مجله علوم پای‌ه دانشگاه آزاد اسلامی،
(JSIAU)
سال ۱۸، شماره ۷۰/۲ ، زمستان ۱۳۸۷

مشبکه ها، ابرگروه ها و فضاهای اتصال

مرتضی یاوری*
گروه ریاضی، واحد کاشان، دانشگاه آزاد اسلامی، کاشان، ایران
علی رضا اشرفی
گروه ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده

فرض کنیم L یک مشبکه کراندار و $f: G \to L$ یک تابع باشد. ابرعمل $\circ$ را روی G به ازای هر $a,b \in G$، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a \circ b = \{g \in G \mid f(a) \wedge f(b) \leq f(g)\}.$$

ما ثابت می کنیم که اگر G یک زیر مشبکه از L باشد، $(G,\circ)$ یک فضای اتصال است. همچنین ثابت می کنیم که اگر A یک گروه آبلی، $s: G \to A$ یک تابع و تصویر G زیر مجموعه بسته ای از A باشد، در این صورت $(G,\circ)$ یک فضای اتصال است. که در آن

$$a \circ b = \{g \in G \mid s(g) = s(a)s(b)\}.$$

رده بندی موضوعی در ریاضیات: ۲۰N۲۰

واژه های کلیدی: مشبکه، ابرگروه، فضای اتصال، $H_v -$گروه، افراز.

مقدمه

در ابتدا تعاریفی از نظریه ابرساختارهای جبری ارائه می کنیم.[۱و۲]توصیف کاملی از این نظریه بیان شده است. در این بخش به معرفی پاره‌ای از مفاهیم اساسی این نظریه که در ادامه مقاله به آن نیاز داریم، می پردازیم.

مجموعه غیرتهی H همراه با ابرعمل $\circ: H \times H \to P^{\circ}(H)$ را ابرگروه می نامیم، هرگاه (i) (اصل شرکت پذیری) به ازای هر $x,y,z \in H$ ، $x \circ (y \circ y) = (x \circ y) \circ z$ و (ii) (اصل تکثیر) به ازای هر

* عهده دار مکاتبات

$x\in H$، $x\circ H = H\circ x = H$. که در آن برای هر دو زیر مجموعه ی A و B از H: $A\circ B = \bigcup_{a\in A, b\in B} a\circ b$. حال فرض کنیم $(H,\circ)$ یک ابرگروه باشد. H را یک فضای اتصال می نامیم، هرگاه به ازای هر $a,b,c,d\in H$، $a/b \cap c/d \neq \phi$ ایجاب کند $a\circ d \cap b\circ c \neq \phi$. که در آن، $a/b = \{x \mid a\in x\circ b\}$.

وجیوکلیس در مرجع[۲]، ابرساختارهای جدیدی که H_v−گروه نامیده می شوند را معرفی کرده است. در اینجا منظور از یک ابرساختار یک مجموعه با تعدادی ابرعمل می باشد. ابرساختار $(H,\cdot)$ را H_v−گروه می نامیم، هرگاه در اصل تکثیر صدق کرده و به علاوه ویژگی زیر که به اصل شرکت پذیری ضعیف معروف است نیز برقرار باشد:

$$\forall x,y,z\in H : x\cdot(y\cdot z)\cap(x\cdot y)\cdot z \neq \phi.$$

به علاوه، H را یک H_v−گروه جابجایی می نامیم، هرگاه برای هر $x,y\in H$، $x\cdot y = y\cdot x$.

حال فرض کنید L مجموعه ای دلخواه باشد. در این صورت سه تایی $(L,\vee,\wedge)$ که در آن $\vee,\wedge : L\times L\to L$ دو تابع هستند را یک ابرمشبکه گوییم هرگاه:

1) (خاصیت خودتوانی) به ازای هر $x\in L$، $x\wedge x = x$ و $x\vee x = x$،
2) (خاصیت جابجایی) به ازای هر $x,y\in L$، $x\wedge y = y\wedge x$ و $x\vee y = y\vee x$،
3) (خاصیت شرکت پذیری) به ازای هر $x,y,z\in L$،

$$x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z \text{ و } x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z.$$

4) (قانون جذب) به ازای هر $x,y\in L$، $x\wedge(x\vee y) = x$ و $x\vee(x\wedge y) = x$.

به علاوه، زیر مجموعه ناتهی A از مشبکه L را یک زیرمشبکه از L می نامند هرگاه برای هر $a,b\in A$، $a\vee b, a\wedge b\in A$. مشبکه $(L,\vee,\wedge)$ را توزیع پذیر گوییم هرگاه به ازای هر $x,y,z\in L$، $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$. مشبکه L را کران دار نامیم هرگاه، عناصری چون 0 و 1 در L باشند که همواره $0\le x\le 1$.

در پایان به معرفی مفاهیم نیم مشبکه و جبربول می پردازیم. فرض کنیم L یک مجموعه و $\vee$ یک عملگر دلخواه روی L باشد. $<L,\vee>$ را $\vee$− نیم مشبکه می نامیم، هرگاه به ازای هر $x,y,z\in L$، $(x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z)$، $x\vee y = y\vee x$ و $x\vee x = x$. $\wedge$−نیم مشبکه مشابهاً تعریف می شود. نهایتاً مشبکه توزیع پذیر B را یک جبربول می نامیم، هرگاه برای هر $x\in B$، $x'\in B$ باشد که $x\vee x' = 1$ و $x\wedge x' = 0$.

ساختن فضاهای اتصال از مشبکه ها

فرض کنیم L یک مشبکه کراندار و $f: G\to L$ یک تابع باشد. ابرعمل $\circ$ را به ازای هر $a,b\in G$، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a\circ b = \{g\in G \mid f(a)\wedge f(b)\le f(g)\}.$$

اگر L یک جبر بول باشد، به سادگی می توان دید که $(G,\circ)$ یک H_v−گروه جابجایی است.

نتایج بیشتری در مورد این ابرگروهوار را می توانید [۳] مشاهده کنید.

قضیه 1. اگر تصویر G یک $\wedge$ –نیم مشبکه از L باشد، $(G,\circ)$ یک ابرگروه جابجایی است.

اثبات. فرض کنید $a,b,c\in G$ دلخواه باشند. بنابراین

$$a\circ(b\circ c)=a\circ\{g\in G\mid f(b)\wedge f(c)\le f(g)\}$$
$$=\bigcup_{f(b)\wedge f(c)\le f(g)}\{y\in G\mid f(a)\wedge f(g)\le f(y)\}.$$

قرار می دهیم

$$T=\{t\in G\mid f(a)\wedge f(b)\wedge f(c)\le f(t)\}.$$

حال نشان می دهیم که $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c=T$. واضح است که $a\circ(b\circ c)\bigcup(a\circ b)\circ c\subseteq T$. فرض کنید $y\in T$ دلخواه باشد. لذا $f(a)\wedge f(b)\wedge f(c)\le f(y)$. چون تصویر G یک $\wedge$ –نیم مشبکه از L می باشد، $g\in G$ وجود دارد به طوری که $f(a)\wedge f(b)=f(g)$. در نتیجه $g\in a\circ b$ و $y\in g\circ c$. حال می توان دید که $y\in(a\circ b)\circ c$. بنابراین $(a\circ b)\circ c=T$ و به همین صورت، $a\circ(b\circ c)=T$. لذا $\circ$ شرکت پذیر بوده و اثبات کامل می شود.

نتیجه. اگر تصویر G یک $\wedge$ –نیم مشبکه باشد، در این صورت

$$a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_n=\{g\in G\mid f(a_1)\wedge f(a_2)\wedge\cdots\wedge f(a_n)\le f(g)\}.$$

قضیه 2. اگر G یک زیر مشبکه از L باشد، $(G,\circ)$ یک فضای اتصال است.

اثبات. چون تصویر G یک $\wedge$ –نیم مشبکه می باشد، با استفاده از قضیه 1، $(G,\circ)$ یک ابرگروه است. فرض کنیم $a,b,c,d\in G$ دلخواه باشند. در این صورت $r,t,u\in G$ ایجاب می کند که $f(r)\vee f(t)=f(u)$، $f(b)\wedge f(c)=f(t)$ و $f(a)\wedge f(d)=f(r)$. بنابراین

$$f(a)\wedge f(d)=f(r)\le f(r)\vee f(t)=f(u),$$
$$f(b)\wedge f(c)=f(t)\le f(r)\vee f(t)=f(u).$$

و از این رو $u\in a\circ d\bigcap b\circ c$. بنابراین، $(G,*)$ یک فضای اتصال است. □

حال فرض می کنیم A یک گروه و s تابعی از G بتوی A باشد. ابرعمل $\circ$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a\circ b=\{g\in G\mid s(g)=s(a)s(b)\}.$$

لم. اگر تصویر G زیر مجموعه بسته ای از A باشد، $(G,\circ)$ یک ابرگروه است.

اثبات. فرض کنیم $a,b,c\in G$ دلخواه باشند. در این صورت

$$(a\circ b)\circ c=\{g\in G\mid s(g)=s(a)s(b)\}\circ c$$
$$=\bigcup_{s(g)=s(a)s(b)}\{y\in G\mid s(y)=s(g)s(c)\}.$$

قرار می دهیم

$$T=\{g\in G\mid s(g)=s(a)s(b)s(c)\}.$$

حال نشان می دهیم که $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c=T$. مشخص است که $a\circ(b\circ c)\bigcup(a\circ b)\otimes c\subseteq T$.
فرض کنید $y\in T$ دلخواه باشد. بنابراین $s(a)s(b)s(c)=s(y)$. چون تصویر G زیر مجموعه بسته ای از A می باشد، $g\in G$ وجود دارد به طوری که $s(a)s(b)=s(g)$. در نتیجه $g\in a\circ b$ و $y\in g\circ c$. پس $y\in(a\circ b)\circ c$. بنابراین $(a\circ b)\circ c=T$ و به همین صورت، $a\circ(b\circ c)=T$. لذا $(G,\circ)$ یک ابرگروه است.

به سادگی می توان دید ابرگروه $(G,\circ)$ یک فضای اتصال است. برای این منظور، فرض کنید $A=G$ گروه غیر آبلی و s تابع همانی روی G باشد. در این صورت ابرگروه $(G,\circ)$، جابجایی نیست.

قضیه 3. فرض کنیم A یک گروه آبلی و $s:G\rightarrow A$ یک تابع باشد. اگر تصویر G زیر مجموعه بسته ای از A باشد، $(G,\circ)$ یک فضای اتصال است.

اثبات. با استفاده از لم 1، $(G,\circ)$ یک ابرگروه است. فرض می کنیم $a,b,c,d\in G$ و $t\in {}^{a}\!/_{b}\bigcap {}^{c}\!/_{d}$. بنابراین $a\in t\circ b$ و $c\in t\circ d$. در این صورت $s(a)=s(t)s(b)$ و $s(c)=s(t)s(d)$. در نتیجه $s(a)s(b)^{-1}=s(t)=s(c)s(d)^{-1}$. این ایجاب می کند که $s(a)s(d)=s(b)s(c)=s(t)$. با توجه به مطالب فوق ما نشان داده ایم که $a\circ d\bigcap b\circ c\neq\phi$. بدین ترتیب اثبات کامل می شود.

قرارداد. برای افراز λ از n، $Part(\lambda)$ را مجموعه تمام فرازهای λ در نظر می گیریم. $\Pi_d(n)$ مجموعه تمام افرازهای با فرازهای متمایز بوده و $[n]$ را بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x تعریف می کنیم.
فرض کنیم λ و μ دو افراز از n باشند. ابرعمل $\otimes$ را روی $\Pi_d(n)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\lambda\otimes\mu=\{\theta\vdash n \mid Part(\theta)\subseteq Part(\lambda)\bigcup Part(\mu)\}.$$

به سادگی می توان دید که $(\Pi_d(n),\otimes)$ یک H_v-گروه است.

قضیه 4. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. اگر $2|n$، در این صورت

$$\left|\Pi_d(n)\right|=2+(-1)^{1+\frac{n}{2}}+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\sum_{\beta_{n-2j+3}=0}^{\left[\frac{n}{n-2j+3}\right]}\sum_{\beta_{n-2j+1}=0}^{\left[\frac{n}{n-2j+1}\right]}\cdots\sum_{\beta_{2j-1}=0}^{\left[\frac{n}{2j-1}\right]}\sum_{j=3}^{1+\left[\frac{n}{4}\right]}\left(\frac{n-\sum_{x=j}^{\frac{n}{2}-j+2}(2x-1)\beta_{2x-1}}{2j-3}\right),$$

اگر $2\nmid n$، آنگاه

$$\left|\Pi_d(n)\right| = 3 + (-1)^{\frac{n+1}{2}} + \left[\frac{n}{4}\right] + \sum_{\beta_{n-2j+2}=0}^{\left[\frac{n}{n-2j+2}\right]} \sum_{\beta_{n-2j}=0}^{\left[\frac{n}{n-2j}\right]} \cdots \sum_{\beta_{2j-1}=0}^{\left[\frac{n}{2j-1}\right]} \sum_{j=3}^{1+\left[\frac{n-1}{4}\right]} \left(\frac{n - \sum_{x=j}^{\frac{n-1}{2}-j+2} (2x-1)\beta_{2x-1}}{2j-3} \right).$$

اثبات. با استفاده از قضیه افراز اویلر [٤]، $\left|\Pi_d(n)\right|$ مساوی با تعداد افرازهای با فرازهای فرد است. برای اثبات قضیه فقط کافی است که تعداد افرازهای با فرازهای فرد را محاسبه کنیم. فرض کنیم n عددی زوج باشد و B_3 مجموعه تمام افرازهای با فرازهای فرد، به طوری که $3 \in \lambda$. مجموعه B_{2k+1} را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$B_{2k+1} = \{\lambda \mid 3 \notin \lambda, 5 \notin \lambda, \cdots, (2k-1) \notin \lambda, (2k+1) \in \lambda\}.$$

به سادگی می توان نتیجه گرفت که

$$po(n) = 1 + \left|B_3\right| + \left|B_5\right| + \cdots + \left|B_{n-1}\right| = \sum_{j=3}^{1+\frac{n}{2}} \left|B_{2j-3}\right|.$$

حال مرتبه $\left|B_{2j-3}\right|$ را محاسبه می کنیم، که $1 \le j \le \frac{n}{2}+1$. برای این منظور فرض می کنیم که $B_{2j-3,i} = \{\lambda \mid Max\lambda = i\}$. در نتیجه

$$\left|\Pi_d(n)\right| = 2 + (-1)^{1+\frac{n}{2}} + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \sum_{\beta_{n-2j+3}=0}^{\left[\frac{n}{n-2j+3}\right]} \sum_{\beta_{n-2j+1}=0}^{\left[\frac{n}{n-2j+1}\right]} \cdots \sum_{\beta_{2j-1}=0}^{\left[\frac{n}{2j-1}\right]} \sum_{j=3}^{1+\left[\frac{n}{4}\right]} \left(\frac{n - \sum_{x=j}^{\frac{n}{2}-j+2} (2x-1)\beta_{2x-1}}{2j-3} \right),$$

و اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، در این صورت

$$\left|\Pi_d(n)\right| = 3 + (-1)^{\frac{n+1}{2}} + \left[\frac{n}{4}\right] + \sum_{\beta_{n-2j+2}=0}^{\left[\frac{n}{n-2j+2}\right]} \sum_{\beta_{n-2j}=0}^{\left[\frac{n}{n-2j}\right]} \cdots \sum_{\beta_{2j-1}=0}^{\left[\frac{n}{2j-1}\right]} \sum_{j=3}^{1+\left[\frac{n-1}{4}\right]} \left(\frac{n - \sum_{x=j}^{\frac{n-1}{2}-j+2} (2x-1)\beta_{2x-1}}{2j-3} \right).$$

بدین ترتیب قضیه اثبات می شود.

تعریف. فرض کنیم X یک مجموعه غیرتهی باشد. تابع $f: X \to P^*(X)$ یک جایگشت تعمیم یافته روی X است، اگر $\bigcup_{x\in X} f(x) = f(X) = X$. مجموعه ی تمام جایگشت های تعمیم یافته روی X را با M_X نشان می دهیم.

در لم زیر ارتباط بین تابع افراز $po(n)$ و مرتبه ابرگروه $M_{I(n)}$ را بررسی می کنیم.

قضیه 5. $po(n) \le \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (2^{n-i}-1)^n$.

اثبات. با استفاده از قضیه افراز اویلر[٤]، به سادگی دیده می شود که $po(n) = |\Pi_d(n)|$. با استفاده از گزاره 4.1[٥]، طرف راست این نامساوی از مرتبه $M_{I(n)}$ می باشد. بنابراین فقط کافی است که نشان دهیم $|\Pi_d(n)| \le |M_{I(n)}|$. برای این منظور، همریختی القایی $\eta: \Pi_d(n) \to M_{I(n)}$ را به صورت $\eta(\mu)(x) = \mu \circ x$ تعریف می کنیم. که در آن نگاشت $\circ: \Pi_d(n)\times I(n) \to P^*(I(n))$ با ضابطه ی $\lambda \circ k = Part(\lambda)\bigcup k$ تعریف شده است و $I(n) = \{1,2,\cdots,n\}$. در ادامه نشان می دهیم که η یک به یک است. از فرض $\eta(\mu) = \eta(\xi)$، می توان نتیجه گرفت که برای هر $x \in I(n)$، $\mu \circ x = \xi \circ x$. این ایجاب می کند که $Part(\mu)\bigcup\{x\} = Part(\xi)\bigcup\{x\}$. حال فرض می کنیم $x \in Part(\mu)$ دلخواه باشد. در این صورت $Part(\xi) \subseteq Part(\xi)\bigcup\{x\} = Part(\mu)$. و به همین ترتیب $Part(\mu) \subseteq Part(\xi)$. بنابراین $Part(\mu) = Part(\xi)$. حال چون μ و ξ دارای فرازهای متمایز هستند، می توان نتیجه گرفت که $\mu = \xi$.

References:

1. Corsini, P., *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Second Edition, Aviani Editore (1993).
2. Vougiouklis, T., *Hyperstructures and Their Representations*, Hadronic Press Inc. (1994).
3. Ashrafi, A.R., *Italian J. Pure. Appl. Math.*, **10**, 199 (2001).
4. Andrews, G.E., *Number Theory*, Hindustan Publishing Corporation (India) Delhi (1992).
5. Madanshekaf, A., and Ashrafi, A. R., *Italian J. Pure. Appl. Math.*, **3**, 127 (1998).