

تعمیم نظریه مارکویتز در بهینه‌سازی سبد سهام

دکتر حمید شهرستانی

استاد اقتصاد دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران*

دکتر فرهاد ثوابی اصل

استادیار اقتصاد دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرج**

دکتر بیژن بیدآباد

استاد اقتصاد مؤسسه تحقیقات پولی و بانکی***

صفحات: ۲۲۹-۲۰۷

تاریخ پذیرش: ۸۸/۴/۲۰

تاریخ دریافت: ۸۷/۹/۳۰

الگوی مارکویتز در تعیین سهم هریک از سهام در سبد دارایی، بر مبنای انتخاب بهینه سهام برای حداکثر نمودن درآمد انتظاری سبد استوار است، از یک طرف، این الگو امید ریاضی ارزش هر سهم را در الگو وارد می‌نماید. از طرف دیگر، این مدل کوواریانس نوسانات ارزشی سهام را ثابت و برونزا در نظر می‌گیرد. بنابراین در این مقاله از طریق ترکیب نظریات مارکویتز و شارپ و پیشنهاد مدلی جدید الگوی جامع تری را معرفی می‌کنیم که نسبت به مرز سنتی مارکویتز کارا تر خواهد بود. به عبارت دیگر از طریق درونزا نمودن کوواریانس‌های نرخهای بازدهی مربوط به سهام واقع شده در پرتفولیوی اختیار شده در مدل توسعه یافته مدل مارکویتز، بازده انتظاری مدل پیشنهادی، همواره در هر سطح مشخص ریسک، بزرگتر یا مساوی با بازده انتظاری مدل سنتی مارکویتز خواهد بود. در الگوی پیشنهادی، سهم بخش ریسک غیرسیستماتیک که طبق نظریه شارپ بازار برای آن پاداشی را در نظر نمی‌گیرد در هر سطح از ریسک پرتفولیو، همواره در پایین‌ترین سطح ممکن قرار می‌گیرد. برتری نظریه پیشنهادی هم از طریق نظری و هم از طریق عملی با یافتن سبد بهینه سهام شرکتهای بزرگ سیمان، فعال در بورس تهران در مقایسه با نظریه مارکویتز تأیید می‌شود.

طبقه بندی JEL: P48, P14, O50, D23

کلید واژه‌ها:

بورس سهام تهران، مرکز کارای میانگین- واریانس، خط بازار سرمایه، ریسک سیستماتیک، ریسک غیرسیستماتیک و CAPM

*. E. mail: shahrest@ohio.edu

** E. mail: farhad_savabil@yahoo.com

***. E. mail: bijan @bidabad.com

مقدمه

مدل قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای (CAPM)^۱، توسعه مدل «هری مارکوویتز»^۲ از زاویه‌ای خاص و اولین نظریه دربارهٔ قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای ارائه شده توسط «شارپ و لینتنر»^۳ است. در واقع مطالعه نظریه "انتخاب پرتفولیو"^۴ مربوط به مارکوویتز، در خصوص نحوهٔ ارتباط بین ریسک و بازدهی که اولین بار در سال ۱۹۵۲ میلادی منتشر شده بود، به همراه نسخه به روز درآمده آن در سال ۱۹۵۹ میلادی توسط شارپ زمینه را برای ظهور اولین نظریهٔ قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای فراهم نمود.

شارپ از طریق اختیار نمودن پاره‌ای از مفروضات موفق شد مرکزکاری غیرخطی مارکوویتز را توسعه داده و آنرا تبدیل به مرکز کاری خطی نماید که این مرکز خطی در ادبیات مالی به خط بازار سرمایه (CML)^۵ معروف است.

فرض اساسی دربارهٔ مدل CAPM همانا فرض وجود سبد فراگیر بازار^۶ است. فرضی که توسط تعدادی از محققین مالی از جمله «رول»^۷ مردود شناخته شده است.

در واقع وجود چنین فرضی به ما این امکان را می‌داد که بتوانیم حداکثر مقدار را برای نسبت شارپ^۸، و یا همانا حداکثر پاداش بازای هر واحد از ریسک سیستماتیک بازار را استخراج کنیم. تحت شرایط یاد شده، سرمایه‌گذار قادر بود با اختیار ترکیبی دلخواه از سبد فراگیر بازار و یک دارایی بدون ریسک، با توجه به شکل منحنیهای بی‌تفاوتی خود در ارتباط با مقدار ریسک و بازدهی، همواره بریکی از نقاط واقع بر خط بازار سرمایه قرارگیرد. هر قدر سرمایه‌گذار ریسک گریزتر باشد، تمایل به قرض دادن در او بیشتر و برعکس هر قدر ریسک‌پذیرتر باشد، تمایل به وام گرفتن در او بیشتر تقویت می‌شد.

^۱. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

^۲. Harry Markowitz, (1959)

^۳. Sharpe & Lintner, (1962).

^۴. Portfolio Selection

^۵. Capital Market Line

^۶. Market Portfolio

^۷. Roll, (1970).

^۸. Sharpe Ratio

نکته مهم و قابل توجهی که در تحقیق حاضر باید به آن اشاره نمود این است که آیا از طریق حذف برونزا بودن عناصر ماتریس واریانس-کوواریانس نرخهای بازدهی کل مربوط به مارکوویتز به کمک مدل قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای، می‌توان تعداد تخمینهای بالای مدل مارکوویتز را کاهش داده و مدل یادشده را به وضعیت کاربردی‌تری تبدیل نمود؟ بر مبنای تحلیل مطالب نظری، فرضیه‌ای را که در تحقیق حاضر با آن مواجه هستیم می‌توان به شرح زیر در نظر گرفت:

الگوی مارکوویتز توسعه یافته (الگوی پیشنهادی) عملکرد بهتری نسبت به الگوی مارکوویتز سنتی دارد.

مقصود از عملکرد بهتر در فرضیه یاد شده یعنی اثبات نظری و عملی این موضوع که همواره در هر سطح مشخص از ریسک در نظر گرفته شده برای مدل پیشنهادی و مدل سنتی، همواره بازده انتظاری مدل پیشنهادی بزرگتر یا مساوی با بازده انتظاری مدل سنتی است. به عبارت دیگر همواره مرز کارایی مدل پیشنهادی بر بالای مرز کارایی سنتی در ازای هر سطح مشخص از بازده انتظاری برای پرتفولیوی در نظر گرفته شده است.

هدف این مقاله عبارتست از تعمیم و ادغام نظریه‌های مارکوویتز و شارپ بگونه‌ای که نخست تعداد تخمینهای مدل مارکوویتز را کاهش داده، دوم از طریق ارائه یک مدل ریاضی خرده سرمایه‌گذاران^۱ را در امر انتخاب یک پرتفولیوی بهینه و یا همانا اختیار پرتفولیوی که سهم بخش زائد ریسک و یا دقیق‌تر ریسک غیرسیستماتیک آن را که بازار برای آن حاضر به پرداخت پاداش نیست را در هر سطح دلخواه ممکن از ریسک کل پرتفولیو حداقل نمایم.

شایان ذکر است که در این مقاله از داده‌های ماهانه مربوط به E/P هر سهم به عنوان بازده سهم در دوره زمانی ۸۶-۷۹ مربوط به بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است.

^۱ واژه خرده سرمایه‌گذار، اشاره به سرمایه‌گذارانی دارد که برای سرمایه‌گذاری وجوه خود تنها به تعداد محدودی سهام توجه دارند.

برای بررسی فرضیه تحقیق و نیز تجزیه و تحلیل آماری داده‌ها و ترسیم نمودارها از بسته‌های نرم‌افزاری (spss)^۱، (Eviews)^۲ و نیز از بسته نرم‌افزاری (GAMS)^۳ مربوط به شاخه تحقیق در عملیات استفاده شده است.

در بخش نخست، مروری بر ادبیات موضوع، سپس ارائه مدل، پس از آن، تخمین پارامترهای الگوی پیشنهادی و الگوی سنتی، سپس، استخراج مرز کارای مدل پیشنهادی و سنتی و در انتها نتیجه‌گیری و پیشنهادات ارائه می‌شود.

مروری بر ادبیات موضوع

مدل CAPM، توسعه مدل مارکوویتز از زاویه‌ای خاص و اولین نظریه در قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای توسط شارپ و لینتز است.

نکته مهم و درخور توجه درباره مدل CAPM، همانا فرض وجود سبد فراگیر بازار (Market portfolio) است. در این مدل فرض بر آن است که این سبد نه تنها وجود داشته بلکه قابل محاسبه نیز بوده و در ضمن بر روی مرز کارای مارکوویتز واقع است.

در واقع وجود چنین فرضی به ما این امکان را می‌داد که بتوانیم حداکثر مقدار را برای نسبت شارپ استخراج نماییم.

نسبت شارپ یا شاخص شارپ^۴ در ادبیات مالی طبق رابطه (۱) به شرح زیر تعریف می‌شود.

$$S = \frac{E[R_p - R_f]}{\sqrt{Var[R_p - R_f]}} = \frac{E[R_p - R_f]}{\sigma_p} \quad (1)$$

^۱. Statistical Package for Social Science

^۲. Econometric Views

^۳. General Algebraical Model Solution

^۴. Sharpe Index

چنانچه پرتفولیوی p در ناحیه قابل دسترس مارکوویتز که ناحیه‌ای متشکل از ترکیبات گوناگون داراییهای ریسکی با مقادیر ریسک و بازده انتظاری متنظر با خود هستند مطابق نمودار (۱)، واقع شده باشد^۱، سرمایه‌گذار قادر است با برقراری فرض وام‌گیری و وام دادن در یک نرخ بهره بدون ریسک و فرض وجود دارایی غیرریسکی با بازدهی R_f ، از طریق ترکیب سبد P با دارایی غیرریسکی یادشده، یک مرز کارای خطی همچون R_fP را بوجود آورد که شیب آن همانا مقدار بدست آمده از نسبت شارپ بوده، بطوریکه این نسبت مقدار پاداش در نظر گرفته شده به ازای هر واحد پذیرش ریسک سبد P را به نمایش می‌گذارد.^۲

حال از آنجایی که سبد بازار بر روی مرز کارای مارکوویتز واقع است^۳؛ اولاً دارای ماکزیمم مقدار برای نسبت شارپ بوده، ثانیاً تمامی ریسک آن از نوع سیستماتیک است و ثالثاً بر طبق مفروضات CAPM این پرتفولیو، پرتفولیوی تقاضا شده از سوی تمامی سرمایه‌گذاران است^۴ لذا با توجه به توضیحات داده شده، نسبت یاد شده در این حالت بیانگر حداکثر مقدار پاداش در نظر گرفته شده از سوی بازار در صورت اختیار نمودن این پرتفولیو از سوی سرمایه‌گذاران به ازاء پذیرش هر واحد از ریسک سیستماتیک آن است.

بدین ترتیب یک سرمایه‌گذار قادر خواهد بود از طریق ترکیبی دلخواه از سبد فراگیر بازار و یک دارایی بدون ریسک، با توجه به شکل منحنیهای بی‌تفاوتی خود در ارتباط با مقدار ریسک و بازدهی، همواره بر یکی از نقاط واقع بر خط بازار سرمایه (CML) قرار گیرد.

به یقین هرچه سرمایه‌گذار محتاط‌تر و یا اصطلاحاً ریسک‌گریزتر^۵ باشد، وی تمایل به اختیار نمودن ترکیبهای واقع بین R_fM را دارد، درحالیکه یک سرمایه‌گذار با روحیه تهاجمی‌تر و یا اصطلاحاً ریسک‌پذیرتر^۶ تمایل به اختیار نمودن ترکیبهای واقع در امتداد MK

¹. Eugene. Fama & French. Kenneth, "Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies", Vol. 51, (1996), pp.55-84.

². S. Kevin, *Security Analysis & Portfolio Management*, (Prentice Hall of India Private, 2006).

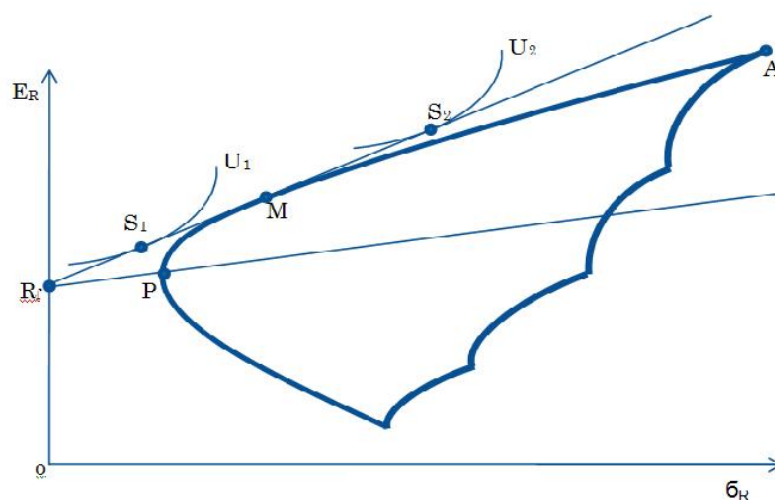
³. Harry. Markowitz, *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice & Capital Markets*, (Cambridge, 1987).

⁴. Eugene. Fama & French. Kenneth, "The Capital Asset Pricing Model: Theory & Evidence", *Journal of Finance*, (2004), pp.1-32.

⁵. Risk Averse

⁶. Risk Seeker

را از خود بروز خواهد داد. این امر به ترتیب با منحنیهای بی تفاوتی U_1 و U_2 به نمایش گذاشته شده است. نکته درخور توجه دیگر در این تئوری همانا وجود رابطه خطی (۲) به عنوان شرایط لازم، مسئله حداکثرسازی رابطه (۳) است.^۱ که در ادبیات مالی به «خط بازار سهام» (SML)^۲ معروف است.^۳



نمودار ۱. رابطه بین ریسک و بازده پرتفولیوی (مدل مارکوویتز و شارپ)

$$E(R_i) = R_f + \beta_{i_m} [E(R_m) - R_f] \quad (2)$$

^۱. به پیوست A مراجعه کنید.

^۲. Security Market Line

^۳. Ramesh. Rao., *Fundamentals of Financial Management*, (Macmilan, 1989).

$$Max S = \frac{E[R_p - R_s]}{\sigma_p} = \frac{E[R_p - R_f]}{\sqrt{Var[R_p - R_f]}} \quad (3)$$

$$S.to : (1) \sum_{i=1}^n \omega_{ip} = 1$$

$$(2) \omega_{ip} \geq 0$$

مطابق نمودار (۱) ماکزیمم مقدار نسبت شارپ در رابطه (۳) زمانی اتفاق خواهد افتاد که پرتفولیو P، همان پرتفولیوی بازار (M) باشد.

همچنین مطابق رابطه (۲)، ملاحظه می‌شود که متوسط بازده دارایی ریسکی \bar{A} یک تابع خطی از متوسط بازدهی بازار است.

در این رابطه داریم:

معرف نسبت ریسک سیستماتیک دارایی \bar{A} به ریسک بازار که ضمناً مقدار آن β_{iM} به شرح زیر است:

$$\beta_{iM} = \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \rho_{iM}$$

همچنین در رابطه اخیر ρ_{iM} معرف ضریب همبستگی موجود بین بازدهی بازار و بازدهی دارایی ریسکی \bar{A} و طبق فرض مقدار آن در نامساوی مضاعف زیر صدق می‌کند.

$$0 \leq \rho_{iM} \leq 1$$

اینک با ملاحظه رابطه (۲) سوال اصلی آن است که چنانچه یک سرمایه‌گذار خواهان سرمایه‌گذاری در تعداد محدودی از سهام موجود در پرتفولیو M باشد. با توجه به این حقیقت که در این حالت بخشی از ریسک پرتفولیو از نوع غیرسیستماتیک است، چگونه قادر است که

میزان این بخش زائد از ریسک را در پرتفولیوی اختیار شده از سوی خود که بازار برای آن حاضر به پرداخت نمی باشد را کاهش دهد.

سؤال دیگری که می تواند مطرح باشد، آن است که آیا می توان از طریق ارائه یک الگوریتم مناسب سرمایه گذاران را در جهت بدست آوردن یک مرکز کارا در شرایط پیش آمده با توجه به مسئله ریسک پذیری یا ریسک گریزی آنان یاری رسان باشیم. به سؤالاتی از این قبیل در ادامه مقاله پاسخ داده خواهد شد. در این خصوص نیاز به ترکیب و ادغام نظریات شارپ و مارکوویتز را خواهیم داشت.

به این ترتیب که در مدل اولیه مارکوویتز، فرض برونزا بودن متوسط بازدهیهای داراییهای ریسکی را کنارگذاشته و بجای آن فرض می کنیم که این متوسط بازدهیها از رابطه (۲) تبعیت می کنند.

ادغام و ترکیب یادشده در جهت پاسخگویی به سؤالات مطرح شده، سبب این امر می شود. که اولاً مشکل محاسبه تعداد تخمینهای بالا در مدل اولیه ارائه شده از سوی مارکوویتز کاهش یابد^۱، ثانیاً ما را قادر می سازد تا از طریق ارائه یک الگوریتم ریاضی، شرکتهای سرمایه گذاری و سرمایه گذاران انفرادی بالقوه و بالفعل را در جهت استخراج مرز کارای جدید یاری رسان باشیم.

لازم به ذکر است که با توجه به بررسیهای انجام شده، بررسی و پژوهش مشابهی با آنچه که در مقاله حاضر به آن پرداخته شده، از سوی سایر محققین تاکنون به عمل نیامده است.

ارائه مدل پیشنهادی

در مدل پیشنهادی سعی ما بر آن است تا از طریق وارد کردن مدل قیمت گذاری داراییهای سرمایه ای منسوب به شارپ (CAMP) به مدل مارکوویتز، اولاً مشکل تعداد تخمینهای زیاد در مدل مارکوویتز را کاهش داده، ثانیاً از طریق ارائه یک الگوریتم نسبتاً ساده

^۱ تعداد کل تخمینها در مدل مارکوویتز مشکل از n قلم دارایی ریسکی عبارت است از: $\frac{n(n+3)}{2}$

ریاضی، شرکتهای سرمایه‌گذاری و سرمایه‌گذاران انفرادی را در تخمین هرچه سریعتر و کاهش قابل ملاحظه در هزینه‌های مالی و زمانی در جهت استخراج مرکز کارای جدید یاری‌رسان باشیم. لازم است باز هم یادآور شویم که این امر تنها برای خرده سرمایه‌گذاران مطابق مقدمه ذکر شده صحیح است.

قبل از ورود به بحث اصلی لازم است ابتدا شکل تجربی مدل CAMP را مورد ملاحظه قرار دهیم.

شکل تجربی مدل CAMP به شرح زیر است.

$$R_{it} - R_f = \beta_{iM} (R_{Mt} - R_f) + \varepsilon_{it} \quad (4)$$

بطوریکه:

R_{it} : بازده دارایی ریسکی i ام در دوره t ؛

R_{Mt} : بازده بازار در دوره t ؛

ε_{it} : جمله اختلال مربوط به دارایی ریسکی i ام در دوره t .

در خصوص ε_i ها از آنجایی که متغیرهایی تصادفی هستند، فرض ما بر آن است که تمامی مفروضات رگرسیون بجز فرض برابری واریانس جملات اختلال بر آنها حاکم است. در دنباله براساس شکل تجربی مدل CAMP و با توجه به مفروضات در نظر گرفته شده برای متغیرهای تصادفی مورد اشاره، می‌توان پس از انجام محاسباتی نوشت:¹

$$\sigma_{ij} = \beta_{iM} \beta_{jM} \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_{ij}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

رابطه (5) را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد:

¹. S. Kevin, *Op. Cit.*

$$\sigma_{ij} = \beta_{iM} \beta_{jM} \sigma_M^2 \quad i \neq j \quad (6)$$

$$\sigma_i^2 = \beta_{iM}^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2 \quad i = j \quad (7)$$

بطوریکه:

σ_{ij} : کوواریانس بین نرخهای بازدهی کل دارایی i ام و j ام؛

σ_M^2 : واریانس نرخهای بازدهی بازار؛

$\sigma_{\varepsilon ij}$: کوواریانس بین جملات اختلال ε_i ام و ε_j ام که طبق فرض برای $i \neq j$

معادل صفر است؛

$\sigma_{\varepsilon i}^2$: واریانس جمله اختلال ε_i ام.

اینک با توجه به رابطه (5) و با توجه به مدل CAPM می توان مدل برنامه ریزی

غیرخطی مارکوویتز را بشرح زیر دوباره نویسی کرد:

$$\text{Max} E(R_p) = \sum_{i=1}^n \omega_i E(R_i) \quad (8)$$

$$\text{S.to: } (1) \sum_{i=1}^n \omega_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = \sigma_p^2$$

$$(2) E(R_i) = R_f + \beta_{iM} (E(R_M) - R_f)$$

$$(3) \sigma_{ij} = \beta_{iM} \beta_{jM} \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon ij}$$

$$(4) \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

$$(5) \omega_i \geq 0$$

مطابق رابطه (۸) و یا همان مدل پیشنهادی، تعداد تخمینهای مدل به شرح زیر قابل محاسبه هستند.

(i) تخمین مربوط به محاسبه β_{iM} ؛

(ii) 1 تخمین مربوط به محاسبه σ_M^2 ؛

(iii) 1 تخمین مربوط به محاسبه $E(R_M)$ ؛

(iv) n تخمین مربوط به محاسبه σ_{ei}^2 .

بنابراین تعداد کل تخمینها در مدل پیشنهادی عبارتست از:

$$n+1+1+n=2n+2=2(n+1)$$

برای ساده‌سازی رابطه (۸) می‌دانیم که طبق تعریف بتای پرتفولیوی p بقرار زیر می

است:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n \omega_i \beta_i$$

براساس تعریف فوق می‌توان نوشت:

$$\beta_p^2 = \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \beta_i \right]^2 = (\omega_1 \beta_1 + \omega_2 \beta_2 + \dots + \omega_n \beta_n)^2$$

لذا داریم:

$$\beta_p^2 = \sum_{i=1}^n (\omega_i \beta_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (\omega_i \beta_i)(\omega_j \beta_j) \quad (9)$$

مجدداً روابط (۵) و اولین قید رابطه (۸) را در نظر می‌گیریم.

با جایگذاری عبارت (۵) در اولین قید رابطه (۸) و نیز استفاده از رابطه (۹) خواهیم داشت:^۱

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2 \quad (10)$$

جمله اول سمت راست معادله (۱۰) معرف آن بخش از ریسک کل پرتفولیوی p بوده که ناشی از نوسان در فعالیتهای اقتصادی و دقیقاً همان ریسکی است که بازار بابت آن حاضر به پرداخت پاداش است. درحالیکه جمله دوم همین رابطه نشان دهنده ریسک غیرسیستماتیک بوده و از طریق پرگونه سازی قابل حذف بوده و به همین علت بازار برای آن پاداشی در نظر نمی گیرد.^۲

در دنباله با ساده سازی رابطه (۸) و با در نظر گرفتن رابطه (۱۰) رابطه (۱۱) را به شرح زیر خواهیم داشت:

$$MaxE(R_p) = R_f + \beta_p [E(R_M) - R_f] \quad (11)$$

$$S.to : (1) \sigma_M^2 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \beta_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2 = \sigma_p^2$$

$$(2) \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

$$(3) \omega_i \geq 0$$

¹. Alan.Lewis, "A simple Algorithm for the Portfolio Selection Problem", *Journal of Finance*, Vol. 43, (1988), pp. 71-82.

². John. Lintner, "The Valuation of Risk Assets the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios & Capital Budgets", *Review of Economic & Statistics*, Vol. 47, (1965), pp.13-37.

از آنجایی که در عبارت (۱۱) مقادیر R_f ، $E(R_M)$ ثابت هستند، این عبارت هنگامی مقدار حداکثر خود را اختیار خواهد نمود که β_p در مقدار حداکثر قرار گیرد.

تخمین پارامترهای الگوی پیشنهادی والگوی سنتی

مطابق مطالب ارائه شده در بخش پیشین و با توجه به شکل کلی مدل‌های پیشنهادی و سنتی می‌توان گفت که هر دو مدل یاد شده، مدل‌های برنامه‌ریزی غیرخطی پیچیده هستند؛ با این اختلاف که تخمین پارامترهای مدل پیشنهادی به مراتب محدودتر از مدل سنتی است. چنانچه در هر یک از دو مدل مقادیر متفاوتی از σ_p^2 در نظر گرفته شوند، آنگاه مقادیر متفاوتی از $E(R_p)$ را خواهیم داشت که به کمک آنها می‌توان مرزکارا را در هر یک از دو مدل استخراج نمود.

انتظار ما به لحاظ نظری بر آن است که مرزکارای مدل پیشنهادی بر بالای مرز کارای سنتی قرار گیرد. علت این امر را می‌توان در این حقیقت جستجو نمود که:

ملاحظه گردید شارپ از طریق اختیار نمودن یک دارایی غیرریسکی و پاره‌ای از مفروضات، موفق به استخراج مرزکارایی شد که همواره بر بالای مرز کارای مارکوویتز واقع بود. اینک از آنجایی که در مدل پیشنهادی نیز مقادیر بازده انتظاری هر سهم از شرایط لازم حداکثرسازی نسبت شارپ بدست می‌آیند، طبیعتاً در هر سطح در نظر گرفته شده از ریسک کل یک پرتفولیو انتظار بر آن است که بازده انتظاری پرتفولیوی مربوط به مدل پیشنهادی همواره بزرگتر یا مساوی با بازده انتظاری، پرتفولیوی متناظر مربوط به مدل سنتی باشد. در جهت اثبات عملی فرضیه ارائه شده در بخش مقدمه مقاله، اولین شش شرکت عمده تولیدکننده سیمان کشور از بین کلیه شرکتهای تولیدکننده سیمان کشور به عنوان پرتفولیوی اختیار شده از سوی سرمایه‌گذاران اختیار گردید که به ترتیب و براساس حروف اختصاری به شرح زیر هستند.

۱. سیمان تهران (T) ۲. سیمان سپاهان (Se) ۳. سیمان صوفیان (Su)

۴. سیمان کرمان (k) ۵. سیمان درود (d) ۶. سیمان هرمزگان (h)

بطوریکه شکل پارامتری مدل پیشنهادی و مدل سنتی براساس علائم اختصاری فوق
به شرح زیر هستند.

الف) مدل سنتی

$$\text{Max } E(R_p) = \omega_l E(R_l) + \omega_{se} E(R_{se}) + \omega_{su} E(R_{su}) + \omega_k E(R_k) + \omega_d E(R_d) + \omega_h E(R_h)$$

$$\text{s.to: } \quad (1) \quad \sigma_T^2 \omega_T^2 + \sigma_{se}^2 \omega_{se}^2 + \sigma_{su}^2 \omega_{su}^2 + \sigma_k^2 \omega_k^2 + \sigma_d^2 \omega_d^2 + \sigma_h^2 \omega_h^2$$

$$+ 2\omega_T \omega_{se} \sigma_{Tse} + 2\omega_T \omega_{su} \sigma_{Tsu} + 2\omega_T \omega_k \sigma_{Tk} + 2\omega_T \omega_d \sigma_{Td} + 2\omega_T \omega_h \sigma_{Th}$$

$$+ 2\omega_{se} \omega_{su} \sigma_{sesu} + 2\omega_{se} \omega_k \sigma_{sek} + 2\omega_{se} \omega_d \sigma_{sed} + 2\omega_{se} \omega_h \sigma_{seh}$$

$$+ 2\omega_{su} \omega_k \sigma_{suk} + 2\omega_{su} \omega_d \sigma_{sud} + 2\omega_{su} \omega_h \sigma_{suh}$$

$$+ 2\omega_k \omega_d \sigma_{kd} + 2\omega_k \omega_h \sigma_{kh}$$

$$+ 2\omega_d \omega_h \sigma_{dh} = \sigma_p^2$$

$$(2) \quad \omega_l + \omega_{se} + \omega_{su} + \omega_k + \omega_d + \omega_h = 1$$

$$(3) \quad \omega_i \geq 0 \quad : i = T, se, su, k, d, h$$

ب) مدل پیشنهادی

$$\text{Max } E(R_p) = R_f + (\beta_T \omega_T + \beta_{se} \omega_{se} + \beta_{su} \omega_{su} + \beta_k \omega_k + \beta_d \omega_d + \beta_h \omega_h) [E(R_m) - R_f]$$

$$\begin{aligned} \text{s.to : } & (1) (\beta_T^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_T}^2) \omega_T^2 + (\beta_{se}^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_{se}}^2) \omega_{se}^2 + (\beta_{su}^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_{su}}^2) \omega_{su}^2 \\ & + (\beta_k^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_k}^2) \omega_k^2 + (\beta_d^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_d}^2) \omega_d^2 + (\beta_h^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_h}^2) \omega_h^2 \\ & + 2\beta_T \beta_{se} \sigma_m^2 \omega_T \omega_{se} + 2\beta_T \beta_{su} \sigma_m^2 \omega_T \omega_{su} + 2\beta_T \beta_k \sigma_m^2 \omega_T \omega_k \\ & + 2\beta_T \beta_d \sigma_m^2 \omega_T \omega_d + 2\beta_T \beta_h \sigma_m^2 \omega_T \omega_h \\ & + 2\beta_{se} \beta_{su} \sigma_m^2 \omega_{se} \omega_{su} + 2\beta_{se} \beta_k \sigma_m^2 \omega_{se} \omega_k + 2\beta_{se} \beta_d \sigma_m^2 \omega_{se} \omega_d \\ & + 2\beta_{se} \beta_h \sigma_m^2 \omega_{se} \omega_h \\ & + 2\beta_{su} \beta_k \sigma_m^2 \omega_{su} \omega_k + 2\beta_{su} \beta_d \sigma_m^2 \omega_{su} \omega_d + 2\beta_{su} \beta_h \sigma_m^2 \omega_{su} \omega_h \\ & + 2\beta_k \beta_d \sigma_m^2 \omega_k \omega_d + 2\beta_k \beta_h \sigma_m^2 \omega_k \omega_h \\ & + 2\beta_d \beta_h \sigma_m^2 \omega_d \omega_h \\ & (2) \omega_T + \omega_{se} + \omega_{su} + \omega_k + \omega_d + \omega_h = 1 \\ & (3) \omega_i \geq 0 \quad : i = T, se, su, k, d, h \end{aligned}$$

تخمین پارامترهای الگوی پیشنهادی

برای تخمین پارامترهای الگوی پیشنهادی از آنجائیکه درخصوص نرخ بازده بدون ریسک (R_f) در بازار مالی ایران توافق کلی وجود نداشت، به ناچار تصمیم گرفته شد که علاوه بر تخمین بتاهای شرکتهای مورد مطالعه نرخ بازده بدون ریسک نیز به طور همزمان مورد تخمین واقع گردد.

برای نیل به هدف یادشده از روش رگرسیونهای بظاهر غیرمرتبط (SUR)^۱ استفاده گردید که نتایج آن پس از تخمین مطابق با جدول (۱) ارائه شده است.

^۱. Seemingly Unrelated Regression

جدول ۱

System: FINAL1 Estimation Method: Iterative Seemingly Unrelated Regression Date: 06/14/08 Time: 11:58 Sample: 1379:01 1386:10 Included observations: 92 Total system (unbalanced) observations 420 Simultaneous weighting matrix & coefficient iteration Convergence achieved after: 61 weight matrices, 62 total coef iterations				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	17.72055	0.269335	65.79376	0.0000
C(2)	1.590024	0.088780	17.79717	0.0000
C(3)	0.199754	0.054270	3.680743	0.0003
C(8)	-9.945532	0.351958	-28.25771	0.0000
C(4)	2.822827	0.263235	10.72359	0.0000
C(5)	1.894421	0.086631	21.86770	0.0000
C(6)	1.751018	0.106433	16.45189	0.0000
C(7)	2.037597	0.096903	21.02723	0.0000
Determinant residual covariance		2740052.		
Equation: RTEH=C(1)+C(2)*(RM1-C(1)) Observations: 92				
R-squared	0.613516	Mean dependent var	12.34348	
Adjusted R-squared	0.609222	S.D. dependent var	6.616608	
S.E. of regression	4.136191	Sum squared resid	1539.727	
Durbin-Watson stat	0.125352			
Equation: RSEP=C(1)+C(3)*(RM1-C(1))+C(8)*DUM8486 Observations: 90				
R-squared	0.840435	Mean dependent var	10.32289	
Adjusted R-squared	0.836767	S.D. dependent var	5.933417	
S.E. of regression	2.397227	Sum squared resid	499.9627	
Durbin-Watson stat	0.493987			
Equation: RSOF=C(1)+C(4)*(RM1-C(1)) Observations: 79				
R-squared	0.567987	Mean dependent var	18.97620	
Adjusted R-squared	0.562375	S.D. dependent var	17.36278	
S.E. of regression	11.48602	Sum squared resid	10158.51	
Durbin-Watson stat	0.045558			
Equation: RKER=C(1)+C(5)*(RM1-C(1)) Observations: 88				
R-squared	0.817520	Mean dependent var	14.32352	
Adjusted R-squared	0.815398	S.D. dependent var	9.135750	
S.E. of regression	3.925200	Sum squared resid	1325.019	
Durbin-Watson stat	0.239948			
Equation: RDOR=C(1)+C(6)*(RM1-C(1)) Observations: 45				
R-squared	0.596557	Mean dependent var	9.850222	
Adjusted R-squared	0.587174	S.D. dependent var	5.721642	
S.E. of regression	3.676242	Sum squared resid	581.1343	
Durbin-Watson stat	0.185159			
Equation: RHOR=C(1)+C(7)*(RM1-C(1)) Observations: 26				
R-squared	0.326000	Mean dependent var	8.315000	
Adjusted R-squared	0.297917	S.D. dependent var	2.372907	
S.E. of regression	1.988269	Sum squared resid	94.87714	
Durbin-Watson stat	0.276959			

مطابق با جدول (۱) ملاحظه شد اولاً تمام ضرایب برآورد شده در سطح ۰.۹۹٪ معنی دار بوده ثانیاً مقادیر نرخ بازده بدون ریسک و بتاهای شرکت‌های مورد مطالعه بطور تقریبی به قرار زیر هستند:

$$\beta_{Se} = 0/19 \quad \beta_T = 1/58 \quad , \quad \beta_{Su} = 2/82 \quad , \quad \beta_k = 1/89 \quad , \quad \beta_d = 1/75$$

$$R_f = 17/7 \quad , \quad \beta_h = 2$$

مشاهده می‌شود که مقادیر بدست آمده در سازگاری کامل با تئوری‌های موجود در زمینه مهندسی مالی هستند.

همچنین در جهت اجرای مدل پیشنهادی به مقادیر نرخ بازدهی بازار و انحراف معیار مربوط به آن نیاز است. در این راستا بر اساس اطلاعات موجود در بازار بورس اوراق بهادار تهران این مقادیر به شرح زیر برآورد شدند.

$$E(R_M) = 18.45\%$$

$$\sigma_M = 1.4\%$$

تخمین پارامترهای الگوی سنتی

برای تخمین پارامترهای الگوی سنتی براساس داده‌های بازده ماهانه E/P سهام شرکت‌های یاد شده در طول دوره مالی ۸۶-۷۹ پس از تخمین، جدول (۲) در خصوص مقادیر میانگین نرخهای بازدهی و انحراف معیار مقادیر مربوطه به شرح زیر استخراج شد:^۱

^۱ بطور خلاصه E/P هر سهم معرف بازده غیر سوداگرانه یک سهم است. از آنجایی که بخش بازده سوداگرانه سهم به تحلیل‌های تکنیکال مربوط شده و مدل مارکوویتز مدل بنیادی محسوب می‌شود، بنابراین در این مقاله توجه ما به E/P هر سهم متمرکز شد.

جدول ۲

نام شرکت	علامت اختصاری	میانگین نرخ بازدهی برحسب درصد	انحراف معیار نرخ بازدهی بر حسب درصد
T	سیمان تهران	۱۲/۳۴	۶/۶۲
Se	سیمان سپاهان	۱۰/۳۲	۵/۹۴
Su	سیمان صوفیان	۱۸/۹۷	۱۷/۳۶
k	سیمان کرمان	۱۴/۳۲	۹/۱۳
d	سیمان درود	۹/۸۵	۵/۷۲
h	سیمان هرمزگان	۸/۳۱	۲/۳۷

همچنین از آنجایی که در اجرای مدل سنتی، تخمین پارامترهای ماتریس واریانس-کوواریانس نیز مورد نیاز است جدول (۳) به کمک بسته نرم افزاری SPSS به شرح زیر استخراج شد.

جدول ۳

Correlations

	EPT	EPSU	EPK	EPH	EPS	EPDROO
EPT	Pearson Correlation Sig. (2-tailed) Sum of Squares and Cross-products Covariance N	1 .872** 4052.215 43.572 94	.919** .000 7972.900 99.661 81	.752** .000 141.317 5.653 26	.644** .000 191.861 35.308 26	.744** .000 1208.350 27.463 45
EPSU	Pearson Correlation Sig. (2-tailed) Sum of Squares and Cross-products Covariance N	.872** .000 7972.900 99.661 81	1 .919** 23738.469 296.731 81	.458* .028 56.029 2.547 23	-.072 .523 -572.348 -7.245 80	.575** .000 413.629 11.179 38
EPK	Pearson Correlation Sig. (2-tailed) Sum of Squares and Cross-products Covariance N	.919** .000 4840.637 54.389 90	.919** .000 10695.198 137.118 79	1 .741** 7348.743 82.570 90	.103 .339 474.640 5.456 88	.919** .000 938.807 22.353 43
EPH	Pearson Correlation Sig. (2-tailed) Sum of Squares and Cross-products Covariance N	.752** .000 141.317 5.653 26	.458* .028 56.029 2.547 23	1 .741** 111.713 4.655 25	.644** .000 191.861 7.674 26	.563* .012 127.773 7.098 19
EPS	Pearson Correlation Sig. (2-tailed) Sum of Squares and Cross-products Covariance N	.308** .003 1083.981 11.912 92	-.072 .523 -572.348 -7.245 80	.103 .339 474.640 5.456 88	1 .744** 3213.029 35.308 92	.744** .000 1208.350 27.463 45
EPDROO	Pearson Correlation Sig. (2-tailed) Sum of Squares and Cross-products Covariance N	.915** .000 1051.803 23.905 45	.575** .000 413.629 11.179 38	.919** .000 938.807 22.353 43	.644** .000 1208.350 27.463 45	1 .000 1440.436 32.737 45

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).
* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

استخراج مرکز کارای مدل پیشنهادی و سنتی

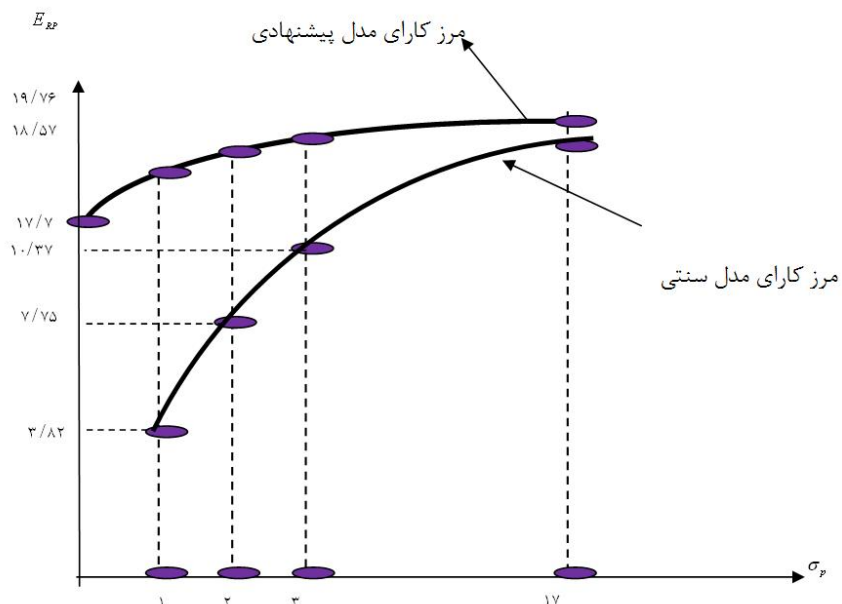
پس از تخمین پارامترهای مدل پیشنهادی و مدل سنتی مطابق با نتایج بدست آمده در بخش قبل، اینک می‌توان درهریک از دو مدل از طریق اختیار نمودن مقادیر متفاوت برای ریسک پرتفولیوی تشکیل شده از اولین شش شرکت عمده تولید کننده سیمان از بین مجموعه کلیه شرکتهای تولید کننده سیمان کشور، مقادیر بازدهیهای انتظاری متناظر را و به دنبال آن مرکز کارا را درهریک از دو مدل پیشنهادی و سنتی بدست آورد.

از آنجایی که هر دو مدل پیشنهادی و سنتی مدل‌های برنامه‌ریزی غیرخطی پیچیده می‌باشند به ناچار از بسته نرم‌افزاری (GAMS) استفاده کرده و بدین ترتیب جدول (۴) به شرح زیر استخراج شده است.

جدول ۴

ریسک پرتفولیو	مدل سنتی	مدل پیشنهادی	مدل سنتی	مدل پیشنهادی
	بردار وزنها		بازده انتظاری پرتفولیو	
σ_p	$W = (\omega_T, \omega_{so}, \omega_{su}, \omega_k, \omega_d, \omega_h)$		$E(R_p)$	
۱	$W1 = (0.01, 0.02, 0.01, 0.01, 0.01, 0.37)$	$W1^* = (0.02, 0.05, 0.01, 0.01, 0.03, 0.33)$	۳.۸۲	۱۸.۳
۲	$W2 = (0.02, 0.04, 0.01, 0.02, 0.03, 0.74)$	$W2^* = (0.05, 0.11, 0.01, 0.02, 0.05, 0.68)$	۷.۷۵	۱۸.۹
۳	$W3 = (0.11, 0.16, 0.05, 0.11, 0.03, 0.5)$	$W3^* = (0.01, 0.01, 0.11, 0.01, 0.01, 0.85)$	۱۰.۳۷	۱۹.۲۴
۵	$W4 = (0.21, 0.33, 0.11, 0.24, 0.01, 0.09)$	$W4^* = (0.01, 0.01, 0.26, 0.01, 0.01, 0.7)$	۱۲.۵۳	۱۹.۳۴
۷	$W5 = (0.15, 0.21, 0.23, 0.39, 0.01, 0.01)$	$W5^* = (0.01, 0.01, 0.39, 0.01, 0.01, 0.6)$	۱۴.۱۴	۱۹.۴۱
۹	$W6 = (0.07, 0.07, 0.34, 0.49, 0.01, 0.01)$	$W6^* = (0.01, 0.01, 0.5, 0.01, 0.01, 0.46)$	۱۵.۳۸	۱۹.۴۹
۱۱	$W7 = (0.01, 0.01, 0.50, 0.46, 0.01, 0.01)$	$W7^* = (0.01, 0.01, 0.63, 0.01, 0.01, 0.34)$	۱۶.۴۸	۱۰.۵۶
۱۳	$W8 = (0.01, 0.01, 0.68, 0.28, 0.01, 0.01)$	$W8^* = (0.01, 0.01, 0.75, 0.01, 0.01, 0.22)$	۱۷.۳۳	۱۹.۶۴
۱۵	$W9 = (0.01, 0.01, 0.84, 0.12, 0.01, 0.01)$	$W9^* = (0.01, 0.01, 0.87, 0.01, 0.01, 0.09)$	۱۸.۰۷	۱۹.۷۱
۱۷	$W10 = (0.01, 0.01, 0.95, 0.01, 0.01, 0.01)$	$W10^* = (0.01, 0.01, 0.95, 0.01, 0.01, 0.01)$	۱۸.۵۷	۱۹.۷۶

اینک می‌توان متناظر با جدول فوق نمودارهای دو الگوی پیشنهادی و سنتی را به شرح نمودار (۲) ترسیم نمود.



نمودار ۲. رابطه بین ریسک و بازده انتظاری پرتفولیوی (مدل پیشنهادی و مدل سنتی)

مطابق با اطلاعات موجود در جدول (۴) و نمودار (۲) ملاحظه می‌شود که مرز کارای مدل پیشنهادی به لحاظ عملی بر بالای مرز کارای سنتی واقع است. لذا این امر اثبات عملی فرضیه تحقیق را نیز به همراه دارد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

به رغم استفاده از نظریه CAPM در محافل مالی از سوی سرمایه‌گذاران، ملاحظه شد که این مدل برای خرده سرمایه‌گذاران به دلیل آنکه پرتفولیوی اختیار شده از سوی آنان زیر مجموعه‌ای از پرتفولیوی بازار می‌باشد، نمی‌تواند مورد استفاده واقع شود.

همانطور که ملاحظه شد، در این حالت بخش قابل توجهی از ریسک پرتفولیو از نوع غیرسیستماتیک است که اولاً بازار برای آن حاضر به پرداخت پاداش نبوده، ثانیاً نمی‌توان بدلیل قابل توجه بودن، از آن صرف‌نظر نمود. تحت شرایط یادشده، در این مقاله سعی بر آن

بود که به نارساییهای فوق در قالب پذیرش فرض مدل CAPM فائق آیییم. ملاحظه شد که درالگوی پیشنهادی اولاً مشکل تعداد تخمینهای بالای موجود در مدل مارکوویتز برطرف شد، ثانیاً این امکان را برای خرده سرمایه‌گذارانی که تمایل به قرض‌گیری و قرض دادن وجوه خود را در نرخ بدون ریسک نداشته و ضمناً تمایلی نیز به اختیار نمودن پرتفولیوی بازار از خود نشان نمی‌دهند، جهت سرمایه‌گذاری وجوه محدود خود فراهم می‌آورد.

در پایان پیشنهاد می‌شود برای اثبات فرضیه که متکی برمدل CAPM است. سایر پژوهشگران علاقمند در صورت تمایل می‌توانند بقیه نظریه‌های موجود دربارهٔ قیمت‌گذاری داراییهای سرمایه‌ای همچون نظریه سه عاملی فاما و فرنچ را که امروزه در ادبیات مالی کاربرد گسترده‌ای یافته مورد بررسی و آزمون قرار دهند. همچنین پیشنهاد می‌شود برای بررسی عملی فرضیه به داده‌های سایر بازارهای مالی بخصوص داده‌های مربوط به کشورهای پیشرفته صنعتی - که از درجه اعتبار بالاتری نسبت به داده‌های موجود در کشور برخوردارند و در قالب اختیار نمودن پرتفولیوی متعدد دیگر، همچون پرتفولیوهایی که شامل انواع ارزهای معتبر جهانی، طلا و غیره است - توجه نمایند.

پی نوشتها:

1. Buser, Stephen. "A Simplified Expression for the Efficient Frontier in Mean ~ Variance Portfolio Analysis", *Management Science*, Vol.23, (1977): 901-903.
2. Evans & Archer. "Diversification & the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis", *Journal of Finance*, Vol. 23, (1968): 761-767.
3. Fama, Eugene F. & Kenneth R. French. "Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies", *Journal of Finance*, Vol. 51, (1996): 55-84.
4. Fama, Eugene F. & Kenneth R. French, "The Capital Asset Pricing Model: Theory & Evidence", *Journal of Finance*, (2004): 1-32.
5. Kevin. S. *Security Analysis & Portfolio Management*. Prentice Hall of India Private., 2006.
6. Lintner, John. "The Valuation of Risk Assets the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios & Capital Budgets", *Review of Economic & Statistics*, Vol. 47, (1965): 13-37.
7. Lewis, Alan. "A Simple Algorithm for the Portfolio Selection Problem", *Journal of Finance*, Vol. 43, (1988): 71 –82
8. Markowitz, Harry. *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Cambridge, MA: Black Well, 1987.
9. Markowitz, Harry. "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, Vol. 7, (1952): 77-91.
10. Markowitz, Harry. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*. Cowles Foundation Monograph, No. 16, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959.
11. Merton, Robert. "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier", *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, Vol. 2, (1972): 1851- 1872
12. Rao, Ramesh. K. S. *Fundamentals of Financial Management*. Macmillan, New York., 1989.
13. Roll, Richard. "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests Part 1: on Past a Potential Testability of the Theory", *Journal of financial Economics*, Vol. 4, (1997): 129-176.
14. Sharpe, William F. "Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, Vol. 19, (1964): 425-442.

15. Sharpe, William F. "A Simplified Model for Portfolio Analysis"., *Management Science*, Vol.9, (1963): 243-277.