

## کاربرد اجزا محدود در تحلیل معادلات انتقال آب و املاح خاک غیراشباع غیرماندگار

حمید زارع‌ایبانه<sup>۱</sup>، امیرحسین ناظمی<sup>۲</sup>، محمدرضا نیشابوری<sup>۳</sup>، کورش محمدی<sup>۴</sup>، غلامحسین مجذوبی<sup>۵</sup>  
و بهمن شریفی‌همدان<sup>۶</sup>

### چکیده

معادله ریچاردز در محیط غیراشباع به روش اجزا محدود مورد بررسی قرار گرفت. در تبدیل معادله دیفرانسیل به معادله انتگرالی از روش گالرکین استفاده شد و با استخراج فرم ماتریسی برای عناصر میله‌ای، مدل ریاضی حاصل گردید. مدل ابتدا با نتایج عددی آنتونوپولوس و پاپازافیرو برای خاک لوم رس پانوج کنترل و سپس ضرایب روابط مشخصه با استخراج منحنی رطوبتی خاک  $\theta(\psi)$  با استفاده از نرم‌افزار RETC به دست آمد. مجدداً مدل بر اساس روابط مشخصه جدید اجرا و با نتایج روابط دو ناحیه‌ای (آنتونوپولوس و پاپازافیرو) مقایسه شد. در نهایت فرم توزیع رطوبت و املاح غیراشباع با شرایط اولیه و شرایط مرزی دیریخله در مرز بالا به دست آمد. نتایج با گام زمانی ۱ ثانیه و گام مکانی ۲/۵ سانتی‌متر از هم‌خوانی خوبی برخوردار بود، لذا جایگزینی مدل ناپیوسته آنتونوپولوس و پاپازافیرو با مدل رطوبتی پیوسته ون‌گنوختن نه تنها از دقت آن نکاست بلکه آنرا ساده‌تر نمود. همچنین دقت نتایج با استفاده از همگرایی نوع h برای گام‌های مکانی مختلف، مطالعه شد. این موضوع با انتخاب گام زمانی ۱ ثانیه و گام‌های مکانی ۰/۵، ۱، ۱/۲۵، ۲/۵، ۵، ۱۲/۵ و ۲۵ سانتی‌متر بررسی شد. در نهایت با تحلیل همگرایی، نتایج گام مکانی ۲/۵ سانتی‌متر با زمان محاسبات ۲۷/۰۲ ثانیه مناسب و کاربردی تشخیص داده شد.

واژه‌های کلیدی: جریان غیراشباع غیرماندگار، مدل عددی املاح، عناصر محدود، روش گالرکین

۱. مربی گروه آبیاری، دانشکده کشاورزی، دانشگاه بوعلی سینا
۲. استادیار گروه آبیاری، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز
۳. استاد گروه خاک‌شناسی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز
۴. استادیار گروه آبیاری، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس
۵. دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا
۶. مربی دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد، واحد همدان

## مقدمه

عناصر و یا افزایش مرتبه تابع درون‌یاب کاهش می‌یابد. این موضوع اساس همگرایی در روش اجزا محدود بوده که قبول یا عدم قبول تحلیل را تعیین می‌کند. تانگ و بیان (۱۹۶۷) و کی<sup>۴</sup> از اولین کسانی بودند که به بررسی همگرایی پرداخته و نتیجه گرفتند وقتی اندازه عناصر به سمت صفر میل کند، همگرایی حل اجزا محدود حاصل می‌شود. همچنین جانسون و مک‌لای<sup>۵</sup> نشان دادند که با کاهش اندازه عناصر، مقدار خطا کاهش می‌یابد (بیگدلی، ۱۹۹۶). این نوع همگرایی که با کاهش اندازه عناصر ایجاد می‌شود به نوع  $h$  معروف است و در صورتی فقط مرتبه تابع درون‌یاب افزایش یابد، همگرایی نوع  $p$  حاصل می‌شود. در همگرایی نوع  $h$ ، توابع درون‌یاب هر عنصر ثابت ولی اندازه عناصر کاهش می‌یابد، اما در همگرایی نوع  $p$  برعکس هم‌گرایی نوع  $h$  اندازه عناصر ثابت و با افزایش مرتبه تابع درون‌یاب سرعت همگرایی افزایش می‌یابد.

هدف از مطالعه حاضر گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان آب و املاح غیراشباع و غیرماندگار به روش اجزا محدود و حل آن به روش محاسباتی چلسکی<sup>۶</sup> است. صحت مدل و برنامه کامپیوتری ایجاد شده از مقایسه نتایج آنتونوپولوس و پاپازافیرو<sup>۷</sup> انجام شد. سپس توزیع رطوبت با جایگزینی مدل رطوبتی ون‌گنوختن<sup>۸</sup> (آزمایشگاه شوری آمریکا<sup>۹</sup> ۱۹۹۱) به جای مدل رطوبتی دوناچیهای آنتونوپولوس و پاپازافیرو پیش‌بینی شد. ضرایب مدل رطوبتی با داده‌های منحنی رطوبتی از نسخه ۶ نرم‌افزار RETC<sup>۱۰</sup> به‌دست آمد. در پایان نیز تاثیر اندازه عناصر و تعداد کل گره‌ها بر دقت نتایج از

مدل ریاضی جریان آب و املاح در محیط غیراشباع بر پایه معادله دیفرانسیل غیرخطی استوار است که به‌دلیل پیچیدگی معادله حاکم، حل دقیق و تحلیلی وجود ندارد. طی یکی دو دهه اخیر، محققین توانسته‌اند مدل‌های عددی متفاوتی ارائه دهند که هر کدام ویژگی خاصی دارند. روش اجزا محدود یکی از روش‌های مهمی است که تقریباً در تمام سطوح مهندسی و علوم بکار می‌رود. تحلیل در این روش با تقریب ناحیه مورد نظر از طریق تقسیم آن به چندین جز محدود شروع می‌شود. در این روش شکل و اندازه اجزا می‌تواند متفاوت باشد. اندازه عناصر از جمله پارامترهایی است که بر دقت جواب تاثیر دارد.

این روش برای تحلیل مسائل مربوط به سازه‌های هواپیمایی ابتدا در سال ۱۹۴۵ بکار رفت. پس از یک دهه، قابلیت‌های آن برای حل مسائل مربوط به علوم کاربردی و مهندسی در مقایسه با روش تفاضلات محدود شناخته شد (مجدوبی و فریبا، ۱۳۷۶). امروزه محققین حتی از روش اجزا محدود به‌عنوان ابزاری برای ارزیابی سایر روش‌های عددی نیز استفاده می‌کنند. به‌عنوان مثال فریند و حکانن<sup>۱</sup> شبیه‌سازی آلودگی فاضلاب بوردن<sup>۲</sup>، بارت و فریند<sup>۳</sup> مدل‌سازی آلودگی در منطقه‌ای فرضی را با روش تفاضلات محدود انجام و صحت نتایج را با روش اجزا محدود کنترل نمودند (بارانی و همکاران، ۱۳۸۱). به‌علاوه توانایی و قابلیت‌های روش اجزا محدود در شبیه‌سازی مرزهای نامنظم نیز به دفعات در مسائل آبی از سوی محققین به اثبات رسیده است.

از سوی دیگر در روش اجزا محدود با کوچک‌تر شدن اندازه عناصر یا افزایش مرتبه چندجمله‌ای درون‌یاب تعریف شده در ناحیه حل، دقت جواب نهایی افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر اختلاف بین جواب‌های واقعی و تقریبی تنها با کوچک شدن اندازه

## 4. Key

5. Johnson and Mclay

6. Cholsoki and Mclay

6. Cholsoki Method

7. Antonopoulos and Papazafiriou

8. Van Genuchten

9. US saliniyy laboratory

10. RETC soft war version 6

1. Frind and Hukanen

2. Borden

3. Barent and Frind

$$\theta = \theta_r + \frac{(\theta_s - \theta_r)}{\left[1 + (a\psi)^n\right]^m} \quad (۴)$$

$$C(\psi) \approx \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \quad (۵)$$

که در آن:

$\theta$  = رطوبت حجمی خاک

$\theta_r$  = رطوبت باقی مانده

$\theta_s$  = حداکثر رطوبت اشباع

$\alpha, m$  و  $n$  ضرایب ثابت

آنتونوپولوس و پاپازافیرو (۱۹۹۰) معادلات (۱)

و (۲) را به روش اجزا محدود حل نمودند. در این روش محیط پیوسته واقعی به صورت مجموعه‌ای مرکب از تقسیمات کوچک تر به نام اجزا نمایش داده می‌شوند که در نقاط گرهی به هم متصل می‌باشند. تغییرات متغیر میدان به عنوان مجهول، در هر عنصر با یک تابع درون یاب (تابع شکل<sup>۱</sup>) قابل تقریب است. معادلات میدان به شکل ماتریسی برای تمام محیط پیوسته نوشته و با حل آن‌ها مقادیر گره‌ای متغیر میدان به دست می‌آید. با اعمال روش گالرکین<sup>۲</sup> بر معادله (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega} N_i[L(\psi)] dz = 0 \quad \text{یا} \quad \int_{\Omega} N_i[L(c)] dz = 0 \quad (۶)$$

$N_i$  ماتریس درون یاب یا تابع شکل است.  $L(\psi)$  و  $L(c)$  به ترتیب عملگر جریان و املاح هستند. از جایگذاری (۱) و (۲) به طور جداگانه در (۶) و انتگرال گیری جز به جز از آن، شکل ماتریسی معادله جریان حاصل می‌شود:

$$[A]_{n \times n} \psi_{n \times 1} + [B]_{n \times n} \psi(t)_{n \times 1} = F_{n \times 1} \quad (۷)$$

طریق همگرایی نوع  $h$  برای عناصر میله‌ای دو گرهی بررسی شد.

### مواد و روش‌ها

معادله یک بعدی حاکم بر جریان و انتقال املاح غیراشباع در حالت غیرماندگار در خاک همگن توسط خلیل و یه (۱۹۸۵) و آنتونوپولوس و پاپازافیرو به صورت زیر ارائه شده است.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial (\psi - z)}{\partial z} \right] - C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (۱)$$

که در آن:

$k(\psi)$  = ضریب هدایت هیدرولیکی غیراشباع (سانتی متر بر روز)

$\psi$  = پتانسیل ماتریک (سانتی متر)

$C(\psi)$  = ظرفیت ویژه رطوبتی خاک (یک بر سانتی متر)

$z$  = طول قائم ستون خاک (سانتی متر)

$t$  = زمان (ثانیه)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \theta D \frac{\partial c}{\partial z} - qc \right] - \frac{\partial (\theta c)}{\partial t} = 0 \quad (۲)$$

$$D = 0.6 + 1.026 V \quad (۳)$$

که در آن:

$c$  = غلظت املاح (میلی‌اکی‌والان بر لیتر)

$D$  = ضریب پخشیدگی (سانتی متر مربع بر روز)

$\theta$  = رطوبت حجمی (درصد)

$q$  = دبی واحد سطح (سانتی متر بر روز)

$V$  = سرعت واقعی (سانتی متر بر روز)

ون گنوختن (۱۹۸۲) معادله‌ای به صورت زیر بین رطوبت با پتانسیل ماتریک خاک و ظرفیت ویژه رطوبتی خاک ارائه نموده است.

1. Shape function  
2. Galerkin method

$\{F\}$  بایستی مقادیر پتانسیل ماتریک در نصف گام زمانی بدست آیند. بدین منظور در تکرار اول هر گام زمانی مقدار  $\psi^{k+0.5}$  از برون یابی خطی زیر به دست می آید.

$$\psi^{k+\frac{1}{2}} = \psi^k + \frac{\Delta t^k}{2\Delta t} (\psi^k - \psi^{k-1}) \quad (11)$$

و در تکرارهای بعدی هر گام مقدار  $\psi^{k+0.5}$  به صورت زیر به دست می آید:

$$\psi^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\psi^k + \psi^{k+1}) \quad (12)$$

حل معادله (۹) با استفاده از برآوردهای  $\psi^{k+0.5}$  از معادلات (۱۱) و (۱۲) تا رسیدن به جواب نهایی ادامه می یابد. به طریق مشابه در حل معادله (۱۰) نیز بایستی کمیت های ماتریس سختی، ظرفیت و بردار نیرو با به دست آوردن غلظت در نصف گام زمانی از معادلات (۱۱) و (۱۲) پیگیری شود. حل دستگاه معادلات خطی حاصل از معادلات (۹) و (۱۰)، با روش چلسکی به عنوان روش حل مستقیم دستگاه معادلات، انجام گرفته است. در شکل شماره ۱ روندنمای<sup>۴</sup> حل عددی برنامه ایجاد شده نشان داده شده است.

با توجه به مفروضات و مطالعات میدانی وریک و همکاران (۱۹۷۱) معادلات شرایط اولیه و مرزی خاک لوم رس پانوح عبارتند از:

$$\theta(z,0) = \begin{cases} 0.15 + 0.0008333z \\ 0.2 \end{cases} \quad (13)$$

$$0 < z \leq 60$$

$$60 < z \leq 125$$

$$c(z, 0) = 0 \quad 60 \leq z \leq 125 \quad (14)$$

که در آن:

$[A]$ ،  $[B]$ ،  $F$  و  $\psi$  به ترتیب ماتریس سختی<sup>۱</sup> (هادی)، ظرفیت<sup>۲</sup>، بردار نیرو<sup>۳</sup> و مجهولات می باشند.  $n \times n$  و  $n \times 1$  بیانگر ابعاد ماتریس های مربعی و ماتریس های ستونی هستند و معادله ماتریسی املاح نیز مشابه معادله جریان عبارت است از:

$$[X+W]_{n \times n} C_{n \times 1} + [G]_{n \times n} C(t)_{n \times 1} = H_{n \times 1} \quad (8)$$

که در آن نام گذاری و ابعاد ماتریس های  $[X+W]$ ،  $[G]$ ،  $H$  و  $C$  مشابه معادله (۷) است. با اعمال روش تفاضل مرکزی کرانک نیکلسون برای مشتقات زمانی در معادلات ماتریسی (۷) و (۸) روابط زیر حاصل می شود:

$$[A] \varepsilon \{\psi\}^{k+1} + \frac{1}{\Delta t} [B] \{\psi\}^{k+1} = \quad (9)$$

$$[A] (\varepsilon - 1) \{\psi\}^k + \frac{1}{\Delta t} [B] \{\psi\}^k + \{F\}$$

$$[X+W] \varepsilon \{C\}^{k+1} + \frac{1}{\Delta t} [G] \{C\}^{k+1} = \quad (10)$$

$$[X+W] (\varepsilon - 1) \{C\}^k + \frac{1}{\Delta t} [G] \{C\}^k + \{H\}$$

$k$  و  $k+1$  بیانگر دو گام زمانی متوالی و  $\Delta t$  تفاضل دو گام زمانی است.  $\varepsilon$  فاکتور وزنی یا توازنی زمان است که در روش کرانک نیکلسون مرکزی برابر با  $0.5$  است.

پارامترهای هیدرولیکی در معادله جریان و املاح با تقسیم محیط به عناصر دو گرهی (میله ای)، قابل تعریف اند. این پارامترها شامل ضریب هدایت غیراشباع و ظرفیت رطوبتی خاک در معادله (۱) و  $\theta$ ،  $\theta D$  و  $q$  در معادله (۲) هستند، که در ماتریس های مربعی جامع هادی و ظرفیت معادلات ۹ و ۱۰ اعمال می شوند. برای حل معادله (۹) کمیت های  $[A]$ ،  $[B]$  و

1. Stiffness matrix
2. Capacitance matrix
3. Force vector

و کمترین مقدار خطا به ترتیب به عوامل  $n$  با مقدار  $0.27$  و  $\alpha$  با مقدار  $0.01$  تعلق دارد. مقدار اعوجاج<sup>۲</sup> برای استنتاج داده‌های جدول شماره (۱) بنا به پیشنهاد ون گنوختن در نرم‌افزار RETC عدد ثابت  $0.5$  پیشنهاد شده است. ابتدا مدل برای گام‌های زمانی و مکانی ۱ ثانیه و  $2/5$  سانتی‌متر بر اساس روابط مشخصه خاک لومی رسی (شکل ۲، الف) اجرا گردید. نتایج مدل عددی با گام‌های فوق، همخوانی خوبی با نتایج آنتونوپولوس و پاپازافیرو نشان دادند. لذا نتایج مدل عددی ایجاد شده در این حالت به دلیل تشابه با نتایج میدانی مبنای مقایسه برای سایر حالات قرار گرفت.

نتایج اجرای مدل عددی بر اساس مدل رطوبتی ون گنوختن در شکل ۲ (ب) آمده است. با توجه به ضرایب مدل ون گنوختن (جدول ۱) یک مدل پیوسته رطوبتی برای تمام ناحیه حل تعریف و جایگزین مدل ناپیوسته برای دو ناحیه رطوبتی گردید. شکل شماره ۲ (ب) نشان دهنده تشابه روند کلی پروفیل رطوبتی ۲ و ۹ ساعت با نتایج مدل ایجاد شده است. لذا مدل تک ناحیه‌ای قابل جایگزین با مدل رطوبتی دوناحیه‌ای خاک لومی رسی پانوج به منظور کاهش پیچیدگی مدل عددی با دقت مطلوب است. در بخش‌هایی از پروفیل توزیع رطوبت که تغییرات گرا دیان رطوبتی مشاهده می‌شود، بین نتایج دو مدل نیز کمی اختلاف وجود دارد (شکل ۲، ب). چنین اختلافی به واسطه تعریف کل ناحیه رطوبتی با یک مدل رطوبتی و همبستگی ۹۹ درصدی برآوردهای RETC مناسب به نظر می‌رسد. به عبارت دیگر RETC پارامترهای توابع  $\theta(\psi)$  و  $K(\psi)$  را با بهینه‌سازی به روش حداقل مربعات خطا برآورد می‌کند تا خطای ناشی از اندازه‌گیری رطوبت در مکش‌های متناظر را نیز بهینه نماید. لذا خطای برآورد ضرایب معادله ون گنوختن در برآورد رطوبت تاثیر دارد.

$$\begin{aligned} \psi(0, t) &= -14.495 & \theta_0 &= 0.38 \\ \psi(125, t) &= -159.19 & \theta_1 &= 0.20 \end{aligned} \quad (15)$$

$$c(0, t) = \begin{cases} 209 & t \leq 0.116 \\ 0 & t > 0.116 \end{cases} \quad (16)$$

$$c(125, L) = 0 \quad (17)$$

پارامترهای روابط ۱۳ تا ۱۷ قبلاً معرفی شده‌اند. در این مطالعه اندازه گام زمانی ۱ ثانیه، معیار همگرایی  $0.01$ ، فاکتور وزنی زمان در روش کرانک نیکلسون  $0.5$  به کار رفته است. برنامه نویسی در محیط ویژوال فرترن<sup>۱</sup>  $6/5$  انجام شده است.

### نتایج و بحث

ترتیب مراحل اجرای مدل برای حل معادلات (۱) و (۲) تحت عنوان روندنما در شکل شماره ۱ آمده است. به این ترتیب که مدل پس از خواندن داده‌های ورودی، ماتریس‌های جامع سختی، ظرفیت، بردار نیرو را تشکیل و با اعمال شرایط اولیه و مرزی مجهول مورد نظر را به دست می‌آورد. در صورت عدم حصول نتایج صحیح، برآوردها به عنوان حدس اولیه محسوب و با تکرار مجدد عملیات پارامتر مجهول به دست می‌آید. با پایان زمان شبیه‌سازی نتایج چاپ و برنامه متوقف می‌شود. در حل همزمان معادلات (۱) و (۲) برای گام زمانی به ازای هر مقدار رطوبت به دست آمده به صورت متناظر مقداری به عنوان غلظت نیز به دست می‌آید. پارامترهای معادله ون گنوختن در جدول شماره (۱) ارائه شده است. این جدول برآوردی از ضرایب  $\alpha$  و  $n$  در سطح ۹۵ درصد آماری با بهینه‌سازی به روش حداقل خطاها است. یعنی اثر متقابل  $\alpha$  و  $n$  در سطح احتمال ۵ درصد معنی دار است. تجزیه و تحلیل آماری داده‌ها بیان کننده دقت نتایج با توجه به مقدار کمی خطای استاندارد و ضریب همبستگی بالا است، که بیشترین

2. Tortosity

1. Visual fortran version 6.5

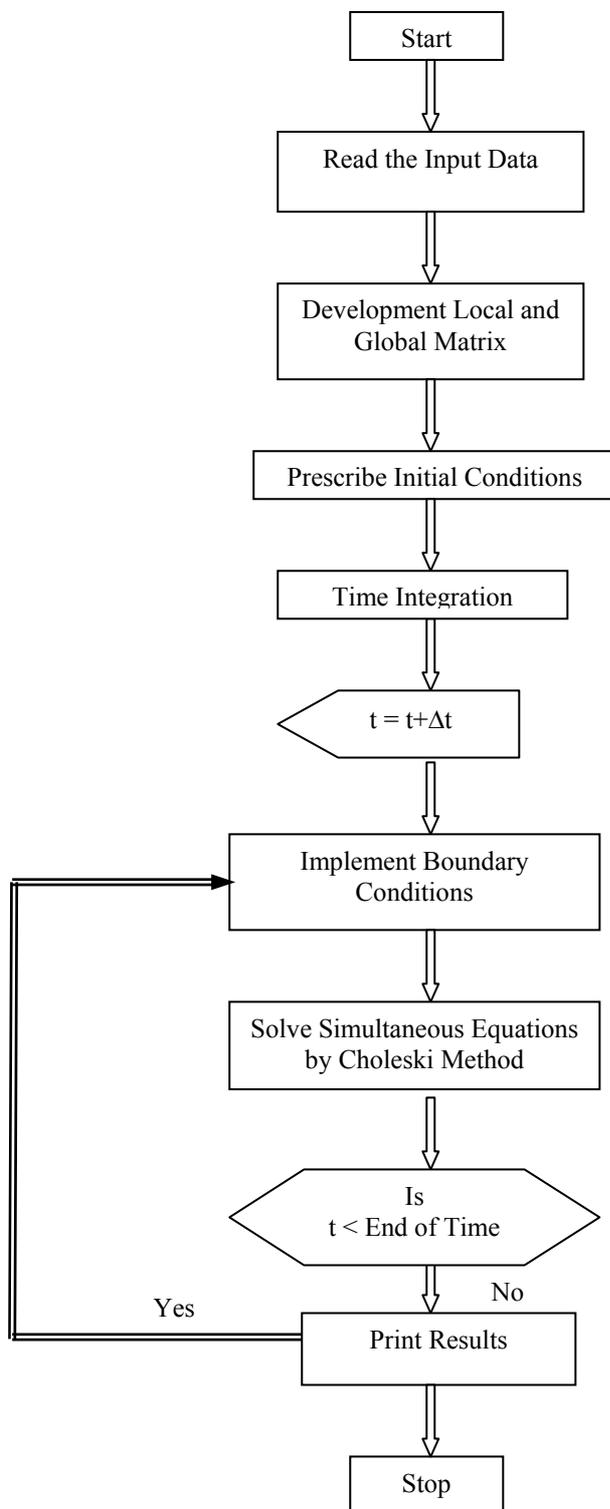
جدول ۱: ضرایب مدل ون گنوختن برای خاک لوم رس  $\left(m = 1 - \frac{1}{n}\right)$

شرح	مقدار	SE (%)	T <sub>Value</sub>	R <sup>2</sup> (%)	K <sub>s</sub> (cmday <sup>-1</sup> )
$\alpha$	۰/۰۱۹	۰/۰۰۱	۱۹/۴۷	۰/۹۹	۳۷/۸
n	۳/۱۸۰	۰/۲۷۰	۱۱/۷۶	۰/۹۹	۳۷/۸

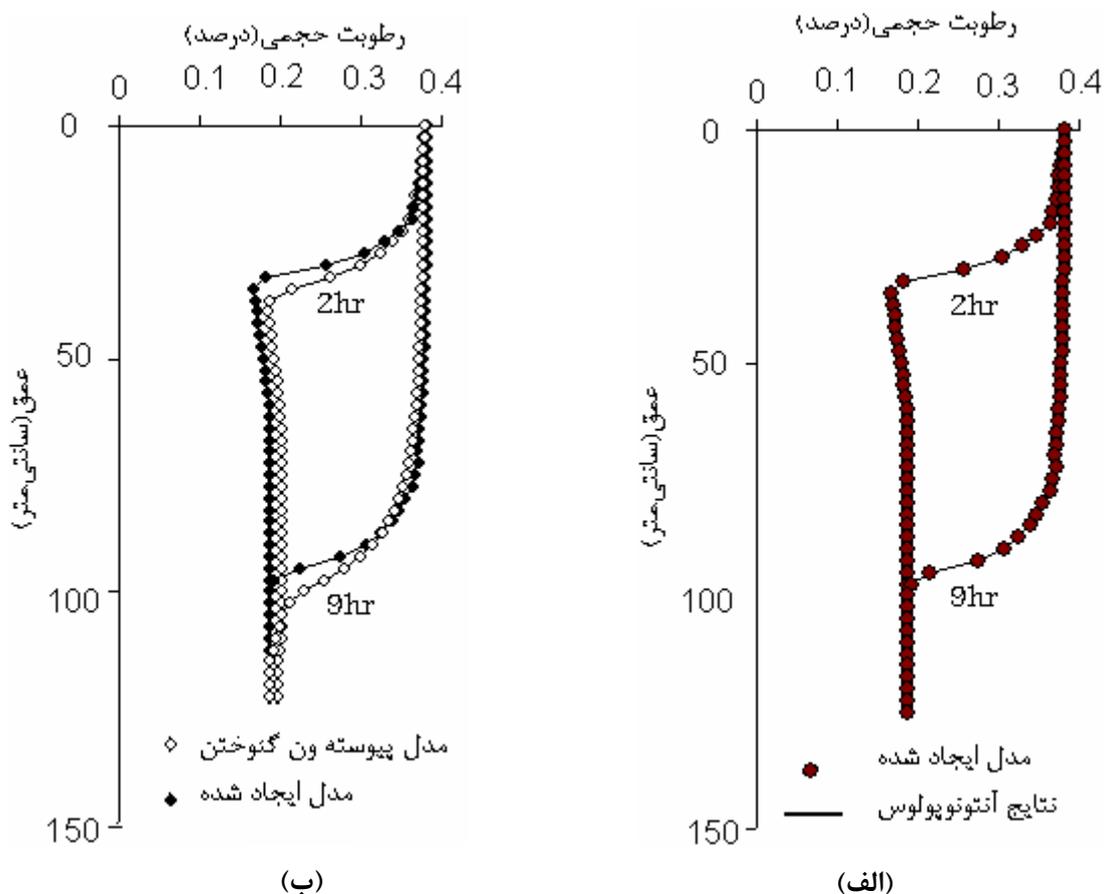
کلیه مقادیر در سطح ۵ درصد معنی دار می باشند.

جدول ۲: زمان محاسبات برای اندازه های مختلفی از عناصر میله ای

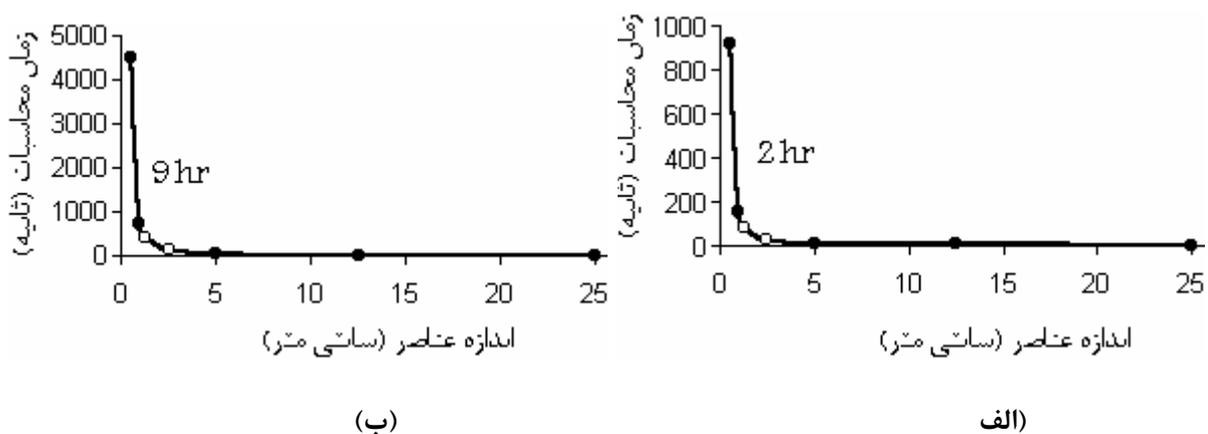
عمق خاک (سانتی متر)	اندازه عناصر (سانتی متر)	تعداد عناصر	درجات آزادی	زمان محاسبات (ثانیه)	
				برای ۲ ساعت	برای ۹ ساعت
۱۲۵	۰/۵	۲۵۰	۲۵۱	۴۵۰۴/۱۱	۹۲۲/۰۴
۱۲۵	۱	۱۲۵	۱۲۶	۷۴۳/۸۰	۱۵۵/۹۹
۱۲۵	۱/۲۵	۱۰۰	۱۰۱	۴۲۷/۴۸	۸۴/۹۹
۱۲۵	۲/۵	۵۰	۵۱	۱۳۵/۷۳	۲۷/۰۲
۱۲۵	۵	۲۵	۲۶	۴۷/۰۱	۱۰/۰۰
۱۲۵	۱۲/۵	۱۰	۱۱	۲۲/۰۳	۴/۸۹
۱۲۵	۲۵	۵	۶	۱۹/۰۰	۴/۲۹



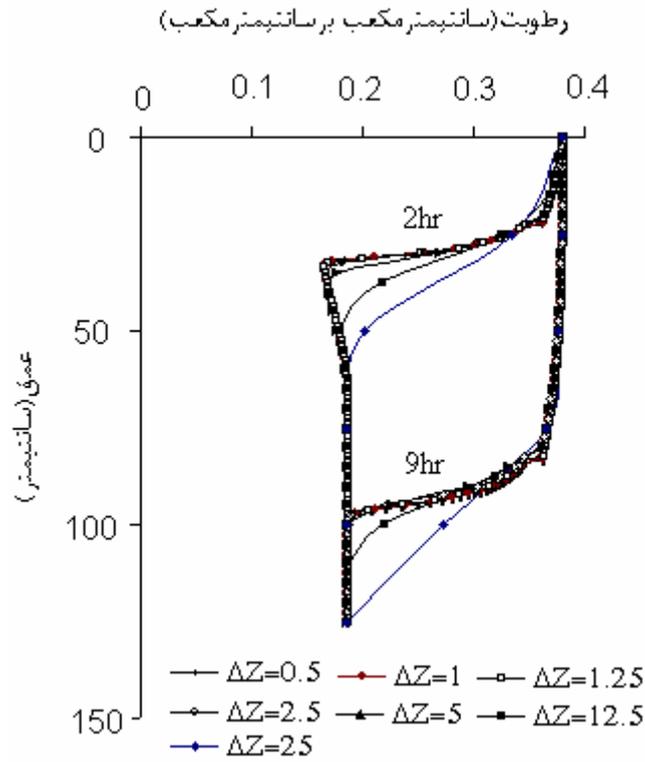
شکل ۱: روندنمای برنامه عددی ارائه شده در تحقیق



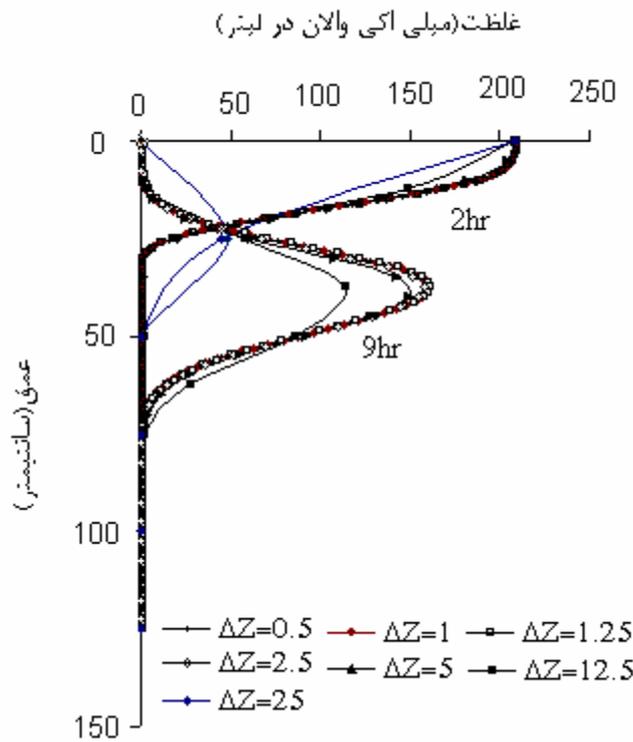
شکل ۲: پروفیل توزیع رطوبت حجمی در خاک لوم رس پانوج الف: ایجاد مدل با مدل رطوبتی دو ناحیه‌ای آنتونوپولوس و ب: ایجاد مدل با مدل رطوبتی پیوسته ون گنوختن



شکل ۳: نمودار زمان محاسباتی توزیع رطوبت و املاح الف: ۲ ساعت و ب: ۹ ساعت پس از آبیاری در خاک لوم رس پانوج



شکل ۴: تغییرات رطوبت توزیعی در خاک لوم رس پانوج در گام‌های مکانی مختلف



شکل ۵: تغییرات املاح توزیعی در خاک لوم رس پانوج در گام‌های مکانی مختلف

زمان محاسبات ۲۷ ثانیه (جدول ۲) که کمترین زمان محاسباتی برای اندازه‌های مناسب عناصر است. گام مکانی ۲/۵ سانتی‌متر مناسب تشخیص داده می‌شود. در پایان با توجه به نتایج شکل شماره ۲ (ب) که در بالا شرح داده شد از مدل رطوبتی پیوسته ون‌گنوختن برای کل ناحیه حل به جای مدل رطوبتی دو ناحیه‌ای می‌توان استفاده نمود که از نظر سهولت برنامه‌نویسی قابل توصیه است. بهترین اندازه عناصر نیز با میان‌یابی اندازه گام‌های ۲/۵ و ۱/۲۵ سانتی‌متر حاصل می‌شود. از طرف دیگر به دلیل توجه اقتصادی در سرعت همگرایی نتایج (اشکال ۳، ۴ و جدول ۲) می‌توان ترکیبی از دو نوع همگرایی  $h$  و  $p$  به نام همگرایی  $h-p$  را پیشنهاد داد. این روش علاوه بر کاهش بیشتر زمان پردازش، از نرخ همگرایی بیشتری نسبت به همگرایی نوع  $h$  و نوع  $p$  برخوردار است (شریفی همدانی، ۱۳۸۲).

### سپاسگزاری

از آقای دکتر صفر معروفی و آقای دکتر سبزی‌پرور اعضای هیات علمی گروه آبیاری دانشگاه بوعلی‌سینا بابت بازخوانی متن مقاله و چکیده انگلیسی تشکر می‌گردد.

جدول شماره (۲) تعداد عناصر و زمان محاسبات (CPU Time) با گام‌های مکانی مختلف را برای معادلات شماره (۱) و (۲) نشان می‌دهد. تعداد درجات آزادی در بحث اجزا محدود برای عناصر میله‌ای برابر تعداد گره‌های ناحیه حل می‌باشد. زمان محاسبات با اجرای رایانه‌ای<sup>۱</sup> مدل عددی ایجاد شده برای خاک لومی رسی پانچ برای ۲ و ۹ ساعت پس از آبیاری حاصل شده است. این جدول بیان‌گر این مطلب است که هر قدر اندازه گام مکانی کاهش یابد علاوه بر اشغال حافظه بیشتر، زمان محاسبات نیز افزایش می‌یابد. شکل شماره (۳) ارتباط اندازه عناصر را در مقابل زمان محاسبات نشان داده، ضمن آنکه منحنی زمان محاسباتی در اندازه عناصر ۱/۲۵ و ۲/۵ سانتی‌متر، تقریباً حالت قائمه دارند. به‌عنوان یک نتیجه کلی می‌توان گفت این دو اندازه مناسب‌ترین اندازه‌های گام مکانی می‌باشند. شکل (۳ الف و ب) نتیجه اجرای مدل عددی جریان و املاح را با گام‌های مکانی جدول شماره (۲) و گام زمانی ۱ ثانیه را برای ۲ و ۹ ساعت پس از آبیاری نشان می‌دهند. شکل‌های شماره (۴ و ۵) نیز برای گام‌های مکانی ۵، ۱۲/۵ و ۲۵ سانتی‌متر تغییرات ناگهانی را در پروفیل‌های توزیع رطوبت و املاح نشان می‌دهند. در بخش‌هایی از ناحیه حل که تغییرات گرادیان وجود دارد چنین تغییرات ناگهانی مشهود است. این امر منجر به کاهش دقت و در نتیجه افزایش خطا در برآوردها به‌عنوان نتیجه حل عددی می‌شود. در بقیه قسمت‌ها به واسطه یکسانی جواب‌ها و یا تثبیت پروفیل‌های توزیعی اختلاف مشاهداتی در گام‌های بزرگ‌تر، کم‌تر به چشم می‌خورد. همچنین شکل شماره ۴ اختلاف قابل ملاحظه‌ای را در گام‌های مکانی ۱، ۰/۵، ۱/۲۵ و ۲/۵ سانتی‌متر بین نتایج نشان نمی‌دهند. چنین نتیجه‌ای را آنتونوپولوس و پاپازفیرو و همچنین خلیل و یه (۱۹۸۵) بدون انجام آزمون همگرایی و به‌صورت تجربی نیز برای گام ۲/۵ و ۱/۲۵ سانتی‌متر به‌واسطه هم‌خوانی با مطالعات میدانی نشان دادند. با عنایت به

1. Pentium 4, RAM: 512 MB, CPU clock: 2.66 GH

## منابع

- بارانی، غ. ع.، رهنما، م. ب. و صفا، ب. ۱۳۸۱. بررسی اثرات زیست محیطی انتقال آلودگی در سفره‌های آب زیرزمینی. سمینار بررسی راه‌کارهای مقابله با بحران خشکسالی، زابل.
- مجدوبی، غ. ح. و فریبا، ف. ۱۳۷۶. روش اجزا محدود در مهندسی (ترجمه). انتشارات دانشگاه بوعلی سینا.
- شریفی همدانی، ب. ۱۳۸۲. بررسی اثر همگرایی المان‌های C در الاستیسیته سه بعدی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. دانشکده فنی. دانشگاه بوعلی سینا.
- Antonopoulos, V. Z. and Papazafiriou, Z. G. 1990. Solutions of one-dimensional water flow and mass transport equations in variably saturated porous media by the finite element method. *Journal of Hydrology*, 119: 151-167.
- Bigdeli, B. 1996. An investigation of C\* convergence in the finite element method, Ph. D. Thesis, New South Wales university, Australia.
- Khaleel, R. and Yeh, T. C. 1985. A Galerkin finite element program for simulating unsaturated flow in porous media. *Ground water*, 23(1): 90-96.
- Van Genuchten, M. Th. 1982. A comparison of numerical solutions of the one-dimensional unsaturated-saturated flow and mass transport equations. *Adv. Water Resources*, 5: 47-55.
- Van Genuchten, M. Th., Simunek, J., Leij, F. J. and Sejna, M. 1991. Code for quantifying the hydraulic function of unsaturated soils. RETC, Version 6.0. US Salinity Laboratory.
- Tong, P. and Pian, T. H. H. 1973. On the convergence of the finite element method for problems with singularity. *Int. J. Solids Struct*, 9: 313-321.
- Warrick, A. W., Biggar, J. W. and Nielsen, D. R. 1971. Simultaneous solute and watertransport for an unsaturated soil. *Water Resour. Res.*, 7(5): 1216-1225.

## Application of numerical finite element model for transient unsaturated mass transport

Zare Abyaneh<sup>1</sup>, H., Nazemi<sup>2</sup>, A. H., Neyshaboori<sup>3</sup>, M. R., Mohammadi<sup>4</sup>, K., Majzoobi<sup>5</sup>, G. and Sharifi Hamadani<sup>6</sup>, B.

### Abstract

Transient nonlinear Richard's and mass transport equations evaluated with Galerkin finite element and a computer model was developed based on the mathematical model. Initially, our numerical model was controlled using Panoch clay loam results of Antonopoulos and Papazafiriou. Then, using the experimental soil moisture characteristic data and RETC software the coefficients of empirical Van Genuchten equation were determined. Again, the model was run under equation Van Genuchten, and the results were compared to Antonopoulos and Papazafiriou results. Finally, the distributions of moisture content and concentration profiles were determined under initial condition and Dirichlet boundary condition for the upper boundary of model. Results obtained by spatial resolution of 2.5cm and time interval of 1s are in a good agreement with each other. Therefore replacement of Van Genuchten equation in the Antonopoulos and Papazafiriou model not only does not reduce the accuracy but also makes it simpler. Also using the convergence of h-type for 1 second of time step and grid size of 0.5, 1, 1.25, 2.5, 5, 12.5 and 25cm was verified. For the spatial interval of 2.5 cm, the suggested CPU time is about 27.02 seconds. Therefore, both the results obtained by Antonopoulos and Papazafiriou can be applied.

**Keywords:** Mass transport numerical model, Transient unsaturated flow, Finite element, Galerkin method

---

1. Instructor, Department of Irrigation, Faculty of Agriculture, Bu-Ali Sina University

2. Assistant professor, Department of Irrigation, Faculty of Agriculture, Tabriz University

3. Professor, Department of Soil Science, Faculty of Agriculture, Tabriz University

4. Assistant professor, Department of Irrigation, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modarres University

5. Associate professor, Department of Mechanics, Faculty of Engineering, Bu-Ali Sina University

6. Instructor, Azad University, Hamadan