مجله علوم پایه دانشگاه آزاد اسلامی، (JSIAU)
سال ۱۸، شماره ۶۷ ، بهار ۱۳۸۷

محاسبه ی نمای بحرانی گاف انرژی در نردبان فرومغناطیسی دو - پا

حسین عارف آذر*
گروه فیزیک ، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، تهران، ایران
محمدرضا سلطانی
گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

چکیده

گاف انرژی در مدل نردبان دو – پا ی مغناطیسی هایزنبرگ در حضور میدان مغناطیسی مطالعه شده است. نمودار فاز حالت پایه ی نردبان دو – پای مغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی شامل فازهای پله – یک گانه، سیال لاتینجر و فرومغناطیس اشباع می‌باشد. با استفاده از روش مقیاس‌بندی اندازه متناهی، نمای بحرانی گاف انرژی در نزدیکی میدان بحرانی اشباع محاسبه شده است. محاسبه ی فوق نشان می دهد که گذار فاز فوق در رده عامیت مدل آیزینگ در میدان عرضی قرار دارد.

کلید واژه‌ها : سیال لاتینجر،نردبان دو پا، مقیاس بندی اندازه متناهی

مقدمه

سیستم های اسپینی کوانتومی در بعد پایین، کاندیدای خوبی برای مطالعه ی گذارهای فاز کوانتومی‌اند. به همین دلیل در چند دهه ی اخیر مطالعه ی سیستم های اسپینی در بعد پایین بسیار مورد توجه قرار گرفته شده است. به ویژه خواص بحرانی نردبان های دو – پا در حضور میدان مغناطیسی خارجی، به‌گونه‌ای گسترده مورد مطالعه قرار گرفته شده است.

نردبان های اسپینی بین سیستم های یک بعدی و دو بعدی قرار می گیرند (شکل ۱). این سیستم ها از تعداد متناهی زنجیره های هایزنبرگ پادفرومغناطیس $S=1/2$ (پاها) که توسط برهمکنش تبادلی $J_{\perp}$ که با یکدیگر جفت

* عهده دار مکاتبات

می‌باشند، تشکیل شده‌است ودارای نمودار فاز غنی و جدیدی نسبت به سیستم های یک بعدی و دو بعدی مرسوم می باشند. [۱-۳] بررسی ها نشان می دهند که نردبان های اسپینی هایزنبرگ در طیف برانگیختگی با تعداد پاهای زوج دارای گاف انرژی و برای تعداد پاهای فرد، بدون گاف می باشند.

سیستم های نردبانی با پاهای فرومغناطیسی بسیار کم مطالعه شده اند. زیرا نردبان های اسپینی با پاهای فرومغناطیسی هنوز تایید تجربی نیافته‌اند. به هر حال از نقطه نظر تئوری این سیستم ها بسیار جالب هستند زیرا یک زمینه ی وسیع و جدید برای مطالعه ی رفتار کوانتومی می‌باشند. [۴-۷] در یک بررسی جالب نشان داده شده است که نردبان فرومغناطیسی همسانگرد با تعداد فرد پا (...و ۵ و۳) دارای مغناطش خود به خودی می باشند، در صورتیکه در حالت نردبان پادفرومغناطیس مغناطش خود به خودی صفر است. [۵]

همیلتونی مدل نردبان دو پای فرومغناطیسی در غیاب میدان مغناطیسی به شکل زیر نوشته می شود:

$$H = H_{leg}^{(1)} + H_{leg}^{(2)} + H_{\perp} \qquad (۱)$$

که همیلتونی برای پای j ام:

$$H_{leg}^{j} = -J \sum_{n=1}^{n} \left[(S_{j,n}^{x} S_{j,n+1}^{x} + S_{j,n}^{y} S_{j,n+1}^{y} + \Delta S_{j,n}^{z} S_{j,n+1}^{z}) \right] \qquad (۲)$$

و جفتیدگی بین پاها:

$$H_{\perp} = J_{\perp} \sum_{j=1}^{N} (S_{1,j}^{x} S_{2,j}^{x} + S_{1,j}^{y} S_{2,j}^{y} + S_{1,j}^{z} S_{2,j}^{z}) \qquad (۳)$$

که در اینجا $s_{j,n}^{x,y,z}$ عملگرهای اسپین $\frac{1}{2}$ روی $n-$ امین پله را مشخص می کنند. ثابت جفتیدگی در بین اسپین های روی پاها، فرومغناطیسی $(J > 0)$است. حالت حدی پاهای همسانگرد فرومغناطیسی متناظر با $\Delta = 1$ و حالت حدی پاهای همسانگرد پاد فرومغناطیسی متناظر با $\Delta = -1$است.

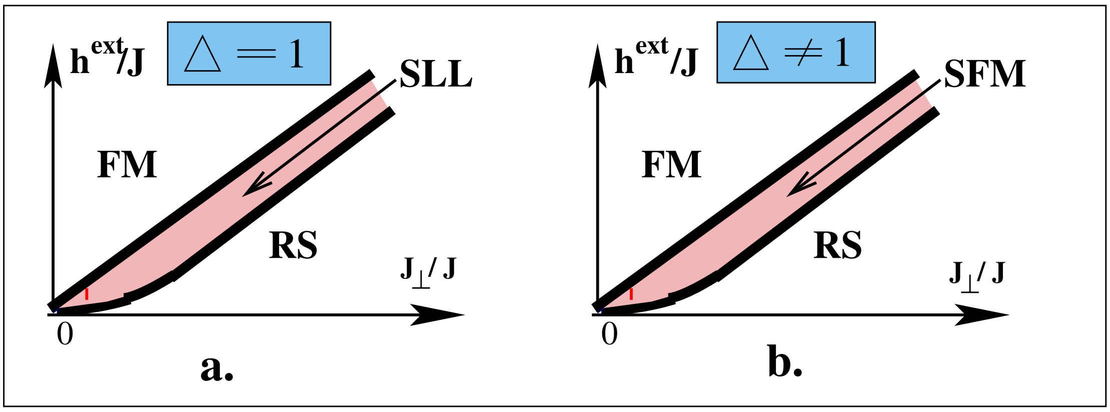
وکوا (T. Vekua) و همکارانش [۶]، با استفاده از روش بوزونیزه کردن، نمودار حالت پایه سیستم نردبانی فوق پاهای فرومغناطیسی $(\Delta > 0)$ را بررسی کرده اند. در این مقاله، نمودار فاز حالت پایه ی نردبان دو پای فرومغناطیسی در صفحه ی $(\Delta, J_{\perp})$ برای مقادیر مثبت ناهمسانگردی $\Delta > 0$ و جفتیدگی پادفرومغناطیسی $(J_{\perp} > 0)$ بین پاها به دست آمده است. علاوه بر فاز دارای گاف "پله یک گانه"، نمودار فاز حالت پایه شامل فاز "سیال لاتینجراسپینی" و فاز "فرومغناطیس راه راه" (SFM) می‌باشد که فاز "فرومغناطیس راه راه" فقط در حالت پاهای فرومغناطیسی یافت می‌شود. $(\Delta > 0)$ [۹،۶،۴،۱۰]

اثر میدان مغناطیسی خارجی روی نمودار فاز حالت پایه نردبان فرومغناطیسی فوق [۷] بررسی شده است. در این مقاله، اثرات ایجاد شده توسط میدان مغناطیسی در نمودار فاز حالت پایه سیستم توسط روش بوزونیزه کردن مطالعه شده است. همیلتونی مدل نردبان فوق در حضور میدان مغناطیسی به شکل(۱) نوشته می شود با این تفاوت که همیلتونی برای پای j ام به شکل زیر اصلاح می شود :

$$H_{leg}^{j} = -J \sum_{n=1}^{N} \left[(S_{j,n}^{x} S_{j,n+1}^{x} + S_{j,n}^{y} S_{j,n+1}^{y} + \Delta S_{j,n}^{z} S_{j,n+1}^{z}) + h^{ext} S_{j,n}^{x} \right] \qquad (۴)$$

وکوا و همکارانش ابتدا همیلتونی بوزونیزه شده ی سیستم را محاسبه و سپس اثر میدان مغناطیسی عرضی در نمودار فاز نردبان فوق را بررسی کرده‌اند. اما اگر سیستم در غیاب میدان مغناطیسی عرضی در فاز "پله یک گانه" باشد، که در حالت جفیدگی قوی پله ای یعنی $J_\perp \rangle\rangle J$ برای نردبان همسانگرد $\Delta=1$ می توان به طور تحلیلی اثر میدان عرضی روی خواص مغناطیسی حالت پایه سیستم را بررسی کرد. در این حالت حدی نشان داده شده است که با اعمال میدان مغناطیس عرضی h^{ext} و افزایش آن، دو گذار فاز مرتبه دوم روی می دهد. ابتدا در میدان بحرانی $h^{ext}=h^{ext}_{c1}=J_\perp-J$ گذار از فاز "پله یک گانه" به فاز "سیال لاتینجراسپینی" و در میدان $h^{ext}=h^{ext}_{c2}=J_\perp$ گذار از فاز "سیال لاتینجراسپینی" به فاز "فرومغناطیس اشباع" صورت می گیرد. [۷] (شکل ۱–a)

از طرف دیگر برای نردبان اسپینی فرومغناطیسی با پاهای ناهمسانگرد، $\Delta\neq1$ نمی‌توان مسئله را به صورت تحلیلی بررسی کرد. به هر حال، بر اساس تخمین های کیفی و تحلیلهای تقارنی نشان داده شده‌است که دو گذار فاز روی می دهد [۷]. همچنین در این حالت پیش بینی شده است که برای $\Delta=1$ فاز "پله یک گانه" از فاز "فرومغناطیش اشباع" توسط فاز دارای گاف "فرومغناطیس راه راه" جدا می شود (شکل ۱–b).



شکل ۱. سیمای کیفی نمودار فاز حالت پایه ی یک نردبان دو – پا ی فرومغناطیسی به صورت تابعی از میدان مغناطیسی اعمال شده ی h^{ext} و جفتیدگی تبادلی $J_\perp$.

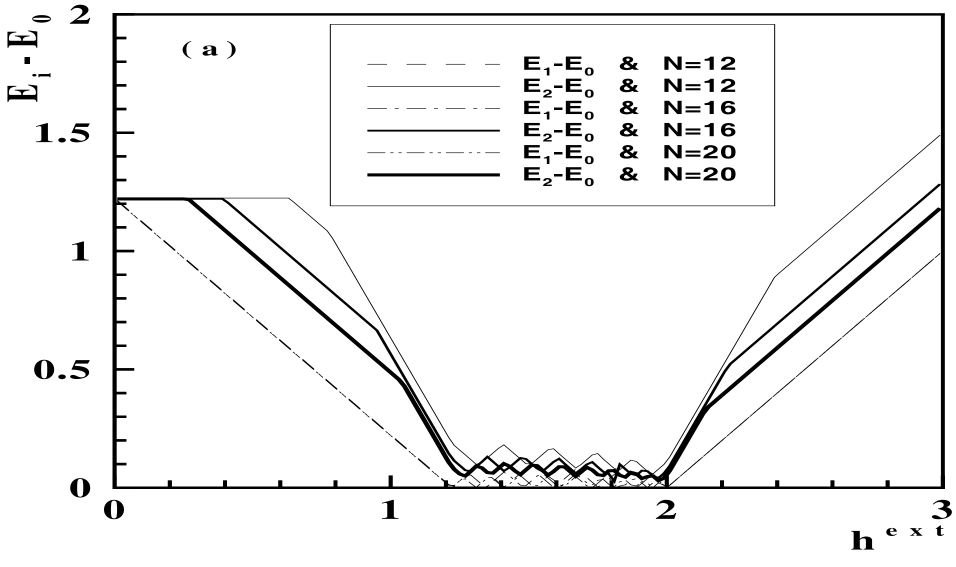
مطالعه عددی گاف انرژی

برای بررسی نمودار فاز حالت پایه نردبان اسپینی فوق، از روش لنکشوز استفاده می‌کنیم. انرژی‌ها و ویژه حالت‌های انرژی را با در نظرگرفتن شرایط مرزی دوره‌ای برای زنجیره‌ها تعیین می‌کنیم. با بررسی گاف انرژی می‌توان خطوط گذار فاز را به سادگی از محاسبات عددی سیستم‌های کوچک (N=۱۲،۲۴،۲۰،۱٦) مشاهده کرد..

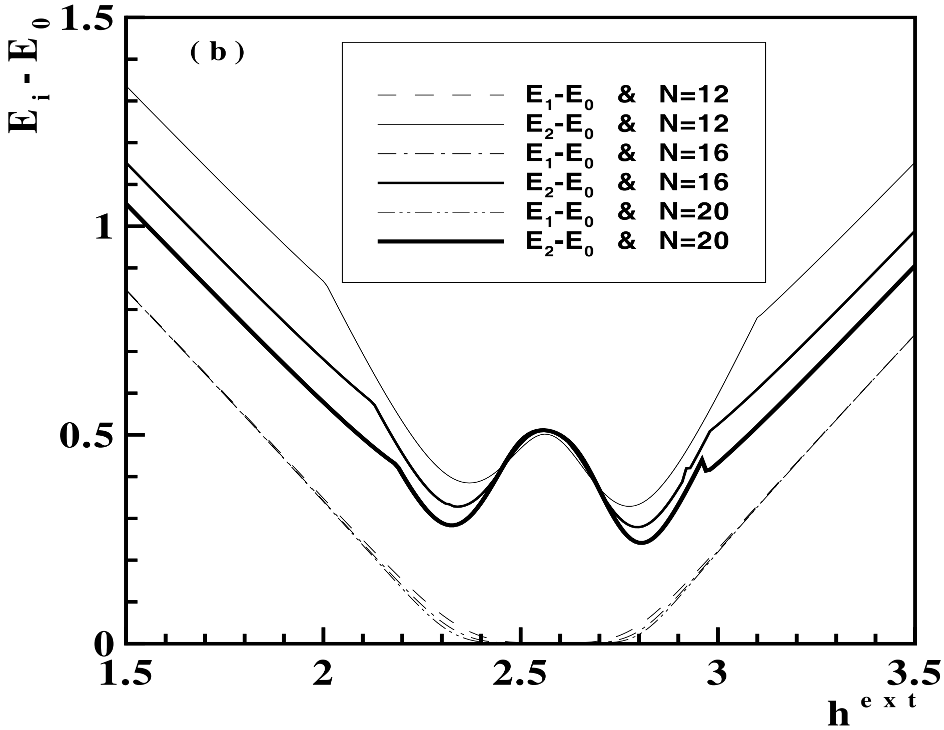
ابتدا نردبان همسانگرد $\Delta=1$ را مورد بررسی قرار می دهیم. در شکل ۲–a سه تراز اول انرژی نردبان هایی با طول N=۱۲،۱٦،۲۰،۲٤ و $J_\perp=2J$ به صورت تابعی از میدان مغناطیسی خارجی h^{ext} رسم شده است. گاف انرژی سیستم، معادل با اختلاف انرژی بین اولین حالت برانگیخته و حالت پایه است. هم‌چنانکه در شکل دیده می‌شود در غیاب میدان مغناطیسی (یعنی $h^{ext}=0$) ، در طیف انرژی سیستم گاف وجود دارد. با اعمال میدان خارجی و افزایش آن ($h^{ext}\rangle 0$)، گاف انرژی به طور خطی کاهش می یابد تا در میدان بحرانی h^{ext}_{c1} صفر می شود.

این اولین تقاطع تراز بین انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته است.برای به دست آوردن یک تخمین دقیق از h_{c1}^{ext}، اولین تقاطع تراز را برای سیستم‌های با اندازه‌ی۲٤،۲۰،۱٦،۱۲=N تعیین کرده‌ایم. رفتار اندازه متناهی این مقادیر برای $N \to \infty$ ، میدان بحرانی $h_{c1}^{ext}=1/2\pm 0/01$را نتیجه می دهد. همچنین دیده می شود که در ناحیه‌ی $h_{c1}^{ext}<h^{ext}<h_{c2}^{ect}$درطیف‌انرژی گافی وجود ندارد و با ادامه‌ی افزایش میدان در $h^{ext}>h_{c2}^{ext}=2/0$ ً در طیف سیستم یک گاف ایجاد می شود. به دلیل اینکه هیچ تصحیح وابسته به اندازه‌ای در h_{c2}^{ext} وجود ندارد و مقدار بحرانی $h_{c2}^{ext}=2.0$را به شکل دقیق به دست آورده‌ایم. به هر حال‌مقادیر میدان‌های بحرانی h_{c1}^{ext}و h_{c2}^{ext} که از مطالعه‌ی عددی سیستم‌های متناهی به دست آمده‌اند بسیار نزدیک به مقادیر تحلیلی می‌باشند. ($h_{c1}^{ext}=J_{\perp}-J=1.0$و $h_{c2}^{ext}=J_{\perp}=2.0$)

در مقابل این نردبان فرومغناطیسی همسانگرد ما همچنین طیف پایین انرژی نردبان فرومغناطیس ناهمسانگرد $(\Delta\neq 1)$را نیز بررسی کرده‌ایم. اختلاف انرژی بین اولین و دومین حالت برانگیخته با انرژی حالت پایه به صورت تابعی از میدان مغناطیسی h^{ext} برای $J_{\perp}=3J$ $J=1$ و نردبان‌هایی با اندازه‌ی ۲۰،۱٦،۱۲،۸=N و مقادیر مختلف پارامتر ناهمسانگردی $\Delta=0.3,0.5,0.7$ را محاسبه کرده‌ایم. به عنوان مثال در شکل۲ –b ، نتایج این محاسبات برای ناهمسانگردی $\Delta=0.5$ رسم شده است. به وضوح دیده می‌شود که طیف برانگیختگی فقط به‌ازای مقادیر میدان بحرانی $h_{c1}^{ext}=2.3\pm 0.1$و $h_{c2}^{ext}=3.0\pm 0.1$ دارای گاف انرژی نمی‌باشد و در ناحیه ی $h_{c1}^{ext}\langle h^{ext}\langle h_{c2}^{ext}$ انرژی حالت پایه در حدّ ترمودینامیک، تبهگنی مرتبه ی دو خواهد داشت.گاف انرژیی که در $h^{ext}\langle h_{c1}^{ext}$ ظاهر می شود نسبت به میدان خارجی افزایش می‌یابد تا به مقدار بیشنه‌ای برسد و سپس کاهش می یابد تا در h_{c2}^{ext} مجدداً صفر می شود. در ناحیه ی $h^{ext}\rangle h_{c2}^{ext}$ گاف باز می‌شود و برای میدان های به اندازه‌ی کافی بزرگ، متناسب با h^{ext} رفتار می کند. این نتایج همچنین در توافق بسیار خوبی با نتایج به‌دست آورده شده در مطالعه ی زنجیره ی پادفرومغناطیس کاملاً ناهمسانگرد XXZ در حضور میدان مغناطیسی خارجی می باشند.[۸]



شکل۲– a اختلاف بین انرژی دو تراز اول و انرژی حالت پایه به صورت تابعی از میدان مغناطیسی خارجی h^{ext}برای تبادل $J_{\perp}=2J$ و پارامتر ناهمسانگردی $\Delta=1$ طول های مختلف ۲۰،۱٦،۱۲=N .



شکل۲- b اختلاف بین انرژی دو تراز اول و انرژی حالت پایه به صورت تابعی از میدان مغناطیسی خارجی h^{ext}برای تبادل $J_{\perp}=3J$ و پارامتر ناهمسانگردی $\Delta=0.5$ و طول های مختلف N=۱۲،۱۶،۲۰ .

محاسبه نمای بحرانی گاف انرژی

روش مقیاس بندی اندازه متناهی، راه‌کاری است برای استخراج نماهای بحرانی با مشاهده چگونگیتغییر کمیت‌های اندازه گیری شده نسبت به اندازه ی سیستم(N) می‌باشد. به دلیل اینکه هدف ما محاسبه‌ی نمای بحرانی گاف انرژی است بنابراین در اینجا سعی می شود روشی را برای محاسبه این نما از سیستم های با اندازه ی متناهی، ارائه دهیم.

گاف انرژی را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$G(N,h) \approx N^{-1} f(x) \tag{۵}$$

که در این رابطه $x = N\ (h-h_c)^{\varepsilon}$ متغیر مقیاسی است و $f\ (x)$ تابع مقیاسی را مشخص می کند. با ضرب طرفین رابطه ی فوق در N خواهیم‌داشت:

$$\lim_{N\to\infty(x\langle\langle 1)} NG(N,h) \approx N\ \ (h-h_c)^{\varepsilon} \tag{۶}$$

این رابطه نشان می دهد که رفتار x-بزرگ تابع $f\ (x)$ برای نمای بحرانی ε بر حسب x خطی است. اما به دلیل اینکه روش لنکشوز محدود به سیستم هایی با اندازه ی کوچک $N \leq 30$ می باشد بنابراین مقدار کمیت x نمی

تواند افزایش قابل توجه ای داده شود و در نتیجه باید نمای بحرانی را از رفتار تابع گاف انرژی در ناحیه x–کوچک به دست آورد. در این رژیم از سیستم های کوچک، رفتار گاف انـرژی اختلالـی اسـت و بـه شـکل زیـر بازنویـسی می‌شود:

$$G(N,h)=A^{(0)}(N)+A^{(1)}(N)(h-h_c)+A^{(2)}(N)(h-h_c)^2+..... \qquad (٧)$$

از جملات مراتب بالاتر اختلال به دلیل کوچک بودن $(h-h_c)$ صرف نظر می کنیم. اولین ضریب را بـه صورت تابعی از اندازه ی سیستم مورد بررسی قراردادەایم و رفتار آن بر حسب N به صورت $1/N$ می‌باشـد کـه مورد انتظار نیز می باشد. حال رابطه ی (٧) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$G(N,h)\approx N^{-1}f[(N)^{\frac{1}{\varepsilon}}(h-h_c) \qquad (٨)$$

از رابطه (٨) در حد $h=h_c$ می‌توان جمله‌یث غالب را به‌دست آورد:

$$\frac{\partial^m G}{\partial h^m}=N^{-1+\frac{m}{\varepsilon}}\times\ cons\tan t \qquad (٩)$$

که m مرتبه ی جمله ی غالب در بسط اختلال است. به سادگی به دست می آید که:

$$A^{(m)}(N)\approx N^{-1+\frac{m}{\varepsilon}} \qquad (١٠)$$

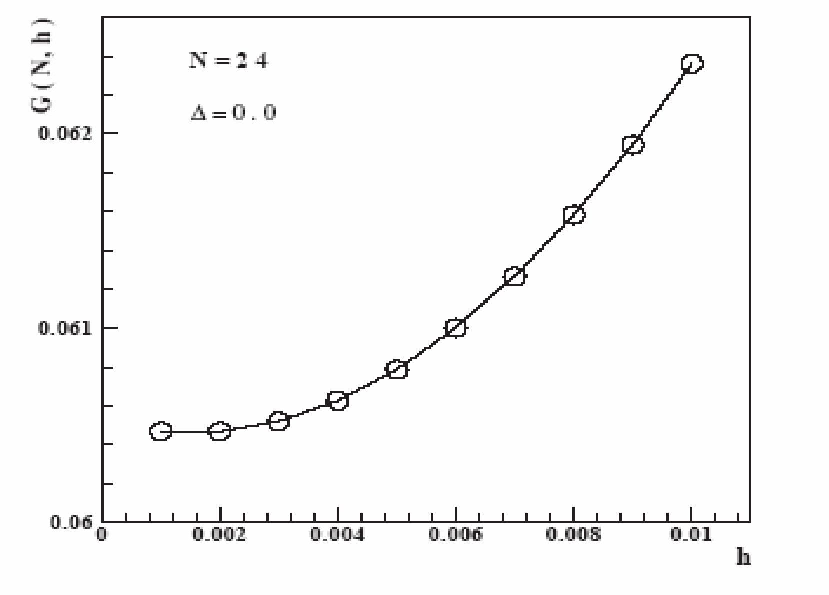
اگر رفتار N–بزرگ تابع $A^{(m)}(N)$ را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$\underset{N\to\infty}{Lim}A^{(m)}(N)\approx a_1N^{\beta} \qquad (١١)$$

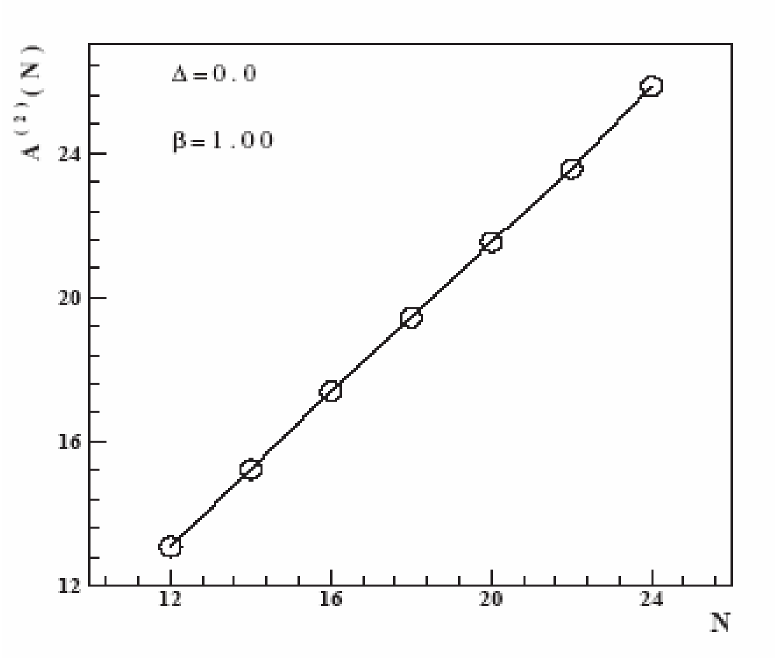
به دست می آوریم که نمای بحرانی گاف انرژی به نمای $-\beta$ به صورت زیر مربوط می شود:

$$\varepsilon=\frac{m}{1+\beta} \qquad (١٢)$$

در نتیجه برای محاسبه ی نمای بحرانی گاف انرژی از نتایج مربوط بـه رژیـم x–کوچـک مراحـل زیـر را انجام داده‌ایم. در مرحله ی اول نمودار گاف انرژی $G(N,h_c)$ را بر حـسب میـدان مغناطیـسی h، بـرای مقـادیر میدان $0.001\le(h-h_c)\le 0.01$ و نردبانی به اندازه ی $N=24$ در شکل ٣ رسم کرده‌ایم. بهترین برازش بـرای داده ها توسط $(G(N,h_c)\propto(h-h_c)^{\gamma})$, $\gamma=2.2$به دست آمده است که نشان می دهـد اولـین جملـه ی غیـر صفر در بسط اختلال مرتبه ی دوم $(m=2)$ است. ما همچنین نردبان هایی با انـدازه‌ی $N=12,16,20$ در نظـر گرفته و نتیجه ی یکسانی به دست آوردیم. در مرحله ی دوم، نتایج گـاف انـرژی $G(N,h)$ را بـرای میـدان هـای نزدیک به میدان بحرانی h_c به صورت چند جمله ای بسط داده‌ایم و تـابع $A^{(2)}(N)$ را بـه صـورت تـابعی از N محاسبه می‌کنیم و درآخر با رسم نمودار $A^{(2)}(N)$ بر حسب N (شکل ۴) و برازش داده ها، نمـای βرا برابـر 1.00 ± 0.05به‌دست آورده‌ایم و با استفاده از رابطه (١٢) نمای بحرانی گاف انرژی برابر با $\varepsilon=1.0\pm0.1$بـه دسـت آمده است. محاسبات عددی فوق نشان می دهند که گذار فاز فوق در رده ی عامیت مدل آیزینگ در میـدان عرضـی قرار دارد.



شکل۳. مقادیر تابع گاف انرژی $G(N,h)$ نسبت به میدان مغناطیسی خارجی در نزدیکی نقطه ی بحرانی h_c برای نردبانی با اندازه ی $N = 24$. بهترین برازش به داده ها با انتخاب $(G(N,h_c) \propto (h-h_c)^{\gamma})$ ، $\gamma = 2.2$ به دست آمده است.



شکل٤. مقادیر تابع مقیاسی $A^{(2)}(N)$ نسبت به طول نردبان $N = 12,14,...,24$. بهترین برازش به داده ها با انتخاب $\beta = 1.00 \pm 0.05$ به دست آمده است.

نتیجه گیری

گاف انرژی در مدل نردبان دو – پای مغناطیسی با پاهای فرومغناطیسی ناهمسانگرد در حضور میدان مغناطیسی عرضی مطالعه شده است. با استفاده از روش لنکشوز گاف انرژی برای نردبان های متناهی و نزدیک به

نقاط بحرانی محاسبه شده است. با استفاده از روش مقیاس بندی اندازه متناهی و ترکیب آن با روش اختلالی، نمـای بحرانی گاف انرژی محاسبه شده است. محاسبات عددی فوق نشان می دهند که گذار فـاز فـوق در رده ی عامیـت مدل آیزینگ در میدان عرضی قرار دارد.

سپاسگزاری

این پژوهش توسط دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران حمایت مالی شده‌است.

Refrence:

1. Barnes, T., Dogotto, E., Riera, J., and Swanson, E.S., *Phys. Rev*. B, **47**, 3196 (1993).
2. Dagotto, E., and Rice, T.M., *Science*, 271, 618 (1996).
3. Lecheminant, P., *Cond-mat / 0306520*, 60 (2003)
4. Schulz, H.J., *Phys. Rev*. B, **34**, 6372 (1986).
5. Wiessner,. R.M., *Phys. Rev*. B, **60**, 6545 (1999).
6. Vekua, T., Japaridze, G.I., and Mikeska, H. J., *Phys. Rev*. B, **67**, 064419 (2003).
7. Vekua, T., Japaridze, G.I., and Mikeska, H. J., *Phys. Rev*. B, **70**, 014425 (2004).
8. Cullum, J.C., and Willoughby, R.A., *In Lanczos Algorithms for LargSymmetric Eigenvalue Computations*, Birkhauser, Boston (1985)
9. Parlett, B.N., *The symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice – Hall Englewood Cliffs, NJ (1980).
10. Hogemans, R., Caux, J.S., and Low, U., *Phys. Rev*. B, **71**, 011137 (2005).