبه مونت

کارلو نام دارد.

۳ـ شبیه‌سازی شبه مونت کارلو

این مسئله هم به‌طور نظری و هم به‌طور تجربی ثابت شده‌است که در بیشتر مواقع، خطاهای شبیه‌سازی با روش مونت کارلو سنتی، بسیار بیش از روش شبه مونت کارلو است و از طرف دیگر؛ استفاده از اعداد پسدو ـ به دلیل اشاره شده در بالا ـ نرخ تصحیح انحراف کمی را نیز برای این شبیه‌سازی به ارمغان می‌آورد. در بسیاری از مسایل تجربی نظیر مواردی که در علوم مالی با آنها سر و کار داریم، محاسبه معیارهای مورد نظر، در واقع نوعی تخمین انتگرال چندگانه یک تابع چندبعدی (چند متغیره) است (برای مثال؛ تابع تسویه قراردادهای حق انتخاب[1] با متغیرهایی که ارزشِ آنها از یک تابع چگالی فرضی تبعیت می‌کند). در این نوع از کاربرد، ممکن است مهم نباشد که برخی از ویژگی‌های آماری مانند استقلال، به جای برخورداری از سرعت همگرایی بالاتر، فدا شوند. در این طبقه از مسایل، ایده‌ی به‌کارگیری سری‌های اغتشاش درجه کم[2]، مطرح شد. این ایده، پایه اولیه ساخت سری اعداد، شبه تصادفی را تشکیل می‌دهد. برای کاربردهایی که وجود ویژگی استقلال از ضروریات است، از یک بدیل دیگر با نام «سری‌های شبه تصادفی ادغامی» استفاده می‌شود که در بخش بعدی این گزارش به آن مورد نیز اشاره خواهدشد. بنابراین، در این بخش ابتدا به معرفی شبیه‌سازی شبه مونت کارلو خواهیم پرداخت.

همان‌طور که اشاره شد، اعداد شبه تصادفی دارای ویژگی اغتشاش از درجه کم هستند. این خصوصیت یک معیار برای اندازه‌گیری یکنواختی توزیع نقاط است. در واقع، این شاخص نشان‌دهنده عدم وجود فضاهای خالی بزرگ یا خوشه‌شدگی[3] داده‌ها (نقاط) در صفحه یا حجم‌های مختصات است. در حقیقت، در این تعریف

1- Options Payoff Function
2- Low Discrepancy Sequences
3- Clustering

مفهوم اغتشاش به جای واریانس برای توضیح دادن میزان پراکندگی نقاط آمده‌است.[1] خوشبختانه، اگر کاربر دانش اولیه را داشته‌باشد و بداند چه وقت و چگونه از این سری‌ها استفاده کند، دانستن جزییات فنی برای ایجاد یک شبیه‌سازی خوب و مناسب لازم نیست.

مفهوم اغتشاش کم به این معنی است که اعداد متوالی به‌گونه‌ای دنبال یکدیگر قرار می‌گیرند که تا حد ممکن از اعداد دیگر دور باشند. یعنی؛ تا جایی که امکان دارد از تجمع و خوشه‌شدگی نقاط جلوگیری می‌شود. خلاصه‌ای از ساده‌ترین روش دستیابی به این اعداد که توسط وان در کرپوت[2] ارایه شده، به صورت زیر است:

۱ـ تعداد اعداد لازم در سری در حال شبیه‌سازی تعیین می‌شود (برای مثال؛ $T=100$).

۲ـ تمام اعداد عضو مجموعه $\{0+k, 1+k, 2+k, \dots T-1+k\}$ که در آن k عددی مثبت و انتخابی است، در پایه b که یک عدد اول است، نوشته می‌شود (برای مثال؛ ۴ همان عدد ۱۰۰ در پایه ۲ است).[3]

۳ـ اعداد محاسبه شده در پایه b چپ و راست نوشته‌می‌شود (برای مثال؛ ۱۰۰←۰۰۱).

۴ـ عددهای به‌دست آمده در مرحله ۳ یک بار دیگر در پایه ده دهی محاسبه می‌شود (برای مثال؛ ۰۰۱←۰/۱۲۵).

۵ـ بدین ترتیب سری‌ای از اعداد در فاصله (۰،۱) به‌دست می‌آید که گرچه تصادفی نیست، اما به‌طور یکنواخت در طول این فاصله توزیع شده‌اند.

همان‌طور که به وضوح مشخص است، با تغییر دادن مقادیر k و b می‌توان

۱- جالب است بدانیم که اعداد شبه تصادفی توسط نظریه‌پردازان ریاضی در مبحث نظریه اعداد مطرح شد نه توسط آماردانان.

2- Van der Corput

۳- پیشنهاد کرپوت $b=2$ است.

سری‌های شبه تصادفی دیگری ساخت که همگی دارای طول T بوده و در دامنه (۰،۱) به‌طور یکنواخت، توزیع شده‌باشد. این عمل، در مسایل چند متغیری و برای تکرار شبیه‌سازی‌ها ضرورت دارد.

مطابق مطالب آمده در بخش‌های فوق، تمام کسانی که با شبیه‌سازی کار می‌کنند، نگران اندازه خطاهای عددی و میزان زمان لازم شبیه‌سازی مطلوب هستند. هر دوی این معیارها با نرخ همگرایی به ارزش حقیقی شبیه‌سازی به واسطه افزایش تکرارها (یا همان N) در ارتباط است. از این‌رو، روش شبیه‌سازی شبه مونت کارلو به این دلیل که انتظار می‌رود، از نرخ همگرایی بالاتری برخوردار باشد، کاربرد پیدا کرده‌است. اما به هنگام استفاده از این روش، باید به چند نکته توجه داشت:

● درست است که شبیه‌سازی مونت کارلو سنتی، دارای نرخ همگرایی به سنت کمّی است، اما؛ این نرخ با افزایش یا کاهش ابعاد مسئله (تعداد متغیرها) [که با d نشان داده‌می‌شود]، تغییر نمی‌کند و فقط با افزایش تکرارها، کاهش می‌یابد.

● نرخ همگرایی شبیه‌سازی شبه مونت کارلو، در دامنه (بدترین حالت، بهترین حالت) قرار دارد. بهترین حالت تابعی از تعداد ابعاد مسئله نیست. اما:

● بدترین حالت با افزایش d افزایش می‌یابد. به‌طوری که؛

● بالاخره فایده استفاده از این روش از بین می‌رود. این اتفاق در $d=5$ می‌افتد.[۱]

با این حال در کاربردهای مالی، به دلیل استفاده از توابع هموار برای تنزیل جریان عایدی‌ها، احتمال وقوع نتایج شبیه‌سازی شبه مونت کارلو در نزدیکی بهترین

۱- این نتیجه برای سری‌های شبه تصادفی کرپوت مصداق دارد. سایر سری‌های شبه تصادفی نظیر هالتون Halton، سوبول Sobol، فایور Faure و نایدررایتر Niederreiter وجود دارد، که عملکرد بهتری را از خود نشان می‌دهد. برای مثال؛ سری هالتون به راحتی تا ۱۴ قابل استفاده است.

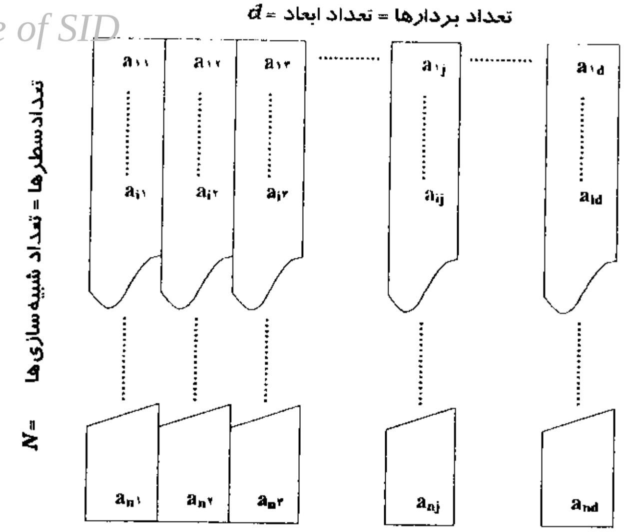
حالت (که همواره از نتایج مونت کارلو سنتی بهتر است) بالااست.[1] علی‌رغم این توضیح،دانشمندان و محققان پیوسته به دنبال روش‌ها و متدهای جایگزین بوده‌اند. شیوه شبیه‌سازی [شبه] مونت کارلو ادغامی به این منظور برای اولین‌بار توسط کافلیش، موروکوف و اُوِن[2] در سال ۱۹۹۷ معرفی شد. در ادامه به صورتی گذرا مطالبی آمده‌است.

۴ـ شبیه‌سازی مونت کارلو ادغامی

در روش پیشنهادی کافلیش و دیگران، به‌طور ساده از سری‌های شبه تصادفی، برای ابعاد اصلی و از سری‌های تصادفی پسدو برای سایر ابعاد استفاده شده‌است. ایده اصلی این است که از دقت روش شبه مونت کارلو برای آن گروه از متغیرها که از اهمیت بالاتری برخوردارند (در حالی که تعداد ابعاد زیاد است)، بدون اینکه تحت‌تاثیر افزایش ابعاد قرار گیرد، بهره گرفته شود. اما در بسیاری از موارد، تفکیک متغیر پر اهمیت از کم‌اهمیت به این آسانی امکان‌پذیر نیست. از طرف دیگر، در برخی موارد در مباحث مالی نیز وجود استقلال بین سری اعداد شبیه‌سازی شده، بسیار مهم است. در این‌گونه حالات باید به‌دنبال روش دیگری بود.

ساده‌ترین راه در هم آمیختن ویژگی‌های بین زمانی سری‌های شبه تصادفی با الزامات استقلال، استفاده از انتقال تصادفی بردارهایی با درجه اغتشاش کم است. شکل زیر به درک بهتر موضوع کمک می‌کند. هر ستون بیانگر یک بردار شبه تصادفی مشخص است. تعداد این بردارها نشان‌دهنده بعد مسئله یا همان d می‌باشد. تعداد عناصر درون هر بردار یا تعداد سطرها، برابر تعداد شبیه‌سازی‌ها یا همان مسیرهای نمونه است. حال، برای مثال؛ می‌خواهیم سری $a_{۱۱}, a_{۱۲}, a_{۱۳}, \dots, a_{۱d}$ از خصوصیت استقلال تبعیت کند.

۱ـ اثبات این مطلب خارج از حوصله این گزارش است. در گزارش‌های بعدی به آن پرداخته خواهدشد.
2- Caflisch, Morokoff & Owen



در مونت کارلو ادغامی، تمام بردارهای موجود سری‌های شبه تصادفی ای نظیر سری وان درکرپوت هستند که به‌طور تصادفی بُر خورده‌اند و از نو به شکلی دیگر در توالی هم آورده شده‌اند. به طور خلاصه:

۱ـ یک سری شبه تصادفی با درجه اغتشاش کم (نظیر سری وان درکرپوت در پایه ۲ به‌عنوان ساده‌ترین آنها) با N عنصر ایجاد و از آن به شکل بردار پایه استفاده می‌شود.

۲ـ d تبدیل تصادفی از بردار پایه ساخته و به کار گرفته می‌شود.[۱]

ایده اصلی در این روش شکستن همبستگی موجود بین عناصر سری‌های شبه تصادفی است. به این ترتیب بردار (سری) به‌دست آمده ویژگی اغتشاش کم خود را حفظ می‌کند، همبستگی میان عناصر از بین می‌رود، اعداد کماکان در دامنه (۱ و ۰) قرار می‌گیرند و ویژگی توزیع یکنواخت پابرجا می‌ماند.[۲] در حال حاضر شیوه‌های دیگری نیز بدین منظور توسط محققان ارایه شده که به‌دلیل پیچیده بودن از ذکر آنها

۱- ایده دیگر این است که برای هر بردار ابتدا یک بردار پایه جداگانه (کرپوت پایه ۲ برای اولی، کرپوت پایه ۳ برای دومی،...) ایجاد شود و پس از آن تبدیل تصادفی هر یک به‌دست آید.

۲- البته نشان داده شده‌است که تمامی این نتایج در حالتی که N با d مساوی است و یا حتی از آن کوچک‌تر نیز است، حاصل نمی‌شود؛ لذا به‌عنوان شرط لازم N باید از d بزرگ‌تر باشد.

صرف‌نظر شده‌است.

تا اینجا هر آنچه مرور شد در جهت ایجاد شناختی هرچند مختصر از یک مجموعه از شیوه‌های شبیه‌سازی، موسوم به گروه مونت کارلو، قرار داشت. اما از این پس [و در طول بخش بعد] به بررسی بیشتر موارد کاربرد و قابلیت‌ها و محدودیت‌های این شیوه‌ها در مباحث مالی پرداخته خواهدشد.

۵ـ کاربردها و ملاحظات

به‌طور کلی، سه نوع کاربرد برای شبیه‌سازی مونت کارلو در مباحث مالی مطرح است. اولین آنها در ارزشیابی ابزارهای مشتقه مالی است.[1] در این مورد فرض می‌شود، ارزش دارایی‌هایی که برمبنای آنها این مشتقات شکل گرفته‌است از یک روند براونی هندسی[2] یا به‌عبارتی دیگر از توزیع لوگ نرمال، پیروی می‌کند. دومین کاربرد آن در ارزش‌گذاری یک ورقه قرضه که نرخ بهره مربوط به آن از یک فرایند گشت تصادفی[3] تبعیت می‌کند، است. سومین و آخرین مورد استفاده، برآورد ارزش با ریسک یک سبد دارایی متشکل از ابزار مالی است. این کاربرد از این جهت که هدف آن دستیابی به اطلاعاتی راجع به واریانس تغییرات ارزش سبد مالی است ـ نه محاسبه ارزش انتظاری آن ـ با دو نوع استفاده دیگر متفاوت است.

هرتز[4] در سال ۱۹۶۳ برای نخستین بار زمینه‌های استفاده از روش مونت کارلو در شبیه‌سازی امور کسب و کار، از جمله امور مالی را معرفی کرد. از آن زمان به بعد، به کرات از این روش در مباحثی نظیر بودجه‌بندی سرمایه[5]، محاسبه ارزش‌های فعلی جریان‌های نقدی انتظاری آینده،محاسبه ریسک عدم تحقق جریان‌های نقدی آینده، قیمت‌گذاری انواع اوراق بهادار و ریسک‌های مربوطه، بهره‌گیری شده‌است. به منظور ایجاد درکی بهتر، ارایه یک مثال عملی در این مرحله بی‌فایده نخواهدبود.

۱- شامل دامنه وسیعی از حق انتخاب‌ها، به پشتوانه دارایی‌هایی نظیر سهام، کالا، ارز و...

2- Geometrical Brownian Motion
3- Random Walk
4- Hertz
5- Capital Budgeting

مدل قیمت‌گذاری بلک ـ شولز[1] که درواقع یک نوع روش قیمت‌گذاری خنثی از ریسک[2] است، قیمت مناسب یک حق انتخاب فروش را برابر ارزش فعلی عایدی انتظاری آن می‌داند. برای یک حق انتخاب فروش اروپایی[3] داریم:

$$CP_0 = E\left[e^{-rT}(K-S_T)^+\right]$$

که در آن CP، S_T، K و r به ترتیب نماد قیمت حق انتخاب فروش در زمان عقد قرارداد، قیمت انتظاری دارایی در موعد ذکر شده در توافقنامه، قیمت آینده دارایی که در زمان حاضر بر سر آن توافق شده‌است و نرخ تنزیل می‌باشد. $(X)^+$ نیز هم‌ارز $max(X,0)$ است. بلک و شولز جهت محاسبه این انتظار برای قیمت دارایی مورد بررسی، فرایند براونی هندسی را در نظر گرفتند:

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$$

که در آن $dW(t)$ بیان‌کننده یک فرایند به شکل $\varepsilon dt^{0/5}$ موسوم به فرایند واینر[4] است (ε دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشد). به این ترتیب، قیمت پیشنهادی بلک ـ شولز به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$CP_t(S_t, T-t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

که در آن

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

1- Black-Scholes Pricing Model 2- Risk-Neutral Pricing

۳- در اصل سه نوع حق انتخاب بسته به نحوه محاسبه عایدی و موعد انتخاب مقرر شده در آن، وجود دارد که به حق انتخاب‌های اروپایی، آمریکایی و آسیایی معروف است.

4- Wiener Process

و

$$d_2 = \frac{log\,(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

است و $N(d_i)$ ارزش تجمعی توزیع یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد با ارزش d_i می‌باشد.

بنابراین روش عمومی در استفاده از شبیه‌سازی برای یافتن قیمت حق انتخاب مشخص است:

۱ـ مسیرهای نمونه از قیمت دارایی و نرخ‌های بهره در طول افق زمانی مورد بررسی، شبیه‌سازی می‌شوند.

۲ـ جریان‌های نقدی تنزیلی از یک ورقه بهادار براساس هر یک از مسیرهای نمونه به‌دست می‌آید.

۳ـ از این جریان‌های تنزیلی میانگین گرفته می‌شود.

جهت شبیه‌سازی قیمت دارایی‌ها با استفاده از مدل بلک ـ شولز، باید نسخه‌هایی مستقل از قیمت دارایی در زمان $t+\Delta t$ را از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$S_{t+\Delta t}^{(i)} = S_t\, exp(r - \sigma^2/2)\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\;Z^{(i)}$$

$i=1,...,n$ (تعداد تکرارها)، σ انحراف معیار دارایی و $Z^{(i)}$، ارزش آمده از یک توزیع نرمال استاندارد می‌باشد که می‌توان آن را از طریق یکی از شیوه‌های ذکر شده در بالا، شبیه‌سازی کرد. سپس این ارزش‌ها یک به یک در رابطه CP_i قرار داده می‌شود و از نتایج آن میانگین گرفته می‌شود.

مسئله اصلی در کاربردهای تجربی این است که در اکثر مواقع فرض می‌شود جزء تصادفی دارای توزیع نرمال است و همبستگی بین پیشامدها، صفر است. همین

امر باعث شده‌است برخی از محققان (مثل لِولِن و لانگ [1] در سال ۱۹۷۲) بیان کنند که شبیه‌سازی‌های گروه مونت کارلو، در ایجاد اطلاعات مرتبط با مبحث، ناتوان هستند. از طرف دیگر، سایر منتقدان، نیاز این روش‌ها به یک مدل تحلیلی ریاضی را دلیل ضعف آن می‌دانند و از پیچیده و وقت‌گیر بودن آن انتقاد دارند. زیرا اعتقاد دارند بهره‌ای که با استفاده از این روش به‌دست می‌آید (در مقایسه با سایر روش‌ها) نسبت به هزینه‌های انجام آن کم است و درواقع، صرف نمی‌کند. فیلیپتاتوس [2] در سال ۱۹۷۳ و می‌یرز [3] در سال ۱۹۷۶ و روبین اشتین [4] در سال ۱۹۸۱، مجموعه‌ای از مرزهای تشخیص را معرفی کردند که در تصمیم‌گیری پیرامون مناسب یا نامناسب بودن استفاده از گروه مونت کارلو، راه‌گشا است. مطابق نظر وی استفاده از این روش‌ها در صورت وجود شرایط زیر مجاز و مفید است:

- دستیابی و جمع‌آوری داده‌ها غیرممکن و یا گران باشد.
- سازمانه مشاهده شده بسیار پیچیده باشد.
- راه‌حل‌های تحلیلی را به راحتی نتوان به‌دست آورد.
- اثبات و کشف یک یافته ریاضی مربوط به حل مسئله مشکل، غیرممکن و یا هزینه‌بر باشد.

مطالعه ریس و ساتکلیف [5] در سال ۱۹۹۳ نیز یک بار دیگر بر موارد فوق تاکید کرد و خاطرنشان ساخت که اگر هیچ ابزار دیگری به کار نیاید این روش بسیار مفید خواهدبود. این مطالعه، همچنین بیان کرد که این روش در تحقیقات مالی نتایج خوبی می‌دهد. چایو و نردهاوزر [6] نیز در سال ۱۹۹۵، ضمن مرور دقیق ادبیات شبیه‌سازی و تحقیقات بودجه‌بندی، مفید است. اِونسکی [7] در سال ۲۰۰۱ نشان داد، شبیه‌سازی مونت کارلو راهی موثر در آموزش برخورد با «ابهام موجود در اندازه ریسک» به مردم

1- Lewellen & long
2- Philiptatos
3- Myers
4- Rubin Stein
5- Rees & Sutcliffe
6- Chau & Nordhauser
7- Evensky

است؛ اما به کارگیری آن در مسایل جدی و حقیقی، کار ساده‌ای نیست و باید با احتیاط زیاد انجام پذیرد.

از مواردی که کار با گروه مونت کارلو را دشوار می‌گرداند، این است که در اغلب موارد، ارتباط درونی‌ای که به‌طور طبیعی بین دو یا چند متغیر وجود دارد، بسیار پیچیده و درنتیجه؛ تعیین ارتباط دقیق و توزیع درست متغیرها مشکل است. ارتباط بین دو متغیر را می‌توان با ضریب همبستگی[1] که میزان ارتباط و مثبت و منفی بودن آن را بیان می‌کند، نشان داد. در کل، سه نوع همبستگی وجود دارد.

۱ـ **همبستگی متقاطع (ضربدری)**[2]: ارتباط دو متغیر مثل درآمد ملی و سرمایه‌گذاری را نشان می‌دهد.

۲ـ **همبستگی سریالی (با وقفه)**[3]: ارتباط بین دو مقدار از یک متغیر را که متعلق به دو زمان متفاوت هستند، مانند قیمت خودرو در اردیبهشت ۱۳۸۱ و فروردین ۱۳۸۱ (یا اردیبهشت ۱۳۸۰) را بیان می‌کند.

۳ـ **همبستگی متقاطع ـ سریالی:** ارتباط بین ارزش دو متغیر که زمان‌های منتسب متفاوتی دارند را می‌رساند (درآمد ملی امسال و سرمایه‌گذاری سال گذشته).

برای ساختن مدلی نزدیک به حقیقت، باید بیش از یک همبستگی شناسایی شود. تا زمانی که همه ارتباط‌ها از نوع متقاطع است، مونت کارلو جوابگوست، اما در حالت وجود همبستگی زمانی، باید توجه داشت که نمی‌توان شبیه‌سازی مونت کارلو را با فرض «عدم وجود همبستگی پیشامدهای تصادفی» آن (که استفاده از آن عمومیت نیز دارد)، به کار برد. بنابراین، محققی که می‌خواهد با این ابزار کار کند، بسیار دشواری دارد. زیرا؛ از طرفی نیازمند دقت فراوان برای گریز از ساده‌انگاری و افتادن در دام اشتباه‌های ناشی از آن است و از طرف دیگر، هم‌سو ساختن ویژگی‌های شبیه‌سازی ـ به‌طوری که بر تمامی پیچیدگی‌ها فایق آید ـ سخت می‌باشد. این

1- Correlation Coefficient
2- Cross Correlation
3- Serial Correlation

دشواری‌ها، با اضافه شدن واقعیت‌هایی نظیر امکان وجود همبستگی‌های غیرخطی بین متغیرها (که در بازارهای سهام و ارز قابل مشاهده است) و متغیرهایی که در طول زمان ویژگی‌های توزیع احتمال آنها عوض می‌شود[1]، بیش از پیش می‌شود. در این‌گونه مواقع شیوه‌ی دیگری از شبیه‌سازی، نظیر شبیه‌سازی پی‌گردی با استفاده از داده‌های تاریخی، به کمک مونت کارلو می‌آید.

۶ـ سایر تحولات

امروزه با پیشرفتی که در قدرت محاسباتی رایانه‌های شخصی رخ داده و تداوم آن نیز متصور است، شاهد رشد روزافزون استفاده از این ابزار در اجرای شبیه‌سازی‌های دقیق‌تر و در عین حال پیچیده‌تر هستیم که تا قبل از آن، غیرممکن می‌نمود.

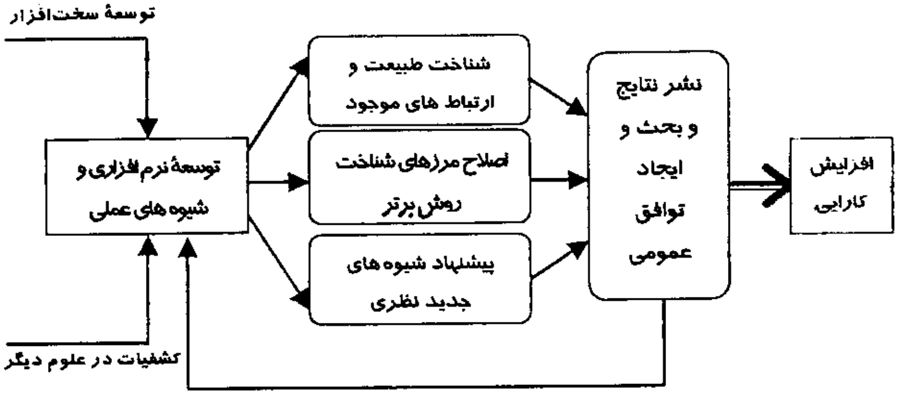
برنامه‌نویسان رایانه‌ای، هر روز قابلیت‌های جدیدی را به نرم‌افزارهای تولیدی خود می‌افزایند که این ابزار را بیشتر از گذشته از حیث کاربری ساده و با یافته‌های دانشگاهی این حرفه سازگار می‌سازد. همین امر باعث گشته تا تحلیل‌گران، محققین و دانشگاهیان با سرعت بیشتری، رازهای نهفته دیگری از دامنه توانایی‌ها و کاستی‌های روش‌های رقیب، ویژگی‌های طبیعی پدیده مورد مطالعه و ارتباطات درونی بین متغیرها را کشف و نشر نمایند. به این ترتیب، روز به روز بر درجه تطابق الگوهای نظری با دنیای حقیقی و پیچیده افزوده می‌گردد. در این مرحله نوبت نقش‌آفرینی مجدد برنامه‌نویسان در خلق بسته‌های نرم‌افزاری، هم‌پا با دانش نظری موجود است. بنابراین، چرخه پیشرفت تکمیل می‌شود و تداوم می‌یابد.

به این ترتیب، پیش‌بینی می‌شود که در آینده نزدیک شاهد افزایش کمی و کیفی بهره‌گیری به‌جا از شیوه‌های شبیه‌سازی دقیق‌تر، گسترش دامنه استفاده از آنها به سمت حوزه‌های دیگر، تحول در روش‌شناسی شبیه‌سازی (هم در تعداد و نحوه

۱- این حالت در اصطلاح «بی‌ثباتی در توزیع» یا Non-Stationary in Distribution نامیده می‌شود که در اقتصاد و مالیه وجود دارد.

طبقه‌بندی‌ها و هم در معیارها و نتایج مقایسه روش‌های موجود برای انتخاب شیوه مناسب)، و تثبیت جایگاه شبیه‌سازی و تکمیل ابزارهای کمکی آن خواهیم بود.

شمای زیر، آنچه را که تاکنون اتفاق افتاده و همچنین انتظار می‌رود که ادامه یافتن آن نیز به نتایج ذکر شده در فوق بیانجامد، به‌طور خلاصه ترسیم کرده‌است:



نتیجه‌گیری

حدود پنجاه سال است که محققان و فعالان علوم و فنون مختلف به‌طور جدی ـ بسته به نیازی که احساس می‌کنند ـ سرگرم کار با روش‌های گوناگون شبیه‌سازی پدیده‌های دنیای حقیقی مورد توجه خود هستند. از انواع روش‌های شبیه‌سازی، روش مونت کارلو جهت ایجاد داده‌هایی که هنوز اتفاق نیفتاده است و باید پیش‌بینی شود و یا به دلیلی ثبت نشده، و دستیابی به آنها سخت و بسیار هزینه‌بر است، به کار می‌آید.

از آنجایی که این روش برمبنای ساخت اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت پایه‌گذاری شده‌است، الگوریتم‌های مختلفی که به این منظور طراحی شده‌است را، مورد استفاده قرار می‌دهد. اما، هیچ‌کدام از این الگوریتم‌ها صد در صد در ایجاد چنین سری اعدادی موفق عمل نمی‌کنند. پر کاربردترین آنها یعنی محاسب اعداد تصادفی

پسدو، در برقراری یکنواختی در توزیع اعداد تصادفی ضعف دارد. همین امر سبب می‌شود تا دفعات محاسبه برای بالا رفتن درجه اطمینان و درنتیجه هزینه‌ها و زمان انجام آن، به شدت افزایش یابد. به این دلیل، شبیه‌سازی شبه مونت کارلو که از مولدهای اعداد با درجه اغتشاش کم بهره می‌برد، کاربرد پیدا کرد. اما، این روش نیز کارایی خود را در مورد مسایلی با تعداد متغیر بالا و در بررسی موضوعاتی که در آنها حفظ استقلال بین پیشامدها و متغیرها حیاطی است، از دست می‌دهد. از این‌رو، روش مونت کارلو، ادغامی پیشنهاد شد.

به‌طور کلی، کاربردهای متعددی برای این گروه از شبیه‌سازی در مباحث مالی وجود دارد و به کرات شاهد بهره گیری از آنها در موضوعاتی نظیر؛ بودجه‌بندی سرمایه، قیمت‌گذاری دارایی‌های مشتقه، برآورد عدم اطمینان و ریسک‌های مالی، جریان‌های نقدی و از این دست هستیم. اما باید توجه داشت که نباید در استفاده از این روش دچار افراط و تفریط یا ساده‌انگاری و سردرگمی شد. محققی که خواهان بهره‌گیری از توانایی‌های این روش است، باید به تمامی نقاط ضعف آن نیز واقف باشد، موارد اثرگذار بر کارایی آن را بشناسد، به روش‌های بدیل و جایگزین آن اشراف داشته‌باشد، راه‌های تعدیل آن را بسته به شرایط مختلف و پیچیدگی‌های موجود مدنظر قرار دهد، و بتواند نتایج حاصل از آن را تحلیل کند. لذا کار با این روش، هیچ‌گاه ـ به سادگی ـ آنچه که ممکن است در ابتدای آشنایی با آن به نظر آید، نیست.

اما از طرف دیگر، پیشرفت‌های اتفاق افتاده در عرصه فن‌آوری‌های محاسباتی، باعث‌گشته تاضمن لحاظ کردن یافته‌های جدید بتوان سرعت شبیه‌سازی را بالا برد. این پیشرفت‌ها ازطرف دیگر، افزایش حجم مطالعات وبهبودکیفیت آنها را موجب خواهدشد وگسترش بهره گیری درحوزه‌های جدیدرا ممکن خواهدساخت. این واقعیت، مرزبندی، طبقه‌بندی و رتبه‌بندی‌های دیگری را در بین روش‌های موجود باعث خواهدشد و به خلق روش‌ها، مدل‌ها و ابزار دقیق‌تر و کارآمدتر کمک خواهدکرد. همه این پیامدها، به تثبیت هرچه بیشتر جایگاه روش‌های مختلف شبیه‌سازی خواهدانجامید.

کتابنامه:

1- Banks. J. Chair. P, "Simulation in the Future". *In Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*. ed, J.A. Joines, R.R. Barton, K.Kang, and P.A. Fishwick, U.S.A, 2000.

2- Charnes. J.M, *"Using Simulation for Option Pricing"*. In Proceedings of the 2000 RR.Barton, K. Kang, and P.A. Fishwick. School of Business the University of Kansas Lawrence. U.S.A, 2000.

3- Hilgers. G.M. *"Quasi-Monte Carlo Methods in Cash Flow Testing Simulations"*. In Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference. ed, J.A. Joines, RR. Barton, L. Kang, and 325 Computer Science 1870 Miner Circlo, 2000.

4- Caflisch R.E., Morokoff W., and Owen A.B., "Valuation of Mortgage. Backed Securities Using Brownian Bridges to Reduce Effective Dimension". *The Journal of Computational Finance*, Vol.1. No.1, 1997.

5- Munshi. J, *"Monte Carlo Simulation in Finance", Sonoma State University, Working Paper*, 1994. http://munshi.sonoma.edu/working/simulation.html

6- Nawrocki. D, "Finance and Monte Carlo Simulation", *Journal of Financial Planning*, November 2001.

7- Schmeiser. B.W. *"Some Myths and Common errors in Simulation Experiments, In Proceedings of the 2001 Winter Simulation Conference"*, ed.B.A. Peters, J.S. Smith, D.J. Medeiros, and M.W. Ronrer, School of Industrial Engineering, Purdue University, West Lafayette, 2001, U.S.A.

8- Li.J.X, Winker. P. *"Time Series Simulation With Quasi Monte Carlo Methods"*, Departments of Mathematics and Economics, Pennsylvania State University, University Park, U.S.A, 2000.

9- H. Evensky, *"Heading for Disaster". Financial Advisor*, April 2001.

10- D.Hertz, "Risk Analysis in Capital Investment", *Harvard Business Review*, January-February 1964, Vol.42.

11- W.G. Lewellen and M.S. long, *"Simulation Versus Single-Value Estimates in Capital Expenditure Analysis". Decision Sciences*, 1972, Vol.3, Reprinted in Myers, 1976.

12- S. Myers. *"Postscript: Using Simulation for Risk Analysis". Modern Developments in Financial Management*, S. Myers, ed. New York: Praeger Publications 1976.

13- G.C. Philippatos. *Financial Management: Theory and Techniques*, San Francisco: Holden Bay. 1973.

14- W.Rees and C. Sutcliffe. "Mathematical Modelling and Statistic Simulation of accounting Alternatives". *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol.20, No.3.

15- R.Y.Rubinstein. *Simulation and the Monte Carlo Method*. New York: John Wiley and Sons. 1981.

16- http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim-stoc-proc.html