Archive of SID

اثر ریسک‌گریزی فرد در انتخاب پویای سبد مالی بهینه

سید بابک ابراهیمی
دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران*
مسعودباباخانی
استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج**
سمیرا متقی دستنایی
دانشجوی دکترای اقتصاد سلامت، دانشگاه تربیت مدرس***
آرمین جبارزاده
دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران****

تاریخ دریافت: ۸۸/۲/۲۹ تاریخ پذیرش: ۸۸/۱۲/۴ صفحات:۲۷۱-۲۴۱

آحاد جامعه اقتصادی در زندگی روزمره در حال تصمیم‌گیری برای افزایش مطلوبیت انتظاری خود در سطح معینی از ریسک هستند. به عنوان بخشی از فرآیندهای تصمیم‌گیری، فرد تصمیم‌گیرنده مایل است تا ثروت خود را به‌گونه‌ای تخصیص دهد که حداکثر بازگشت انتظاری به سبد دارایی‌های او تعلق بگیرد. لذا این سوال همواره مطرح بوده است که سبد بهینه دارایی‌های یک فرد چگونه شکل می‌گیرد تا مطلوبیت انتظاری وی در سطح ریسک موردنظر در بالاترین مقدار ممکن قرار گیرد. پاسخ به این سوال برای تحلیل‌گران مالی از جنبه سرمایه‌گذاری و حضور در بازارهای مالی و برای اقتصاددان از جنبه تحلیل بازار دارایی‌ها و بررسی اثرات آن بر اقتصاد مورد توجه بوده است. اقتصاددانان و ریاضیدانان مالی برای مدل‌سازی تصمیم‌گیری در مورد انتخاب سبد بهینه، از یک سو متغیرهای موثر در فرآیند تصمیم‌گیری افراد و از سوی دیگر، چگونگی واردکردن عدم قطعیت موجود در دنیای واقعی را مورد توجه قرار داده‌اند. در مدل معرفی‌شده در این مقاله، فرد تصمیم‌گیرنده با دو دارایی ریسکی و بدون ریسک مواجه است، به طوری که بازده این دو دارایی متفاوت بوده و تابع مطلوبیت انتظاری فرد متغیری از ثروت (شامل ثروت اولیه و بازده سبد دارایی) می‌باشد. تطبیق نتایجی که از مدلسازی مالی به دست می‌آید با تئوری‌های تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان موجود در ادبیات اقتصاد خرد نشان‌دهنده تاثیر سه عامل ضریب ریسک-گریزی، بازدهی نسبی دارایی‌ها و نوسان قیمت دارایی ریسکی در انتخاب سبد مالی بهینه توسط فرد می‌باشد.

طبقه‌بندی JEL : D81,D23,P14

کلید واژه‌ها:

ریسک‌گریزی، بازده، ریسک، مطلوبیت انتظاری

*. Email: B_ebrahimi@iust.ac.ir
**. E. mail: M.babakhani@iust.ac.ir
***. E. mail: S_motaghi@tu.ac.ir
****. E. mail: Arminj@iust.ac.ir

www.SID.ir

Archive of SID

مقدمه

سرمایه‌گذاران در انتخاب سبد مالی خود با یک سوال کلیدی روبرو هستند؛ چگونه یک سرمایه‌گذار، سرمایه خود را به اجزای مختلف سبد مالی تخصیص می‌دهد به‌گونه‌ای که ثروت خود را به حد مطلوب در سطح ریسک مورد نظر برساند؟ پاسخ به این سوال ما را به پرسش دوم رهنمون می‌سازد که استراتژی بهینه[1] برای این مسئله چگونه است؟

برای تعریف این استراتژی بهینه می‌بایست یکی از مسایل کلاسیک ریاضیات مالی را با نام بهینه‌سازی سبد مالی[2] را مدل‌سازی و حل نمود، اولین پاسخ ریاضی که در حل این مسئله ارایه گردید، نخستین بار در سال ۱۹۵۲ توسط مارکویتز[3] بود[4] .

پیش از مقاله مارکویتز[5]، تصمیم‌گیری در مورد اوراق بهادار کاملا مستقل صورت می‌گرفت و اصولا رابطه بین این اوراق در نظر نبود. حال، اگر حداکثرسازی ثروت (افزایش بازده مورد انتظار) مدنظر می بود، این تصمیم (استراتژی) منجر به سرمایه‌گذاری تمام سرمایه اولیه در سهامی می گردند که حداکثر بازده انتظاری را دارد و در صورتی که این سهام با ریسک بالایی مواجه بود، سرمایه‌گذار خودش را در برابر میزان ریسک بالایی قرار می داد.

---

1. Optimal Strategy
2. Portfolio Optimization
3. Markowitz
4. Markowitz HM, "Portfolio selection", Journal of Finance, No 7, (1952), pp.77-91.

۵. مقاله مارکویتز در اصل پایان‌نامه او بود که در دپارتمان اقتصاد دانشگاه شیکاگو ارایه شد. مارکویتز یادآور می‌شود که فریدمن، علیه پایان‌نامه او رای داد. فریدمن دلیل آورد که این پایان‌نامه اصلا به حوزه اقتصاد مربوط نمی‌شود. چراکه مدل میانگین – واریانس که مارکویتز ارایه داده بود، واقعا به حوزه اقتصاد تعلق نداشت. مارکویتز می‌دید که سرمایه‌گذاران از این مدل جهت تشکیل پرتفولیوی خود استفاده می‌کنند. در واقع، آنان با استفاده از ترکیبی از داده‌های گذشته و قضاوت شخصی به گزینش میانگین‌ها، واریانس‌ها و کوواریانس‌های مورد نیاز دست می‌زنند. (بخشی از مقاله تاریخ مدیریت مالی؛ گزارش یک شاهد عینی، نوشته مرتون اچ. میلر که در اجلاس پنجمین سالگرد تاسیس انجمن مدیریت مالی آلمان در هامبورگ ارایه شده است).

www.SID.ir

Archive of SID

مارکویتز با استفاده از مفهوم همبستگی ثابت کرد که با تغییر میزان دارایی‌های موجود در سبد مالی و هم‌چنین، با در نظرگرفتن ضریب هم‌بستگی بین بازده آنها می‌توان ریسک را کاهش داد. فرض مارکویتز این بود که با دارایی‌هایی که دارای همبستگی کاملاً منفی هستند، ریسک‌کل را می‌توان به صفر رساند[1]. ولی واقعیت این است که با متنوع‌سازی سبد مالی، ریسک سیستماتیک را نمی‌توان کاهش داد. زیرا براساس تعریف ریسک سیستماتیک، کل بازار دارای حرکت‌هایی است که بازده‌کل دارایی‌های موجود در بازار را تحت تأثیر قرار می‌دهد و موجب نوسانات کل دارایی‌های موجود در بازار می‌شود و لذا نمی‌توان آن را کاهش داد. بنابراین، ریسک‌کل را نمی‌توان به‌صفر رساند[2]. با این همه، مارکویتز با استفاده از نسبت‌های متفاوتی از دارایی‌هایی که دارای همبستگی متفاوتی هستند، توانست مجموعه فرصت بازار را محاسبه کند و براساس این مجموعه فرصت، مرز کارای سرمایه‌گذاری[3] را به‌دست آورد.

در دهه ۱۹۶۰، سه محقق به نام‌های ویلیام شارپ، جک‌ترینور و مایکل جنسن به طور جداگانه و بر مبنای مفهوم بازار سرمایه، مدل CAPM و مفاهیم ریسک و بازده، معیارهایی را برای ارزیابی عملکرد سبد مالی مطرح نمودند. این معیارها، اغلب معیارهای ترکیبی عملکرد سبد مالی نامیده می‌شود و امروزه، به‌طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ویلیام شارپ[4]، معیارهای نرخ بازده موردانتظار و تغییرپذیری بازده را برای ارزیابی عملکرد سبد مالی مطرح نمود. او در تحقیق خود عملکرد ۳۴شرکت سرمایه‌گذاری را طی سال‌های ۱۹۶۳- ۱۹۵۴ مورد بررسی قرار داد. شارپ در هر دوره مورد بررسی، شرکت‌ها را براساس معیارهای فوق رتبه‌بندی کرد. نتایج نشان

[1]. Markowitz HM, "Portfolio selection: Efficient Diversification of investment", New York, John Willey and Sons, (1959).
[2]. Hull, J, A. White. "The pricing of options on assets with stochastic volatilities". J. Finance NO 42, (1987), pp.281-300.
[3]. مرز کارای سرمایه‌گذاری، مکان هندسی ترکیب دارایی‌هایی است که برای یک درجه ریسک معین بالاترین بازده را دارند.
[4]. Sharp

www.SID.ir

Archive of SID

داد شرکت‌هایی که در دوره اول رتبه پایینی داشتند، در دوره‌های بعد نیز رتبه پایین کسب کردند. بر عکس، شرکت‌هایی که در دوره اول رتبه بالا داشتند، در دوره‌های بعد هم رتبه بالا به دست آوردند. به‌طور خلاصه، نتایج نشان داد که تفاوت در عملکرد را می‌توان پیش‌بینی کرد، هر چند که نمی‌توان آن را مبنای مناسبی برای برآورد عملکرد آینده دانست[1].

جک‌ترینور[2]، معیار مشابهی را با نام نسبت پاداش به نوسان‌پذیری بازده[3] ارایه کرد. او نیز مانند شارپ درصدد ایجاد ارتباط بین ریسک سبد مالی با بازده آن بود. ترینور با این فرض که سبدهای مالی به اندازه کافی متنوع هستند، میان بازده‌کل و ریسک سیستماتیک تفاوت قائل شد. وی در اندازه‌گیری عملکرد سبد مالی مفهوم خط شاخص را معرفی کرد و از آن برای نشان دادن رابطه میان بازده سبد مالی و بازده بازار استفاده کرد[4].

نتایج تحقیقات شارپ و ترینور نشان داد که اگر سبدهای مالی به اندازه کافی از تنوع برخوردار باشند، رتبه‌بندی براساس معیارهای دو محقق یکسان خواهد بود و هرچه از میزان تنوع سبدهای مالی کاسته شود، احتمال اختلاف میان رتبه‌بندی براساس دو معیار زیاد خواهد شد.

جنسن[5] با استفاده از نظریه قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای که قبلاً توسط شارپ و ترینور عنوان شده بود، مدلی جدید برای ارزیابی عملکرد شرکت‌های سرمایه‌گذاری طراحی کرد. او در این مدل توجه خود را فقط به ارزیابی قدرت پیش‌بینی مدیر سبد مالی؛ یعنی توانایی کسب بازده با پیش‌بینی صحیح قیمت‌های اوراق بهادار که از بازده مورد انتظار در سطح معینی از ریسک بالاتر است، معطوف کرد.

---

1. Sharp.W, "Mutual fund performance", Journal of Business, No 39(1), (1964), pp.119-138.
2. Treynor
3. Reward to Volatility Ratio
4. Treynor. J, "How to Rate Management of investment funds", Harvard Business Review, NO 44, (1965), pp.63-75
5. Jensen

www.SID.ir

Archive of SID

نمونه مورد بررسی جنسن شامل ۱۱۵شرکت‌سرمایه‌گذاری بود که بازده سبد مالی آنها با استفاده از اطلاعات خالص دارایی‌ها و سود تقسیمی آنها برای یک دوره۱۰ساله ۶۴-۱۹۵۵ محاسبه شد. در نهایت، عملکرد شرکت‌های سرمایه‌گذاری در این تحقیق نشان داد که این شرکت‌ها قادر به پیش‌بینی قیمت‌های اوراق‌بهادار حتی به اندازه رویه خرید و نگهداری اوراق‌بهادار مانند بازار نیستند[۱].

تقریبا تا دهه هفتاد در حوزه مالی، مطالعه‌ای مربوط به شناسایی فرآیند تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران و طراحی و تبیین الگوی تصمیم‌گیری آنان در بازارسرمایه در شرایط عدم اطمینان صورت نگرفته بود. اولین مطالعات در این زمینه مقاله کون[۲] و همکارانش بود که شواهدی تجربی از کاهش ریسک‌گریزی اشخاص در هنگام افزایش ثروت آن‌ها را در بورس‌های معتبر جهان ارایه کردند[۳]. همچنین، رایلی و چو[۴] دریافتند که بین ریسک‌گریزی افراد و سن، درآمد، ثروت و تحصیلات افراد رابطه معنی‌داری وجود دارد. با افزایش درآمد، ثروت و تحصیلات افراد، درجه ریسک‌پذیری آن‌ها نیز افزایش خواهد یافت. ولی بین سن افراد و ریسک پذیری رابطه عکس وجود دارد[۵]. مطالعات لبرون، فارلی و گلا[۶] ثابت کرد که درجه ریسک‌گریزی افراد تابعی از عوامل درونی شخص است و به ملاحظات بیرونی بازار ارتباطی ندارد[۷]. یافته‌های مطالعات لولین[۸] نشان می‌دهد که بین ترجیحات سرمایه‌گذاری افراد و سن، جنسیت و تحصیلات افراد رابطه معنی‌داری وجود دارد[۹].

---

1. Jensen. M, "The Performance of Mutual fund in the period 1945-1964" , Journal of finance, Vol 23, No 2, (1968), pp. 389-416
2. Chon
3. Cohn, R.A. and Lewellen, W. G. "Individual Investor Risk Aversion and Investment Portfolio Composition", Journal of Finance, Vol 30, No 49, (1975), pp 605 -620.
4. Riley&chow
5. Riley, W. B. and Chow, K. V. "Asset Allocation and Individual Risk Aversion", Financial Analysts Journal, No 25, (1992), pp 234- 260.
6. Lebaron&farrelly&gula
7. LeBaron, D. and Farrelly, G. and Gula, S. "Facilitating a Dialogue on Risk: A Questionaire Approach", Financial Analysts Journal. Vol 45, No 3, (1989), pp19-24.
8. Lewellen
9. Lewellen, W. G. and Lease, R. C. and Schlarbaum, G. C. "Patterns of Investment Strategy and Behavior among Individual Investors", Journal of Business, No 50, (1977), pp.265-269.

www.SID.ir

Archive of SID

اپستاین[1] تاثیر اطلاعات اجتماعی بر رفتار سرمایه‌گذار حقیقی را مورد بررسی قرار داد. یافته‌های تحقیق او بیان‌گر این است که گزارشات مالی سالانه شرکت‌ها تاثیر چندانی بر تصمیمات سرمایه‌گذاران نداشته و بی‌ارزش هستند[2]. کوتاری و وارنر[3]، با استفاده از معیار جنسن و با شبیه‌سازی شرکت‌هایی که ویژگی و خصوصیات شرکت‌های واقعی را داشتند، معیار استانداردی را با استفاده از داده‌های سری زمانی بازده‌های سهام شرکت‌های سرمایه‌گذاری برای ارزیابی عملکرد آنها طراحی کردند. آنها دریافتند که می‌توان بازدهی اضافی حدود۳ درصد در سال که در تحقیقات و مطالعات گذشته ابراز می‌شد را به میزان با اهمیتی با تجزیه و تحلیل معاملات سهام یک شرکت رشد و ارتقاء بخشید[4].

سایمون[5] در مقاله خود مفهوم انسان اقتصادی را زیر سوال برد. همچنین، وی بیان نمود که تصمیم‌گیری افراد بر اساس یک سری محدودیت‌هایی صورت می‌گیرد که ممکن است مفهوم انتخاب عقلانی را زیر سوال ببرد و این انتخاب بر اساس منحنی مطلوبیت صورت نگیرد. این محدودیت‌ها ممکن است بیرونی باشد یا از تورش‌های درون سرمایه‌گذار نشات بگیرد. این تورش‌ها هم برگرفته از نقطه مرجع تصمیم‌گیری سرمایه‌گذار یا دانش او است[6].

تیورسکی[7] و کانمن[8] طی سلسله مقالاتی به توسعه کاربردهای دانش روانشناسی در علوم مالی و اقتصاد پرداختندکه تلاش‌های آن‌ها به دریافت جایزه نوبل اقتصاد توسط کانمن در سال ۲۰۰۲ منتهی شد. آن‌ها در مقاله سال ۱۹۷۴، سه

---

1. Epstein
2. Epstein, M.J, "Social disclosure and the individual investor", Accounting, Auditing & Accountability Journal, No 4, (1994), pp.94 -109.
3. Kothary&Warner
4. Kothary, S. Warner, J, "Evaluating mutual fund performance", Journal of finance, Vol 56, (2002), pp.1985-2010.
5. Simon
6. Simon, H.A., "A Behavioral Model of Rational Choice", Cowles Foundation Paper 98, The Quarterly Journal of Economics, Vol LXIX,(1995), pp. 99-118.
7. Tversky
8. Kahneman

www.SID.ir

Archive of SID

عامل شهودی را ذکر کردند که در شرایط عدم اطمینان بر تصمیم‌گیری افراد تاثیر می‌گذارد. این سه عامل معرف‌بودن[1]، در دسترس‌بودن[2] و کندواکنشی[3] هستند[4]. این دو در سال ۱۹۸۱، انتقاداتی بر تئوری مطلوبیت انتظاری وارد کردند و مدل جایگزینی را توسعه دادند که آن را Prospect Theory نام نهادند. تئوری مطلوبیت انتظاری توانایی توضیح رفتارهایی همچون سرمایه‌گذاری همزمان در قمار و بیمه را نداشت. در حالی که قمار سرمایه‌گذاران با مقدار انتظاری منفی برای کسب سود زیاد و بیمه سرمایه‌گذاری با مقدار انتظاری منفی برای جلوگیری از زیان بود (اولی در انتهای طیف ریسک‌پذیری و دیگری در انتهای طیف ریسک‌گریزی). در Prospect Theory بر خلاف تئوری مطلوبیت انتظاری که مجموعه دارایی را مدنظر قرار می‌داد، ارزش‌ها به سودها و زیان‌ها داده می‌شود[5].

مریکاس[6] و پراساد از طریق مطالعه پیمایشی سعی کردند که عوامل تاثیرگذار بر رفتار سرمایه‌گذاران حقیقی را در بازار سرمایه یونان شناسایی کنند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان می‌دهد که معیار تصمیم‌گیری افراد در خرید یک سهم، ترکیبی از معیارهای اقتصادی و معیارهای روان‌شناختی هستند. آن‌ها دریافتند که تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران همواره یک رویکرد منسجم و عقلایی نخواهد بود[7]. التمیمی[8] به شناسایی عوامل تاثیرگذار بر رفتار سرمایه‌گذاران در بازار سرمایه امارات پرداخت. وی متغیرهای تاثیرگذار بر رفتار سرمایه‌گذاران را در پنج گروه از عوامل

---

1. Representativeness
2. Availability
3. Anchoring
4. Tversky, A. Kahneman, D. "Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases" Science, New Series, Vol. 185, No. 4157. (Sep. 27, 1974), pp. 1124-1131.
5. Tversky, A. Kahneman, D. "The Framing of Decisions and the Psychology of Choice" Science, New Series, Vol. 211, No. 4481. (Jan. 30, 1981), pp. 453-458.
6. Merikas
7. Merilkas,A .and Prasad,d. "factors influencing Greek investor behavior on the Athens stock exchange, paper presented at the annual meeting of academy of financial service", Colorado, October2003-9-8 ..
8. Al tamimi

www.SID.ir

Archive of SID

طبقه‌بندی کرد. این عوامل عبارتند از اطلاعات‌مالی و حسابداری، اطلاعات خنثی، توصیه‌های جانبدارانه، انطباق تصویر خود شرکت و نیازهای شخصی سرمایه‌گذار. یافته‌های این تحقیق حاکی از این است که متغیرهای مرتبط با نظریه حداکثرکردن مطلوبیت انتظاری از قبیل؛ رشد سودآوری، سودنقدی پرداخت‌شده به سهام‌داران و سود پیش‌بینی‌شده هر سهم از مهم‌ترین متغیرهای تاثیرگذار در قصد خرید یک سهم در بازار خواهد بود[1].

در یک بررسی اجمالی، شواهدتجربی به دست آمده از مطالعات صورت‌گرفته در بازارهای سرمایه گویای این واقعیت است که فرآیند تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران و رفتار آن‌ها بسیار پیچیده می باشد و امکان ارایه یک الگوی واحد برای پیش‌بینی رفتار آن‌ها در بازار و شناسایی دقیق محرک‌های رفتاری وجود ندارد.

روش‌شناسی تحقیق

پژوهش حاضر کاربردی و با تکیه بر مفاهیم پایه‌ای می‌باشد که شیوه انجام آن بر مدلسازی ریاضی استوار است. در این تحقیق از مفاهیمی استفاده شده است که می‌بایست پیش از ارایه مدل آن‌ها را به اختصار تعریف نمود.

تعریف(۱) : ریسک‌گریزی

یک تصمیم‌گیرنده، ریسک‌گریز است، اگر برای هر موقعیت بخت‌آزمایی $F(0)$، شرط‌بندی تباهیده‌ای که مقدار $\int xdF(x)$ را با اطمینان نتیجه می‌دهد، حداقل به خوبی خود $F(0)$ باشد. همچنین، اگر تصمیم‌گیرنده همیشه (برای هر $F(0)$) نسبت به این دو شرط‌بندی بی‌تفاوت باشد، می‌گوییم که وی ریسک‌خنثی است. اگر الگوی ترجیحات یک بازنمایی مطلوبیت انتظاری با تابع مطلوبیت برنولی $u(0)$ را نتیجه بدهد، بطور مستقیم از تعریف ریسک‌گریزی نتیجه

[1]. Hasan Al tamimi, "Investors perceptions of earning quality, auditor independence", Accounting Horizons, NO17, (2006), PP.37-48.

www.SID.ir

Archive of SID

می‌شود که تصمیم‌گیرنده، ریسک‌گریز است، اگر و فقط اگر برای هر $F(0)$ داشته باشیم؛ $[\int u(x)dF(x) \le u[(\int xdF(x))]$. نامساوی فوق به نامساوی ینسن معروف است و بازتعریفی از یک تابع مقعر است. از این‌رو، در چارچوب نظریه مطلوبیت انتظاری، ریسک‌گریزی هم‌ارز با تقعر تابع $u(0)$ است و ریسک‌گریزی اکید هم‌ارز با تقعر اکید $u(0)$ است و این به خوبی مفهوم ریسک‌گریزی را بیان می‌کند. تقعر اکید به این معنی است که تابع مطلوبیت پول کاهشی است و از این رو، در سطحی از ثروت x، مطلوبیت حاصل از واحدهای اضافی واحد پول کوچکتر از (قدرمطلق) کاهش مطلوبیت ناشی از دست‌دادن یک واحدپول است[1].

تعریف (۲): فرآیند مارکوف[2]

نوع خاصی از فرآیند تصادفی است که فقط از ارزش حال[3] متغیر موردنظر در پیش‌بینی استفاده می‌کند و گذشته متغیر و مسیری که طی آن شکل‌گرفته است، نادیده گرفته می‌شود. قیمت سهام از فرآیند مارکوف پیروی می‌کند و پیش‌بینی برای آینده آن از عدم اطمینان برخوردار است و باید در غالب توزیع‌های احتمال بیان شود. فرآیند مارکوف بیان می‌دارد که توزیع احتمال قیمت در هر زمانی در آینده مستقل از روند حرکت قیمت در گذشته می‌باشد(هال، ۲۰۰۶).

با توجه به ویژگی‌های فرآیند مارکوف، اگر متغیری که ارزش کنونی آن a است، از فرآیند تصادفی مارکوف پیروی کند و تغییر آن طی یک سال دارای توزیع نرمال $N(0,1)$ باشد، توزیع احتمال تغییر در ارزش متغیر طی مدت Tسال با توجه به مستقل‌بودن توزیع احتمال به صورت $N(0,\sqrt{T})$ خواهد بود و به طور خاص در یک دوره زمانی کوتاه به طول Δt توزیعی به صورت $N(0,\sqrt{\Delta t})$ خواهد داشت[4].

---

1. Mas-Colell, Andreu; Whinston, Michael D.; and Jerry R. Green, Microeconomic Theory. Oxford University Press, US, (1995), p.194.
2. Markov Process
3. Present Value
4. Hull, John, "Fundamentals of futures and options markets", Prentice Hull, Version 6, (2006), pp.102-168.

www.SID.ir

Archive of SID

تعریف (۳): فرآیند وینر[۱]

نوع خاصی از فرآیند تصادفی مارکوف با میانگین صفر و واریانس ۱ می‌باشد. متغیر Z دارای فرآیند وینر می‌باشد، اگر دارای دو ویژگی زیر باشد؛

۱) توزیع ΔZ طی دوره زمانی Δt به صورت $\Delta Z \sim N(0,\sqrt{\Delta t})$ می‌باشد.

۲) ارزش ΔZ برای دو دوره زمانی Δt مستقل می‌باشد.[۲]

فرآیند وینر ΔZ دارای Drift rate برابر با صفر و واریانس ۱می‌باشد[۳]. Drift rate صفر بدین معنا است که ارزش انتظاری Z در هر زمانی در آینده برابر با ارزش کنونی آن است و نرخ واریانس ۱ به معنی این است که واریانس تغییر در Z در دوره زمانی به طول T برابر با T می‌باشد. حالت کلی فرآیند وینر (فرآیند وینر تعمیم یافته) برای متغیر x می‌تواند به صورت زیر تعریف شود؛

$$\Delta x = a\Delta t + b.\Delta z \sim dx = adt + bdz \qquad (۱)$$

اگر رابطه (۱) را به دو بخش adt و bdz تقسیم کنیم، قسمت adt بیان می‌کند که x دارای یک Drift rate انتظاری a به ازای زمان می‌باشد.

$$dx = adt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a \Rightarrow \int \frac{dx}{dt} = at + x_0 \Rightarrow x = at + x_0 \qquad (۲)$$

---

[1]. Wiener Process

[۲]. یکی از مفیدترین فرآیندهای تصادفی در احتمال کاربردی، فرآیندوینر است. فرآیندوینر به صورت توصیفی از حرکت براونی در فیزیک سرچشمه گرفته است. این پدیده که به نام گیاه‌شناس انگلیسی روبرت براون که آن را کشف کرده، ثبت شده است، عبارت است از حرکت ذرات کوچکی که در مایع یا گاز غوطه‌ور است. از آن تاریخ به بعد، فرآیند وینر بطور سودمندی در زمینه‌های آزمون آماری نکویی برازش، تحلیل سطوح قیمت بازار سهام و مکانیک کوانتومی به کار برده شده است.اولین تعبیر حرکت براونی را انیشتن در ۱۹۰۵ ارایه کرد. او نشان داد که حرکت براونی را می‌توان با این فرض که ذره‌غوطه‌ور دایما در معرض بمباران از طرف ملکول‌های پیرامونی خود قرار دارد، توصیف کرد. ولی اولین تعریف موجز این فرآیندتصادفی که حرکت براونی را در بر می‌گیرد، توسط وینر در مقالاتی که از سال ۱۹۱۸ شروع شد، بیان شده است.

[۳]. جان هال، پیشین، ص ۳۹۰.

www.SID.ir

Archive of SID

x_0 مقدار متغیر x در زمان صفر می‌باشد و در طول زمان به مدت T مقدار x به اندازه aT افزایش می‌یابد. جمله bdz می‌تواند به عنوان جمله اخلال مدنظر قرار گیرد. مقدار این جمله اخلال برابر با b تا فرآیند وینر می‌باشد. بنابراین، می‌توانیم برای یک دوره زمانی کوچک مثل Δt، مقدار Δx را به صورت رابطه زیر بیان کنیم؛

$$\Delta x = a\Delta t + b\varphi\sqrt{\Delta t} \qquad (۳)$$

که φ دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشد. بنابراین Δx نیز دارای توزیع نرمال استاندارد با ویژگی‌های زیر می‌باشد؛

$$Mean\Delta x = a\Delta t \qquad (۴)$$

$$Variance\Delta x = b^2\Delta t \qquad (۵)$$

از این‌رو، فرآیند وینر تعمیم‌یافته دارای Drift rate برابر با a و نرخ واریانس b^2 می‌باشد.

تعریف (۴): فرآیند ایتو[1]

نوع دیگری از فرآیند تصادفی، فرآیند ایتو می‌باشد که مانند فرآیند وینر تعمیم‌یافته است با این تفاوت که aوb تابعی از (x,t) می‌باشند.

(۶)

$$\Delta x = a(x,t).\Delta t + b(x,t).\Delta z \sim dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz$$

[1]. Ito Process

www.SID.ir

Archive of SID

در ایـن فرآینـد Drift rate و نـرخ واریـانس در طـول زمـان تغییـر مـی‌کننـد. در یک بازه زمانی کوچک بین t و $t+\Delta t$ متغیر از x به $x+\Delta x$ تغییر می‌کند.

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varphi\sqrt{\Delta t} \qquad (۷)$$

Drift rate و نـرخ واریـانس x ثابـت مـی‌مانـد و برابـر بـا $a(x,t)$ و $b^2(x,t)$ می‌باشد.

فرآیند قیمت یک دارایی ریسکی (سهام)

در صـورتی کـه فـرض شـود قیمـت دارایـی ریـسکی از فرآینـد وینـر تعمـیم‌یافتـه پیروی می‌کنـد، در ایـن حالـت دارایDrift rate و نـرخ واریـانس انتظـاری ثـابتی مـی‌باشـد. ولی این مدل از بـه دسـت‌آوردن جنبـه‌هـای کلیـدی قیمـت دارایـی ریـسکی نـاتوان اسـت. چراکـه درصـد بـازده انتظـاری موردنیـاز سـرمایه‌گـذاران از دارایـی ریـسکی مـستقل از قیمـت دارایـی ریـسکی مـی‌باشـد. بنـابراین، فـرضDrift rate انتظـاری ثابـت نامناسـب است و باید با این فـرض جـایگزین شـود کـه بـازده انتظـاری یعنـی Drift انتظـاری تقـسیم بر قیمت دارایی ریسکی باید ثابت باشد.

اگـر قیمـت دارایـی ریـسکی در زمـانt، S باشـد، آنگـاه Drift rate انتظـاری در S برابر با μs می‌باشد که μ یک پـارامتر ثابـت اسـت. ایـن بـدین معناسـت کـه در یـک بـازه زمانی کوتـاه، Δt، افـزایش انتظـاری در S برابـر بـا $\mu s\Delta t$ مـی‌باشـد. یـک فـرض معقـول بـرای مـدل‌سـازی بـازدهی دارایـی ریـسکی ایـن اسـت کـه نوسـانات درصـد بـازده در یـک بازده زمانی کوچک مثـل Δt جـدا از قیمـت دارایـی ریـسکی مـی‌باشـد. بنـابراین مـی‌تـوان به شکل زیر بیان نمود؛

$$\begin{cases} ds = \mu s dt + \sigma s dz & (۸) \\ \dfrac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dz & (۹) \end{cases}$$

www.SID.ir

Archive of SID

μ: نرخ بازده انتظاری دارایی ریسکی

σ: نوسان قیمت دارایی ریسکی

μ نرخ بازده انتظاری است که سرمایه‌گذار در هر سال به دست می‌آورد. بیشتر سرمایه‌گذاران طالب نرخ بازده انتظاری بالاتری هستند تا آن‌ها را ترغیب کند که ریسک بیشتری را بپذیرند. این بدین معناست که μ باید به ریسک بازدهی دارایی ریسکی و همچنین، نرخ بهره اقتصاد بستگی داشته باشد. در نرخ‌های بهره بالاتر در هر سطحی از ریسک، نرخ بازده بالاتری را می‌طلبد. در واقع، در تحلیل مالی نیاز نیست که به تمام جزئیات μ بپردازیم، چراکه ارزش مشتقات وابسته به دارایی ریسکی (سهام) و مستقل از μ می‌باشد. در مقابل، σ؛ یعنی نوسانات قیمت دارایی ریسکی (سهام)، در تعیین ارزش مشتقات مالی نقش تعیین‌کننده‌ای دارد.

در نظر می‌گیریم که قیمت مشتقه مالی تابعی از قیمت دارایی ریسکی و زمان است. فرض می‌کنیم متغیر x دارای فرآیند وینر می‌باشد.

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz \qquad (۱۰)$$

dz دارای فرآیند وینر می‌باشد، a وb تابعی از (x,t) هستند. متغیر x دارایDrift rate، a و نرخ واریانس b^2 می‌باشد. لم ایتو[1] برای تابع $G(x,t)$ به صورت زیر می‌باشد[2].

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} d(x) + \frac{\partial G}{\partial t} d(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}[d(x)]^2 \qquad (۱۱)$$

با جایگزینی رابطه (۱۰) در لم ایتو (۱۱) خواهیم داشت؛

[1]. Ito Lemma

[2]. جان هال، پیشین، ص ۴۲۵.

www.SID.ir

Archive of SID

(۱۲)

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}\left[a(x,t).dt + b(x,t).dz\right] + \frac{\partial G}{\partial t}d(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\underbrace{\left[a(x,t).dt + b(x,t).dz\right]^2}_{\Omega}$$

که Ω را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود؛

$$\Omega = a^2(x,t).[dt]^2 + b^2(x,t).[dz]^2 + 2ab dt.dz \Rightarrow b^2(x,t).dt$$

$$\begin{cases} dt.dt = 0 \\ dt.dz = dt.\sqrt{dt} = 0 \\ [dz]^2 = dt \end{cases} \qquad (۱۳)$$

صورت ساده شده dG به شکل زیر به دست می‌آید؛

$$dG = \left[\frac{\partial G}{\partial x}a(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2(x,t)\right]dt + \frac{\partial G}{\partial x}b(x,t).dz \qquad (۱۴)$$

بنابراین تابع $G(x,t)$ از فرآیند وینر با مشخصات زیر پیروی می‌کند؛

$$DriftRate: \left[\frac{\partial G}{\partial x}a(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2(x,t)\right] \qquad (۱۵)$$

$$VarianceRate: \left[\frac{\partial G}{\partial x}.b(x,t)\right]^2 \qquad (۱۶)$$

در واقع، لم ایتو می‌گوید که اگر x دارای فرآیند ایتو باشد و $G(x,t)$ تابعی از مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشند، آنگاه $G(x,t)$ نیز یک فرآیند ایتو خواهد بود.

www.SID.ir

Archive of SID

در اینجا دیدیم که اگر قیمت دارایی ریسکی در زمان t، s باشد، آنگاه، $ds = \mu s dt + \sigma s dz$ یک مدل معقول برای نوسانات قیمت دارایی ریسکی می‌باشد، حال اگر فرض کنیم که تابع $G(x,t)$، قیمت یک اختیار خرید یا سایر مشتقات مالی است، بنابراین می‌بایست تابعی از s و t باشد و با توجه به لم ایتو داریم؛

$$dG = \left[\frac{\partial G}{\partial s} \mu s + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} \sigma^2 s^2) \right] dt + \frac{\partial G}{\partial s} \sigma s . dz \qquad (۱۷)$$

می‌بینیم که هر دوی S و G تحت تاثیر جزء تصادفی dz می‌باشند (فرآیند وینر S و G یکسان است).

این بدین معناست که با انتخاب یک سبدمالی از دارایی ریسکی (سهام) و دارایی غیرریسکی (مشتقات مالی) می‌توانیم، جزء تصادفی dz فرآیند وینر را حذف کنیم. با نوشتن حالت گسسته معادلات فوق داریم؛

$$\begin{cases} s = \mu s \Delta t + \sigma s \Delta z & (۱۸) \\ \Delta G = \left[\frac{\partial G}{\partial s} \mu s + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} \sigma^2 s^2) \right] \Delta t + \frac{\partial G}{\partial s} \sigma s . \Delta z & (۱۹) \end{cases}$$

سپس، سبدمالی مناسب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

π (فروش یک مشتق مالی + خرید $\frac{\partial G}{\partial s}$ سهم)

$$\pi = -G + \frac{\partial G}{\partial s} . s \sim \Delta \pi = -\Delta G + \frac{\partial G}{\partial s} . \Delta s \qquad (۲۰)$$

www.SID.ir

Archive of SID

با جایگزینی معادلات (۱۸) و (۱۹) در معادله (۲۰) به رابطه (۲۱) می‌رسیم؛

$$\Delta\pi = \left[-\frac{\partial G}{\partial s}\mu s - \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\sigma^2 s^2) \right]\Delta t - \frac{\partial G}{\partial s}\sigma s.\Delta z + \frac{\partial G}{\partial s}\mu s\Delta t + \frac{\partial G}{\partial s}\sigma s\Delta z \qquad (۲۱)$$

$$\Delta\pi = (-\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\sigma^2 s^2)\Delta t$$

از آنجایی که Δz در معادله(۲۱) حذف‌شده است، بنابراین سبد مالی تشکیل‌داده شده، بدون ریسک می‌باشد و می‌بایست بازدهی‌اش برابر با نرخ بهره بدون ریسک باشد. چراکه اگر بازدهی‌اش بیشتر از r باشد، آربیتراژگر می‌تواند پول قرض کند و سبد مالی را بخرد و اگر کمتر از r بازدهی کسب کند، آربیتراژگر سبد مالی را می‌فروشد و اوراق قرضه بدون ریسک خریداری می‌کند.

$$\Delta\pi = r.\pi.\Delta t \qquad (۲۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲۰) و (۲۱) در رابطه (۲۲) داریم؛

$$(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\sigma^2 s^2)\Delta t = r(G - \frac{\partial G}{\partial s}.s)\Delta t \qquad (۲۳)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + rs\frac{\partial G}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = r.G \qquad (۲۴)$$

www.SID.ir

Archive of SID

معادلـه بـالا شـکل دیفرانـسیلی معادلـه ($B.S.M$)[1] مـی‌باشـد. در معادلـه فـوق، $\frac{\partial G}{\partial s}$ سبد مالی فقط در یک بـازه زمـانی کوتـاه بـدون ریـسک مـی‌باشـد و بـا تغییـر s و t ، تغییر می‌نماید. برای این کـه سـبد مـالی را بـدون ریـسک نگهـداریم، بایـد بـه طـور مـداوم نسبت قیمـت مـشتق‌مـالی بـه دارایـی ریـسکی (سـهام) را تغییـر دهـیم. هـر تـابع $G(s,t)$ کـه یـک راه‌حـل بـرای معادلـه دیفرانـسیلی($B.S.M$) باشـد، بـه طـور تئوریـک مـی‌توانـد قیمت یک مـشتق‌مـالی قابـل معاملـه باشـد. اگـر یـک مـشتق مـالی بـا ایـن قیمـت وجـود داشـته باشـد، هـیچ فرصـت آربیتـراژی ایجـاد نخواهـد کـرد و اگـر $G(s,t)$ در معادلـه دیفرانسیلی($B.S.M$) صـدق نکنـد، نمـی‌توانـد قیمـت یـک مـشتق مـالی باشـد کـه فرصـت آربیتراژی ایجاد نکنـد. بنـابراین، سـرمایه‌گـذار مـی‌بایـست بـه انتخـابی بهینـه بـین دارایـی بدون‌ریسک و دارای ریسک در سبد مالی خود دست بزند.

انتخاب سبدمالی بهینه

برای این کـه انتخـاب سـبد مـالی بهینـه را مـدل کنـیم، مـی‌بایـست فروضـی را در نظر بگیریم، که بعضی از این فروض برای سادگی حل در نظر گرفته شده‌اند.

بـازه زمـانی را ثابـت و بـه صـورت $[t,T]$ در نظـر مـی‌گیـریم و همچنـین فـرض می‌کنیم سبدمالی شـامل اوراق قرضـه بـدون ریـسک و یـک سـهم دارای ریـسک مـی‌باشـد که به صورت روابط (۲۵) و (۲۶) مدل می‌شوند؛

$$s\in[t,T] \quad B(s)=B(t)e^{r(s-t)} \qquad (۲۵)$$

[1]. در اوایل دهه ۱۹۷۰، آقایان فیشر بلک، میرن‌شولز و رابـرت‌مرتـون گـام بزرگـی در قیمـت‌گـذاری اوراق اختیـار معاملـه برداشتند. نتیجهٔ کار آنها ارایه مدلی بود که تحت عنوان مدل بلک، شولز، مرتون یا B.S.M معروف گشت. ایـن مـدل تـأثیر زیادی در نحوهٔ قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله داشته است. همچنین، ایـن مـدل نقـش اساسـی و محـوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشت. میرن شولز و رابرت‌مرتون در سال ۱۹۹۷ به دلیل اهمیت مدل فوق، موفق به دریافت جایزهٔ نوبل اقتصاد شدند.

www.SID.ir

Archive of SID

$$\sigma > 0 \quad \text{و} \quad \mu > r \quad \text{و} \quad s \in [t, T] \qquad (۲۶)$$
$$dS(s) = \mu S(s)ds + \sigma S(s)dz$$

سرمایه‌گذار در زمان t با ثروت $X(t)=x>0$ شروع به سرمایه‌گذاری می‌کند. تمرکز سرمایه‌گذار بر تخصیص وزن مناسب بین این دو دارایی در سبدمالی است. فرآیند $H_1(s)$ در سبد مالی، بخشی از ثروت است که در دارایی همراه با ریسک در زمان s سرمایه‌گذاری شده است و باقیماندهٔ، ثروت فرد سرمایه‌گذار یعنی $H_0(s)=1- H_1(s)$، در اوراق‌قرضه سرمایه‌گذاری می‌شود. همچنین، هزینه‌های مبادله در نظر گرفته نمی‌شوند.

فرض می‌شود که تمام ثروت در ابتدای دوره سرمایه‌گذاری می‌شود، بنابراین تغییرات در ارزش دارایی‌های موجود در سبدمالی به ندرت موجب تغییرات در حین فرآیند سبدمالی می‌شود و تنها در طول دوره عمر آن پوشش ریسک ممکن می‌باشد، ولی این امکان وجود ندارد که چیزی به سبد مالی اضافه و یا از آن کم شود.

$$s \in [t, T]$$

$$X(s) = x + \int_t^s H_0(\tau)X(\tau)rd\tau + \int_t^s \frac{H_0(\tau)X(\tau)}{S(\tau)}dS(\tau) \qquad (۲۷)$$

فرض شده است $Hi\ (i=0,1)$ برای انتگرال‌گیری به اندازه کافی خوش تعریف می‌باشد[1]. همچنین، به منظور اندازه‌گیری رضایت سرمایه‌گذار از ثروت$0 < \xi$، یک تابع مطلوبیت انتظاری به صورت رابطه (۲۸) معرفی می‌شود؛

[1]. مس کالل، پیشین، ص ۲۱۵.

www.SID.ir

Archive of SID

$$\begin{cases} U'(0) = \lim_{\xi \to 0} U'(\xi) = +\infty \\ U'(\infty) = \lim_{\xi \to \infty} U'(\xi) = +0 \end{cases} \quad \text{بطوری که:} \qquad (۲۸)$$

$$U : (0,\infty) \to R$$

تابع مطلوبیت انتظاری تعریف شده کاملا مقعر بوده و به صورت پیوسته مشتق‌پذیر است. همچنین،U کاملا یکنوا می‌باشد، که بیانگر این مطلب است که ثروت بیشتر از ثروت کمتر مطلوب‌تر می‌باشد. حد صفر می‌تواند بدین صورت تعبیر شود که مقدار بسیارکم ثروت بسیار مطلوب‌تر از ثروت صفر است. علاوه بر این، از آنجا که′U بصورت یکنوا (اکیدا) نزولی می‌باشد، مطلوبیت انتظاری بدست آمده به ازای هر واحد اضافی از ثروت، با افزایش ثروت کاهش می‌یابد و در بی‌نهایت به صفر می‌رسد، که یک اثر اشباعی (افراد هر چه ثروتمندتر شوند از ثروت بیشتر اشباع می‌شوند و ثروت اضافی مطلوبیت انتظاری کمتری به ارمغان می‌آورد) را مدل می‌کند.

فرض شده است که هدف سرمایه‌گذار، ماکزیمم نمودن مطلوبیت انتظاری خود از ثروت‌نهایی است. به طورخاص، این فرض رفتار عقلائی سرمایه‌گذار را نشان می‌دهد. بنابراین، هدف ما ماکزیمم‌کردن مطلوبیت انتظاری بدست آمده از ارزش سبدمالی در زمان T می‌باشد، در یک بیان ریاضی، تابع ارزش به صورت رابطه (۲۹) است؛

$$u(x,t) = \max_{H_1} E[U(X(T))] \qquad (۲۹)$$

در ادامه، با استفاده از یک تکنیک ابتکاری معادلهٔ (همیلتون، ژاکوبی، بلمن)[1] را بدست می‌آوریم. حل این معادله تاییدی می‌باشد برای این مهم که راه‌حل بدست

1. Hamilton_Jacobi_Bellman

www.SID.ir

Archive of SID

آمده، مسئله اصلی ما یعنی انتخاب سبد مالی بهینه را نیز حل کند[1]. با به‌کارگیری اصول برنامه‌نویسی پویا، برای یک بازه زمانی کوتاه Δt، داریم؛

$$u(x,t) \approx \max_{H_1} E[u(X(t+\Delta t), t+\Delta t)] \qquad (۳۰)$$

برای لحاظ نمودن بخش انتظاری، از لم ایتو استفاده کرده و معادله (۳۱) را بدست آوردیم؛

(۳۱)

$$du = [u_t + [(1-H_1)r + H_1\mu]X(s)u_x + \frac{1}{2}H_1^2\sigma^2X^2(s)u_{xx}]ds + H_1\sigma X(s)u_x dz$$

از آنجایی که $X(s)$ ،از فرایند ایتو پیروی می‌کند، داریم؛

$$dX(s) = (1-H_1)rX(s)ds + H_1X(s)(\mu ds + \sigma dz) \qquad (۳۲)$$

عبارت فوق شکل دیگری از معادله (۲۷) می‌باشد. با استفاده از رابطه (۳۱) برای du داریم؛

(۳۳)

$$u(X(t+\Delta t), t+\Delta t) - u(X(t),t) =$$
$$\int_t^{t+\Delta t}[u_t + [(1-H_1)r + H_1\mu]X(s)u_x + \frac{1}{2}H_1^2\sigma^2X^2(s)u_{xx}]ds + \int_t^{t+\Delta t}H_1\sigma X(s)u_x dz$$

همچنین، $X(t) = x$ ، با لحاظ‌نمودن ارزش انتظاری انتگرال دوم که برابر با صفر است، داریم؛

[1]. Frank, Robert A, Microeconomics and Behavior. McGraw-Hill/Irwin, 6th Edition, (2006), pp 112- 123.

www.SID.ir

Archive of SID

$$E[u(X(t+\Delta t),t+\Delta t)]-u(x,t)\approx$$
$$[u_t+[(1-H_1)r+H_1\mu]X(t)u_x+\frac{1}{2}H_1^2\sigma^2X^2(t)u_{xx}]\Delta t \qquad (۳۴)$$

که در آن؛

$$u(x,t)\approx \max_{H_1}\{u(x,t)+[u_t+[(1-H_1)r+H_1\mu]xu_x+\frac{1}{2}H_1^2\sigma^2x^2u_{xx}]\Delta t\} \qquad (۳۵)$$

در عبارت (۳۶)، معادله همیلتون، ژاکوبی، بلمن بدست می‌آید؛

$$u_t+\max_{H_1}\{[(1-H_1)r+H_1\mu]xu_x+\frac{1}{2}H_1^2\sigma^2x^2u_{xx}\}=0 \qquad (۳۶)$$

معادله فوق بایستی برای $t<T$ با شرط نهایی u(x, T) = U(x) حل شود.

برای حل معادله بالا، تابع مطلوبیت انتظاری $U(\xi)=\xi^P,\ \xi>0\ p\in(0,1)$ را در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌شود که؛

۱ $X(s)>0$

۲ کاملا مقعر می‌باشد، x در u

از آنجایی که ثروت اولیه بیشتر تا سطح مطلوب موردنظر بایستی مطلوبیت انتظاری نهایی بیشتری را ایجاد نماید، فرض می‌کنیم $u_x>0$ که با این شرایط مقدار H_1 که برابر با وزن دارایی ریسکی در سبد مالی است و با رابطه (۳۷) بدست می‌آید؛

www.SID.ir

Archive of SID

$$H_1 = -\frac{(\mu - r)u_x}{\sigma^2 x u_{xx}} > 0 \qquad (۳۷)$$

با وارد کردن رابطه (۳۷) در (۳۶)، معادله زیر حاصل می‌شود؛

$$u_t - \frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2 u_x^2}{\sigma^2 u_{xx}} + rxu_x = 0 \qquad (۳۸)$$

$u(\lambda x, t) = \max_{H_1} E[U(\lambda X(T))] = \lambda^p u(x,t)$ ، از آنجایی که می‌توان $u(x,t) = f(t)x^p$ با $f(T) = 1$ را در نظرگرفت. با واردکردن این رابطه در (۳۸) معادله (۳۹) را به دست می‌آوریم؛

$$f'(t) + \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1-p)} \right) p f(t) = 0 \qquad (۳۹)$$

جواب معادله تفاضلی (۳۹) به صورت زیر می‌باشد؛

$$f(t) = \exp\left(\left[r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1-p)} \right] p(T-t) \right) \qquad (۴۰)$$

با توجه به نتیجه به دست آمده، رابطه (۴۱) راه‌حل معادله (۳۶) برای تابع مطلوب انتخاب شده می‌باشد.

$$u(x,t) = f(t)x^p \qquad (۴۱)$$

مقدار H_1 بهینه با استفاده از رابطه (۴۲) به دست می‌آید؛

www.SID.ir

Archive of SID

$$H_1 = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2 (1-p)} \qquad (۴۲)$$

H_1 بهینه که استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه را ارایه می‌کند، به ثروت حال سرمایه‌گذار بستگی ندارد. این موضوع در نگاه اول ممکن است به نظر غیرشهودی بیاید. اما توجه به این نکته ضروری است که با افزایش ثروت، ریسک‌گریزی مطلق کاهش می‌یابد، چرا که اهمیت یک واحد پول اضافی کاهش می‌یابد و در نتیجه سرمایه‌گذار متمایل می‌شود که در سطوح بالاتر ثروتی، واحد پول اضافی خود را صرف امور پرریسک‌تر کند. در نتیجه هرچه ثروت افزایش می‌یابد، واحد پول بیشتری از ثروت سرمایه‌گذار به دارایی‌های ریسکی تخصیص می‌یابد[1]. البته در برابر ریسک‌گریزی مطلق، ریسک‌گریزی نسبی مطرح می‌شود. در تبیین این مفهوم باید گفت که کاهش ریسک‌گریزی نسبی، حکایت از تخصیص سهم بیشتری از ثروت به دارایی‌های ریسکی همزمان با افزایش ثروت دارد. ثابت‌بودن ریسک‌گریزی نسبی به این معنا است که درصد ثروتی که به دارایی ریسکی تعلق می‌گیرد، ثابت می‌ماند، جدا از این که خود در چه پایه‌ای از ثروت باشد. این امر دلالت بر این موضوع نیز دارد که تابع مطلوبیت انتظاری فرد بر میزان ریسک‌گریزی نسبی ثابتی دلالت دارد، بدین معنا که رفتار سرمایه‌گذار در مقابل ریسک مستقل از ثروتش می‌باشد.

تحلیل اقتصادی مدل

همان‌طور که در روابط فوق در نظر گرفته شد، فرد سرمایه‌گذار به میزان H_1 از سرمایه خود را صرف دارایی ریسکی خواهد کرد. این وزن براساس مجموعه‌ای از محاسبات ریاضی بدست آمده است. اما سوالی که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا این نتیجه بدست آمده توسط تعابیر ارایه شده در اقتصاد خرد تایید می‌شود؟ پاسخ به این سوال می‌تواند تضمین نماید که فرد سرمایه‌گذار، به عنوان

[1]. Varian, Hal R., Microeconomic Analysis. W.W.Norton & Company, 3rd Edition, (2003).

www.SID.ir

Archive of SID

یک عامل اقتصادی منطبق بر تئوری‌های اقتصاد خرد به بهینه‌سازی سبد مالی خود می‌پردازد. اگر وزن بهینه‌ای که برای دارایی ریسکی در رابطه (۳۷) به دست آمد را به صورت زیر بازنویسی کنیم :

$$H_1 = -\frac{u_x}{xu_{xx}} \times (\mu - r) \times \frac{1}{\sigma^2} > 0 \qquad (۴۵)$$

تئوری‌های اقتصاد خرد نشان می‌دهد که موارد زیر را به عنوان عوامل موثر بر تصمیم‌گیری یک فرد در بهینه‌سازی سبدمالی مورد توجه قرار دارد:

ضریب ریسک‌گریزی نسبی: هر چه ضریب ریسک‌گریزی نسبی کاهش یابد، فرد سهم بیشتری از ثروت خود را صرف خرید دارایی ریسکی می‌کند. با در نظرگرفتن تابع مطلوبیت انتظاری برنولی $U(0)$، ضریب ریسک‌گریزی نسبی به صورت $r_R(x,u) = -\frac{x.u''(x)}{u'(x)}$ تعریف می‌شود. این شاخص نشان می‌دهد که یک فرد تا چه میزان در هر سطح ثروت ریسک‌گریز است.

در مقدار بهینه H_1 محاسبه‌شده، معکوس ضریب ریسک‌گریزی نسبی به عنوان یکی از اجزای موثر در مقدار بهینه وجود دارد. به عبارت دیگر، افزایش ضریب ریسک‌گریزی نسبی، وزن دارایی‌های ریسکی در سبد مالی سرمایه‌گذار کاهش می‌یابد. لذا، از نظر اقتصادی، این جز از رابطه منطبق بر تئوری‌های اقتصاد خرد است.

۱. بازدهی نسبی دارایی‌ها : اگر فرض را بر این قرار دهیم که تنها دو نوع دارایی وجود دارد و هر دو دارایی قابلیت نقدشوندگی یکسانی دارند (بدون آنکه کلیت را از دست بدهیم)، تابع تقاضا برای این دو دارایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_1 = L(X, \mu, r) : L_X > 0, L_\mu > 0, L_r < 0 \qquad (۴۶)$$

$$L_0 = L(X, \mu, r) : L_X > 0, L_\mu < 0, L_r > 0 \qquad (۴۷)$$

www.SID.ir

Archive of SID

۲. در این دو تابع، تقاضا تصریح‌شده است که تقاضا برای هر دو دارایی با افزایش ثروت افزایش می‌یابد و در صورتی که بازدهی هر یک از دارایی‌ها افزایش یابد، تقاضا برای آن دارایی افزایش‌یافته و تقاضا برای دارایی دیگر کاهش می‌یابد. به بیان دیگر، روابط بالا بیان‌کننده این موضوع هستند که فرد براساس بازدهی نسبی این دو دارایی نسبت به تصمیم‌گیری اقدام می‌کند. در رابطه (۴۵) این موضوع به صورت اختلاف قیمت دو دارایی لحاظ شده است، یعنی اینکه هر چه دارایی ریسکی بازدهی بیشتری نسبت به دارایی غیرریسکی داشته باشد، فرد سرمایه‌گذار بخش بیشتری از ثروت خود را به دارایی ریسکی تخصیص می‌دهد.

۳. نوسان قیمت دارایی ریسکی : برای یک فرد ریسک‌گریز، افزایش ریسک باعث می‌شود تا مطلوبیت انتظاری کمتری برای وی ایجاد شود. در واقع، ریسک برای او یک کالای بد با مطلوبیت انتظاری منفی است که سبب کاهش مطلوبیت انتظاری سبد انتخابی وی می‌گردد. پس، باید به نحوی میزان ریسک سبد انتخابی مورد توجه قرار بگیرد. در این مدل، به واسطه‌ی نوسان قیمت سهام فرد سرمایه‌گذار همواره با این ریسک مواجه است که ارزش دارایی ریسکی وی در صورت کاهش قیمت سهام کاهش یابد و او بخشی از ثروت خود را از دست بدهد. در رابطه (۴۵) دیده می‌شود که نوسان قیمت سهام به عنوان یک عامل ریسکی در وزن دارایی ریسکی فرد سرمایه‌گذار موثر است، به طوری که با افزایش نوسان (واریانس) قیمت سهام، فرد از میزان سهم دارایی ریسکی در سبد سهام خود می‌کاهد.

توسعه مدل

برای تابع مطلوبیت انتظاری $U(\xi)=\xi^{P}$ که برای حل معادله در نظر گرفته شد، مشخص گردید که u در x کاملا مقعر می‌باشد، زیرا f مثبت است. همچنین، با توجه به ثابت‌بودن H_1 ، می‌توان h_1, h_2 را طوری انتخاب کرد که هیچ محدودیتی را تحمیل نکنند و بر جواب بهینه تاثیری نگذارند. با تغییر ثابت‌ها، معادله دیفرانسیل

www.SID.ir

Archive of SID

تصادفی[1] (۳۲) برای فرآیند ثروت X(t) با شرط اولیه X(0) = x راه‌حل منحصر به فردی دارد که همواره مثبت است.

$$X(t) = x\exp\left([(1-H_1)r + H_1\mu - \frac{1}{2}H_1^2\sigma^2]t + \sigma H_1 Z(t)\right) \quad (۴۳)$$

برای تکمیل تحلیل، می‌بایست بررسی نماییم که آیا u نیز یک راه‌حل برای مسئله ثروت‌نهایی انتظاری بهینه می‌باشد. این بررسی بر اساس همان ابزارهای اصلی که در فرمول ایتو و همچنین، این حقیقت که ارزش‌های انتظاری انتگرال‌های تصادفی به صفر می‌رسند، قابل استنباط است.

به راحتی می‌توان موقعیت در نظر گرفته‌شده را به سهام با بازده‌های چندگانه تعمیم داد. اگر فرض کنیم که N نوع دارایی در سبد مالی داریم که هر یک از آنها بازدهی Z_n، به ازای هر واحدپول سرمایه‌گذاری شده دارند. البته، یکی از این دارایی‌ها می‌تواند بدون‌ریسک باشد. در این حالت این بازدهی‌ها دارای یک توزیع مشترک با تابع توزیع $F(z_1, z_2, z_3, \ldots z_n)$، هستند. آنگاه تابع مطلوبیت انتظاری حاصل از نگهداری این سبد مالی عبارت خواهد بود؛

$$U(h_1, h_2, \ldots h_n) = \int u(h_1 z_1 + h_2 z_2 + \ldots + h_n z_n) dF(z_1, \ldots z_n) \quad (۴۴)$$

این تابع مطلوبیت انتظاری تعریف‌شده بر R_+^N نیز نسبت به $(h_1, \ldots h_n)$ افزایشی، پیوسته و مقعر است. این بدان مفهوم است که می‌توان دارایی‌ها را به صورت کالاهای معمولی تلقی کرد و برای آنها نظریه تقاضا ارایه نمود.

[1]. Stochastic differential equation

www.SID.ir

Archive of SID

ریسک‌گریز بودن فرد در اینجا منجر به نقشه بی‌تفاوتی محدب برای سبد دارایی می‌گردد.

شرایط مطرح شده در این مقاله را می‌توان از جهات گوناگون دیگری نیز تعمیم داد؛ فرضاً در صورتی که بازار ناکامل[1] باشد، شرایط تحلیلی پیچیده‌تر خواهد بود و همچنین، هنگامی که سرمایه‌گذاری‌های غیرقابل مبادله در سبد مالی سرمایه‌گذار وجود داشته باشد، وضعیت ترسیم شده شرایط خاص‌تری خواهد داشت.

همچنین، می‌توان به جنبه‌های عدم قطعیت مدل عمق بیشتری بخشید و ریسک دارایی را به صورت احتمالی در نظر گرفت. در صورتی که بیش از یک دارایی ریسکی در مدل وجود داشته باشد، می‌توان با تخصیص یک توزیع احتمال به ریسک مرتبط با هر دارایی، یک قدم دیگر در تحلیل‌ها و حل مدل به واقعیت نزدیک شد.

از سوی دیگر، با تعمیم نوسان قیمت به دارایی بدون ریسک و حضور یک سرمایه‌گذار دیگر در مدل و واردکردن اثرات متقابل تصمیم‌گیری هر یک از این دو سرمایه‌گذار بر فرآیند انتخاب سبد بهینه، می‌توان مدل را در ابعاد بیشتری توسعه داد.

نتیجه‌گیری

ارایه یک مدل و تحلیل نتایج حاصل از آن در علوم اقتصادی و مالی هنگامی مورد توجه قرار می‌گیرد که مدل‌سازی و نتایج مرتبط با آن از یک بهینه‌سازی در سطح خرد نشأت بگیرد، شهود اقتصادی قابل توجیه باشد و بتواند واقعیت‌های معمول در دنیای واقعی را توصیف نماید. استفاده از مبانی اقتصادخرد در مدل ارایه شده از یک سو، پایه‌های تئوریک آن را تقویت کرده است و از سوی دیگر، سبب شده است تا نتایج حاصل از حل مدل با تعابیر و شهود اقتصادی قابل تفسیر باشد. آنچه در نتایج این مدل بارز است، ارایه رابطه‌ای است که به صورت توأم سه عامل ریسک‌پذیری فرد، نوسان قیمت دارایی و بازده نسبی آن را مورد توجه قرار می‌دهد

[1]. Incomplete Market

www.SID.ir

Archive of SID

و از آن مهم‌تر آن که این رابطه در قالب حل یک مساله بهینه‌سازی مطلوبیت انتظاری بدست آمده است. لازم به ذکر است تئوری مطلوبیت انتظاری توانایی توضیح و مدل تمامی رفتارهای فرد سرمایه‌گذار را ندارد و طبق تئوری کانمن و تیورسکی، افراد به دلیل ویژگی‌های روان‌شناختی بیشتر از زیان‌کردن ناخشنود می‌شوند و نسبت به آن بیشتر از سود واکنش نشان می‌دهند. این امر باعث می‌شود که احتمال وقوع رخدادها با وزن تصمیم جایگزین شود و تابع تصمیم نیز براساس انحراف از نقطه مرجع تعیین شود. علاوه بر این، در نظریه مطلوبیت انتظاری، گرایش به ریسک تنها به وسیله انحنای تابع مطلوبیت بیان می‌شود. لیکن، در نظریه‌های مختلف دیگر به وسیله توزین غیرخطی احتمالات تحت تاثیر قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، یک فرد حتی اگر تابع مطلوبیت او برای بازدهی پول مقعر باشد، چنانچه وزن بیش از حدی به شانس کوچک برد خود بدهد، عقلایی و توجیه‌پذیر است که یک بلیت بخت‌آزمایی بخرد. این فرض که به احتمالات کوچک وزن بسیار زیاد داده می‌شود، قادر است توضیح دهد که چرا افراد با مطلوبیت مقعر در منافع شخصی، دوستدار بلیت‌های بخت‌آزمایی نامتقارن با شانس بسیار کم برای برد هستند. همچنین، در پژوهش‌های اخیر نظریاتی جدیدی ارایه شده است که داوطلب جایگزینی تئوری‌های مرسوم و متعارف هستند. اول این که، نظریه مطلوبیت انتظاری ذهنی که مبتنی بر این اصل است که احتمالات شخصی به وسیله قضاوت‌های ذهنی شکل می‌گیرند و نه این که از شواهد عینی مشتق شده باشد، می‌تواند به وسیله تئوری‌های احتمالات ناهم‌جمع جایگزین شود. دوم، مطلوبیت نزولی است که به وسیله هذلولی‌های نزولی جایگزین می‌شود. در هذلولی‌های نزولی، نرخ‌های تنزیل کوتاه‌مدت بسیار بیشتر از نرخ های تنزیل آینده هستند، که این امر منعکس‌کننده بی‌صبری‌های موقتی یا اقدامات آنی و پرنوسان افراد است. همچنین، نظریه نفع شخصی می‌تواند به وسیله نظریه رجحان اجتماعی جایگزین گردد. هر یک از موارد مطرح‌شده ابزارهایی هستند که اقتصاددانان برای مدل‌سازی رفتارهای فردی مورد استفاده قرار می‌دهند. هر یک از تئورهای جدید مطرح شده همراه با

www.SID.ir

Archive of SID

پشتیبانی دامنه وسیعی از داده‌های تجربی می‌باشد و می‌توانند در مطالعات آتی مورد توجه قرار گرفته و نتایج آن‌ها در حوزه‌های اقتصاد، مهندسی مالی و مالیه رفتاری مورد استفاده قرار گیرد.

www.SID.ir

Archive of SID

پی‌نوشتها:

1. Cohn, R.A. and Lewellen, W. G. “Individual Investor Risk Aversion and Investment Portfolio Composition”, *Journal of Finance*, Vol 30, No 49, (1975), pp 605 -620.
2. Epstein, M.J, “Social disclosure and the individual investor”, *Accounting, Auditing & Accountability Journal*, No 4, (1994), pp.94 -109.
3. Frank, Robert A, Microeconomics and Behavior. McGraw-Hill/Irwin, 6th Edition, (2006), pp 112- 123.
4. Hasan al tamimi, “Investors perceptions of earning quality, auditor independence”, *Accounting Horizons*, NO17, (2006), PP.37-48.
5. Hull, J, A. White. “The pricing of options on assets with stochastic volatilities”. *J. Finance* NO 42, (1987), pp.281-300
6. Hull, John, “Fundamentals of futures and options markets”, *Prentice Hull, Version 6*, (2006), pp.102-168
7. Jensen. M, "The Performance of Mutual fund in the period 1945-1964" , *Journal of finance*, Vol 23, No 2, (1968), pp. 389-416
8. Kothary, S. Warner, J, “Evaluating mutual fund performance", *Journal of finance*, Vol 56, (2002), pp.1985-2010
9. LeBaron, D. and Farrelly, G. and Gula, S. “Facilitating a Dialogue on Risk: A Questionaire Approach”, *Financial Analysts Journal*. Vol 45, No 3, (1989), pp 19-24.
10. Lewellen, W. G. and Lease, R. C. and Schlarbaum, G. C. “Patterns of سInvestment Strategy and Behavior among Individual Investors”, *Journal of Business*, No 50, (1977), pp.265-269
11. Markowitz HM, “Portfolio selection”, *Journal of Finance*, No 7, (1952), pp.77-91.
12. Markowitz HM, “Portfolio selection: Efficient Diversification of investment”, *New York*, John Willey and Sons, (1959).
13. Mas-Colell, Andreu; Whinston, Michael D.; and Jerry R. Green, Microeconomic Theory. *Oxford University Press*, US, (1995), p.194
14. Merilkas,A .and Prasad,d. “factors influencing Greek investor behavior on the Athens stock exchange, *paper presented at the annual meeting of academy of financial service,* Colorado, October2003-9-8 .
15. Riley, W. B. and Chow, K. V. “Asset Allocation and Individual Risk Aversion”, *Financial Analysts Journal*, No 25, (1992), pp 234- 260
16. Sharp.W, “Mutual fund performance", *Journal of Business*, No 39(1), (196٤), pp.119-138.
17. Simon, H.A., “A Behavioral Model of Rational Choice”, Cowles Foundation Paper 98, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol LXIX,(1995), pp. 99-118
18. Treynor. J, “How to Rate Management of investment funds", *Harvard Business Review*, NO 44, (1965), pp.63-75
19. Tversky, A. Kahneman, D. “Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases” *Science, New Series*, Vol. 185, No. 4157. (Sep. 27, 1974), pp. 1124-1131

www.SID.ir

Archive of SID

20. Tversky, A. Kahneman, D. “The Framing of Decisions and the Psychology of Choice” *Science, New Series*, Vol. 211, No. 4481. (Jan. 30, 1981), pp. 453-458.
21. Varian, Hal R., Microeconomic Analysis. *W.W.Norton & Company*, 3rd Edition, (2003).

www.SID.ir