

روشی نوین در طراحی موجک بهینه برای نویززدایی از طیف پرتوگاما (کبالت ۶۰)

فرشید باباپور مفرد*

گروه مهندسی پرتوپزشکی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

حسین احمدی نوبری

گروه مهندسی برق و کنترل، دانشکده فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

علی فیاضی

گروه مهندسی برق، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ پذیرش: ۸۸/۱/۲۷

تاریخ دریافت: ۸۷/۷/۲۳

چکیده

مقدمه: تحلیل طیف پرتوگاما با استفاده از تبدیل موجک در سالهای اخیر به یک تکنیک جدید و امید بخش در شناسایی ایزوتوپ های هسته ای تبدیل شده است. مزیت تبدیل موجک نسبت به سایر روشها اینست که یک سیگنال می تواند به طور همزمان در چندین مقیاس تحلیل شود.

هدف: هدف این تحقیق بررسی، مقایسه و ارائه پیشنهادی در طراحی موجک جهت حذف نویز در طیف های پرتو گاما جهت تفکیک مشخصات طیف و مشخص کردن بر همکنش های غالب نظیر جذب فوتوالکتریک و پراکندگی کامپتون و ... است.

روش بررسی: در این تحقیق با استفاده از مفاهیم موجک در فضای چند تفکیکی متعامد یکه موجکی بهینه متناسب با مشخصات طیف کبالت ۶۰ گرفته شده از آشکارساز NaI طراحی شد. عملکرد آن جهت نویز زدایی از طیف پرتوگاما به منظور شناسایی پتانسیل ایزوتوپ خراب و کاذب از لبه کامپتون و پیک های اسکتر به صورت کیفی مورد بررسی قرار گرفت، در نهایت بهبود طیف به صورت کمی (توسط معیار بهبود نسبت سیگنال به نویز) ارزیابی شد.

*عهده دار مکاتبات: Farshid.mofrad@yahoo.com

نتایج: در نتایج بهبود عملکرد موجک طراحی شده، نسبت به موجک های استاندارد مشاهده می شود به طوریکه که در آن نسبت سیگنال به نویز تا ۱/۱۹ دسی بل (۱۱/۵ درصد) افزایش می یابد.

نتیجه گیری: در این تحقیق موجکی بهینه برای نویز زدایی از طیف های پرتو گاما (کبالت ۶۰) طراحی شد که نسبت به موجک های استاندارد دارای قابلیت حذف نویز بیشتری می باشد. طراحی موجک های بهینه برای طیف های هسته ای مختلف می تواند راهکاری جهت بهبود شناسایی ایزوتوپ ها و تفکیک پیک های آنها باشد.

واژه های کلیدی: کبالت ۶۰، نویز زدایی، آنالیز طیف پرتو گاما، طراحی موجک

مقدمه

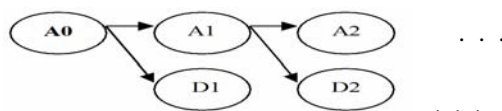
اکثر سیگنال ها در عمل سیگنال هایی در حوزه زمان هستند. اما در اکثر کاربردهای مرتبط با پردازش سیگنال نمایش زمانی همیشه بهترین نمایش از یک سیگنال نیست. در بسیاری از موارد اطلاعات مهم و تشخیصی سیگنال در محتوای فرکانسی آن نهفته است. برای دست یابی به محتوای فرکانسی سیگنال از تبدیل فوریه سیگنال استفاده می شود. اما نقص و مشکل جدی که تحلیل فوریه در انتقال به حوزه فرکانس دارد، اینست که اطلاعات زمانی سیگنال گم می شود. این نقص برای یک سیگنال ساکن خیلی مهم نیست. اما اکثر سیگنال های واقعی و مورد علاقه نظیر الکتروکاردیوگرام و الکترو آنسفالو گرام و ... سیگنال هایی غیر ساکن هستند و بدین صورت تحلیل فوریه برای تحلیل گذرای این نوع سیگنال ها ناکارآمد است. بنابراین از ابزار قدرتمند دیگری به نام تبدیل موجک جهت تحلیل این نوع سیگنال ها استفاده می شود. در این تحقیق از تبدیل موجک برای تحلیل طیف پرتو گاما (کبالت ۶۰) استفاده شده است. استفاده از آنالیز موجک جهت شناسایی و نویز زدایی از طیف های هسته ای در سال های اخیر گسترش یافته است.^(۱-۴) آنالیز موجک عبارت است از تحلیل مکانی و فرکانسی یک سیگنال به طور همزمان که در ادبیات موجک به عنوان مقیاس اشاره شده است. در واقع این آنالیز (آنالیز موجک) تعمیمی از تحلیل فوریه است که فقط سیگنال را در حوزه فرکانس مورد ارزیابی قرار می دهد. مشابه آنچه در تبدیل فوریه داشتیم فرمول ریاضی تبدیل موجک یک سیگنال از فرمول (۱) بدست می آید.^(۴)

$$Wf(E, s) = T(E, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_{E,s}^*(t) dt \quad (1)$$

که W نشان دهنده تبدیل موجک سیگنال $f(t)$ ، T تبدیل موجک، ϕ نشان دهنده موجک مادر یا موجک تحلیل کننده است. در این نمایش انتگرالی متغیر t ، متغیر ساختگی انتگرال است که مطابق با انرژی در طیف مان محسوب می شود. از معادله (۲) واضح است که نتیجه $T(E, s)$ شامل آرایه دو بعدی، از هر دو ضرائب موقعیت (انرژی و مقیاس) خواهد بود. به منظور دست یافتن به تفکیک پذیری مختلف در فرکانس بالا و پایین مفهوم موجک با استفاده از خواص شیفت و مقیاس گذاری رفته رفته توسعه یافته و بر اساس همین مفاهیم تفکیک پذیری فرکانسی و مکانی

بهتری خواهیم داشت. با معرفی و ابداع آنالیزمولتی رزولوشن^۱ استفاده از تبدیل موجک شکل عمومی تری پیدا کرد.^(۱) $f(x)$ در فرمول (۲) مشخص کننده سیگنال اصلی، A تعیین کننده فضای تقریب سیگنال به عنوان فرکانس پایین و D تعیین کننده فضای جزئیات سیگنال به عنوان فرکانس بالا است. که نمودار درختی فرمول (۲)، در (شکل ۱) آمده است.

$$f_j(x) = A_j f = A_{j+1} f + D_{j+1} f = A_{j+2} f + D_{j+2} f + D_{j+1} f = \dots \quad (2)$$



شکل ۱- نمودار درختی تقریب و جزئیات طیف.

با توجه به فرمول (۲) واضح است که اطلاعات در مرحله j ام تجزیه شامل اطلاعات در مرحله $j+1$ ام تجزیه و اطلاعات در مرحله $j+1$ ام شامل اطلاعات در مرحله $j+2$ ام و همین طور ... می باشد.

مواد و روش ها

تبدیل موجک گسسته (DWT)^۲

تبدیل ویولت گسسته، فضای $L^2(\mathbb{R})$ به زیر فضاهای V_j تجزیه می کند. که در آن

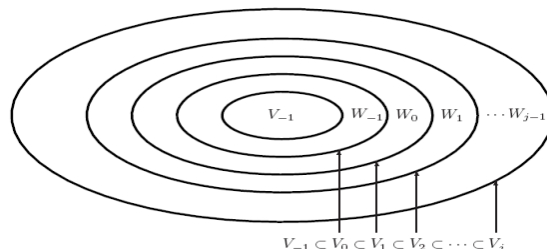
$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \quad (3)$$

$$\bigcup_{-\infty}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}); \quad \bigcap_{-\infty}^{\infty} V_j = \{\phi\} \quad (4)$$

شکل ۲ این زیر فضاهای تودرتو را نشان می دهد. زیر فضاهای V_j بوسیله یک سری توابع پایه که روابط آن در زیر آمده ساخته می شود.

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad k, j \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad k, j \in \mathbb{Z} \quad (6)$$



شکل ۲- زیر فضاهای تودرتو شامل فضاهای مربوط به توابع پایه و موجک های مادر

1-Multiresolution Analysis(MRA)

2- Discrete Wavelet Transform (DWT)

با توجه به تعاریف بالا هر سیگنال $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ را می توان به صورت ترکیب خطی از توابع پایه مذکور نوشت:

$$\text{که،} \quad f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j,k} \cdot 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (7)$$

$$a_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot 2^{j/2} \phi(2^j t - k) dt. \quad (8)$$

$\phi(t)$ نماینده تابع مقیاس و $a_{j,k}$ نماینده ضرایب مقیاس است. اما از آنجاییکه زیر فضاهای V_j تودرتو می باشند لذا بسط $f(t)$ متعامد نیست. همچنین توابع $\left\{ 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ در سرتاسر مقیاس ها متعامد نخواهند بود. یعنی:

$$\left\langle 2^{j/2} \phi(2^j t - k), 2^{j'/2} \phi(2^{j'} t - k') \right\rangle_{k,k' \in \mathbb{Z}} \neq 0, \quad \text{when } j \neq j', \quad (9)$$

بنابراین این توابع نمی توانند پایه های متعامد را برای فضای $L^2(\mathbb{R})$ تشکیل دهند. زیر فضاهای تودرتو بدین معنی است که زیر فضای V_1 شامل زیر فضای V_0 می باشد. بدین ترتیب $\phi(t)$ که در زیر فضای V_0 قرار دارد، می تواند بر حسب توابع پایه مربوط به زیر فضای V_1 مطابق رابطه زیر (معادله اتساع) بیان شود.

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h(k) \phi(2t - k) \quad (10)$$

که در آن $h(k)$ تصویر $\phi(t)$ بر روی توابع پایه زیر فضای V_1 می باشد، و از رابطه زیر بدست می آید:

$$h(k) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (11)$$

به منظور رسیدن به یک تجزیه متعامد از فضای $L^2(\mathbb{R})$ ، فضاهای تفاضل W_j را به عنوان مکمل فضاهای V_j در V_{j+1} تعریف می شوند. شکل ۲ این زیر فضاهای تفاضل را نشان می دهد. بدین معنی که:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad \text{and} \quad V_j \cap W_j = \phi. \quad (12)$$

زیر فضاهای W فضای $L^2(\mathbb{R})$ را به زیر فضاهای متعامد تجزیه می کند. بنابراین،

$$W_j \perp W_{j'} \quad \text{if } j \neq j', \quad \text{and} \quad \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = L^2(\mathbb{R}). \quad (13)$$

زیر فضای W_j بوسیله دسته ای از توابع پایه $\left\{ 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ ، پوشش داده می شود که شیفته یافته و مقیاس یافته دودویی سیگنال موجک $\psi(t)$ می باشند. بنابراین هر سیگنال $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ را می توان به صورت ترکیب خطی از این توابع پایه نوشت:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{j,k} \cdot 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (\text{Synthesis}) \quad (14)$$

$$b_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot 2^{j/2} \psi(2^j t - k) dt \quad (\text{Analysis}) \quad (15)$$

از آنجاییکه، زیر فضاهای W_j متعامد هستند. این بسط، یک بسط متعامد از سیگنال $f(t)$ می باشد. $\psi(t)$ در رابطه بالاتر موجک، و $b_{j,k}$ ضرایب موجک نامیده می شود. معادلات (۱۴) و (۱۵) باهم معادلات ترکیب و تحلیل تبدیل موجک گسسته را تشکیل می دهند. $\psi(t)$ در زیر فضای W_0 قرار گرفته است، که بخشی از زیر فضای V_1

می باشد. بنابراین می توان تابع موجک $\psi(t)$ را بر حسب توابع پایه مربوط به زیر فضای V_1 به صورت معادله زیر (معادله موجک) بیان نمود:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g(k) \phi(2t - k) \quad (\text{Wavelet equation}) \quad (16)$$

که $g(k)$ تصویر $\psi(t)$ بر روی توابع پایه زیر فضای V_1 می باشد و از رابطه زیر بدست می آید.

$$g(k) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (17)$$

زیرفضاهای تودرتو در شکل ۲ دارای توابع پایه ایی هستند که از مقیاس های مختلف سیگنال $\phi(t)$ مشتق شده اند. بنابراین نگاشت هر سیگنال $f(t)$ بر روی این زیرفضاها در واقع امکان دیدن این سیگنال را در مقیاس ها و تفکیک های مختلف می دهد. در مقیاس های بالا (مقادیر بالا j) ضرایب موجک $(b_{j,k})$ جزئیات نرم $f(t)$ را نشان می دهد، در حالیکه در مقیاس های پایین تر (مقادیر پایین j) ضرایب موجک ساختار های سخت $f(t)$ را اندازه گیری می کند. بدین ترتیب است که یک سیگنال $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ در یک تحلیل با تفکیک چندگانه متعامد یکه^۱، به یک سری نامحدود از توابع جزئی تجزیه می شود. در حالت کلی، هر زیر فضای V_M از جمع مستقیم $V_N|_{N < M}$ و $W_j|_{N \leq j < M}$ به صورت زیر بدست می آید:

$$V_M = V_N \oplus W_N \oplus W_{N+1} \oplus W_{N+2} \oplus \dots \oplus W_{M-1}. \quad (19)$$

از آنجاییکه، معادله تحلیل می تواند در تعداد محدودی از مقیاس های j ، و تعداد محدودی از شیفت های K ارزیابی شود. بنابراین تبدیل موجک گسسته هر سیگنال $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ می تواند بوسیله تعداد محدودی از ضرایب موجک بیان شود. باتوجه به معادله بالا هر سیگنال $f(t) \in V_M$ می تواند بر حسب ضرایب موجک در مقیاس های مورد علاقه $(N \leq j < M)$ ، و ضرایب مقیاس در مقیاس $N, N < M$ به صورت زیر بسط داده شود.

$$f(t) = 2^{N/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{N,k} \phi(2^N t - k) + \sum_{j=N}^{M-1} 2^{j/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{j,k} \psi(2^j t - k). \quad (20)$$

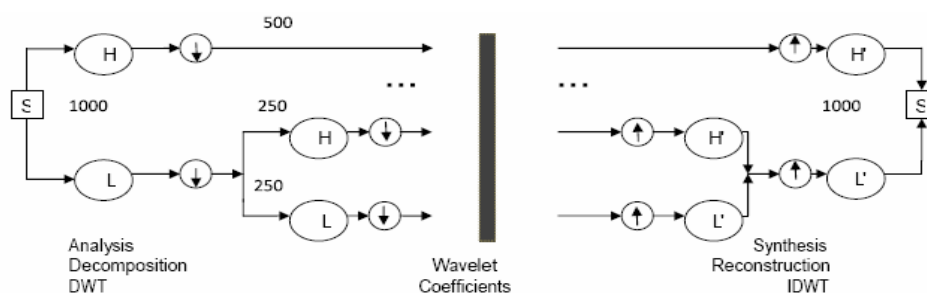
اگر سیگنال $f(t)$ محدود باشد. حدود بر روی متغیر شیفت K در عبارت بالا محدود است. بنابراین سیگنال های محدود با تعداد محدودی ضرایب موجک و مقیاس مشخص می شوند. توابع پایه $\psi(x)$ و $\phi(x)$ به ترتیب عضو فضاهای W_j و V_j هستند که این فضاها خود زیر مجموعه ای از فضای V_{j+1} می باشند لذا، این توابع می توانند به صورت ترکیبی خطی از توابع پایه فضای نوشته شوند:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \phi(2t - k) \quad (21)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] \phi(2t - k) \quad (22)$$

که دنباله های $h[k]$ و $g[k]$ در فضای تفکیک چند گانه متعامد یکه به ترتیب بیانگر پاسخ ضربه و به عبارتی ضرایب فیلترهای پایین گذر و بالا گذر آینه ای چهارتایی^۱ (QMF) هستند.⁽⁶⁾ قابل ذکر است که مطابق شکل ۴ فیلتر پایین گذر در قسمت بازسازی (L') معکوس فیلتر پایین گذر در قسمت تجزیه (L) و فیلتر بالاگذر در قسمت بازسازی (H') معکوس فیلتر بالاگذر در قسمت تجزیه (H) می باشد.

¹. Orthogonal Multiresolution Analysis



شکل ۴- بلوک دیاگرام مراحل تجزیه و باسازی سیگنال.

فیلتر پایین گذر $h[k]$ با شرط برقراری معادله (۹) و (۲۱) دارای خواص زیر است: ^(۶)

$$\sum_k h[k] = \sqrt{2} \quad (23)$$

$$\sum_k h[k]h[k-2n] = \delta[n] \quad (24)$$

$$\sum_k (-1)^k k^m h[k] = 0 \quad \text{for } m=0, \dots, M-1 \quad (25)$$

کمیت M تعداد گشتاورهای محوشونده^۲ موجک متناظر با ϕ است. ^(۷) موجک توسط فیلتر پایین گذر $h[k]$ به تنهایی مشخص می شود و فیلتر بالا گذر $g[k]$ از روی آن بدست می آید. اگر $g[k]$ به صورت رابطه زیر محاسبه شود آنگاه $\psi_{j,n}$ یک پایه متعامد برای فضای W_j خواهد بود: ^(۹)

$$g[k] = (-1)^{1-k} h[1-k] \Leftrightarrow G(\omega) = e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi) \quad (26)$$

که $H(\omega)$ و $G(\omega)$ به ترتیب تبدیل فوریه $h[n]$ و $g[n]$ می باشند.

تخمین طیف توسط تبدیل موجک

از میان انبوه کاربردهای تبدیل موجک، تخمین سیگنال اصلی از سیگنال نویزی به عنوان یکی از کاربردهای مهم محسوب می شود. از آنجائیکه سلیمان ^(۱) به منظور اعمال تکنیک های موجک طیف را معادل سیگنال در نظر گرفته است. لذا در این تحقیق هدف استخراج بهترین تخمین طیف از میان طیف نویزی دنبال می شود. رابطه میان طیف اصلی و نویزی به صورت زیر می باشد:

$$y[n] = f[n] + w[n] \quad (27)$$

که $w[n]$ بیانگر نویز است. قابل ذکر است که توزیع نویز در تابش های هسته ای پواسون است اما در صورتیکه میانگین شمارش ها از ۲۰ تجاوز کند، توزیع به سمت توزیع گوسی نرمال میل می کند. ^(۱۰) و در اینجا چون طیف پرتو گامای بدست آمده با میانگین شمارش بیش از ۲۰ بدست آمده است. لذا $w[n]$ بیانگر نویز گوسی سفید می باشد. $y[n]$ تعیین کننده طیف نویزی و $f[n]$ طیفی است که باید تخمین زده شود. تخمین f ، \tilde{f} ، از تجزیه y در یک پایه متعامد، و انتخاب یک زیر مجموعه آستانه سازی شده از ضرایب بسط برای باز سازی طیف بدست می آید این تخمین گر آستانه که روابط آن در زیر آمده است بوسیله داناها و جانستون معرفی شدند: ^(۱۱)

$$\tilde{f} = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha(\langle y, g_m \rangle) g_m \quad (28)$$

که g_m نشان دهنده بردار های پایه و

$$\alpha(x) = \begin{cases} x, & \text{if } |x| > \lambda \\ 0, & \text{if } |x| \leq \lambda \end{cases} \quad (29)$$

این نوع انتخاب سیگنال $\alpha(x)$ استراتژی آستانه سخت را اعمال می کند. که برای بدست آوردن مقدار آستانه λ استراتژی های مختلفی وجود دارد اما در حالت کلی مقدار آستانه جهانی که برای اولین بار بوسیله داناها و جانستون معرفی شد، مطابق رابطه زیر است: ^(۱۲)

$$\lambda = \sqrt{2 \ln(n)} \times \sigma_w \quad (30)$$

که در آن n طول طیف و σ_w انحراف معیار نویز است. در این روش طیف نویزی بر روی یک پایه متعامد، پایه موجک، بسط داده می شود سپس ضرایبی از بسط که بزرگتر از یک مقدار آستانه باشند حفظ و بقیه صفر می شوند. و در نهایت طیف از روی ضرایب باقی مانده باز سازی می شود. برای بهبود کارایی نویز زدایی بوسیله این روش تخمین و طراحی موجک بهینه متناسب با طیف مورد نظر، لازم است متوسط مربع خطا حداقل شود:

$$\varepsilon = E\{\|f - \tilde{f}\|^2\} \quad (31)$$

با فرض اینکه \tilde{f} با استفاده از استراتژی آستانه سخت بدست آمده باشد. می توان اینگونه بیان کرد که اگر $\lambda < \langle y, g_m \rangle$ باشد ضریب مربوطه برابر صفر و خطای حاصل برابر با $\langle f, g_m \rangle^2$ خواهد شد. و اگر $\lambda \geq \langle y, g_m \rangle$ ، این ضریب حفظ می شود که در این صورت متوسط مربع خطایی برابر با واریانس نویز σ_w^2 تولید می کند. لذا برای کوچک شدن این خطا باید تعداد ضرایبی که اندازه بزرگتر از آستانه دارند کم و بقیه ضرایب که اندازه کمتر از آستانه دارند بایستی مجموع مربعات کوچکی داشته باشند.

تقریب غیر خطی طیف در پایه های موجک

برای داشتن حداقل خطا بایستی بهترین تقریب از طیف را داشت و برای داشتن بهترین تقریب از بین بردار های موجود در پایه یک متعامد، در اینجا پایه موجک، باید دسته بردار هایی انتخاب شود که بیشترین شباهت را به طیف می دهند یا به عبارتی بزرگترین اندازه ضرب داخلی $\langle f, g_m \rangle$ را با طیف دارند. که در واقع این بردارها تعیین کننده مشخصه های اصلی طیف y می باشند. پس پایه موجکی که بتواند شرایط بالا را برآورده سازد مطلوب و بهینه خواهد بود. و در واقع بیشترین نسبت سیگنال به نویز را خواهد داشت.

اگر طیف f بوسیله M بردار که از یک پایه متعامد $O = \{g_m\}_{m \in N}$ انتخاب شده اند، تقریب زده شود آنگاه می توان نوشت:

$$f_M = \sum_{m \in M} \langle f, g_m \rangle g_m \quad (32)$$

که در آن f_M تصویر f روی M بردار است. خطای تقریب، مجموع باقیمانده هاست. که در واقع با ترم خطای بدست آمده در بخش قبلی برابری می کند برابراست با:

$$\varepsilon[m] = \|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin l_m} |\langle f, g_m \rangle|^2 \quad (33)$$

همان طور که در بالا ذکر شد برای داشتن حداقل خطا باید اندیس های موجود در l_m متناظر با M برداری باشند که بیشترین شباهت را با طیف دارند. اگر ضرایب $\{\langle f, g_m \rangle\}_{m \in N}$ به صورت نزولی مرتب شوند یعنی برای هر $m \in N$ ، $|\langle f, g_{m_k} \rangle| \geq |\langle f, g_{m_{k+1}} \rangle|$ باشد، آنگاه بهترین تقریب غیر خطی از طیف عبارت است از:

$$f_M = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle f, g_{m_k} \rangle g_{m_k} \quad (34)$$

با اعمال استراتژی آستانه سخت، $\alpha(x)$ رابطه (۲۹) می توان تقریب غیرخطی بالا را به صورت زیر نوشت:

$$y_M = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_T(\langle f, g_m \rangle) g_m \quad (35)$$

که T مقدار آستانه ایی است که اندازه ضرایب بدست آمده از ضرب داخلی طیف با M بردار انتخابی از پایه متعامد که به صورت نزولی مرتب شده اند بایستی با آن مقایسه شوند و مقدار آن برابر است با اندازه ضرب داخلی طیف با M امین بردار یعنی $T = |\langle f, g_{m_M} \rangle|$. بنابراین خطای غیر خطی برابر است با:

$$\varepsilon[M] = \|f - f_M\|^2 = \sum_{k=M+1}^{+\infty} |\langle f, g_{m_k} \rangle|^2 \quad (36)$$

اگر مقادیر مرتب شده $|\langle f, g_{m_k} \rangle|$ با افزایش k سرعت کاهش^۲ زیادی داشته باشند، این خطا با افزایش M به سرعت به صفر میل می کند. این کاهش را می توان به صورت کمی با محاسبه نرم l^p ضرایب بسط سیگنال در پایه B مطابق رابطه زیر بیان نمود:

$$\|y\|_{B,p} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |\langle f, g_m \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (37)$$

آنگاه: $p < 2$ ^(۹) و $\|y\|_{B,p} < +\infty$ وابسته نمود. نشان داده اند که اگر $\|y\|_{B,p}$ را می توان به $\varepsilon[M]$ سرعت کاهش

$$\varepsilon[M] \leq \frac{\|y\|_{B,p}^2 M^{1-\frac{2}{p}}}{2-p} \quad (38)$$

طراحی موجک بهینه

برای طراحی موجک بهینه لازم است معیاری را به عنوان بهینه سازی انتخاب کنیم که با بهینه کردن این معیار حداکثر میزان حذف نویز یا به عبارتی بیشترین نسبت سیگنال به نویز حاصل شود. بنابراین برای دست یابی به این منظور بایستی خطای بازسازی طیف (۳۱) حداقل شود. و همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد حداقل کردن این خطا در واقع به معنی داشتن بهترین تقریب غیرخطی از طیف y است. حد بالای خطای این تقریب بوسیله رابطه (۳۸)

مشخص می گردد. بنابراین با کاهش این خطا، موجکی بهینه برای افزایش نسبت سیگنال به نویز طراحی می شود. بر این اساس معیار طراحی موجک را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\eta = \min_B \|y\|_{B,p}^2 \quad (39)$$

پایه B که η را حداقل نماید پایه مطلوب خواهد بود و بیشترین میزان بهبود سیگنال به نویز را خواهد داشت.

پارامتری سازی ضرایب موجک

فیلترهای تجزیه $h[n]$ و $g[n]$ به تنهایی پایه های موجک را مشخص می کنند و از آنجایی که $g[n]$ با $h[n]$ رابطه دارد و از روی $h[n]$ قابل محاسبه است، بنابراین بدست آوردن فیلتر $h[n]$ برای موجک که شرایط ذکر شده در بخش ۲-۱ را دارا بوده و از طرفی معیار (۳۶) را حداقل کند. به تنهایی کفایت می کند. لذا برای طول فیلتر $2N$ مساله طراحی تبدیل به یک مساله بهینه سازی با $2N$ پارامتر خواهد شد. ضرایب فیلتر به عنوان پارامترهای آزاد محسوب نمی شوند و تنها کفایت شرایط ذکر شده در روابط (۲۳) تا (۲۵) را برآورده کنند. در واقع این مساله یک مساله بهینه سازی همراه با محدودیت است و برای راحتی حل عددی، می توان با پارامترسازی ضرایب فیلتر، مساله را به یک مساله بهینه سازی با N پارامتر آزاد و بدون محدودیت تبدیل نمود. ^(۱۳) بدین صورت که با در نظر گرفتن $H(z)$ و $G(z)$ به ترتیب به عنوان تبدیل z دنباله های $h[n]$ و $g[n]$ ، نمایش چند فاز فیلترهای $H(z)$ و $G(z)$ را به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} H(z) \\ z^{2(N-1)}G(z) \end{bmatrix} = \sqrt{2}E(z^2) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} \quad (40)$$

که ماتریس $E(z)$ به ماتریس چند فاز 1 معروف است. اگر دنباله $h[n]$ دارای $2N$ ضریب باشد، آنگاه با استفاده از نتایج ^(۱۴) می توان ماتریس $E(z)$ را به صورت نمایش پارامتری زیر تعریف کرد: ^(۱۳)

$$E(z) = V_{N-1}(z)V_{N-2}(z)\dots V_1(z)V_0(z) \quad (41)$$

که در آن

$$V_0(z) = \begin{bmatrix} -\cos \beta_0 & \sin \beta_0 \\ \sin \beta_0 & \cos \beta_0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$V_n(z) = I + (z-1)v_n v_n^T, \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (43)$$

که در رابطه بالا v_n یک بردار حقیقی 1×2 با طول واحد است ($v_n v_n^T = I, \|v_n\|^2 = 1$). بنابراین بدون از دست دادن کلیت مساله می توان بردار v_k را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$v_n = \begin{bmatrix} \cos \beta_n \\ \sin \beta_n \end{bmatrix} \quad (44)$$

از آنجاییکه هر دنباله $h[n]$ و $g[n]$ که شرط فیلتر آینه ای با باز سازی کامل ^۱ را برآورده می کند را می توان به صورت روابط (۴۰) و (۴۱) نوشت. لذا این روابط یک پارامترسازی کامل برای فیلترهای h و g محسوب می شوند. در رابطه (۴۰)، فیلتر $z^{2(N-1)}G(z)$ بجای خود $G(z)$ قرار گرفته است تا شرط $g[n] = (-1)^n h[1-n]$ را

برآورده نماید. ^(۱۳) همچنین با توجه به رابطه (۳۸) دنباله به طول $2N$ و با شرط قعآمد را می توان توسط N پارامتر آزاد بیان نمود. با اضافه کردن شرط *regularity* رابطه (۲۵)، با در نظر گرفتن کمترین مقدار ممکن برای $(M=1)$ ، تعداد پارامترهای آزاد یکی کاهش می یابد. نشان داده شده است که موجک $\psi(x)$ حداقل یک گشتاور محو شونده دارد، یعنی حداقل صفری از مرتبه ۱ در $\omega = \pi$ اگر و تنها اگر $\beta_0 = 3\pi/4$ ^(۱۳). بنابراین می توان موجک $\psi(x)$ با گستره $2N-1$ را توسط $N-1$ پارامتر آزاد طراحی کرد. استفاده از این روش پارامتر سازی باعث کاهش تعداد مجهولات و ساده تر شدن فرآیند طراحی می گردد. بویژه، از آنجایی که مساله مورد نظر دارای حل تحلیلی نیست و به روش های بهینه سازی و تکراری حل می شود، لذا کاهش تعداد پارامتر های مجهول نقش بسزایی در روند حل مساله دارد.

طراحی موجک بهینه

برای حداقل شدن معیار η در رابطه (۳۹) باید پایه ایی دنبال شود، که بتواند این معیار η را حداقل کند. و از آنجایی که پایه ذکر شده در این تحقیق یک پایه موجک است و این پایه موجک بوسیله فیلتر $h[n]$ بطور کامل توصیف می شود. بنابراین پیدا کردن این پایه بهینه معادل پیدا کردن $h[n]$ متناظر آن است. به عبارتی دیگر باید فیلتر $h[n]$ به گونه ای انتخاب شود که پایه متناظر آن معیار η را حداقل کند. برای اطمینان از برقراری شروط ذکر شده در روابط (۲۳) تا (۲۵) از روش پارامترسازی ضرایب $h[n]$ که در بخش قبل شرح داده شد استفاده می گردد. لذا، یافتن فیلتر بهینه با محدودیت ها و شرایط معین تبدیل به یافتن β های بهینه بدون محدودیت می گردد.

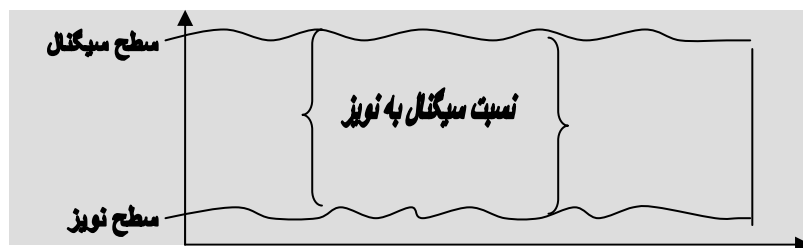
بنابراین برای طراحی موجک بهینه با طول مشخص L ، معیار η را به صورت زیر باز نویسی می گردد:

$$\eta = \min_{\{\beta_i\}} \|f\|_{B,p}^2 \quad (۴۵)$$

که β_i ها همان پارامترهای β در رابطه (۴۴) هستند و تعداد مجموعه $\{\beta_i\}$ با توجه به طول موجک تعیین می گردد. برای حداقل سازی این معیار از روش های بهینه سازی مختلفی می توان استفاده کرد در این تحقیق از روش کمترین مربعات برای یافتن حداقل η استفاده شده است. لازم به تذکر است که مقدار p در رابطه (۳۸) تا زمانی که در بازه مشخص شده باشد، تاثیری بر روی فرآیند بهینه سازی نخواهد داشت. بدین معنی که مقادیر بهینه β (β_i ها) که معیار η را حداقل می کنند وابسته به p ($p < 2$) نیستند.

معرفی نسبت سیگنال به نویز

نسبت سیگنال به نویز به صورت رنج میان سطح پایینی نویز و سطح اسمی سیگنال تعریف می شود. که نمایش نموداری آن در شکل ۵ آمده است.



شکل ۵- نمایش نموداری از تعریف نسبت سیگنال به نویز.

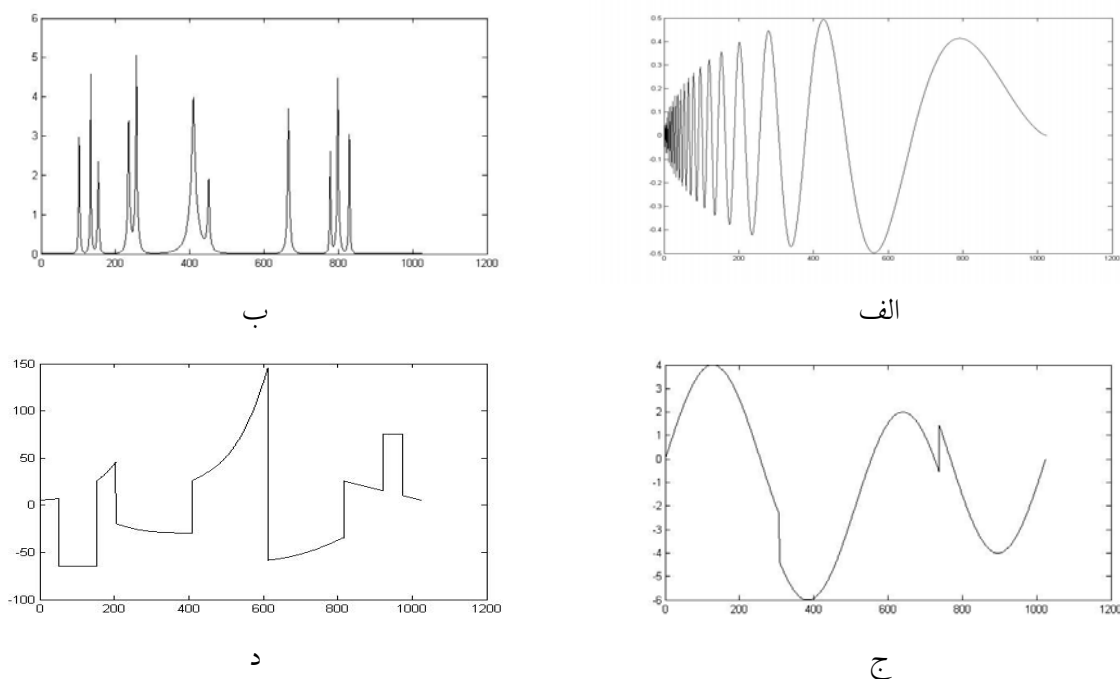
تعریف لگاریتمی نسبت سیگنال به نویز به صورت فرمول (۴۶) می باشد.

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right) \quad (46)$$

که P نماینده متوسط توان سیگنال و A نماینده دامنه (rms) است.

نتایج و بحث

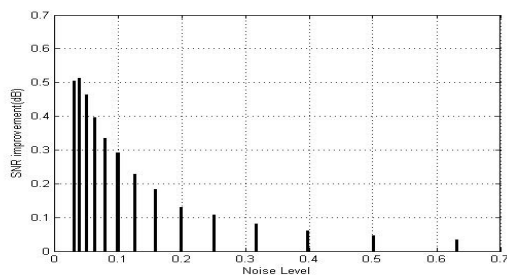
برای ارائه عملکرد این روش، ابتدا پارامترسازی بهینه را بر روی سیگنال های استاندارد شکل ۶، Doppler، HeaviSine، Bumps و Piece-Polynomial انجام داده شد. این سیگنال ها بدلیل شباهتی که عملاً با سیگنالهای واقعی دارند. برای اعمال این روش انتخاب شده اند. طول فیلتر را برابر ۶ در نظر گرفته که منجر به ۲ پارامتر آزاد (β_1, β_2) می گردد. موجک استاندارد هم طول با آن از خانواده Daubechies موجک db3 خواهد بود. پارامترهای بهینه حاصل، β_1 و β_2 برای این فیلتر و همچنین مقدار η ناشی از اعمال موجک db3 (η_{db3}) و اعمال موجک بهینه طراحی شده ($\eta_{optimal}$) در جدول ۱ آمده است. شکل ۷ نتایج حاصل از این روش بهینه سازی را بر روی سیگنال های استاندارد نشان می دهد.



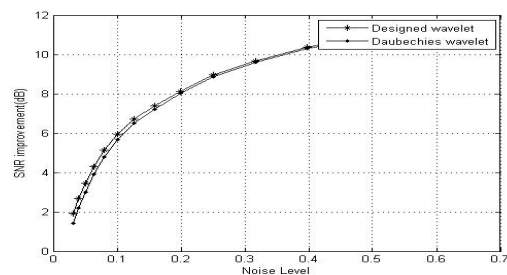
شکل ۶- سیگنال های استاندارد مورد بررسی : (الف) Doppler (ب) Bumps (ج) HeaviSine (د) Piece-Polynomial

جدول ۱- مقادیر پارامترهای بهینه برای سیگنال های استاندارد به ازای طول فیلتر ۶

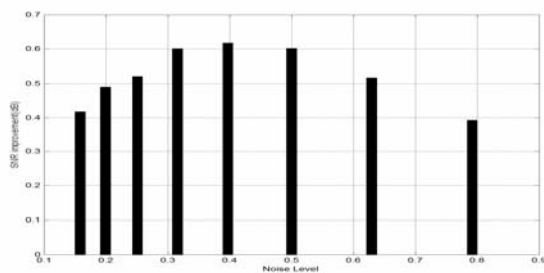
سیگنال های استاندارد	پارامتر بهینه β_1	پارامتر بهینه β_2	$\eta_{optimal}$	η_{db3}
Doppler	۱/۲۰۵۸	۱/۶۸۶۸	۳۶/۱۲۲۶	۴۵/۸۴۱۹
Bumps	۱/۰۵۲۵	۲/۹۵۲۵	۱۰/۸۴۱۱	۱۱/۳۶۷۳
HeaviSine	۱/۲۴۲۴	۳/۰۸۳۱	۱۵/۰۵۸۳	۲۲/۶۳۹۲
Piece Polynomial	۱/۵۴۱۵	۱/۵۷۰۴	۸/۴۰۸۸	۱۸/۳۶۹۴



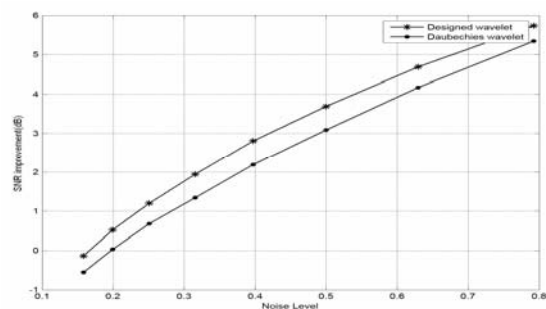
ب



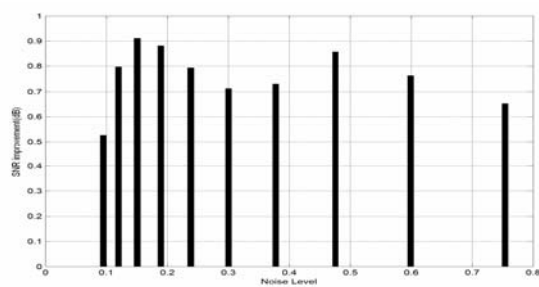
الف



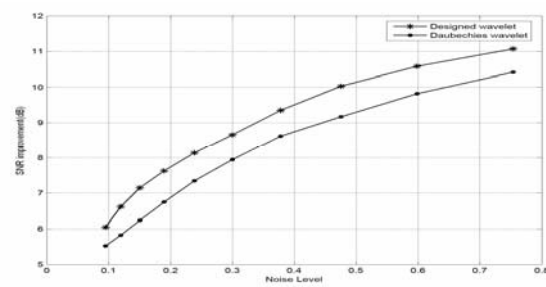
ت



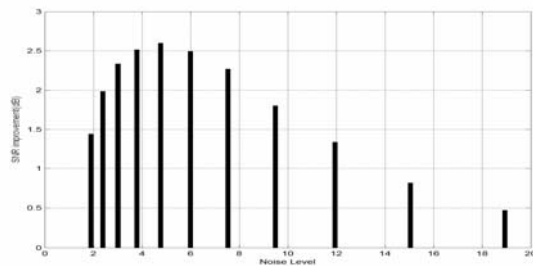
پ



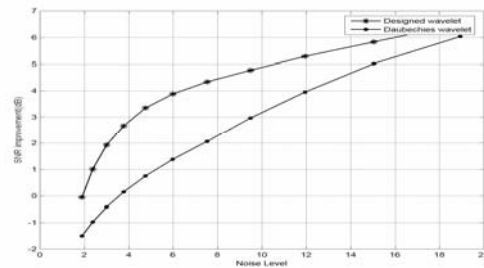
ج



ث



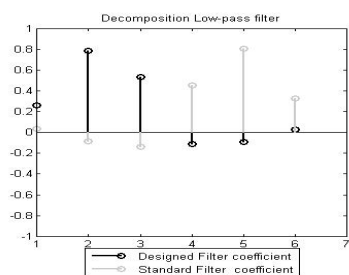
ح



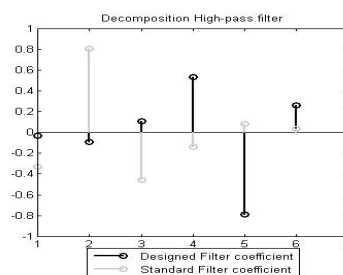
چ

شکل ۷- نمودار مقایسه میزان بهبود و افزایش نسبت سیگنال به نویز با روش نویز زدایی Visu بوسیله موجک استاندارد db3 و موجک بهینه طراحی شده برای سیگنال های استاندارد: الف) نمودار مقایسه میزان بهبود نسبت سیگنال به نویز برای سیگنال داپلر (Doppler) در سطوح مختلف نویز. ب) نمودار میزان افزایش نسبت سیگنال به نویز برای سیگنال بامپس (Bumps) داپلر (Doppler) در سطوح مختلف نویز. پ) نمودار میزان بهبود نسبت سیگنال به نویز برای سیگنال بامپس (Bumps) در سطوح مختلف نویز. ت) نمودار میزان افزایش نسبت سیگنال به نویز برای سیگنال بامپس (Bumps) در سطوح مختلف نویز. ث) نمودار میزان بهبود نسبت سیگنال به نویز برای سیگنال هیویساین (Heavisine) در سطوح مختلف نویز. ج) نمودار میزان افزایش نسبت سیگنال به نویز برای سیگنال هیویساین (Heavisine) در سطوح مختلف نویز. چ) نمودار میزان بهبود نسبت سیگنال به نویز برای سیگنال پیس-پلی نومیال (Piece-Polynomial) در سطوح مختلف نویز. ح) نمودار میزان افزایش نسبت سیگنال به نویز برای پیس-پلی نومیال (Piece-Polynomial) در سطوح مختلف نویز

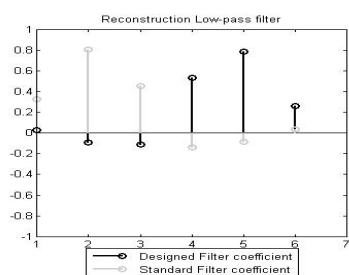
در ادامه برای طول فیلتر مشخص ($L = 6$)، با الگوریتم بالا موجکی بهینه برای طیف پرتو گاما (کبالت ۶۰) طراحی گردید. ضرایب فیلتر طراحی شده مربوط به موجک بهینه همراه با ضرایب فیلتر مربوط به موجک استاندارد (db3) و همچنین شکل موجک بهینه طراحی شده و موجک استاندارد هم طول آن به ازای طول فیلتر (۶) به ترتیب در شکل های ۸ و ۹ آمده است.



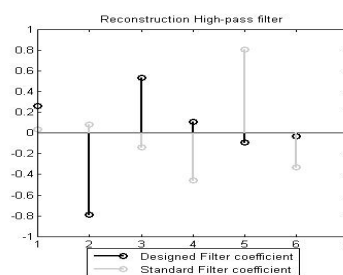
ب



الف

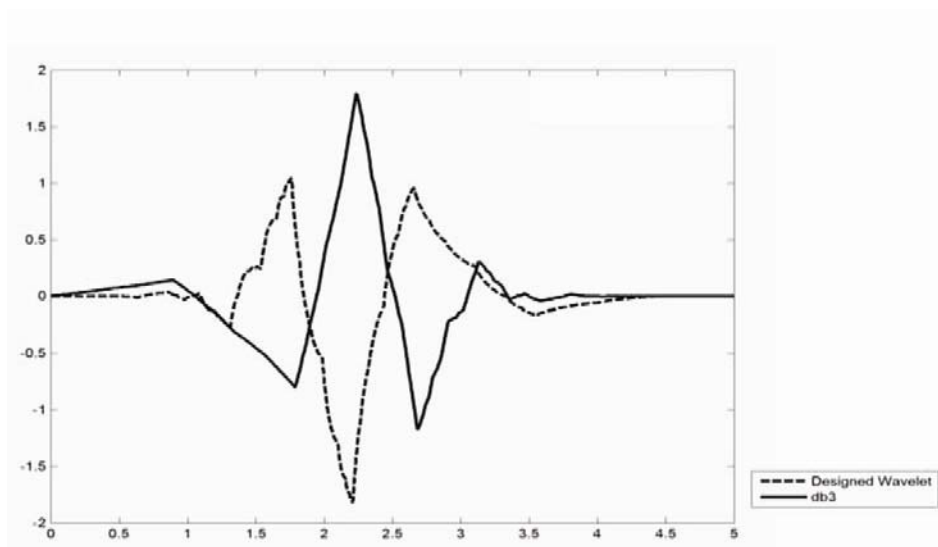


د



ج

شکل ۸- ضرایب فیلتر چهارتایی موجک طراحی شده و موجک استاندارد (db3) به ازای طول فیلتر شش: الف) ضرایب فیلتر بالاگذر تجزیه. ب) ضرایب فیلتر پایین گذر تجزیه. ج) ضرایب فیلتر بالاگذر بازسازی. د) ضرایب فیلتر پایین گذر بازسازی.



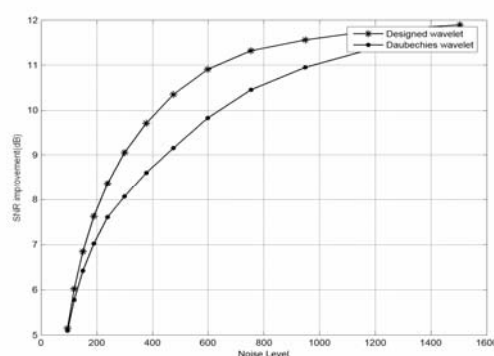
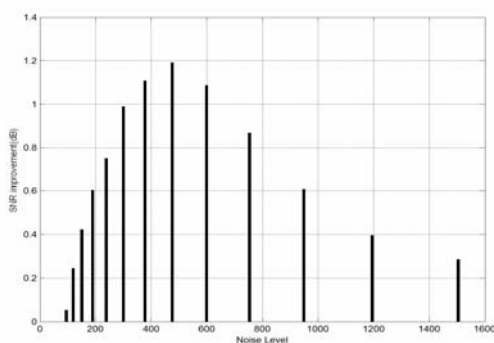
شکل ۹- موجک طراحی شده برای طول فیلتر شش (L=6).

پارامترهای بهینه حاصل، β_1 و β_2 برای فیلتر طراحی شده و همچنین مقدار η ناشی از اعمال موجک استاندارد $db3$ (η_{db3}) و اعمال موجک بهینه طراحی شده ($\eta_{optimal}$) در جدول ۲ آمده است.

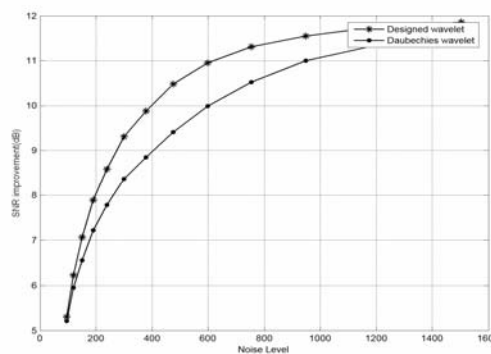
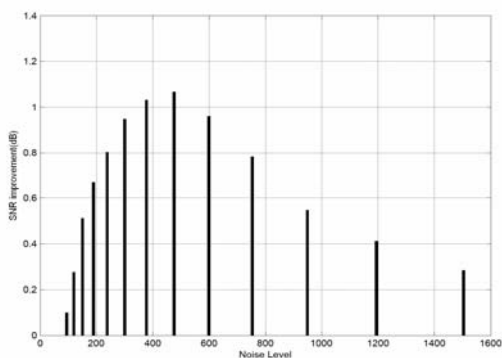
جدول ۲: مقدار پارامتر بهینه برای طیف کبالت ۶۰ به ازای طول فیلتر ۶ در مقیاس های ۶ تا ۹

طیف پرتو گاما	پارامتر بهینه β_1	پارامتر بهینه β_2	$\eta_{optimal}$	η_{db3}
^{60}Co	۰/۴۶۲۲	۳/۰۲۳۷	۴۴۴۲۰۰	۶۱۰۹۸۰

طیف مورد نظر بوسیله موجک بهینه طراحی شده نویززدایی و برای نشان دادن برتری عملکرد موجک بهینه، طیف مورد نظر (کبالت ۶۰) بوسیله یک موجک استاندارد نیز نویززدایی گردید. شکل ۱۰ تا ۱۳ عملکرد موجک بهینه طراحی شده و موجک استاندارد (db3) را بر اساس بهبود نسبت سیگنال به نویز با روش نویززدایی Visu و MAD در سطوح مختلف نویز برای طیف پرتو گاما (کبالت ۶۰) در مقیاس های ۶، ۷، ۸ و ۹ نشان می دهند. از آنجایی که موجک های خانواده Daubechies به ازای طول فیلتر معین، دارای بیشترین گشتاور محو شونده هستند. لذا بیشترین قابلیت نویززدایی را به ازای طول مشخص نسبت به سایر موجک های استاندارد دارا می باشند و به همین جهت این خانواده به عنوان مرجعی برای مقایسه نتایج انتخاب شد.

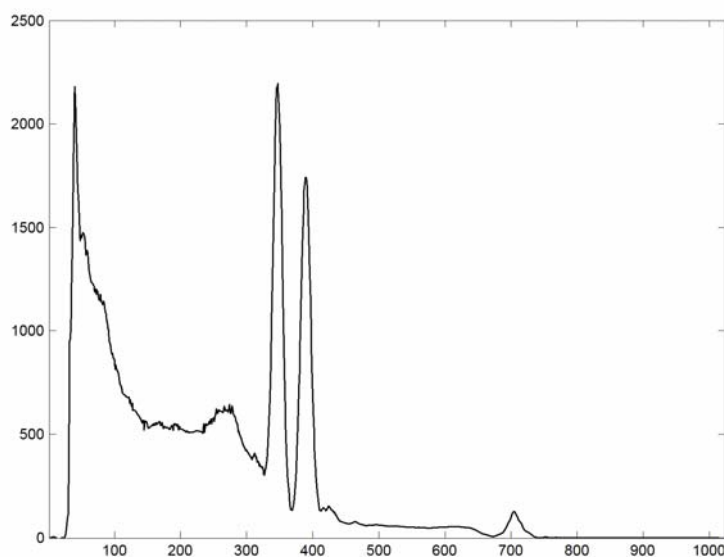


شکل ۱۰- نمودار مقایسه میزان بهبود نسبت سیگنال به نویز با روش نویز زدایی Visu بوسیله موجک استاندارد db3 و موجک بهینه طراحی شده برای طیف پرتو گاما (کبالت ۶۰) در سطوح مختلف نویز. شکل ۱۱- نمودار میزان افزایش نسبت سیگنال به نویز ناشی از اعمال موجک بهینه طراحی شده نسبت به اعمال موجک استاندارد db3 در سطوح مختلف نویز با روش نویز زدایی MAD



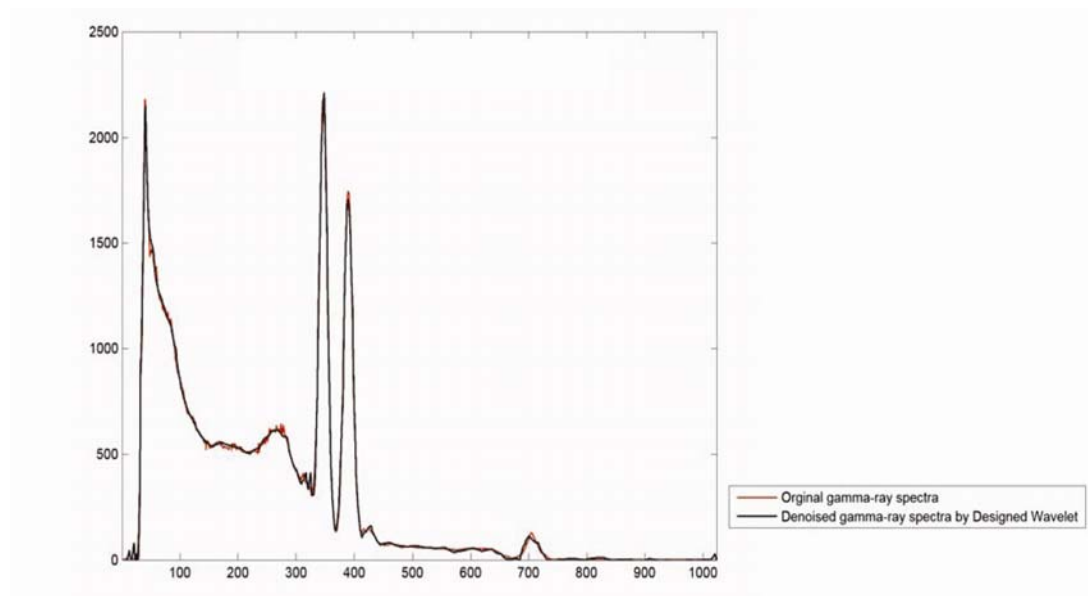
شکل ۱۲- نمودار مقایسه میزان بهبود نسبت سیگنال به نویز با روش نویز زدایی MAD بوسیله بوسیله موجک استاندارد db3 و موجک بهینه طراحی شده برای طیف پرتو گاما (کبالت ۶۰) در سطوح مختلف نویز. شکل ۱۳- نمودار میزان افزایش نسبت سیگنال به نویز ناشی از اعمال موجک بهینه طراحی شده نسبت به اعمال موجک استاندارد db3 در سطوح مختلف نویز با روش نویز زدایی MAD.

البته قابل ذکر است که رابطه بهینه سازی (۴۵) باید برای مقیاس هایی استفاده شود که نویز زدایی در آنها انجام می شود. مقیاس ها بر اساس نوع طیف و میزان هموار بودن آن انتخاب می گردد. برای طیف هایی که تغییرات سریع ندارند و به عبارتی دارای مولفه های فرکانس بالای زیادی نیستند. مقیاس ها را کوچک تر انتخاب می گردد و عمل بهینه سازی در آن مقیاس ها انجام می گیرد و برای طیف ها با تغییرات سریع که دارای مولفه های فرکانسی بالا هستند، عمل بهینه سازی در مقیاس های بالاتر انجام می شود. شکل ۱۴ طیف مورد بررسی، طیف پرتوگاما (کبالت ۶۰)، را نشان می دهد.

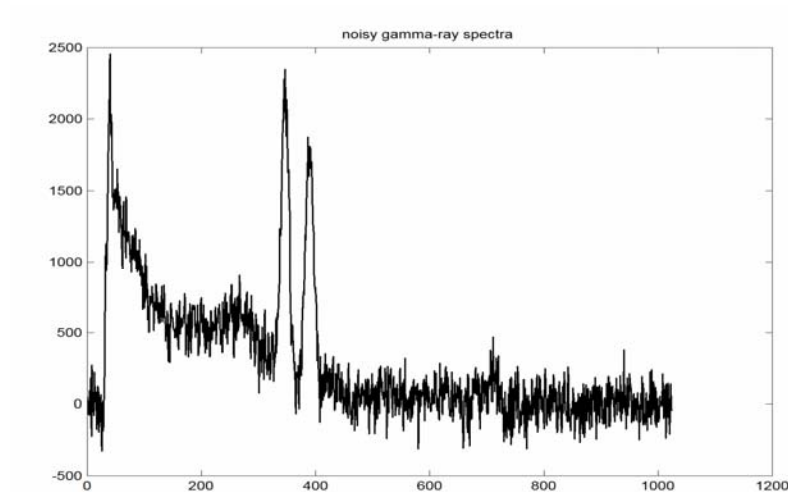


شکل ۱۴- طیف گاما (کبالت ۶۰) مورد بررسی.

شکل ۱۵ یک نمونه از طیف نویزی و طیف نویزدایی شده با استفاده از این روش بهینه سازی (اعمال موجک بهینه طراحی شده جهت کاهش نویز از طیف نویزی) را نشان می دهد.



الف



ب

شکل ۱۵- الف) طیف نویزی را نشان می دهد ب) طیف نویز زدایی شده همراه با طیف اصلی را نشان می دهد.

نتیجه گیری

با توجه به جداول ۱ و ۲ و شکل های ۱۰-۱۳ و شکل ۷ ملاحظه می شود موجک بهینه طراحی شده با طول مشخص بر اساس بهترین تقریب غیر خطی از طیف در پایه موجک در سطوح مختلف نویز از نظر بهبود نسبت

سیگنال به نویز نتیجه بهتری نسبت به موجک های استاندارد می دهد به طوری برای فیلتر به طول ۶ موجک استاندارد معادل با موجک بهینه طراحی شده $db3$ است که دارای بیشترین توانایی حذف نویز نسبت به سایر موجک های استاندارد، بدلیل داشتن بیشترین تعداد گشتاور محو شونده می باشد. همان طور که در شکل های ۱۰ و ۱۱ مشاهده می شود موجک بهینه طراحی شده نسبت به موجک استاندارد دارای قابلیت حذف نویز بیشتری از ۱/۰ دسی بل (۱/۵ درصدافزایش سیگنال به نویز) تا ۱/۱۹ دسی بل (۱۱/۵ درصدافزایش سیگنال به نویز) می باشد. از آنجاییکه با افزایش درجه ممان موجک، میزان نرمی و همواری موجک نیز افزایش می یابد لذا با افزایش طول فیلتر میزان بهبود نسبت سیگنال به نویز نسبت به طول بررسی شده ($L = 6$) افزایش نخواهد یافت و درواقع بیشترین بهبود نسبت سیگنال به نویز به ازای طول بررسی شده خواهد بود. بنابراین در این تحقیق موجکی بهینه برای نویز زدایی از طیف های پرتو گاما (کبالت ۶۰) طراحی شد که نسبت به موجک های استاندارد دارای قابلیت حذف نویز بیشتری می باشد و در واقع، در شناسایی پتانسیل ایزوتوپ خراب و کاذب از لبه کامپتون و پیک های اسکتردر طیف های نویزی پرتو گاما نسبت به موجک های استاندارد کارآمدتر و بهترعمل می کند.

References:

1. Sullivan, C.J., Gamer, S.E., Blagoev, K.B., and Weiss, D.L., *Nuclear Instruments and Methods in Physics*, **579**, 275 (2007)
2. Zhang, Q., Aliaga-Rossel, R., and Choi, P., *Meas. Sci. Technol.*, **17**, 731 (2006).
3. Sullivan, C.J., Garner S. E., and Butterfield, K. B., *IEEE Nuclear Science Symposium*, 2004, **1**, 281 (2004).
4. Babapour, F, and sadeghi, M., *6th Conf. Nuclear and Particle Physics (NUPPAC' 07)*, Luxor, Egypt (2007).
5. Mallat, S., *IEEE Trans Pattern Anal Machine Intell.*, **11**,674 (1989).
6. Burrus, R., Gopinath, A., and Guo, H., *Introduction to Wavelet and Wavelet Transforms.*, Prentice Hall, New Jersey (1998).
7. Daubechies, I., *Pure Appl. Math*, **41**, 909 (1988).
8. Strang, G., *SIAM Rev.*, **31**(4), 611 (1989).
9. Mallat, S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, NewYork (1998).
10. Tsoulfanidis, N., *Measurement and Detection of Radiation*, Taylor and Francis, London (1995).
11. Donoho, D., and Johnstone, I., *Biometrika*, **81**, 425 (1994).
12. Donoho, D. L., *Proc. of Symposia in Applied Mathematics AMS.*, **47**, 173 (1993).
13. Zou, H., and Tewfik, A. H., *IEEE Trans. Signal Processing*, **41**(3), 1428 (1993).
14. Vaidyanathan, P.P., *Proc. of IEEE*, **78**(1), 56 (1990).