

پلاسمای کوانتومی مغناطیسی

مهران شاه‌منصوری*، بیژن فرخی

گروه فیزیک، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

گروه فیزیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران

تاریخ دریافت: ۸۷/۶/۱۲

تاریخ پذیرش: ۸۸/۵/۱۳

چکیده

مقدمه: به دلیل اهمیت و کاربرد دینامیک یک گاز الکترون کوانتومی برای سیستم‌های فیزیکی مختلف، این موضوع مورد توجه قرار گرفته است. در تقریب هارتری، هر الکترون بوسیله یک تابع موج تک ذره ای (که از معادله شرودینگر تبعیت می‌کند) توصیف می‌شود، و نیروی الکتروستاتیکی که بر آن وارد می‌شود از معادله پواسون منتج می‌شود. مدل هارتری می‌تواند در یک مدل فشرده تر، با استفاده از توابع ویگنر نوشته شود. نمایش ویگنر یک وسیله مفید در بیان مکانیک کوانتومی در یک ساختار فضای فاز است. سیستم ویگنر-پواسون برای دسته وسیعی از مخلوط‌های آماری، که در آنها معادله شرودینگر دربرگیرنده یک جزء غیر خطی است، می‌تواند به یک سیستم پواسون-شرودینگر مؤثر کاهش داده شود.

هدف: استفاده از سیستم شرودینگر-پواسون مؤثر برای مطالعه یک سیستم گاز الکترونی دو بعدی بوده است. برای این منظور باید یک پتانسیل غیر خطی برای سیستم تعریف کرد. همچنین امواج الکترومغناطیسی، غیر عادی به عنوان یک حالت خاص مورد مطالعه قرار گرفته است.

روش بررسی: در این مقاله با بکار بردن معادله شرودینگر غیر خطی، سیستم را در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی در نظر گرفته و رابطه پاشندگی سیستم محاسبه شده است، و نتایج مربوط به حضور و عدم حضور آثار کوانتومی و آثار ناشی از حضور میدان مغناطیسی بررسی شده است.

نتایج: برای گاز الکترونی دو بعدی با دمای صفر، پتانسیل غیر خطی است و متناسب با $|V|$ است. در حد طول موجهای بلند، نتیجه حاصل از سیستم شرودینگر-پواسون مؤثر با سیستم ویگنر-پواسون یکسان بدست آمده است. نتیجه گیری: می توان معادله ویگنر در فضای فاز را به یک معادله شرودینگر غیر خطی کاهش داد. از مطالعه انتشار موج در سیستم برای حالت خاص $\bar{k} = \hat{i}k$ ، مشاهده می شود که رابطه پاشندگی بدست آمده بر رابطه پاشندگی امواج غیر عادی منطبق است. در این کار رابطه پاشندگی امواج غیر عادی با تصحیح کوانتومی بدست آمده است.

واژه های کلیدی: پلاسمای کوانتومی، گاز الکترونی، مدل هارتری، مدل ویگنر، سیستم پواسون-شرودینگر

مقدمه

دینامیک یک گاز الکترون کوانتومی برای دستة وسیعی از سیستمهای فیزیکی مثل؛ فلزات معمولی، نیمرساناها و حتی کوتوله های سفید، دارای کاربرد است. در تقریب هارتری، هر الکترون بوسیله یک تابع موج تک ذره ای (که از معادله شرودینگر تبعیت می کند) توصیف می شود، و نیروی الکتروستاتیکی که بر آن وارد می شود از معادله پواسون منتج می شود.^(۱)

مدل هارتری می تواند در یک مدل فشرده تر، با استفاده از توابع ویگنر نوشته شود. نمایش ویگنر^(۲) یک وسیله مفید در بیان مکانیک کوانتومی در یک ساختار فضای فاز است.^(۳) در این نمایش یک حالت کوانتومی (خالص یا مخلوط) به وسیله تابع ویگنر توصیف می شود (یعنی با یک تابع از متغیرهای فضای فاز)، و معادله ویگنر تابعی را ایجاد می کند که به معادله ولاسوف (که آنرا از فیزیک پلاسمای کلاسیک می شناسیم) شبیه است. باید دقت کرد که اگر چه توزیع ویگنر بسیاری از استانداردها را رعایت می کند، اما ممکن است که در شرایطی هم منفی شود. مدل خود سازگار حاصل، سیستم ویگنر-پواسون نامیده می شود.^(۴-۶) در ادامه یک سیستم شرودینگر-پواسون مؤثر را مورد استفاده قرار می دهیم، که در شرایط حدی نتایج فرمولاسیون ویگنر-پواسون جنبشی را در دو بعد ایجاد کند.^(۷-۹) در این مسأله مدل شرودینگر-پواسون مؤثر، یک معادله شرودینگر غیر خطی است، به گونه ای که پتانسیل آن وابسته به مدولاسیون تابع موج است.

نتایج و بحث

مدل نظری

معادله نیرو و معادله پیوستگی در این مدل به صورت زیر است

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \frac{e}{m} \nabla \phi - \frac{1}{mn} (\nabla P^C + \nabla P^Q) \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) = 0 \quad (2)$$

با تعریف پتانسیل مؤثر به صورت زیر

$$W(n) = \int \frac{dn'}{n'} \frac{dP^C(n')}{dn'} \quad (3)$$

و با استفاده از تعریف زیر برای فشار کوانتومی

$$P^Q = \frac{-\hbar^2 n}{4m} \nabla (\nabla \ln(n)) \quad (4)$$

معادله نیرو شکل زیر را به خود می گیرد

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \frac{e}{m} \nabla \phi - \frac{1}{m} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla (\nabla \left(\frac{\nabla n}{n} \right)) \quad (5)$$

اگر تابع موج مؤثر به صورت زیر تعریف شود

$$\psi = \sqrt{n(\vec{r}, t)} \exp(iS(\vec{r}, t)/\hbar) \quad (6)$$

که در آن $S(\vec{r}, t)$ دارای تعریف $mu(\vec{r}, t) = \nabla S(\vec{r}, t)$ است، این تابع موج می تواند در معادله زیر صدق کند

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - e\phi\psi + W\psi \quad (7)$$

معادله (۷)، معادله غیر خطی شرودینگر است، که پتانسیل آن طبق معادله (۳)، به تابع موج وابسته است. بخش حقیقی و موهومی این رابطه، معادله نیرو و معادله پیوستگی را به دست می دهند. سیستم شرودینگر-پواسون، ترکیبی از معادله ۶ و معادله زیر است.

$$\nabla^2 \phi = \frac{e}{\epsilon_0} (|\psi|^2 - n_0) \quad (8)$$

اگر یک پلاسمای الکترونی دو بعدی در نظر بگیریم، می توان از رابطه فشار کلاسیکی سیستم فرمیونی D بعدی برای آن استفاده کرد، که دارای تعریف زیر است.

$$P_C \propto n^{(D+2)/D} \quad (9)$$

بنابراین پتانسیل مؤثر برای آن به شکل زیر خواهد بود.^(۱۰)

$$W \propto n^{2/D} \quad (10)$$

بنابراین فشار کلاسیکی در دو بعد به صورت زیر است.

$$P^C = \alpha n^2 \quad (11)$$

که α پارامتری مستقل از n است. پتانسیل مؤثر به صورت

$$W = 2\alpha n = 2\alpha |\psi|^2 \quad (12)$$

بوده که از نوع دفعی است و به تخت شدن چگالی الکترونها تمایل دارد. و در آن از تعریف $\alpha = \frac{\hbar^2 \pi}{m}$ ، استفاده کرده ایم.

انتشار موج

اگر سیستم شرودینگر-پواسون مؤثر (معادلات ۷ و ۸) را با استفاده از معادله (۱۲) برای پتانسیل مؤثر، خطی کنیم، و در آن از شرط $u_{x_0} = u_{y_0} = 0$ و $\vec{k} = k\hat{i}$ استفاده کنیم، رابطه پاشندگی زیر حاصل خواهد شد.

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + V_F^2 k^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} \quad (13)$$

باید دقت کرد که برای حالت $\hbar \rightarrow 0$ ، این رابطه دقیقا همان رابطه پاشندگی بدست آمده از سیستم پواسون-ولاسوف کلاسیکی (در تعادل فرمی دیراک در دمای صفر) است. در معادله (۱۳) از تعریف $V_F = \sqrt{\frac{2\hbar^2 \pi}{m^2} n_0}$ برای سرعت فرمی استفاده شده است.

اگر جهت انتشار را در صفحه $x-y$ به صورت $\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j}$ در نظر بگیریم، با طی مراحل بالا نتیجه زیر را برای رابطه پاشندگی بدست می آوریم

$$\omega^2 = H_x k_x + H_y k_y \quad (14)$$

که در آن از تعاریف زیر استفاده شده است

$$H_x = \omega_{pe}^2 \frac{k_x}{k^2} + \frac{2\alpha n_0}{m} k_x + \frac{\hbar^2}{4m^2} k_x k^2 \quad (15)$$

$$H_y = \omega_{pe}^2 \frac{k_y}{k^2} + \frac{2\alpha n_0}{m} k_y + \frac{\hbar^2}{4m^2} k_y k^2 \quad (16)$$

مطالعه رفتار سیستم در حضور میدان مغناطیسی خارجی

مطالعه پلاسمای کوانتومی اخیرا توسط برخی محققین صورت پذیرفته است.^(۱۱-۱۴) در ادامه ما با در نظر گرفتن یک میدان مغناطیسی خارجی ثابت^(۱۵) در جهت مثبت محور z -ها، سعی می کنیم تا معادله پاشندگی این سیستم را بدست آوریم. جهت میدان مغناطیسی، به صورت $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ ، در نظر گرفته می شود. در این صورت شکل خطی شده معادله پیوستگی و معادله حرکت برای الکترونها به شکل زیر است

$$\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m} (\vec{E}_1 + \frac{\bar{u}_e \times \vec{B}_0}{c}) + \frac{\hbar^2}{4m^2 n_{e0}} \bar{\nabla} (\nabla^2 n_{e1}) \quad (17)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_{e0} \nabla \cdot \bar{u}_e = 0 \quad (18)$$

در روابط بالا دمای الکترون قابل چشمپوشی فرض شده است. معادلات ماکسول خطی شده را می توان به شکل زیر نوشت

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (19)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} n_{e0} \bar{u}_e \quad (20)$$

فرض می کنیم کمیات اختلالی به صورت $\propto \exp(ik \cdot r - i\omega t)$ ، با فضا و زمان تغییر کنند. با در نظر گرفتن جهت انتشار را در صفحه xy می توان بردار موج را به صورت $\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j}$ ، تعریف کرد. همچنین میدان الکتریکی را در صفحه xy و به صورت $\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j}$ در نظر میگیریم. در این حالت از تبدیل فوریه معادلات (۱۹) و (۲۰)، معادله موج را بدست می آوریم

$$(\omega^2 - k^2 c^2) \vec{E} + c^2 (k_x E_x + k_y E_y) \vec{k} = \frac{in_o \omega e}{\epsilon_o} \vec{u}_e \quad (21)$$

همچنین از تبدیل فوریه معادلات (۱۷) و (۱۸) مولفه های سرعت را به صورت زیر بدست می آوریم

$$u_{ex} = \frac{e}{im\omega A_1} \left(1 + \frac{A_4 A_1}{A_3 A_1 + A_2 A_4}\right) E_x + \frac{e}{im\omega} \left(\frac{A_2}{A_3 A_1 + A_2 A_4}\right) E_y = P_1 E_x + P_2 E_y \quad (22)$$

$$u_{ey} = \frac{e}{im\omega A_1} \left(\frac{A_4 A_1}{A_3 A_1 + A_2 A_4}\right) E_x + \frac{e}{im\omega} \left(\frac{A_1}{A_3 A_1 + A_2 A_4}\right) E_y = P_3 E_x + P_4 E_y \quad (23)$$

که در آن ضرائب بصورت زیر تعریف می شوند

$$A_1 = i\omega + \frac{i\hbar^2 k_x^4}{4m\omega}, A_2 = -i\left(\frac{\omega_c}{\omega} + \frac{\hbar^2 k_x^3 k_y}{4m\omega}\right), A_3 = i\left(\omega + \frac{\hbar^2 k_y^4}{4m\omega}\right), A_4 = i\left(\frac{\omega_c}{\omega} - \frac{\hbar^2 k_x^3 k_y}{4m\omega}\right)$$

اکنون با قرار دادن مولفه های سرعت از معادلات (۲۲) و (۲۳) در معادله (۲۱)، به دستگاه معادلات زیر می رسیم

$$\begin{cases} [(\omega^2 - k^2 c^2 + k_x^2 c^2) - \frac{\omega_{pe}^2}{A_1} \left(1 + \frac{A_2 A_4}{A_3 A_1 + A_2 A_4}\right)] E_x + [k_x k_y c^2 - \omega_{pe}^2 \frac{A_2}{A_3 A_1 + A_2 A_4}] E_y = 0 \\ [k_x k_y c^2 - \omega_{pe}^2 \frac{A_4}{A_3 A_1 + A_2 A_4}] E_x + [(\omega^2 - k^2 c^2 + k_y^2 c^2) - \omega_{pe}^2 \frac{A_1}{A_3 A_1 + A_2 A_4}] E_y = 0 \end{cases} \quad (24)$$

شرط آنکه این دستگاه دارای پاسخ باشد آنست که دترمینان ضرایب آن صفر باشد. لذا با قرار دادن دترمینان ضرایب برابر با صفر به نتیجه زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} & [(\omega^2 - k^2 c^2 + k_x^2 c^2) - \frac{\omega_{pe}^2}{A_1} \left(1 + \frac{A_2 A_4}{A_3 A_1 + A_2 A_4}\right)] [(\omega^2 - k^2 c^2 + k_y^2 c^2) - \omega_{pe}^2 \left(\frac{A_1}{A_3 A_1 + A_2 A_4}\right)] \\ & - [k_x k_y c^2 - \omega_{pe}^2 \frac{A_2}{A_3 A_1 + A_2 A_4}] [k_x k_y c^2 - \omega_{pe}^2 \frac{A_4}{A_3 A_1 + A_2 A_4}] = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

معادله (۲۵)، بیانگر رابطه پاشندگی سیستم است که در یک حالت کلی با احتساب تاثیر آثار کوانتومی و میدان مغناطیسی روی آن بدست آمده است. در ادامه سعی می شود تا در شرایطی حدی شکلهای ساده تری از این رابطه را برای سیستم بدست بیاوریم. تا با استفاده از رابطه پاشندگی ساده تر، بهتر بتوان تأثیر آثار کوانتومی و میدان مغناطیسی را روی سیستم مطالعه کرد.

بررسی حالات حدی

الف) در غیاب آثار کوانتومی و مغناطیسی؛ یعنی به ازای شرایط حدی $\hbar \rightarrow 0$ و $B_0 \rightarrow 0$ ، رابطه پاشندگی (۲۵) به رابطه زیر تبدیل می شود

$$(\omega^2 - k^2 c^2) \omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad (26)$$

که در واقع همان رابطه پاشندگی امواج الکترومغناطیسی، در پلاسمای بدون میدان مغناطیسی مستقیم است.

ب) در حالت کوانتومی مغناطیسی؛ اگر راستای انتشار را در جهت محور X ها در نظر بگیریم، از رابطه (۲۵) به نتیجه زیر می رسیم

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{(\omega^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} (1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}) - \omega_h^2 - (\frac{\omega_{pe}^2 \omega_c}{\omega})^2 / (\omega^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} - \omega_h^2))}{\omega^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} - \omega_c^2} \quad (27)$$

که در آن از تعریف $\omega_h^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_c^2$ (که بیانگر فرکانس نوسانات هیبرید پایین است)، استفاده شده است. اگر در رابطه پاشندگی حاصل، \hbar را به سمت صفر میل دهیم رابطه پاشندگی (۲۷) به رابطه زیر تبدیل می شود

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_h^2 - (\omega_{pe}^2 \omega_c / \omega)^2 / (\omega^2 - \omega_h^2))}{\omega^2 - \omega_c^2} \quad (28)$$

رابطه (۲۸) که در این حالت بدست آمده است، همان رابطه پاشندگی موج غیر عادی است. بنابراین رابطه (۲۷) نشان دهنده تأثیر تصحیح کوانتومی امواج غیرعادی در پلاسماست. رابطه (۲۷) را می توان به شکل زیر نیز نوشت

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 (1 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2 \omega^2}) - \omega_{pe}^2}{\omega^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} - \omega_h^2} \quad (29)$$

با میل دادن عدد موج به سمت بینهایت، از رابطه (۲۹) شرط رخداد تشدید در پلاسمای به صورت زیر بدست می آید

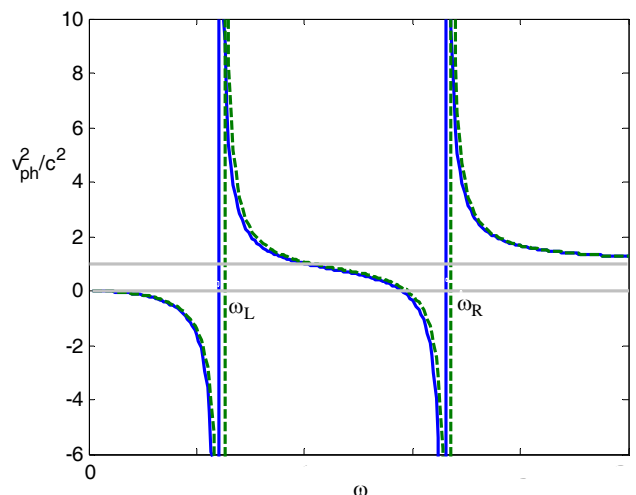
$$\omega^2 = \frac{\hbar^2 k^4}{4m} + \omega_{pe}^2 + \omega_c^2 \quad (30)$$

که شرط تشدید نشان دهنده رابطه پاشندگی امواج الکتروستاتیکی در عرض B_0 ، با آثار کوانتومی است. یعنی اینکه این موج در شرط تشدید، ویژگی الکترومغناطیسی خود را از دست می دهد، اما آثار کوانتومی در شرط تشدید موج هم تأثیر می گذارند.

تصحیح کوانتومی، فرکانس قطع را نیز به شکل زیر متأثر می کند

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\hbar^2 k^4}{4m} + \omega_c^2 \pm \sqrt{(\frac{\hbar^2 k^4}{4m} + \omega_c^2)^2 - 4\omega_{pe}^2 (\frac{\hbar^2 k^4}{4m} + \omega_{pe}^2)} \right] = \omega_{r,l}^2 \quad (31)$$

که دو مقدار برای فرکانس قطع، شامل تصحیح کوانتومی نشان می دهد. شکل ۱- نمودار تغییرات سرعت فاز بر حسب فرکانس را به صورت نمی برای موج غیر عادی نشان می دهد. تصحیح کوانتومی باعث می شود تا پهنای ناحیه مجاز برای انتشار موج، افزایش بیابد.



شکل ۱- نمودار تغییرات کمی سرعت فاز بر حسب فرکانس. نمودار

خط چین در بر گیرنده تصحیح کوانتومی است که به ازای

$$\frac{\hbar^2 k^4}{4m} = 0.075 \omega_h^2$$

ترسیم شده است.

نتیجه گیری

غالباً دینامیک یک مخلوط آماری، توسط یک سیستم ویگنر-پواسون و یا بطور معادل توسط یک دستگاه معادلات شرودینگر جفت شده با معادله پواسون (مدل هارتری) توصیف می شود. در این مقاله نشان داده است که می توان معادله ویگنر در فضای فاز را به یک معادله شرودینگر غیر خطی کاهش داد.

در ادامه با در نظر گرفتن میدان مغناطیسی، معادلات دینامیکی را در حضور میدان مغناطیسی و با در نظر گرفتن آثار کوانتومی برای سیستم نوشته و سپس رابطه پاشندگی برای آن بدست آمده است. همچنین رابطه پاشندگی در چند حالت حدی مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت خاص $\vec{k} = \hat{i}k$ ، رابطه پاشندگی بدست آمده، بر رابطه پاشندگی امواج غیر عادی منطبق است.

به طور خاص موج غیر عادی با تصحیح کوانتومی، مورد بررسی قرار گرفت. تصحیح کوانتومی بر فرکانس تشدید و فرکانس قطع این موج هم اثر گذار است، که بیانی برای این دو فرکانس با تصحیح کوانتومی بدست آمد. تصحیح کوانتومی باعث می شود تا پهنای ناحیه فرکانسی مجاز برای انتشار موج، افزایش پیدا کند.

References:

1. Ashcroft, N.W., and Mermin, N.D., *Solid State Physics.*, Saunders College Publishing, Florida (1976).
2. Wigner, E.P., *Phys.Rev.*, **40**, 749 (1932).
3. Tatarskii, V.I., *Usp. Fis. Nauk.*, **139**, 587(1983).
4. Kluskdahl, N.C., Kriman, A.M., Ferry, D.K., and Ringhofer, C., *Phys .Rev. B*, **39**, 7720 (1989).
5. Markowich, P.A., Ringhofer, C.A., and Schmeiser, C., *Semiconductor Equations*, Verlag Wien, NewYork (1990).
6. Drrummond, J.E., *Plasma Physics* , McGraw-Hill, New York (1961).
7. Manfredi, G., and Hass, F., *Physical Review B*, **64**, 075316 (2001).
8. Gardner, C.L., *S. I. A. M. J. Appl. Math.*, **54**,409 (1994).
9. Gasser, I., Markowich, P.A., and Unterreiter, A., *in Modeling of collisions*, edited by P. A. Raviart, Ggauthier- Villars, Paris (1997).
10. Balescu, R., *Statistical Mechanics of charged Particles*, John Wiley, London (1963).
11. Suttorp, L.G., *Contributions to Plasma Physics*, **33**, 503 (2006).
12. Haas, F., *E. P. L.*, **77**, 45004 (2007).
13. Salimullah, M., Zeba, I., Uzma, Ch., Shah, H.A., and Murtaza, G., *Physics Letters A*, **372**(13), 2291 (2008).
14. Marklund, M., Eliasson, B., and Shukla, P.K., *Phys. Rev. E*, **76**, 067401 (2007).
15. Farokhi, B., and Shahmansouri, M., *Phys. Scr.*, **79**, 065501 (2009).