مقایسهٔ دو روش تعیین قیمتهای پایانی در بورس اوراق بهادار تهران

حمیدرضا فرهادی[*]

در این مقاله روش جایگزینی را برای شیوهٔ فعلی تعیین قیمتهای پایانی در بورس تهران معرفی کرده‌ایم که آن نیز از هر دو کمیتهای حجم مبنا و میانگین موزون قیمتهای معاملاتی استفاده می‌کند؛ ولی در عوض موجب روان‌تر شدن بازار می‌شود. در پی معرفی روش جایگزین، به مطالعه و مقایسهٔ ریاضی دو روش تعیین قیمتهای پایانی می‌پردازیم. در کنار یافته‌های دیگر، دو موضوع اساسی را ثابت کرده‌ایم: نخست این را نشان داده‌ایم که اگر نسبت حجم معاملات به حجم مبنا ثابت باشد؛ در مقایسه با روش فعلی، روش پیشنهادی از نوسانات بیشتری برخوردار است؛ ثانیاً این موضوع

[*]. دکتر حمیدرضا فرهادی؛ عضو هیأت علمی دانشکده علوم ریاضی- دانشگاه صنعتی شریف.
E.mail: hfarhadi@sharif.edu

اساسی را نشان داده‌ایم که اگر اطلاعات خاصی به بازار تزریق نشود و حجم مبنا و حد نوسان قیمت نصف شوند، آنگاه در روش فعلی، قیمت نسبت به زمانی که حجم مبنا و حد نوسان تغییری نکنند نوسان‌پذیری کمتری خواهد داشت.[1]

کلید واژه‌ها:
بورس اوراق بهادار تهران، قیمت سهام، قیمت پایانی، بررسی مقایسه‌ای، حجم مبنا، حد نوسان قیمت

[1]. این نتیجه در پاسخ به پرسشی است که دکتر علی صالح آبادی، رئیس سازمان بورس و اوراق بهادار- مبنی‌بر اینکه اگر حجم مبنا و حد نوسان را نصف کنیم؛ چه اتفاقی برای بازار خواهد افتاد، مطرح کرده بودند.

مقدمه

این موضوع به مرور زمان توسط فعالان بازار سهام تهران احساس شده که روش فعلی استفاده از حجم مبنا در تعیین قیمتهای پایانی- که از شهریور ۱۳۸۲ تا زمان نگارش این مقاله (اسفند ماه ۱۳۸۶) اعمال می‌شده است- موجب کندی حرکت بازار شده و قیمتها با تأخیر به قیمت تعادلی میل می‌کنند. از این رو، بر آن شده‌ایم که فرمول جدیدی برای تعیین قیمتهای پایانی معرفی کنیم که در آن نیز از حجم مبنا و میانگین وزنی قیمتها استفاده می‌شود. اما این فرمول باید به نحوی باشد که موجب روان‌تر شدن بازار گردد. از بهمن سال ۸۴ بورس تهران حد نوسان ۲± درصد را بر قیمتهای معاملاتی تحمیل می‌کند (استثنا در مواقعی است که نماد یک شرکت پس از برگزاری مجامع باز می‌شود که در آن صورت در اولین روز باز شدن نماد قیمت اجازه دارد که به هر میزان تغییر کند تا به تعادل برسد). قیمتهای پایانی متأثر از پدیدهٔ "حجم مبنا" هستند که برای هر شرکت درج شده در بورس بدین نحو تعیین می‌شود:

$$\text{حجم مبنای روزانه} = \frac{\text{بیست درصد سهام منتشره شرکت}}{۲۵۰}$$

در ضمن قیمتهای پایانی هر روز تابعی از چهار مقدار زیر هستند:

۱. قیمت پایانی روز گذشته که آن را به $\mathbf{P}_{-1}$ نشان می‌دهیم.
۲. میانگین وزنی قیمتهای معاملاتی امروز که آن را به $\mathbf{Z}$ نشان می‌دهیم.
۳. تعداد سهام معاملاتی امروز شرکت که آن را به $\mathbf{X}$ نشان می‌دهیم.
۴. عدد حجم مبنای شرکت که آن را به $\mathbf{B}$ نشان می‌دهیم.

طبق نمادهای بالا، نسبت $\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{B}}$ نشان دهندهٔ درصدی از حجم مبنا است که در معاملات امروز پوشش داده شده است. اگر تعداد سهام معامله شده از شرکت حداقل به اندازهٔ عدد حجم مبنا باشد، آنگاه صددرصد از حجم مبنا پوشش داده شده است. پس عدد

$\alpha = \min(\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{B}},1)$ نشان‌دهندهٔ درصدی از حجم مبنا است که در معاملات امروز پوشش داده شده‌اند. برای مثال فرض کنید که برای شرکتی عدد حجم مبنا برابر ۱,۰۰۰,۰۰۰ (یک میلیون) سهم باشد. همچنین فرض کنید که امروز به تعداد ۸۰۰,۰۰۰ (هشت صد هزار) سهم از شرکت معامله شده باشد. آن‌گاه داریم $\alpha = 0/8$، یعنی ۸۰ درصد از حجم مبنای شرکت در معاملات امروز پوشش داده شده است. اما اگر ۱,۲۰۰,۰۰۰ سهم از شرکت معامله شده باشد، آن‌گاه داریم $\alpha = 1$.

ترتیب بخشهای این مقاله بدین گونه هستند: در بخش دوم به معرفی دو روش تعیین قیمتهای پایانی براساس عدد حجم مبنا می‌پردازیم که یکی از دو روش هم اینک در بورس تهران به کار گرفته می‌شود. در بخش سوم نمودار دو شاخص را برای مدت دو هفته کاری از بورس با هم مقایسه می‌کنیم. در بخش چهارم به مقایسهٔ ریاضی این دو روش می‌پردازیم. یکی از نتایج عمده این بخش آن است که اگر نسبت حجم معاملات به حجم مبنا ثابت بماند، آنگاه قیمتی که در روش پیشنهادی به دست می‌آید از نوسان پذیری بیشتری برخوردار است. در بخش پنجم به پاسخ دادن به این سوال بر می‌آییم که چه می‌شود اگر هم حد نوسان قیمت و هم عدد حجم مبنا هر دو نصف شوند. در عمل خواهیم دید که در روش فعلی قیمتها، اگر هر دوی حد نوسان قیمت و حجم مبنا نصف شوند، آنگاه نوسان پذیری قیمت کاهش می‌یابد.

معرفی دو روش تعیین قیمتهای پایانی

در این بخش مجدداً از نمادهای بخش اول استفاده می‌کنیم.

معرفی روش اول

در بورس تهران قیمتهای پیشنهادی خرید و فروش می‌توانند در دامنهٔ ۲± درصد قیمت روز گذشته حرکت کنند. بنابراین اگر $\mathbf{P}_{-1}$ معرف قیمت پایانی روز گذشته باشد، آنگاه بازهٔ بسته، بازه‌ای $[(1-0/02)\,\mathbf{P}_{-1} \;,\; (1+0/02)\,\mathbf{P}_{-1}] = [0/98\,\mathbf{P}_{-1} \;,\; 1/02\,\mathbf{P}_{-1}]$

است که در آن قیمتهای معاملاتی قرار دارند. لذا میانگین وزنی قیمتهای معاملاتی هم در این فاصله قرار دارد. حال بیایید این بازه $[0/98\mathbf{P}_{-1}\ ,\ 1/02\mathbf{P}_{-1}]$ را به اندازهٔ عدد $\alpha = \min(\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{B}}\ , 1)$ (که عددی بین ۰ و ۱ است) فشرده کنیم و بازهٔ $[(1-0/02\alpha)\mathbf{P}_{-1}\ ,\ (1+0/02\alpha)\mathbf{P}_{-1}]$ را در نظر بگیریم. نقاط انتهای چپ و راست این بازه را به ترتیب به **LowerLimit** و **UpperLimit** نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{LowerLimit} = (1-0/02\alpha)\,\mathbf{P}_{-1} \qquad (۱)$$

$$\mathbf{UpperLimit} = (1+0/02\alpha)\,\mathbf{P}_{-1} \qquad (۲)$$

در روش اول اگر میانگین وزنی $\mathbf{Z}$ بین این دو عدد باشد، آنگاه $\mathbf{Z}$ را به عنوان قیمت پایانی اعلام می‌کنیم، اما اگر $\mathbf{Z}$ بین دو عدد معرفی شده در (۱) و (۲) نباشد، آنگاه یکی از دو حالت $\mathbf{Z}<\mathbf{LowerLimit}$ و یا $\mathbf{UpperLimit}<\mathbf{Z}$ اتفاق می‌افتد: در حالت $\mathbf{Z}<\mathbf{LowerLimit}$ عدد **LowerLimit** را به عنوان قیمت پایانی معرفی می‌کنیم در حالی که در صورت $\mathbf{UpperLimit}<\mathbf{Z}$ عدد **UpperLimit** را به عنوان قیمت پایانی معرفی می‌کنیم. اگر قیمت پایانی که به این روش بدست می‌آید به $\mathbf{P}^*$ نشان دهیم. در یک جمع‌بندی می‌توان نوشت:

$$\mathbf{P}^* = \max\{\min\{\mathbf{Z}\ ,\ \mathbf{UpperLimit}\}\ ,\ \mathbf{LowerLimit}\} \qquad (۳)$$

مثال (۱): فرض کنید $\mathbf{P}_{-1} = 4000$ و $\alpha = 0/4$. آنگاه:

$\mathbf{LowerLimit} = 4000(1-0/02\times 0/4) = 3968$

$\mathbf{UpperLimit} = 4000(1+0/02\times 0/4) = 4032$

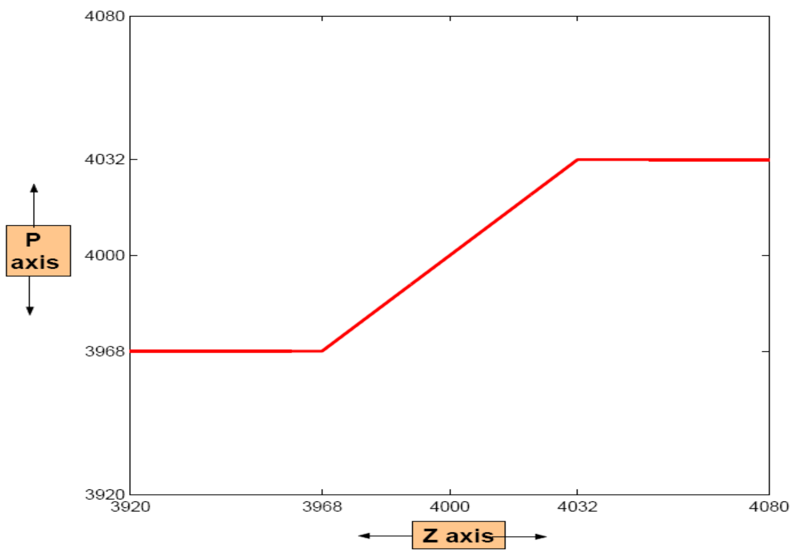
بنابراین:

$$\mathbf{P}^{*}=\max\{\min\{\mathbf{Z}\ ,\ 4032\}\ ,\ 3968\}$$

بازه ۲± درصد قیمت دیروز عبارت است از:

$$[\,4000\,(1-0/02\ ,\ 4000(1+0/02)]=[3920\ ,\ 4080]$$

نمودار $\mathbf{P}^{*}$ به عنوان تابعی از $\mathbf{Z}$ بدین صورت است:



نمودار ۱

معرفی روش دوم

حال به معرفی روش دوم می‌پردازیم که این روش دوم هم اینک در بورس تهران مورد استفاده است. فرمول آن به عنوان تابعی از میانگین وزنی $\mathbf{Z}$ و قیمت پایانی قبلی $\mathbf{P}_{-1}$ بدین شرح است:

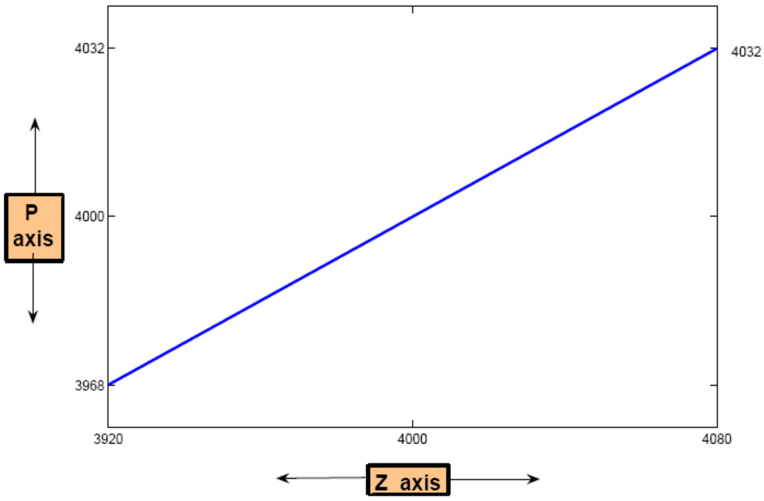
$$\mathbf{P}^{**}=\mathbf{P}_{-1}+(\mathbf{Z}-\mathbf{P}_{-1})\times\alpha=\alpha\mathbf{Z}+(1-\alpha)\mathbf{P}_{-1} \tag{۴}$$

به دلیل $0 \leq \alpha \leq 1$، مقدار $\mathbf{P}^{**}$ ترکیبی محدب از مقادیر $\mathbf{P}_{-1}$ و $\mathbf{Z}$ است. نمودار $\mathbf{P}^{**}$ به عنوان تابعی از $\mathbf{Z}$ یک خط راست با شیب α است (مثال پایین را ببینید).

مثال (۲) همچون مثال قبل فرض کنید $\mathbf{P}_{-1}=4000$ و $\alpha=0/4$.
آنگاه:

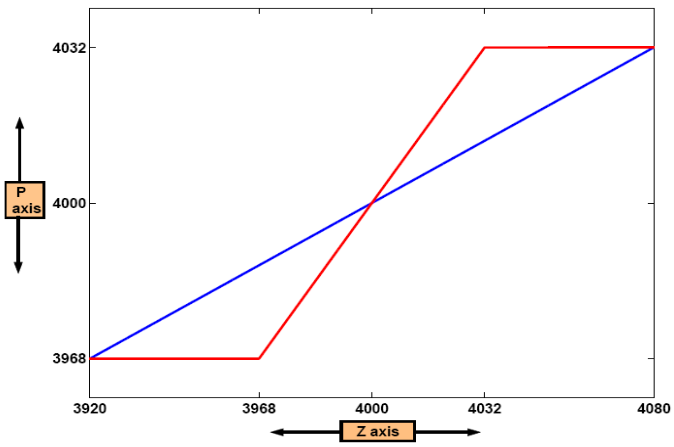
$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{**}&=\alpha\mathbf{Z}+(1-\alpha)\mathbf{P}_{-1}=0/4\mathbf{Z}+0/6\mathbf{P}_{-1}\\&=0/4\mathbf{Z}+(0/6)(4000)=0/4\mathbf{Z}+2400\end{aligned} \tag{۵}$$

معادلهٔ (۵) کمترین و بیشترین مقادیر ممکن ۳۹۲۰ (دو درصد بالا) و ۴۰۸۰ (دو درصد پایین) از $\mathbf{Z}$ را به مقادیر ۳۹۶۸ و ۴۰۳۲ برای $\mathbf{P}^{**}$ ربط می‌دهد. در شکل ۲ در پایین، نمودار $\mathbf{P}^{**}$ به عنوان تابعی از $\mathbf{Z}$ رسم شده است. چنانکه ملاحظه می‌شود، این نمودار خطی راست با شیب $\alpha=0/4$ است.



نمودار ۲

حال برای مقایسه‌ای از این دو روش، هر دو نمودار را در یک شکل رسم می‌کنیم:



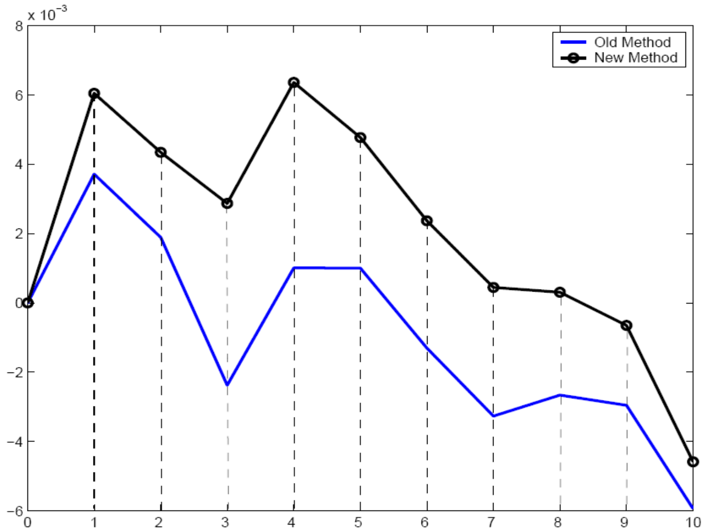
نمودار ۳

چنانکه ملاحظه می‌شود دو نمودار در نقطه $\mathbf{Z} = \mathbf{P}_{-1} = 4000$ همدیگر را قطع می‌کنند. هر دو نمودار نسبت به نقطه $\mathbf{Z} = 4000$ متقارن هستند و نیز $\mathbf{P}^{*}$ امکان نوسان بیشتری را بدست می‌دهد.

مقایسه نمودارهای دو شاخص متناظر با دو روش

در این بخش بر آن شدیم که دو شاخص از ۳۱۹ شرکت بورسی تهیه کنیم که در یکی، از قیمت پایانی $\mathbf{P}^{*}$ و در دیگری از قیمت پایانی $\mathbf{P}^{**}$ استفاده می‌شود. این تعداد از شرکتها، پس از یک فرایند غربال کردن که از جمله آن حذف شرکتهای تابلوی چهارم بوده است بدست آمده‌اند. چنانکه در بالا دیدیم، در هر دوی $\mathbf{P}^{*}$ و $\mathbf{P}^{**}$ از عوامل $\mathbf{X}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{P}_{-1}$ استفاده می‌شود. در تشکیل دو شاخص، این سه مقدار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{P}_{-1}$ را برای هر شرکت و برای پایان هر روز در دوره زمانی از ۸۵/۹/۲۲ تا ۸۵ /۱۰/۶ (دو هفته کاری بورس متشکل از ده روز معاملاتی) تهیه کردیم. سپس مقادیر روزانه α را برای هر شرکت حساب کرده و با استفاده از آن دو قیمت $\mathbf{P}^{*}$ و $\mathbf{P}^{**}$ را برای هر کدام از ۳۱۹ شرکت برای هر روز از آن دو هفته کاری بدست آوردیم. سپس دو شاخص بر مبنای این دو نوع فرایند قیمت برای آن شرکتها ساختیم (همانند شاخصهایی که در بورس تهیه می‌شوند). در نمودار زیر، نرخهای بازده تجمعی دو شاخص را در آن دوره ده روزه معاملاتی با هم مقایسه کرده‌ایم. در نمودار منظور از old method روشی است که فعلاً در بورس از آن استفاده می‌شود (روش $\mathbf{P}^{**}$) ، و منظور از new method روش پیشنهادی $\mathbf{P}^{*}$ است. چنانکه در نمودار احساس می‌شود ، شاخص متناظر با روش پیشنهادی از نوسان پذیری[1] بیشتری برخوردار است.

[1]. Volatility



نمودار ۴

مقایسه دو روش

حکم زیر نشان می‌دهد که $\mathbf{P}^*$ به $\mathbf{Z}$ نزدیکتر است تا $\mathbf{P}^{**}$ به $\mathbf{Z}$:

حکم ۱:

$$|\mathbf{P}^* - \mathbf{Z}| \le |\mathbf{P}^{**} - \mathbf{Z}| \qquad (۶)$$

اثبات:

چون قیمتهای معاملاتی امروز همگی در فاصله ۲± درصد از قیمت دیروز هستند پس میانگین وزنی هم همینطور است:

$$(1 - 0/02)\mathbf{P}_{-1} \le \mathbf{Z} \le (1 + 0/02)\mathbf{P}_{-1}$$
$$-0/02\,\mathbf{P}_{-1} \le \mathbf{Z} - \mathbf{P}_{-1} \le 0/02\,\mathbf{P}_{-1}$$

طرفین را در عدد α ضرب کنید:

$$-0/02\ \mathbf{P}_{-1}\times\alpha \le (\mathbf{Z}-\mathbf{P}_{-1})\times\alpha \le 0/02\mathbf{P}_{-1}\times\alpha$$

حال $\mathbf{P}_{-1}$ را به طرفین اضافه کنید:

$$\mathbf{P}_{-1}-0/02\mathbf{P}_{-1}\times\alpha \le \mathbf{P}_{-1}+(\mathbf{Z}-\mathbf{P}_{-1})\times\alpha \le \mathbf{P}_{-1}+0/02\mathbf{P}_{-1}\times\alpha$$

یعنی همواره داریم:

$$\mathbf{LowerLimit} \le \mathbf{P}^{**} \le \mathbf{UpperLimit} \qquad (۷)$$

حال سه حالت ممکن را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $\mathbf{Z}$ در بازهٔ $[\mathbf{LowerLimit}, \mathbf{UpperLimit}]$ قرار دارد.

آنگاه بنا به تعریف $\mathbf{P}^*$ داریم $\mathbf{P}^*=\mathbf{Z}$، که این به نوبهٔ خود رابطه (۶) را نتیجه می‌دهد؛ چرا که سمت چپ آن نامساوی صفر است.

حالت دوم: $\mathbf{Z} < \mathbf{LowerLimit}$

این نامساوی در تلفیق با (۷) به دست می‌دهد:

$$\mathbf{Z} < \mathbf{LowerLimit} \le \mathbf{P}^{**} \qquad (۸)$$

از طرفی از فرض $\mathbf{Z} < \mathbf{LowerLimit}$ و تعریف $\mathbf{P}^*$ داریم: $\mathbf{P}^*=\mathbf{LowerLimit}$؛ بنابراین در رابطهٔ (۸) می‌توان به جای $\mathbf{LowerLimit}$ از $\mathbf{P}^*$ استفاده کرد:

$$\mathbf{Z} < \mathbf{P}^* \le \mathbf{P}^{**}$$

حال این نامساویها به وضوح نامساوی (۶) را نتیجه می‌دهند.

حالت سوم: $\mathbf{UpperLimit < Z}$

این نامساوی در تلفیق با (۷) بدست می‌آید:

$$\mathbf{P^{**} \leq UpperLimit < Z} \qquad (۹)$$

از طرفی از فرض $\mathbf{UpperLimit < Z}$ و تعریف $\mathbf{P^*}$ داریم $\mathbf{P^* = UpperLimit}$؛ سپس در رابطهٔ (۹) می‌توان به جای $\mathbf{UpperLimit}$ از $\mathbf{P^*}$ استفاده کرد:

$$\mathbf{P^{**} \leq P^* < Z}$$

و این دو نامساوی به وضوح نامساوی (۶) را نتیجه می‌دهند. چون این سه حالت تنها حالتهای ممکن هستند. پس اثبات حکم، کامل است. ■

گر چه بنا به حکم بالا $\mathbf{P^*}$ به $\mathbf{Z}$ نزدیکتر است تا $\mathbf{P^{**}}$ به $\mathbf{Z}$، اما حکم بعدی نتیجه‌ای متفاوت را در مورد $\mathbf{P_{-1}}$ بدست می‌دهد. این حکم نشان می‌دهد که $\mathbf{P_{-1}}$ به $\mathbf{P^{**}}$ نزدیکتر است تا به $\mathbf{P^*}$.

حکم ۲:

$$\left|\mathbf{P^{**} - P_{-1}}\right| \leq \left|\mathbf{P^* - P_{-1}}\right| \qquad (۱۰)$$

اثبات: برهان را در حالتهای جامع زیر انجام می‌دهیم:

حالت اول: $\mathbf{Z}$ در بازهٔ $[\mathbf{LowerLimit\,,\ UpperLimit}]$ قرار دارد.

در این حالت داریم $\mathbf{P^* = Z}$، بنابراین:

$$\left|\mathbf{P^{**} - P_{-1}}\right| = \left|(\mathbf{Z - P_{-1}}) \times \alpha\right| = \left|(\mathbf{P^* - P_{-1}}) \times \alpha\right| = \left|\mathbf{P^* - P_{-1}}\right| \times |\alpha| \leq \left|\mathbf{P^* - P_{-1}}\right|$$

پس اثبات در این حالت کامل است.

قبل از پرداختن به حالتهای بعدی، برای لحظه‌ای به نامساویهای در (**۷**) مراجعه می‌کنیم. آن نامساویها بیان می‌کنند که $\mathbf{P}^{**}$ همواره در بازهٔ $[\mathbf{LowerLimit}\ ,\ \mathbf{UpperLimit}]$ واقع است.

این بازه از دو تکه زیر تشکیل یافته است.

$\mathbf{LowerLimit}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{P}_{-1}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{UpperLimit}$

پس $\mathbf{P}^{**}$ باید در یکی از این دو تکه باشد. با توجه به این نکته به حالتهای بعدی می‌رویم:

حالت دوم: فرض می‌کنیم $\mathbf{Z} < \mathbf{LowerLimit}$.

پس بنا به تعریف $\mathbf{P}^{*}$ داریم. $\mathbf{P}^{*} = \mathbf{LowerLimit}$. حال این حالت خود به دو زیر حالت تقسیم می‌شود:

حالت دوم- الف) فرض کنیم که $\mathbf{Z} > \mathbf{LowerLimit}$ و فرض کنیم $\mathbf{P}^{**}$ در فاصلهٔ $[\mathbf{LowerLimit}\ ,\ \mathbf{P}_{-1}]$ باشد.

آنگاه از $\mathbf{P}^{*} = \mathbf{LowerLimit}$ و $\mathbf{LowerLimit} \le \mathbf{P}^{**} \le \mathbf{P}_{-1}$ داریم:

$$\left|\mathbf{P}^{**} - \mathbf{P}_{-1}\right| \le \left|\mathbf{LowerLimit} - \mathbf{P}_{-1}\right| = \left|\mathbf{P}^{*} - \mathbf{P}_{-1}\right|$$

و اثبات مورد (۱۰) در این حالت کامل است.

حالت دوم- ب) فرض کنیم $\mathbf{Z} < \mathbf{LowerLimit}$ و فرض کنیم $\mathbf{P}^{**}$ در فاصلهٔ $[\mathbf{P}_{-1}\ ,\ \mathbf{UpperLimit}]$ باشد.

آنگاه از $\mathbf{P}^{*} = \mathbf{LowerLimit}$ و نامساویهای $\mathbf{P}_{-1} \le \mathbf{P}^{**} \le \mathbf{UpperLimit}$ داریم:

$$\left|\mathbf{P}^{**} - \mathbf{P}_{-1}\right| \le \left|\mathbf{UpperLimit} - \mathbf{P}_{-1}\right| = 0/02 \times \mathbf{P}_{-1} \times \alpha = \left|\mathbf{LowerLimit} - \mathbf{P}_{-1}\right| = \left|\mathbf{P}^{*} - \mathbf{P}_{-1}\right|$$

که نامساوی مورد نظر را ثابت می‌کند.

حال می‌رویم سراغ حالت سوم:

حالت سوم: فرض کنیم $\mathbf{UpperLimit} < \mathbf{Z}$

در این حالت داریم $\mathbf{P}^* = \mathbf{UpperLimit}$. این حالت به دو زیر حالت تقسیم می‌شود:

حالت سوم- الف) فرض کنیم $\mathbf{UpperLimit} < \mathbf{Z}$ و فرض کنیم $\mathbf{P}^{**}$ در فاصلهٔ $[\mathbf{LowerLimit}\ ,\ \mathbf{P}_{-1}]$ باشد.

آنگاه از $\mathbf{P}^* = \mathbf{UpperLimit}$ و نامساویهای $\mathbf{LowerLimit} \leq \mathbf{P}^{**} \leq \mathbf{P}_{-1}$ داریم:

$$\left|\mathbf{P}^{**} - \mathbf{P}_{-1}\right| \leq \left|\mathbf{LowerLimit} - \mathbf{P}_{-1}\right| = 0/02 \times \mathbf{P}_{-1} \times \alpha = \left|\mathbf{UpperLimit} - \mathbf{P}_{-1}\right| = \left|\mathbf{P}^* - \mathbf{P}_{-1}\right|$$

چنانکه مورد نظر بوده است.

حالت سوم- ب) فرض کنیم $\mathbf{UpperLimit} < \mathbf{Z}$ و فرض کنیم $\mathbf{P}^{**}$ در فاصلهٔ $[\mathbf{P}_{-1}\ ,\ \mathbf{UpperLimit}]$ باشد.

آنگاه از $\mathbf{P}^* = \mathbf{UpperLimit}$ و نامساویهای $\mathbf{P}_{-1} \leq \mathbf{P}^{**} \leq \mathbf{UpperLimit}$ داریم:

$$\left|\mathbf{P}^{**} - \mathbf{P}_{-1}\right| \leq \left|\mathbf{UpperLimit} - \mathbf{P}_{-1}\right| = \left|\mathbf{P}^* - \mathbf{P}_{-1}\right|$$

چنانکه مورد نظر بوده است.

حالتهای بحث شدهٔ بالا تنها حالتهای ممکن هستند و در تمامی آن سه حالت نامساوی (۱۰) ثابت شد. پس اثبات حکم کامل است. ■

در ادامهٔ این بخش به مقایسهٔ نوسانات دو فرمول قیمت $\mathbf{P}^*$ و $\mathbf{P}^{**}$ می‌پردازیم. این دو فرمول توابعی از عوامل α و $\mathbf{Z}$ هستند؛ عامل α خود تابعی از دو عامل $\mathbf{X}$ و $\mathbf{B}$ است. اگر α ثابت بماند، آنگاه $\mathbf{P}^*$ و $\mathbf{P}^{**}$ را به عنوان توابعی از $\mathbf{Z}$ داریم که آنها را به $\mathbf{P}^*(\mathbf{Z})$ و $\mathbf{P}^{**}(\mathbf{Z})$ نشان می‌دهیم. زمانی که بازار کارا باشد، احتمال صعود و نزول قیمتها

یکسان است، به نحوی که میانگین انتظاری قیمتها باید با قیمت روز قبل یکسان باشد. پس تساویهای زیر را در مورد امیدهای شرطی داریم:

$$\mathbf{E}[\mathbf{P}^*(\mathbf{Z}) \mid \textbf{History of Prices}] = \mathbf{P}_{-1}$$
$$\mathbf{E}[\mathbf{P}^{**}(\mathbf{Z}) \mid \textbf{History of Prices}] = \mathbf{P}_{-1}$$

این تساویها به نوبهٔ خود نتیجه می‌دهند که امید غیرشرطی متغیرهای تصادفی $\mathbf{P}^*(\mathbf{Z})$ و $\mathbf{P}^{**}(\mathbf{Z})$ مساوی $\mathbf{P}_{-1}$ هستند (این از قاعده امید مکرر نتیجه می‌شود[1])؛ یعنی $\mathbf{E}(\mathbf{P}^*) = \mathbf{E}(\mathbf{P}^{**}) = \mathbf{P}_{-1}$. حال برای واریانس‌های این دو متغیر تصادفی با استفاده از حکم دوم داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[\mathbf{P}^{**}(\mathbf{Z})] &= \mathbf{E}[\mathbf{P}^{**} - \mathbf{E}(\mathbf{P}^{**})]^2 \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{P}^{**} - \mathbf{P}_{-1}]^2 \\ &\le \mathbf{E}[\mathbf{P}^{*} - \mathbf{P}_{-1}]^2 && \text{(با استفاده از حکم ۲)} \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{P}^{*} - \mathbf{E}(\mathbf{P}^{*})]^2 \\ &= \mathbf{Var}[\mathbf{P}^{*}(\mathbf{Z})]\end{aligned}$$

پس ثابت شد که:

حکم ۳: اگر مقدار $\alpha = \min\left(\dfrac{\mathbf{X}}{\mathbf{B}}, 1\right)$ ثابت باشد، آنگاه متغیر تصادفی $\mathbf{P}^{**}$ دارای نوسانات کمتری است تا متغیر $\mathbf{P}^*$. ■

تأثیر حجم مبنا بر نوسانات

در این بخش به مطالعهٔ حالتی می‌پردازیم که حجم مبنا و حد نوسان هر دو نصف شوند؛ قصد ما آن است که اثر این تغییر را بر تلاطمات قیمت بررسی کنیم. پس فرض کنیم

---
[1]. A. N. Shiryayev, ***Probability***, (Springer-Verlag, 1984), p. 214.

که حجم مبنای جدید شرکت که آن را به $\mathbf{B'}$ نشان می‌دهیم نصف حجم مبنای قبل باشد:

$$\mathbf{B'} = \frac{\mathbf{B}}{2}$$

حال اگر α ی متناظر با $\mathbf{B'}$ را به α' نشان دهیم، آنگاه:

$$\alpha' = \min\left(\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{B'}} , 1\right) = \min\left(\frac{2\mathbf{X}}{\mathbf{B}} , 1\right) = \min\left(\min\left(\frac{2\mathbf{X}}{\mathbf{B}} , 1\right) , 2\right) = \min\left(\frac{2\mathbf{X}}{\mathbf{B}} , 2 , 1\right)$$

$$= \min\left(\min\left(\frac{2\mathbf{X}}{\mathbf{B}} , 2\right) , 1\right) = \min\left(2\min\left(\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{B}} , 1\right) , 1\right) = \min(2\alpha , 1)$$

پس:

$$\alpha' = \min(2\alpha , 1)$$

لذا $\alpha' \leq 2\alpha$. از طرف دیگر اگر هیچ اطلاعات به خصوصی به بازار تزریق نشود، آنگاه می‌توان فرض کرد که $\mathbf{Z}$ دارای توزیع یکنواخت[1] بر بازه $\left[0/98\,\mathbf{P}_{-1} , 1/02\,\mathbf{P}_{-1}\right]$ است (چه اگر تمایل به سمت نقطه خاصی بیشتری می‌بود این دلالت بر وجود اطلاعات خاصی در پشتیبانی از آن نقطه می‌داشت). آن‌گاه از $\mathbf{P} - \mathbf{P}_{-1} = \alpha(\mathbf{Z} - \mathbf{P}_{-1})$ می‌داشتیم:

$$\mathbf{Var}(\mathbf{P}^{**}) = \mathbf{E}(\mathbf{P}^{**} - \mathbf{P}_{-1})^2 = \alpha^2 \mathbf{E}(\mathbf{Z} - \mathbf{P}_{-1})^2$$
$$= \alpha^2 \frac{1}{1/02\,\mathbf{P}_{-1} - 0/98\,\mathbf{P}_{-1}} \int_{0/98\mathbf{P}_{-1}}^{1/02\mathbf{P}_{-1}} (\mathbf{x} - \mathbf{P}_{-1})^2 \mathbf{dx} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{0/04\,\mathbf{P}_{-1}} \left[\frac{1}{3}(\mathbf{x} - \mathbf{P}_{-1})^3\right]_{\mathbf{x}=0/98\mathbf{P}_{-1}}^{\mathbf{x}=1/02\mathbf{P}_{-1}} = \frac{\alpha^2}{0/04\,\mathbf{P}_{-1}} \times \frac{1}{3} \times 2(0/02\,\mathbf{P}_{-1})^3$$

[1]. Uniform Distribution

$$= \frac{\alpha^2}{0/04\,\mathbf{P}_{-1}} \times \frac{1}{3} \times 2(0/02)(0/02)^2\,\mathbf{P}_{-1}^3 = \frac{\alpha^2 (0/02)^2\,\mathbf{P}_{-1}^2}{3}$$

یعنی:

$$\mathbf{Var}\left(\mathbf{P}^{**}\right) = \frac{\alpha^2 (0/02)^2\,\mathbf{P}_{-1}{}^2}{3} \qquad (۱۱)$$

بنابراین مشروط بر ثابت بودن مقدار α، واریانس متغیر $\mathbf{P}^{**}(\mathbf{Z})$ توسط رابطه (۱۱) بدست می‌آید. بطور کلی، اگر به جای دامنهٔ نوسان $\pm 0/02$ دامنه نوسان برابر عدد دلخواه $\pm\theta$ می‌بود، آنگاه همانند بالا می‌توان ثابت کرد که:

$$\mathbf{Var}\left(\mathbf{P}^{**}\right) = \frac{\alpha^2\theta^2\,\mathbf{P}_{-1}{}^2}{3} \qquad (۱۲)$$

حال برای لحظه‌ای فرض کنید که دامنه نوسان را نصف کرده و از θ به $\theta' = \frac{\theta}{2}$ تقلیل دهیم، و همچنین فرض کنید که هم زمان عدد حجم مبنا را به نصف تقلیل داده باشیم. در بالا دیدیم که $\alpha' \leq 2\alpha$ قیمت $\mathbf{P}^{**}$ متناظر بوده است با θ و α؛ حال اگر قیمت متناظر با θ' و α' را به $\mathbf{P}^{***}$ نشان دهیم، آنگاه عدد $\mathbf{P}^{***}$ هم از همان فرمول (۴) بدست می‌آید منتها با این تفاوت که α را به α' تغییر می‌دهیم به علاوه اینکه تغییر دادن دامنه نوسان باعث تغییر یافتن مقادیر $\mathbf{Z}$ در آن فرمول می‌شود. اما به هر حال فرمول (۱۲) هم برای $\mathbf{P}^{***}$ معتبر است منتها باید از α' و θ' در آن استفاده کنیم. آنگاه داریم:

$$\mathbf{Var}\left(\mathbf{P}^{***}\right) = \frac{\alpha'^2\theta'^2\,\mathbf{P}_{-1}{}^2}{3} \leq \frac{(2\alpha)^2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\,\mathbf{P}_{-1}{}^2}{3} = \frac{\alpha^2\theta^2\,\mathbf{P}_{-1}{}^2}{3} = \mathbf{Var}(\mathbf{P}^{**})$$

پس:

$$\mathbf{Var}\left(\mathbf{P}^{***}\right) \leq \mathbf{Var}(\mathbf{P}^{**})$$

این نامساوی حکم زیر را ثابت می‌کند:

حکم ۴: زمانی که هیچ اطلاعات خاصی (از داخل شرکتها) در مورد قیمتهای امروز در دسترس نباشد، آنگاه با نصف کردن دامنه نوسان و نصف کردن حجم مبنا، قیمتها، نوسانات کمتری خواهند داشت. ■

نتیجه گیری

در این مقاله روشی جدید برای استفاده از حجم مبنا در تعیین قیمتهای پایانی در بورس اوراق بهادار تهران معرفی و پیشنهاد شده است. هدف از معرفی این روش پیشنهادی روان‌تر کردن بازار است که این واقعیت (که تحت روش پیشنهادی بازار روان‌تر می‌شود) را بطور ریاضی ثابت کرده‌ایم. در این مقاله در مقایسه ریاضی بین این روش پیشنهادی با روشی که فعلاً از آن در بورس تهران استفاده می‌شود چهار چیز ثابت شده‌است: نخست مشاهده شده است که در روش فعلی (در مقایسه با روش پیشنهادی) قیمت به میانگین قیمتهای معاملاتی نزدیکتر است. دوم ملاحظه شده که در روش پیشنهادی (در مقایسه با روش کنونی) قیمت به قیمت روز گذشته نزدیکتر است؛ سوم به نتیجه اساسی رسیده‌ایم که اگر نسبت حجم معاملات به عدد حجم مبنا ثابت بماند، آنگاه در روش پیشنهادی (در مقایسه با روش فعلی) قیمت، دارای نوسانات‌پذیری بیشتری است؛ این به معنی آن است که استفاده از روش پیشنهادی موجب روان‌تر شدن بازار می‌شود. چهارم نشان داده شده که اگر اطلاعات خاصی به بازار تزریق نشود و اگر هر دوی حجم مبنا و حد نوسان قیمت نصف شوند، آنگاه در روش فعلی قیمتها نوسان پذیری کمتری در مقایسه با حالت عادی- که حجم مبنا و حد نوسان به حال خود باقی می‌مانند - خواهند داشت.

پی‌نوشتها:

1. Shiryayev, A. N., ***Probability***. (Springer-Verlag, 1984): 214.