

تحلیل تراز برخورد معادله بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز در (۱+۱) بعد

محمدرضا سلطانی*

گروه فیزیک، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

امیرعلی مسعودی

گروه فیزیک، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۸۷/۱۰/۸

تاریخ پذیرش: ۸۸/۶/۳

چکیده

مقدمه: در این مقاله علاقمندیم میانگین فرکانس‌های با شیب مثبت v_a^+ که از برخورد میدان سرعت $u_x - \overline{u_x} = \alpha$ در معادله‌ی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز ($BBM - B$) در یک سیال متلاطم به وجود می‌آید را مورد بررسی قرار دهیم. تحلیل تراز برخورد را قبل از ایجاد شوک در میدان سرعت بررسی کرده‌ایم. در این مقاله نشان داده خواهد شد که اندازه‌گیری کمیت v_a^+ اندازه‌گیری مناسبی برای افت‌وخیز میدان‌های سرعت در تلاطم ($BBM - B$) می‌باشد.

هدف: با استفاده از روش فرایندهای تصادفی میانگین فرکانس‌های با شیب مثبت در معادله‌ی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز را در (۱+۱) بعد به دست می‌آوریم.

روش بررسی: در معادله‌ی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز در حضور نیروی تصادفی تعداد شیب‌های مثبت قطع شده‌ی میدان سرعت $u(x,t)$ را با صفحه‌ی $u_x - \overline{u_x} = \alpha$ به دست می‌آوریم.

نتایج: با استفاده از روش فرایندهای تصادفی توانستیم تعداد میانگین کل شیب‌های مثبت سرعت یک سیال متلاطم در تراز برخورد را با استفاده از معادله‌ی $BBM - B$ در (۱+۱) بعد به صورت مقیاسی به دست آوریم.

نتیجه‌گیری: ما در این مقاله توانستیم تراز برخورد معادله $BBM - B$ را در (۱+۱) بعد در حضور نیروی گاوسی که در زمان سفید و به صورت گاوسی با مکان همبسته می‌باشد مورد بررسی قرار دهیم. همچنین توانستیم

*عهده‌دار مکاتبات: m.r.soltani.em@gmail.com

فرکانس میانگین شیب‌های مثبت از برخورد (v_{α}^+) را محاسبه کنیم. نمایش انتگرالی v_{α}^+ نشان می‌دهد که برای معادله $BBM - B$ در حد پاشندگی صفر و قبل از تشکیل تکینگی سرعت سیال تابعی از v_{α}^+ و به صورت گاوسی می‌باشد. با محاسبه کمیت v_{α}^+ که معرف تعداد میانگین کل شیب‌های مثبت سرعت تراز برخورد را قبل از تشکیل تکینگی به صورت مقیاسی بر حسب زمان به صورت $t^{\frac{1}{2}}$ می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: تراز برخورد، معادله‌ی بنجامین - بونا - ماهونی - برگرز

مقدمه

در دهه ی اخیر بررسی امواج غیر خطی آبی زیاد مورد توجه قرار گرفته است و مدل‌های مختلفی برای بررسی امواج غیرخطی آبی پیشنهاد شده است. یکی از مدل‌های پیشنهاد شده مدل بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز $(BBM - B)$ است که تعمیم یافته معادله بنجامین-بونا-ماهونی (BBM) ^(۱) می‌باشد. معادله‌ی $(BBM - B)$ و (BBM) حالتی از معادله‌ی (KdV) می‌باشد که اثرات پاشندگی محیط را در نظر می‌گیرد. معادله‌ی $(BBM - B)$ با در نظر گرفتن پاشندگی انتگرال پذیر نمی‌باشد.^(۲) معادله‌ی $(BBM - B)$ مدلی است که برای توصیف امواج سطحی در کانال‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین از معادله‌ی $(BBM - B)$ برای توصیف امواج در پلاسما سرد، امواج آکوستیکی در کریستال‌های غیر هارمونیک و امواج آکوستیکی گرانشی در سیال‌های تراکم پذیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی $(BBM - B)$ به صورت:

$$u_t + u^p u_x + u_x - \alpha u_{xxt} - \beta u_{xx} = 0 \quad (1)$$

می‌باشد، که $u(x,t)$ معرف مؤلفه‌ی افقی سرعت سیال و یا همان سرعت سطح آزاد آب می‌باشد. امواج منزوی که در معادله‌ی (۱) صدق می‌کنند، امواجی هستند که پس از برهم کنش غیرخطی با امواج منزوی دیگر، شکل و سرعت خود را حفظ می‌کنند.

برای بررسی آماری معادله‌ی $(BBM - B)$ فرض می‌کنیم یک نیروی تصادفی $f(x,t)$ به محیط وارد می‌شود و معادله‌ی $(BBM - B)$ را به صورت:

$$u_t + u^p u_x + u_x - \alpha u_{xxt} - \beta u_{xx} = f(x,t) \quad (2)$$

در نظر می‌گیریم. فرض بر این است که نیروی تصادفی $f(x,t)$ دارای ویژگی:^(۳)

$$\langle f(x,t) f(x',t') \rangle = 2D_0 D(x-x') \delta(t-t') \quad (3)$$

می‌باشد که $D(x)$ تابع همبستگی فضایی است که تابعی زوج و به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$D(x-x') = \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{\delta^2}\right] \quad (4)$$

که δ انحراف معیار $D(x-x')$ می‌باشد. اگر انحراف معیار سیستم با اندازه‌ی سیستم هم مرتبه باشد، انتظار می‌رود که مدل معرف یک نیروی بلند برد باشد، پس باید محاسبات را برای حالتی انجام دهیم که $\delta \cong L$ می‌باشد به طوری که L اندازه سیستم است.

نتایج و بحث

تحلیل تراز برخورد در فرایندهای تصادفی

در فرایندهای تصادفی بررسی روی یک تابع خاص از توابع آنسامبلی انجام می پذیرد، در اینجا این تابع همان میدان سرعت $u(x,t)$ می باشد. n_a^+ را تعداد شیبهای مثبت قطع شده با $u_x - \overline{u_x} = \alpha$ در لحظه t و مقیاس طولی L در نظر می گیریم شکل (۱) و مقدار میانگین کل را با N_a^+ نشان دهیم، بطوریکه N_a^+ از رابطه زیر بدست می آید:

$$N_a^+(L) = E[n_a^+(L)] \tag{5}$$

چون فرایند همگن می باشد، برای مقیاس طولی L که درست بعد از مقیاس طولی L اول قرار می گیرد به نتایج مشابهی خواهیم رسید. در نتیجه خواهیم داشت:

$$N_a^+(2L) = 2N_a^+(L) \tag{6}$$

پس برای فرایندهای همگن تعداد ترازهای برخورد متناسب با بازه طولی L می باشد. پس خواهیم داشت:

$$N_a^+(L) \propto L \tag{7}$$

یا

$$N_a^+(L) = v_a^+ L \tag{8}$$

که v_a^+ تعداد فرکانس میانگین شیبهای مثبت بوجود آمده از تراز برخورد $u_x - \overline{u_x} = \alpha$ می باشد. حال نحوه محاسبه پارامتر فرکانس v_a^+ از توابع مربوط به $u_x - \overline{u_x} = \alpha$ را بررسی می کنیم. مقیاس طولی کوچکی dl از یک تابع خاص را در نظر بگیرید، چون $u_x - \overline{u_x} = \alpha$ را یک تابع نرم نسبت به y و بدون نوسانات سریع در نظر گرفتیم، اگر dl به حد کافی کوچک باشد، میدانها بشرطی می توانند لایه $u_x - \overline{u_x} = \alpha$ را با شیب مثبت قطع کنند که در ابتدای بازه در مکان x ، رابطه $u_x - \overline{u_x} = \alpha$ صادق باشد. پس اگر دو شرط زیر صادق باشند با احتمال خیلی بالایی در $u_x - \overline{u_x} = \alpha$ برای میدانها، در بازه dl شیب مثبت خواهیم داشت:

$$u_x - \overline{u_x} < \alpha \tag{9}$$

$$\frac{d(u_x - \overline{u_x})}{dl} > \frac{\alpha - (u_x - \overline{u_x})}{dl}$$

اگر بخواهیم بدانیم که آیا در یک مکان دلخواه x شرایط فوق صادق می باشند یا خیر، باید بفهمیم چطور مقادیر

$$y = (v_y), y' = \frac{dy}{d} \text{ با در نظر گرفتن چگالی احتمالی مشترک آنها } p(y, y') \text{ توزیع شده اند.} \tag{5.4}$$

فرض کنید که لایه $y = \alpha$ و بازه dl مشخص هستند. آنگاه فقط می ماند مقادیر $y < \alpha$ و مقادیر

$$y' = \left(\frac{dy}{dl} \right) > \frac{\alpha - y}{dl} \text{ یعنی ناحیه بین خطوط } y = \alpha \text{ و } y' = \frac{\alpha - y}{dl} \text{ در صفحه } (y, y'). \text{ بنابراین، احتمال بوجود}$$

آمدن شیبهای مثبت در قطع $y = \alpha$ در بازه dl بصورت زیر می باشد:

$$\int_0^\infty dy' \int_{\alpha - y' dl}^\alpha dy p(y, y') \tag{10}$$

هنگامی که $dl \rightarrow 0$ می توان $p(y, y')$ را بصورت زیر نوشت:

$$p(y, y') = p(y = \alpha, y') \tag{11}$$

چون در مقادیر بزرگ y, y' تابع توزیع چگالی به سرعت به صفر میل خواهد کرد، رابطه (۱۱) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int_0^{\infty} dy' \int_{\alpha-y'dl}^{\alpha} dyp(y = \alpha, y') = \int_0^{\infty} dy' p(\alpha, y') (\alpha - \alpha + y'dl) \quad (12)$$

پس احتمال برخورد تراز $y = \alpha$ در dl بصورت زیر است:

$$dl \int_0^{\infty} p(\alpha, y') y' dy' \quad (13)$$

که جمله $p(\alpha, y')$ چگالی احتمال مشترک $p(y, y')$ در $y = \alpha$ میباشد.

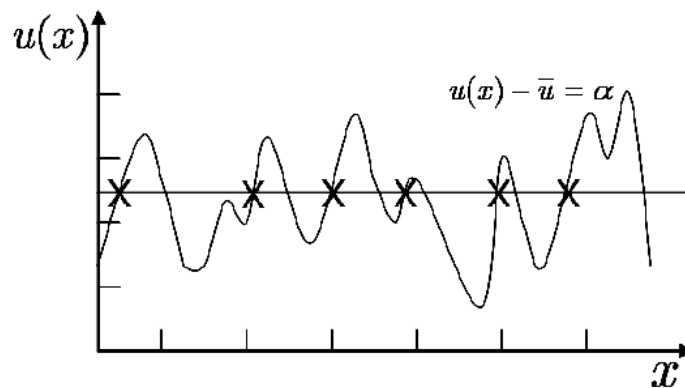
بنابر رابطه (۱۰) که تعداد میانگین شیبهای مثبتی که لایه را در بازه طولی L قطع می کنند برابر v_{α}^{+} می باشد و در نتیجه تعداد میانگین قطع ها در بازه dl برابر $v_{\alpha}^{+} dl$ خواهد بود. پس تعداد میانگین قطعهای لایه $y = \alpha$ در بازه dl با شیب مثبت، با احتمال برخورد تراز $y = \alpha$ در بازه dl برابر است، پس خواهیم داشت:

$$v_{\alpha}^{+} dl = dl \int_0^{\infty} p(\alpha, y') y' dy' \quad (14)$$

البته توجه داشته باشید که رابطه فوق فقط در حالتی صادق است که dl خیلی کوچک و $y(x)$ تابعی نرم باشد، بطوریکه در بازه dl بیش از یک بار تراز برخورد نداشته باشیم. بنابراین پارامتر فرکانس v_{α}^{+} را بر حسب چگالی احتمال مشترک $p(\alpha, y')$ بصورت زیر بیان می کنیم:

$$v_{\alpha}^{+} \int_0^{\infty} p(\alpha, y') y' dy' \quad (15)$$

در بخش بعدی v_{α}^{+} را بر حسب تابع توزیع احتمال مشترک (PDF) و گرادیان میدان سرعت بیان خواهیم نمود.



شکل ۱- شیبهای مثبت تراز برخورد $u_x - \bar{u}_x = \alpha$

بررسی آماری معادله بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز

معادله (۲) را در نظر می گیریم. جملات متناظر با u_{xx} معرف $bounded\ dispersion\ relation$ می باشند و فرض ما بر این است که که محیط فاقد پاشندگی می باشد در این صورت حد $\alpha \rightarrow 0$ و $\beta \rightarrow 0$ را در نظر می گیریم و در نتیجه معادله (۲) را می توانیم به صورت:

$$u_t + u_x + u^p u_x = f(x, t) \quad (16)$$

بازنویسی کنیم. اگر از رابطه ی (۱۶) نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$w_t = -w_x - pu^{p-1}w^2 - u^p w_x + f_x(x,t) \quad (17)$$

و با معرفی تابع مولد Z به صورت^(۷.۶)

$$Z(\lambda, \mu, u, w) = \langle \Theta \rangle = \langle \exp(-i\lambda u - i\mu w) \rangle \quad (18)$$

که در رابطه‌ی فوق λ تبدیل فوریه u و μ تبدیل فوریه w می‌باشد و با محاسبه‌ی Z_t خواهیم داشت:

$$Z_t = \langle -i\lambda u_t \Theta \rangle + \langle -i\mu w_t \Theta \rangle \quad (19)$$

و با جایگزینی رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) در (۱۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Z_t &= \langle i\lambda w \Theta \rangle + \langle i\lambda u^p w \Theta \rangle + \langle -i\lambda f(x,t) \Theta \rangle \\ &+ \langle i\mu w_x \Theta \rangle + \langle i\mu pu^{p-1} w^2 \Theta \rangle + \langle i\mu u^p w_x \Theta \rangle \\ &+ \langle -i\mu f_x(x,t) \Theta \rangle \end{aligned} \quad (20)$$

و اگر شرط همگنی محیط را در نظر بگیریم ($Z_x = 0$)

$$\langle i\lambda w \Theta \rangle = -\langle i\mu w_x \Theta \rangle \quad (21)$$

با در نظر گرفتن روابط:

$$\langle uw \Theta \rangle = -Z_{\lambda\mu} \quad (22)$$

$$\langle w^2 \Theta \rangle = -Z_{\mu\mu} \quad (23)$$

$$\langle uw_x \Theta \rangle = \frac{1}{\mu} Z_{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} Z_{\mu\lambda} \quad (24)$$

می‌توانیم رابطه‌ی (۲۰) را به صورت:

$$:Z_t = -\langle i\lambda f(x,t) \Theta \rangle - i\mu Z_{\mu\mu} + iZ_{\mu} - \langle i\mu f_x(x,t) \Theta \rangle \quad (1-25)$$

$$p = 1$$

$$:Z_t = -\langle i\lambda f(x,t) \Theta \rangle - pi^p \mu \frac{\partial^{p-2}}{\partial \lambda^{p-2}} Z_{\mu\mu} + pi^p \frac{\partial^{p-1}}{\partial \lambda^{p-1}} Z_{\mu} - \langle i\mu f_x(x,t) \Theta \rangle \quad (2-25)$$

$$p \geq 2$$

و با استفاده از :

$$\langle f(x,t) \Theta \rangle = -i\lambda k(\circ)Z \quad (26)$$

$$\langle f_x(x,t) \Theta \rangle = -i\mu k_{xx}(\circ)Z \quad (27)$$

$$k_{xx}(\circ) = -\frac{\mathfrak{V} D_{\circ}}{\sqrt{\pi} \delta^{\mathfrak{r}}} \quad (28)$$

$$k(\circ) = \frac{D_{\circ}}{\sqrt{\pi} \delta} \quad (29)$$

$$k(x-x') = \mathfrak{V} D_{\circ} D(x-x') \quad (30)$$

معادله‌ی حاکم بر تابع مولد به صورت:

$$:Z_t = -i\mu Z_{\mu\mu} + iZ_{\mu} - \mu^2 k_{xx}(0)Z - \lambda^2 k(0)Z \quad (31)$$

$$p = 1$$

$$:Z_t = -pi^p \mu \frac{\partial^{p-2}}{\partial \lambda^{p-2}} Z_{\mu\mu} + pi^p \frac{\partial^{p-1}}{\partial \lambda^{p-1}} Z_{\mu} - \mu^2 k_{xx}(0)Z - \lambda^2 k(0)Z \quad (32)$$

$$p \geq 2$$

خواهد شد.

برای به دست آوردن معادله ی حاکم بر تابع توزیع احتمال (PDF) برای معادله ی $BBM - B$ کافی است تبدیلی فوریه رابطه ی (۳۱) و (۳۲) را محاسبه کنیم، برای معادله (۳۱) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int Z d\lambda d\mu = -k(0) \int \lambda^2 Z d\lambda d\mu - k_{xx}(0) \int \mu^2 Z d\lambda d\mu - i \int \mu Z_{\mu\mu} d\lambda d\mu + i \int Z_{\mu} d\lambda d\mu \quad (33)$$

و با در نظر گرفتن این موضوع که تبدیل فوریه تابع مولد معرف تابع توزیع احتمال می باشد:

$$\int Z(\mu, \lambda, u, w, t) d\lambda d\mu = P(u, w, t) \quad (34)$$

و همچنین در نظر گرفتن روابط:

$$\int \lambda^2 Z d\lambda d\mu = -P_{uu} \quad (35)$$

$$\int \mu^2 Z d\lambda d\mu = -P_{ww} \quad (36)$$

$$\int Z_{\mu} d\lambda d\mu = -iwP \quad (37)$$

$$\int i\mu Z_{\mu\mu} d\lambda d\mu = 2wP + w^2 P_w \quad (38)$$

و جایگزینی روابط (۳۴) الی (۳۸) در رابطه ی (۳۳) می توانیم معادله ی دیفرانسیل جزئی حاکم بر چگالی احتمال را به صورت:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = k(0)P_{uu} + k_{xx}(0)P_{ww} - wP - w^2 P_w \quad (39)$$

و برای معادله (۳۲) به صورت مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = k(0)P_{uu} + k_{xx}(0)P_{ww} - 2piu^{p-2}wP - ipu^{p-2}w^2 P_w + pu^{p-1}wP \quad (40)$$

به دست آورد که شرط اولیه ی دو معادله ی فوق به صورت:

$$P(u, w, 0) = \delta(u)\delta(w) \quad (41)$$

می باشد.

تحلیل تراز برخورد معادله $BBM - B$ در (۱+۱) بعد

معادله حاکم بر تابع توزیع احتمال را برای معادله $BBM - B$ به صورت معادله های (۳۹) و (۴۰) با شرط اولیه ی (۴۱) به دست آوردیم. هم اکنون به تحلیل تراز برخورد را برای معادله $BBM - B$ در (۱+۱) بعد برای معادله (۳۹) می پردازیم.

با استفاده از روش جداسازی متغیرها می توانیم جوابی به صورت :

$$P(u, \omega, t) = P_1(u, t)P_2(\omega, t) \quad (42)$$

پیشنهاد می کنیم و با جایگذاری در رابطه (۳۹) به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$P(u, \omega, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k(0)t}} \exp\left(-\frac{u^2}{4k(0)t}\right) \times P_2(\omega, t) \quad (43)$$

که $P_2(\omega, t)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر می باشد:

$$P_{2t} = (3\omega + Q(t))P_2 + \omega^2 P_{2\omega} + k_{xx}(0)P_{2\omega\omega} \quad (44)$$

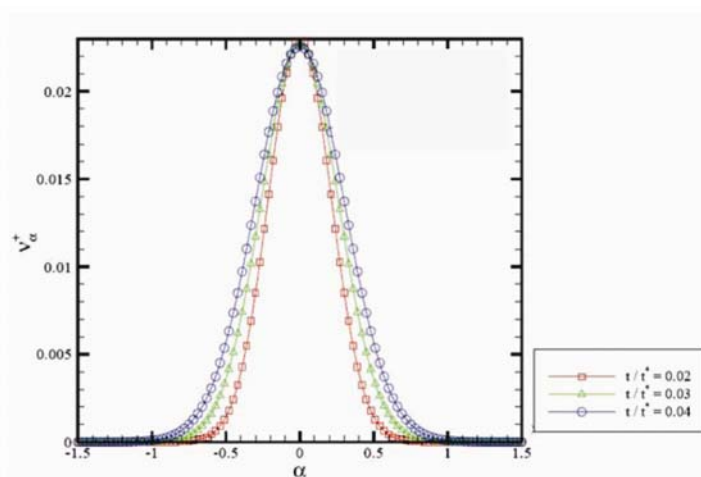
که $Q(t)$ تابعی می باشد که بر اساس شرایط اولیه به دست می آید. برای هر مقیاس زمانی، v_α^+ رفتاری گاوسی بر حسب α دارد و برای به دست آوردن بستگی زمانی v_α^+ باید $P_2(\omega, t)$ محاسبه شود که برای محاسبه $P_2(\omega, t)$ از روش های عددی استفاده می کنیم. ^(۹) فرکانس به وجود آمدن یک شیب مثبت از قطع میدان سرعت توسط صفحه ی $u_y - \bar{u}_y = \alpha$ از طریق رابطه زیر محاسبه می شود:

$$v_\alpha^+ = \int_0^\infty \omega P(\alpha, \omega, t) d\omega \quad (45)$$

و شکل (۲) تغییرات v_α^+ را قبل از تشکیل تکینگی نشان می دهد. همچنین برای به دست آوردن مقدار میانگین کل N_{tot}^+ از رابطه زیر استفاده می کنیم: ^(۸)

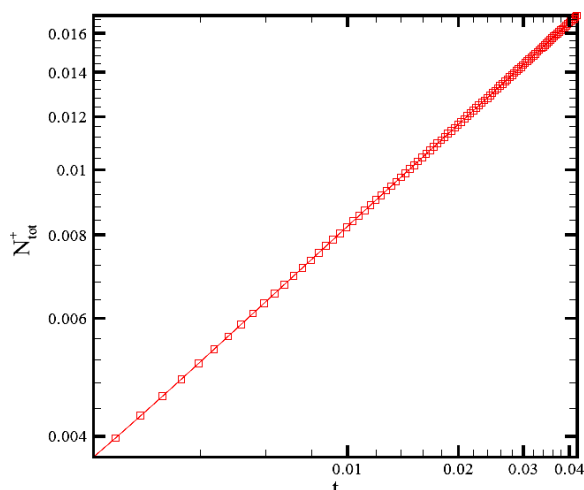
$$N_{tot}^+ = \int_{-\infty}^\infty d\alpha \int_0^\infty \omega P(\alpha, \omega, t) d\omega \quad (46)$$

که با استفاده از روش های عددی $N_{tot}^+ \approx t^\beta$ به دست خواهد آمد به طوریکه $\beta = 0.5 \pm 0.01$ خواهد شد و نمودار N_{tot}^+ را بر حسب t در شکل (۳) رسم شده است. ^(۸ و ۱۱)



شکل ۲- نمودار v_α^+ بر حسب α برای معادله $BBM - B$ در جفت شدگی قوی و قبل از تشکیل تکینگی برای مقیاس

$$\frac{t}{t^*} = 0.02, 0.03, 0.04 \quad \text{زمانی}$$



شکل ۳- نمودار $\log-\log$ برای N_{tot}^+ بر حسب t برای معادله $BBM - B$ در جفت شدگی قوی و قبل از تشکیل تکینگی در سرعت سیال

نتیجه گیری

ما در این مقاله توانستیم تراز برخورد معادله $BBM - B$ را در $1+1$ بعد در حضور نیروی گاوسی که در زمان سفید و به صورت گاوسی با مکان همبسته می‌باشد مورد بررسی قرار دهیم. همچنین توانستیم فرکانس میانگین شیب‌های مثبت از برخورد (v_{α}^+) را محاسبه کنیم. نمایش انتگرالی v_{α}^+ نشان می‌دهد که برای معادله $BBM - B$ در حد پاشندگی صفر و قبل از تشکیل تکینگی سرعت سیال تابعی از v_{α}^+ و به صورت گاوسی می‌باشد. با محاسبه کمیت v_{α}^+ که معرف تعداد میانگین کل شیب‌های مثبت سرعت تراز برخورد را قبل از تشکیل تکینگی به صورت مقیاسی بر حسب زمان به صورت $t^{\frac{1}{2}}$ می‌باشد.

References:

1. Benjamin, T.B., Bona, J.L., Mahony, J.J., *Phil. Trans. R. Soc. London A*, **272**, 47 (1972).
2. Ablowitz, M.J., Herbst, B.M., Schober, C., *J. Comput. Phys.*, **126**, 299 (1996).
3. Frisch, U., *Turbulence, The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge university press, EngLand (1995).
4. Rice, O., *Bell System Tech. J.*, **23**, 382 (1944).
5. Rice, O., *Bell System Tech. J.*, **24**, 46 (1945).
6. Newland, D.E., *An Introduction to Random Vibration, Spectral and Wavelet Analysis*, Longman, NewYork (1993).
7. Chekhlov, A., Yakhot, V., *Phys. Rev. E*, **51**, 856 (1995).
8. Shahbazi, S., Sobhanian, S., Rahimitabar, M.R., Khoram, S., Frootan, R., Zahed, H., *J. Phys. A*, **36**, 2517 (2003).
9. Movahed, M.S., Bahraminasab, A., Rezazadeh, H., Masoudi, A.A., *J. Phys. A*, **39**, 3903 (2003).
10. Johnson, L.W., and Riess, R.D., *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, NewYork (1982).
11. Masoudi, A.A., Vasheghani Farahani, S., Soltani, M.R., *Inter. J. Modern Phys.*, **20**(29), 4917 (2006).