

## بررسی شناخت معلمان ریاضی دوره متوسطه از مثال ریاضی و نحوه به کارگیری آن در معرفی یک مفهوم

ابراهیم ریحانی\*

شهرناز بخشعلی زاده\*\*

احمد واشقانی فراهانی\*\*\*

### چکیده

در ساخت دانش و بازسازی مفاهیم ریاضی، «مثال»ها نقشی اساسی ایفا می‌کنند. مثال‌های آموزشی خوب مانند یک نمایشگر شفاف، ابزاری برای برقراری ارتباط میان فراگیران، معلمان و مفاهیم هستند. در این پژوهش تصور و درک معلمان ریاضی از مثال و چگونگی به کارگیری آن توسط آن‌ها در فرایند آموزش یک مفهوم ریاضی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. روش تحقیق به کار گرفته شده در این پژوهش، روش کیفی پیمایشی است. جامعه آماری تحقیق شامل کلیه معلمان ریاضی دوره متوسطه استان مرکزی در سال تحصیلی ۹۰-۸۹ است. حجم نمونه ۷۵ نفر بود که به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده انتخاب شد. نتایج تحقیق نشان داد که معلمان به ضرورت استفاده از مثال‌ها واقف‌اند، ولی شناخت کافی از مثال آموزشی ندارند و فضای مثال آن‌ها به قدر کافی توسعه یافته نیست. اکثر معلمان، مثال را یک ابزار مفید و ضروری و یا یک

تاریخ دریافت مقاله: ۹۱/۲/۳ تاریخ شروع بررسی: ۹۱/۳/۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۱/۷/۲۲

\* استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، e\_reyhani@srttu.edu

\*\* کارشناس پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش

\*\*\* دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

زبان مشترک و قابل فهم برای فراگیر می‌دانند، ولی در عین حال موضوعاتی مانند قضایا و مسئله‌ها، تعاریف و اثبات و استدلال‌ها را به‌عنوان مثال در نظر نمی‌گیرند. معلمان به ویژگی‌هایی از قبیل شفافیت و سادگی، صحت ریاضی، توانایی فراگیران و قابلیت ارزیابی مثال اشاره کرده‌اند، اما بخش قابل توجهی از آنان از ویژگی‌های مهمی همچون تعمیم‌پذیری، در دسترس بودن و غنی بودن و قوت یک مثال ریاضی غفلت ورزیده‌اند. همچنین بیشتر معلمان شرکت‌کننده در پژوهش، از مثال‌ها فقط در برخی از قسمت‌های فرایند آموزش ریاضی مانند مفهوم سازی یا آموزش رویه‌ها استفاده می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: مثال ریاضی، مثال آموزشی، معلمان ریاضی، فضای مثال، تولید مثال.

#### مقدمه

استفاده از مثال در آموزش ریاضی امری ضروری و اجتناب‌ناپذیر است. مثال‌ها با استفاده از ویژگی‌های خاص و قابلیت‌های منحصر به فرد خود در بازنمایی و ارائه مفاهیم و نمایاندن فرایندهای شکل‌گیری یک مفهوم، تأثیر بسیار زیادی در ذهن فراگیران دارند (باردلی و فراری<sup>۱</sup>، ۲۰۱۱). رولند<sup>۲</sup> (۲۰۰۸) استفاده از مدل‌های مختلف و متنوع ارائه مثال‌ها را یکی از روش‌های کلیدی برای قابل دسترس ساختن ایده‌های مجرد ریاضی و شهودی‌تر نمودن مفاهیم برای فراگیران می‌داند. ریسلند و میسنر<sup>۳</sup> (۲۰۰۸) از مثال‌ها به‌عنوان پنجره‌ای رو به ذهن فراگیر یاد می‌کنند و معتقدند که مثال‌ها می‌توانند مانند یک ابزار نمایانگر<sup>۴</sup> و دقیق، ارزیابی‌کننده درک فراگیران از مفاهیم باشند و یا نحوه مشارکت آنان در ساخت مفهوم را نشان دهند.

دست‌ورزی و رویارویی دانش‌آموزان با مثال‌ها بسیار ارزشمند است. واتسون و میسون<sup>۵</sup> (۲۰۰۵) بیان می‌کنند که «دسترسی به یک مثال خوب و استفاده مناسب از آن، برای درک هر مفهوم ریاضی الزامی و ضروری است. وقتی می‌خواهیم موضوع جدیدی بیاموزیم، در اولین قدم خود را ملزم به ساخت یک مثال از آن موضوع می‌کنیم». به گفته هازان و زازکیس<sup>۶</sup> (۱۹۹۹-۱۹۷۹، نقل شده در کثیری، ۱۳۸۸) مسائلی از نوع ساختن مثال‌ها می‌توانند فراگیران را در ایجاد یک ساخت و ساز قوی ذهنی از اشیاء ریاضی کمک کنند.

درک و تصور معلمان ریاضی از مثال و آگاهی از جایگاه آن در آموزش و نیز مهارت معلمان در ارائه و به‌کارگیری یک مثال آموزشی یکی از عوامل‌های مهم و تأثیرگذار بر فرایند تدریس ریاضی است. به تعبیر زودیک و زاسلاوسکی<sup>۷</sup> (۲۰۰۸) نقش و وظیفه معلم، ارائه مناسب و درگیرکردن دانش‌آموزان با تنوع زیادی از مثال‌های کارآمد است، که نیازهای

مختلف دانش‌آموزان در آن‌ها لحاظ شده باشد. واتسون و چیک<sup>۸</sup> (۲۰۱۱) بخشی از وظایف معلمان در کار با مثال‌ها را، راهنمایی فراگیران در ساخت مثال جدید، مقایسه مثال‌ها، توجه به فرایند ساخت و یا رویه اجرای مثال‌ها دانسته‌اند. آن‌ها بیان می‌کنند که یک مثال می‌تواند به طرق مختلف ایده‌های ریاضی را تشریح کند، و این بستگی به مهارت فراگیران در کار با مثال‌ها و نیز توانمندی معلم در نحوه انتخاب و نوع فعالیت و روش کار با مثال‌ها دارد. با دقت در مثال‌ها و نحوه استفاده از آن‌ها می‌توان پیام هر مثال را به درستی به فراگیران منتقل کرد و کیفیت یاددهی و یادگیری ریاضی را بهبود بخشید.

اهمیت مثال‌های خوش ساخت<sup>۹</sup> و مناسب در توضیح مفاهیم، نیاز معلمان به آشنایی و به‌کارگیری مثال‌ها را روشن می‌کند. تحقیق در زمینه‌های یادگیری با مثال، آموزش معلمان برای کار با مثال‌ها و بحث تصور و چگونگی عملکرد معلمان در ارتباط با انتخاب، تولید و یا نحوه ارائه مثال‌ها، یک ضرورت است، زیرا یا تمام یادگیری با مثال‌ها پایه‌گذاری شده است و یا با مثال‌ها پشتیبانی و حمایت می‌شود (تسامیر و تیروش و لونسون<sup>۱۰</sup>، ۲۰۰۸). به نظر می‌رسد که در عمل، نحوه انتخاب و شیوه کار با مثال‌ها با یک چالش همراه است. مثال‌ها می‌توانند تسهیل‌کننده یا بازدارنده یادگیری باشند و اگر از آن‌ها درست و بجا استفاده نشود، ممکن است در برخی از موارد نتیجه معکوس داشته باشند. از طرفی مثال‌ها می‌توانند در ایجاد فرصت‌های یادگیری برای معلمان هم مؤثر باشند و تمرکز روی ماهیت و چگونگی این فرصت‌ها، باعث افزایش مهارت‌های حرفه‌ای آموزشگران می‌شود (زاسلاوسکی و زودیک، ۲۰۰۸). تحقیقات در مورد انتخاب و نحوه به‌کارگیری مثال‌ها توسط معلمان نسبتاً اندک است (بال<sup>۱۱</sup>، ۲۰۰۵، نقل شده در بلیز<sup>۱۲</sup> و دیگران، ۲۰۰۶) و هنوز یک برنامه منظم و شیوه آموزشی مناسب در مورد نحوه انتخاب و به‌کارگیری آن‌ها از طرف کارشناسان و آموزشگران ورزیده جهت استفاده معلمان ارائه نشده است (زودیک و زاسلاوسکی، ۲۰۰۸). علی‌رغم وجود اهمیت زیاد مثال‌ها در آموزش ریاضی، متأسفانه در کشور ما به مقوله تولید مثال و کار با مثال‌ها چندان پرداخته نشده و خلاء و نیازمندی عظیمی در این زمینه احساس می‌شود (کثیری، ۱۳۸۸) و این نیازمندی، ضرورت انجام این‌گونه پژوهش‌ها را روشن می‌سازد. در این پژوهش دو مقوله مهم و مرتبط زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱. تصور معلمان از «مثال‌های آموزشی» در ریاضیات چیست؟
۲. معلمان در ارائه و به‌کارگیری مثال، در آموزش مفاهیم ریاضی، چگونه عمل می‌کنند؟ پاسخگویی به این سؤال‌ها مستلزم شناسایی بیشتر و دقیق‌تر مثال و موضوعات مرتبط با آن از جمله ویژگی‌های یک مثال آموزشی مناسب، نقش مثال در آموزش ریاضی و زمینه‌های

استفاده از مثال در فرایند آموزش ریاضی می‌باشد. در بخش نظری این تحقیق با بررسی پژوهش‌های انجام شده در مورد مثال، چارچوبی نظری برای مطالعه درک و تصور معلمان ریاضی از مثال و نیز مبنایی برای ارزیابی مثال‌های تولید شده توسط آنان فراهم می‌گردد.

## پیشینه و چارچوب نظری تحقیق

### مثال ریاضی چیست؟

درک و تصور معلمان از «مثال»، بر استفاده آنان از مثال در تدریس ریاضی اثرگذار است. به تعبیر واتسون و میسون (۲۰۰۵) مثال یعنی هر چیز قابل استفاده به‌عنوان یک ماده خام اولیه که در درک ارتباطات، مفاهیم، ساختارها، استنتاج و استدلال و تعمیم به‌کار می‌رود. همچنین واتسون و میسون (۲۰۰۲) این‌گونه بیان کرده‌اند که از مثال به معنی نماینده‌ای از یک گروه از اشیاء و موضوعات و مفاهیم یا اعمال ریاضی شامل تکنیک‌ها، رویه‌ها، خواص و ویژگی‌ها و نظایر آن‌ها استفاده می‌شود. یک مثال می‌تواند مسئله‌ای بسیار ساده از کاربرد یک الگوریتم<sup>۳</sup>، یا یک نمونه ساده از تعریفی کلی، یا یک جنبه خاص از یک مفهوم باشد. مثال‌ها به‌عنوان ابزاری کارآمد برای بیان ویژگی‌های کلیدی از هر تعریف و یا توضیح آموزشی هستند که در فرایند حل یک مسئله دخالت دارند و می‌توانند در تشریح مفاهیم ریاضی و بیان ارتباط بین این مفاهیم مؤثر باشند (بلیز و دیگران، ۲۰۰۶). به نظر می‌رسد چنین دیدگاه‌ها و تعبیری از مثال گسترده‌تر از آن چیزی است که به‌طور معمول در کلاس‌های درس توسط معلمان مورد استفاده قرار می‌گیرد. به نظر گلدنبرگ<sup>۴</sup> و میسون (۲۰۰۸) اثبات‌ها در ساختار استدلال‌های ریاضی می‌توانند به‌عنوان مثال مطرح شوند. همچنین تعاریف نیز به‌عنوان مثال‌هایی از فرایند معنا دادن به اشیای ریاضی و تعیین آن‌ها هستند. به تعبیر زاسلاوسکی (۲۰۰۸) هر مثالی که معلم در فرایند آموزش، از مفهومی خاص ارائه دهد، یک مثال آموزشی است. مثال آموزشی ریاضی ممکن است مثالی با زمینه‌ای از سایر علوم و خارج از حوزه ریاضیات، اما حاوی نکات اصلی مفهوم و مؤثر در تدریس ریاضی باشد. مجموعه‌ای از مثال‌ها که فراگیر یا آموزشگر در هر لحظه می‌تواند به آن‌ها دسترسی داشته باشد فضای مثال<sup>۵</sup> نامیده می‌شود (زاسلاوسکی ۱۹۹۵، نقل شده در بلیز و دیگران، ۲۰۰۶). به اعتقاد زاکیس و لیکین<sup>۱۶</sup> (۲۰۰۷) فضای مثال فراگیران ترکیبی از دو نوع فضای مثال است: فضای مثال از مفاهیم ریاضی (مانند مثال‌هایی از اعداد، مجموعه‌ها، اشکال و مانند آن) و فضای مثال از اعمال و رویه‌های ریاضی (مانند روش‌های حل معادلات و نامعادلات و یا روش‌های کار با کسرها و رادیکال‌ها و نظایر آن). محدودیت فضای مثال معلم، می‌تواند مانعی برای فرایند تدریس ریاضی به حساب آید.

## انواع مثال

مطالعه پژوهش‌های انجام شده در حوزه آموزش ریاضی (به‌طور مثال ریسلند و میشنر ۱۹۷۸، واتسون و میسون ۲۰۰۲، بلیز و همکاران ۲۰۰۶، گلدنبرگ و میسون ۲۰۰۸، الکوک و انگلیز<sup>۱۷</sup> ۲۰۰۸ و واتسون و چیک ۲۰۱۱) چهار گروه از مثال‌ها را که دارای اهمیت بودند، به شرح زیر معلوم کردند:

۱. مثال‌های شروع کننده<sup>۱۸</sup>: در ابتدای هر بحث برای ایجاد انگیزه، ورود به مطلب و یا بیان چگونگی رشد و توسعه یک ایده به کار می‌روند. این مثال‌ها در بر گیرنده ویژگی‌های اصلی مفاهیم و محرک تعاریف پایه هستند، مفاهیم اساسی را منتقل می‌کنند، به آسانی قابل درک هستند و حالت‌های خاص و ویژگی‌های اصلی آن‌ها قابل تعمیم به حالت‌های کلی است. مانند نمودار در تدریس سهمی‌ها و یا محاسبه مساحت یک شکل غیرهندسی برای ورود به درس انتگرال معین.

۲. مثال‌های مرجع<sup>۱۹</sup>: مثال‌هایی هستند که قبلاً آموخته شده‌اند و برای بررسی حدس‌ها و یا بازبینی مفاهیم و یا شکل‌دهی و توسعه درک به کار می‌روند. مکرراً به آن‌ها ارجاع می‌شود، زیرا پایه‌ای هستند و توانایی و ظرفیت زیادی برای ایجاد ارتباط بین نتایج و مفاهیم دارند. مثلاً تابع  $y = |x|$  به‌عنوان مثالی از یک تابع پیوسته در  $R$  است که در یک نقطه از دامنه‌اش مشتق پذیر نیست.

۳. مثال‌های عام (الگویی و مدلی<sup>۲۰</sup>): این مثال‌ها حالت کلیشه‌ای دارند و کلی و انعطاف‌پذیرند و می‌توانند مثال‌هایی از مفاهیم یا رویه‌ها و یا کلبیتی از اثبات‌ها باشند و دارای ویژگی‌هایی به‌عنوان نماینده‌های از یک کلاس یا رده هستند. مانند انتخاب حرف  $x$  به‌عنوان مجهول یا بیان عبارت  $2n$  برای معرفی اعداد زوج یا ضابطه برای بیان مدل تابع.

۴. مثال‌های نقض<sup>۲۱</sup>: این مثال‌ها در رد حدسیه‌ها و فرضیه‌های نادرست و اصلاح آن‌ها به کار می‌روند. مانند عبارت  $4 = \sqrt{16} = \sqrt{2} \times \sqrt{8}$  برای رد این فرضیه که «حاصل ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است».

## جایگاه مثال در آموزش ریاضی

پژوهشگران (وینر<sup>۲۲</sup> ۱۹۹۱، زاسلاوسکی ۱۹۹۵، واتسون و میسون ۲۰۰۵ و زودیک و زاسلاوسکی ۲۰۰۸) مدعی هستند که در فرایند شکل‌گیری یک مفهوم، اغلب ابتدا درک شهودی رشد می‌یابد و سپس یادگیرنده به سوی درک ساختار حرکت می‌کند. وینر (۱۹۹۱ و ۱۹۸۳) به وجود شکاف و فاصله بین تصور مفهومی<sup>۲۳</sup> فراگیران و تعریف مفهومی<sup>۲۴</sup>

اشاره کرده است و معتقد است که بهبود فرایند مفهوم‌سازی در ذهن فراگیران، از تقلیل شکاف بین تصور مفهومی و تعریف مفهومی آنان صورت می‌پذیرد و اهمیت مثال‌ها در پر کردن این شکاف و فاصله غیرقابل انکار است. به عقیده او تصورات مفهومی می‌توانند مقید به مثال‌هایی باشند که با آن‌ها مواجه شده‌ایم، زیرا بعد از شکل‌گیری اولیه یک مفهوم، مثال‌ها از آن مفهوم برون‌سازی می‌شوند و تصور مفهومی می‌تواند شکل بگیرد. تصورات مفهومی دانش‌آموزان اغلب محدود و وابسته به قلمرو مثال‌های آشنا و پرکاربرد است.

رولند<sup>۲۵</sup> و زاسلاوسکی (۲۰۰۵)، رولند (۲۰۰۸)، تسامیر و تیروش و لونسون (۲۰۰۸) و واتسون و برای بیان ارتباط بین مثال‌ها و مفاهیم در فرایند آموزش، ایده «مثال‌هایی از<sup>۲۶</sup>» و «مثال‌هایی برای<sup>۲۷</sup>» را به کار بردند و عنوان کردند که مثال‌ها می‌توانند در پایان بحث از روی نتایج و مفاهیم ساخته شوند. در این حالت مثال‌ها برای توصیف بیشتر مفاهیم و تعاریفی که قبلاً بیان شده‌اند و نیز تثبیت و تعمیق یادگیری به کار می‌روند. در حالت دیگر، مثال‌ها می‌توانند در ابتدای بحث، محرک یادگیری و موجب سهولت در استنباط نتایج باشند و برای حدس و کشف خواص و ویژگی‌های اصلی مفهوم به کار روند. در حالت اول مثال‌ها تابع مفهوم و وابسته به آن هستند، ولی در حالت دوم مفهوم‌ها تابع و وابسته به مثال‌ها هستند.

مثال‌ها ابزاری قوی برای برقراری ارتباط بین معلمان و فراگیران و موضوع ریاضی مورد بحث هستند (واتسون و میسون، ۲۰۰۲). قدرت و توانمندی مثال‌ها در این است که به‌عنوان زبان مشترک، در ذهن و حافظه فراگیران اثر مستقیم و مؤثر داشته و آن‌ها را در درک فرایندهای موجود یاری می‌کنند (باردلی و فراری، ۲۰۱۱). وبر و الکوک<sup>۲۸</sup> (۲۰۰۴) در تحقیقات خود دریافتند که ارائه اثبات‌ها از طریق مثال (مخصوصاً مثال نقض)، از ارائه اثبات‌ها به وسیله تعاریف، روشن‌کننده‌تر و قابل لمس‌تر است. اتکینسون<sup>۲۹</sup> و همکارانش (۲۰۰۰) استفاده از مثال و استفاده از قواعد را دو رویکرد رایج در آموزش حل مسائل ریاضی می‌دانند. از نظر آن‌ها تمرینات حل شده، مثال‌هایی هستند که یک استراتژی قوی و حرفه‌ای در حل مسئله برای فراگیران فراهم می‌کنند. به‌طور خلاصه می‌توان برخی از زمینه‌های کاربرد مثال در آموزش ریاضی را مواردی مانند استفاده از آن‌ها در تدریس مفاهیم، تعمیم مفاهیم، ارائه اثبات و استدلال، انگیزش و ایجاد علاقه‌مندی، حل مسئله و ارزشیابی در ریاضی دانست. آنتونینی<sup>۳۰</sup> و همکارانش (۲۰۱۱) علاوه بر موارد فوق، مواردی مانند ارتباط مثال‌ها با کشف و خلاقیت در ریاضی، نقش مثال‌ها در نظریات یادگیری ریاضی و سازماندهی فضای مثال را مبین اهمیت مثال‌ها به‌عنوان یک حوزه تحقیقاتی وسیع در آموزش ریاضی می‌دانند.

## ویژگی‌های یک مثال آموزشی مناسب

به اعتقاد ریسلند و میسنر (۱۹۷۸) شفافیت<sup>۳۱</sup> و قابلیت تعمیم<sup>۳۲</sup>، از مهم‌ترین ویژگی‌های یک مثال مفید و مؤثر هستند. کیفیت یادگیری تنها به مفهوم ارائه شده بستگی ندارد، بلکه بیشتر به آنچه که در ذهن فراگیران ساخته شده یا درونی می‌شود، وابسته است (میسون، ۲۰۰۶). به عقیده زاسلاوسکی و لای<sup>۳۳</sup> (۲۰۰۵) شفافیت یعنی اینکه مثال به کار گرفته شده بتواند به آسانی، دقت و توجه فراگیران را به ویژگی‌های اصلی مفهوم جلب کند و مخاطب اصل یا عصاره مفهوم را به روشنی از مثال دریافت کند. همچنین مثال بتواند به سادگی و وضوح، کیفیتی از مفهوم درک شده در ذهن فراگیر را نشان دهد. بنابراین یک مثال مناسب و شفاف باید روشن کننده ظرافت‌ها و رفع کننده موانع و چالش‌های یک مفهوم ریاضی باشد. قابلیت تعمیم یعنی اینکه مفهوم ارائه شده تا چه محدوده‌ای می‌تواند توسط مثال تعمیم یابد و یا اینکه مثال ارائه شده چه وسعتی از مفهوم را پوشش می‌دهد.

از نظر گلدنبرگ و میسون (۲۰۰۸) مثال‌های خوش ساخت مثال‌هایی هستند که تأمین کننده قیود و شرایط مفهوم باشند و دارای زیبایی و ظرافت‌هایی از قبیل سادگی در فهم و بیان، قابلیت به کارگیری در زمینه‌های متعدد، گستردگی تعمیم، استفاده مناسب و غنی از دانش ریاضی و قضایا و تکنیک‌ها، نمایانگر ساختارهای ترکیبی فضای مثال و دارای بازنمایی‌های مختلف (از قبیل جبری، هندسی و مثلثاتی) و ویژگی‌هایی نظیر آن‌ها باشند. مثلاً تابع  $f(x)=x^3$  به عنوان یک مثال مرجع، ساده و شفاف و همچنین قابل تعمیم می‌تواند مثالی در زمینه‌های گوناگون از قبیل توابع فرد، توابع اکیدا صعودی و یک‌نوا، توابعی که خط مماس بر آن‌ها نمودار تابع را قطع می‌کند، نماینده‌ای از توابع فاقد اکسترم‌های نسبی، توابع دارای مرکز تقارن، فاقد مجانب، در همه جا پیوسته، یک به یک و پوشا باشد که در بیشتر موارد قابلیت بازنمایی جبری و هندسی را دارد.

## چارچوب ارزیابی و تحلیل مثال‌ها

با توجه به هدف تحقیق حاضر لازم است مبنایی برای ارزیابی مثال‌های تولید شده توسط معلمان ریاضی داشته باشیم. در زمینه ارزیابی مثال‌ها، بر پایه پژوهش‌های انجام شده (به طور مثال زاسلاوسکی، ۱۹۹۶، زاسلاوسکی و پلد<sup>۳۴</sup> ۱۹۹۶ و زازکیس و لیکین<sup>۳۵</sup> ۲۰۰۸-۲۰۰۷) معیارهایی از قبیل صحت ریاضی<sup>۳۵</sup>، مولد بودن یا زاینده‌گی<sup>۳۶</sup>، قابل دسترس بودن<sup>۳۷</sup>، غنی بودن<sup>۳۸</sup>، تعمیم‌پذیری و کلی بودن<sup>۳۹</sup> مطرح شده‌اند. صحت ریاضی مثال‌ها یعنی اینکه آیا مثال‌ها شرایط لازم و کافی را برای تعریف مفهوم تأمین می‌کنند یا نه؟ ارائه مثال‌هایی با

شرایط کافی ولی غیرلازم و همچنین مثال‌هایی با شرایط لازم ولی غیرکافی، نشان دهنده درک ناقص از مفهوم ریاضی و عدم تمایز بین ویژگی‌های اصلی و ویژگی‌های غیرضروری آن است (زازکیس و لیکین، ۲۰۰۸-۲۰۰۷). به اعتقاد زازکیس و لیکین (۲۰۰۷) در بسیاری از موارد عدم صحت ریاضی مثال‌های تولید شده توسط معلمان، به دلیل فقر فضای مثال و یا سازماندهی نامناسب مثال‌ها و دسترسی نداشتن به مجموعه‌ای متنوع از مسائلی است که به روش‌های مختلف حل می‌شوند. مولد بودن یا زاینده‌گی یک مثال به قابلیت تولید مثال‌های جدید از یک مثال و همچنین تعداد مثال‌های تازه‌ای که با انجام تغییرات روی مثال مورد نظر، به دست می‌آید مربوط می‌شود.

قابل دسترس بودن مثال‌ها یعنی اینکه آیا مثال‌های تولید شده به آسانی تولید می‌شوند، یا تلاش و تقلای زیادی صرف تولید آن‌ها می‌شود؟ آیا بلافاصله مانند چیزی که در آستین داشته باشیم از ذهن بیرون می‌آیند یا زمان صرف شده برای تولید آن‌ها طولانی است؟ آیا رویه و فرایند خاصی را برای ارائه و تولید آن‌ها طی می‌کنیم، یا اینکه از منابع بیرون کشیده می‌شوند؟ آیا رویه و روشی برای ساخت و امتحان آن‌ها در جهت تأمین شرایط وجود دارد؟ آیا رویه مورد استفاده زیبا و با ظرافت و صحیح است یا اینکه غیرضروری است؟

غنی و قوی بودن مثال‌ها: به بیان زازکیس و لیکین (۲۰۰۷) با دقت در سؤالاتی مانند آنچه که در ادامه می‌آید، می‌توان به جنبه‌ها و شرایطی از غنی و قوی بودن مثال‌ها پی برد. آیا مثال‌ها در نوع<sup>۱</sup> و ساختار<sup>۲</sup> تنوع دارند یا نه؟ آیا در نحوه بیان، گویا و ساده هستند و در روش‌های ارائه و بازنمایی متنوع‌اند؟ روتین هستند یا غیر روتین؟ آیا می‌توانند فضای مثال شخصی فراگیر را به فضای مثال ساختار یافته تبدیل کنند؟ چه شباهت‌ها و تفاوت‌هایی با مثال‌های قبلی موجود در ذهن فراگیر دارند؟ آیا این مثال‌ها در منابع و برنامه‌های درسی به کار رفته‌اند یا خیر؟ آیا مثال مورد نظر می‌تواند از بافت و زمینه‌های متنوع بیرون آید؟ آیا در زمینه‌های گوناگون به کار می‌رود؟ دانش ریاضی استفاده شده در ساخت مثال در چه سطحی است و آیا از یک مفهوم در تولید آن استفاده شده یا مجموعه‌ای از مفاهیم در ساخت آن شرکت دارند؟

تعمیم‌پذیری و کلی بودن یعنی اینکه مثال‌ها در کجا و در چه محدوددهای صحیح‌اند. این عنوان به بررسی خاص یا عام بودن مثال‌ها مربوط می‌شود و برای درک ساختارهای کلی در ریاضیات بسیار ارزشمند است. ویژگی نماینده بودن یک مثال نیز بسیار با اهمیت است که خود نوعی از تعمیم می‌باشد. یک موضوع خاص ریاضی می‌تواند به عنوان یک مثال، نماینده چیزهای دیگری باشد و این نوع ایفای نقش در ریاضیات، مثال عام نام دارد (گلدنبرگ و میسون، ۲۰۰۸).



## معلمان ریاضی و مثال‌ها

تعامل بین معلمان و دانش‌آموزان، نیازمند به کارگیری مجموعه‌ای از مثال‌هاست که به کمک آن‌ها بین اهداف و روش‌های تدریس هماهنگی ایجاد کنند (واتسون و چیک، ۲۰۱۱). واتسون و میسون (۲۰۰۵) آگاهی معلمان از توانمندی‌ها و محدودیت‌ها و مشکلات کار با مثال‌ها و همچنین توسعه و سازماندهی فضای مثال شخصی آنان را بسیار ضروری می‌دانند. آن‌ها فضای مثال محدود معلمان را منشاء تأثیرات نامطلوب در یاددهی ریاضی می‌دانند. شناخت تمایز بین «مثال‌هایی برای...» و «مثال‌هایی از...» بسیار با اهمیت است. زیرا در بسیاری از موارد دانش‌آموزان مثال‌ها را در جهت اهداف قصد شده به کار نمی‌برند و یا ممکن است دانش‌آموزان ندانند که چه هدفی از طرح مثال، مورد نظر است. واضح است که در این موارد بدون راهنمایی و دستگیری معلم، فراگیران تنها برداشت‌های شخصی خود را از مثال‌ها دارند و نیز الگوها و ارتباطات را مطابق با دریافت خود تعمیم می‌دهند. اصلی‌ترین نتیجه و دستاورد به کارگیری مثال‌ها این است که می‌توانند معلم و فراگیر را به یک درک مشترک از مفهوم برسانند (بلیز و دیگران، ۲۰۰۶). بنابراین برای یک معلم لازم است که حتماً از قابلیت‌ها و توانمندی‌های مثال‌ها در آموزش ریاضی، شیوه‌های تولید و سازماندهی آن‌ها، موانع و مشکلات موجود در تولید یا انتخاب آن‌ها، روش‌های مناسب و قوی برای بازنمایی و ارائه آن‌ها و همچنین ظرفیت‌های بدفهمی موجود در مثال‌ها آگاهی کافی داشته باشد (واتسون و چیک، ۲۰۱۱).

معلمان معمولاً از مثال‌ها برای کمک در ساخت مفهوم یا آموزش رویه‌ها، بسته به محتوا و اهداف درس، استفاده می‌کنند، اما نحوه انتخاب و به کارگیری مثال‌ها به عنوان یک مهارت خاص در تدریس، نیازمند دانش ریاضی ویژه است. زودیک و زاسلاوسکی (۲۰۰۸) چند قاعده مشترک در انتخاب مثال‌ها را عنوان کرده‌اند. برخی از این موارد عبارتند از: شروع با یک مورد ساده و آشنا، توجه و پرداختن به اشتباهات دانش‌آموزان، توجه به ویژگی‌های مرتبط مثال، هدایت در جهت رسیدن به یک تعمیم و تغییر در اجزای مختلف یک مثال و کشف اشتراکات و همچنین استفاده از مثال‌های استثنایی و شامل موارد غیر معمول. رولند، توایتس<sup>۴۲</sup> و هاگستپ<sup>۴۳</sup> (۲۰۰۳)، نقل شده در زودیک و زاسلاوسکی، (۲۰۰۸) سه نوع ضعف در انتخاب مثال توسط معلمان مبتدی را بیان کردند. آن‌ها این ضعف‌ها را ناشی از انتخاب مثال‌هایی با اعداد نامأنوس در تشریح یک رویه محاسباتی، مثال‌هایی اتفاقی و تصادفی در زمانی که باید یک مثال با دقت کافی انتخاب شود و مثال‌هایی که در تبیین متغیرها مبهم بودند، می‌دانند.

آموزشی کردن<sup>۴۴</sup> مثال فرایندی است که به نحوه جذابتر کردن و مطلوبتر نمودن ارائه یک مثال اشاره دارد و رغبت و تمایل فراگیران را برای کار و رویارویی با مثال افزایش می‌دهد. از نظر پدمونت و باچ بیندر<sup>۴۵</sup> (۲۰۱۱) این فرایند، ترکیب اعمالی از قبیل استفاده از زبان ریاضی مناسب، رنگ، ترکیب و چیدمان زیبای نوشتن، تن صدای مناسب و مانند آن‌ها، با روش و شیوه ارائه یک مثال است. در کار با مثال‌ها، باید ویژگی‌های فراگیران توسط معلمین با اهداف تدریس به طور قوی و موفق آمیخته و هماهنگ شود. زیرا لحاظ نکردن این موارد اغلب اوقات به شکست در آموزش منجر می‌شود (واتسون و چیک، ۲۰۱۱). گلدنبرگ (۲۰۰۵) نشان داد که کارایی مثال‌ها تنها به اهداف و یا حتی محتوای ریاضی مشمول در آنان بستگی ندارد، بلکه به چگونگی دریافت و برداشت فراگیران از مثال‌ها و محدودیت‌های به‌کارگیری آنان نیز بستگی دارد. بنابراین در استفاده از مثال‌ها در یک کلاس درس باید به نکات مهمی مانند اینکه: کدام مثال‌ها را استفاده کنیم؟ چگونه آن‌ها را معرفی کنیم؟ چگونه در مورد آن‌ها بحث کنیم؟ چه سؤالاتی از فراگیران بپرسیم؟ چه ویژگی‌هایی را تأکید کنیم؟ چه تعداد از مثال‌ها را در رابطه با یک مفهوم خاص استفاده کنیم؟ و نظایر آن‌ها، توجه کنیم. میسون (۲۰۰۶) واتسون و چیک (۲۰۱۱) به این موارد کاریست یا اجرای پداگوژیکی<sup>۴۶</sup> مثال‌ها نام نهاده‌اند.

### روش تحقیق

مطالعه حاضر، با استفاده از روش‌های کیفی و کمی انجام شده است. به‌منظور جمع‌آوری اطلاعات مورد نیاز، از پرسش‌نامه‌ای با دو بخش که هر بخش آن شامل ۴ سؤال و منطبق با یکی از اهداف اصلی پژوهش است، استفاده شد. در تهیه پرسش‌نامه از نظرات تعدادی از استادان ریاضی و آموزش ریاضی و نیز دبیران دوره متوسطه بهره گرفته شد. به‌منظور رفع نقایص و برآورد پایایی و روایی، پرسش‌نامه به‌طور آزمایشی در بین یک نمونه ۴۰ تایی در دسترس، از دانشجو-معلمان رشته دبیری ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی که بیش از صد واحد درسی ریاضی گذرانده بودند، توزیع شد. پس از بررسی و تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانشجو-معلمان، برخی از سؤالات پرسش‌نامه با نظر اساتید جایگزین و یا اصلاح شدند و بعد از ویرایش نهایی، پرسش‌نامه‌ای با ۸ سؤال که ۴ سؤال اول آن مربوط به «باور و تصور معلمان ریاضی از مثال» و ۴ سؤال دوم آن در زمینه «نحوه به‌کارگیری مثال‌ها توسط معلمان ریاضی» بود، آماده شد و مورد استفاده قرار گرفت.

جامعه آماری این تحقیق شامل کلیه معلمان ریاضی دوره متوسطه استان مرکزی در سال ۱۳۹۰ است، که در زمان انجام پژوهش، به تدریس ریاضی اشتغال داشته و دارای حداقل

۳ سال سابقه تدریس بودند. انتخاب معلمان با حداقل سه سال سابقه تدریس به این دلیل است که این پژوهش در ادامه و هماهنگی با تحقیقات پژوهشگرانی از قبیل رولند، توایتس و هاکستپ (۲۰۰۳)، نقل شده در زودیک و زاسلاوسکی، (۲۰۰۸) و یا زاسلاوسکی و لاوی (۲۰۰۵) باشد، که در مورد انتخاب و به کارگیری مثال توسط معلمان تازه-کار انجام شده است. از بین جامعه آماری، نمونه‌ای با حجم ۷۵ نفر به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده انتخاب شد. این تحقیق در طی زمانی حدود ۶ ماه انجام شد و شرکت کنندگان بدون اطلاع از کیفیت پاسخ‌های سایرین، با توجه به دانش و تجارب شخصی خود و همچنین با میل و رغبت و علاقه به سؤالات جواب دادند. در برخی موارد شرکت کنندگان نظرات خود را در قالب مصاحبه‌های کوتاه راجع به سؤالات پرسش‌نامه عنوان کردند که به دلیل محدودیت حجم مقاله، مفهوم اصلی بیانات آن‌ها در متن تحقیق دسته بندی و ارائه شده است. روش تجزیه و تحلیل داده‌ها در این پژوهش، پدیدار نگاری<sup>۴۷</sup> در حوزه تحقیقات کیفی است. پدیدارنگاری روشی تخصصی برای توصیف شیوه‌های متفاوتی است که افراد طبق آن‌ها جهان اطراف خود را درک می‌کنند. مثلاً معلمان مختلف ممکن است در مورد علل رفتارهای منفی دانش‌آموزان در کلاس، برداشت‌های متفاوتی داشته باشند (مردیت گال و همکاران، ۱۳۸۶). یک پدیدارنگار در مورد گروهی از معلمان پژوهش می‌کند تا این تصورات متفاوت را طبقه‌بندی کند.

### یافته‌های تحقیق

در این قسمت با بررسی پاسخ‌های ارائه شده توسط دبیران در پرسش‌نامه‌ها، اطلاعات جمع‌آوری شده در خصوص اهداف پژوهش ارائه می‌شود. در بیشتر موارد، به دلیل محدودیت، تعداد اندکی از پاسخ‌های معلمان به‌عنوان نمونه ذکر شده است که ممکن است پاسخ‌های نادرست یا متناقض هم از جانب شرکت کنندگان دیده شود. این پاسخ‌ها را بدون دخل و تصرف آورده‌ایم. پاسخ‌های معلمان ریاضی بر مبنای معیارها و مبنای به دست آمده از بخش نظری تحقیق مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

### سؤال اول

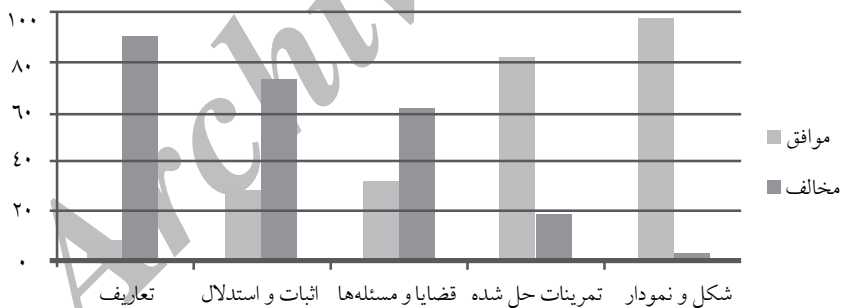
تصور شما از مثال چیست؟ به نظر شما کدام یک از موارد زیر می‌تواند به‌عنوان یک مثال آموزشی در نظر گرفته شود؟ در هر مورد دلیل پاسخ خود را بیان کنید و چنانچه پاسخ شما مثبت است مصداقی برای آن بیاورید: تعاریف، قضایا و مسئله‌ها، اثبات‌ها و استدلال‌ها، اشکال و نمودارها، تمرینات حل شده.

یافته‌های سؤال اول: دیدگاه‌های معلمان درخصوص بخش اول این سؤال، یعنی «تصور شما از مثال چیست؟» در جدول ۱ خلاصه شده است.

جدول ۱. تعداد و درصد پاسخ‌ها در مورد انواع تصور از مثال

نوع تصور	ابزار و وسیله	دلیل و برهان	فرایند	الگو و روش	نمونه و مدل	بیان مشترک
تعداد پاسخ‌ها	۴۹	۱۰	۵	۴	۴	۳
درصد پاسخ‌ها	۶۵/۵ درصد	۱۳/۳ درصد	۶/۶ درصد	۵/۳ درصد	۵/۳ درصد	۴ درصد

از نظر معلمان شرکت کننده در این تحقیق مثال می‌تواند به‌عنوان یک ابزار و وسیله، یک فرایند، الگو و شیوه کار، نمونه و مدل کوچکی از یک مفهوم، دلیل و برهان و به‌عنوان یک بیان مشترک در آموزش ریاضی به‌کار گرفته شود. برخی از این تصورات در مورد مثال (از قبیل ابزار و وسیله، الگو و روش، نمونه و مدل) با نتایج پژوهش‌های قبلی در تعبیر واتسون و میسون (۲۰۰۲) و بلیز و دیگران (۲۰۰۶) که در بخش نظری تحقیق ذکر شد، مطابقت دارد. بیشتر معلمان مثال را یک ابزار می‌دانند که تصور درستی به‌شمار می‌رود. پاسخ‌های معلمان به بخش دوم سؤال یک آشکار کننده نکات مهمی بود که در نمودار یک و جدول ۲ خلاصه شده است.



نمودار ۱: درصد پاسخ‌های معلمان در باره مثال بودن هر یک از موارد عنوان شده در قسمت دوم سؤال یک

## جدول ۲. تعداد و درصد پاسخ‌های ارایه شده به قسمت دوم سؤال یک

تعداد پاسخ مخالف	درصد پاسخ‌های مخالف	تعداد پاسخ‌های موافق	درصد پاسخ‌های موافق	تعداد پاسخ موافق
		۶۸	۹۰/۵٪	تعاریف
	۶۱/۳٪ مخالف و ۳۰/۷٪ موافق و ۸٪ (۶ نفر) با مثال بودن مسایل موافق و با مثال بودن قضایا مخالف	۴۶		قضایا و مسئله‌ها
۷۲٪	۲۸٪	۵۴		اثبات‌ها و استدلال‌ها
۲۷٪	۹۷/۳٪	۲		اشکال و نمودارها
۱۸/۷٪	۸۱/۳٪	۱۴		تمرینات حل شده

مطابق با بخش نظری تحقیق، تمام موارد مطرح شده در بخش دوم سؤال اول می‌توانند در نقش یک مثال ظاهر شوند. ولی طبق اطلاعات جدول ۲ بیشتر معلمان با در نظر گرفتن تعاریف و قضایا و مسئله‌ها و اثبات و استدلال‌ها به‌عنوان مثال مخالف هستند که این موضوع با پژوهش‌های آموزش ریاضی (مانند گلدنبرگ و میسون ۲۰۰۸ و لیز و همکارانش ۲۰۰۶) همخوانی ندارد. این امر نشان از تصور ناقص درصد قابل توجهی از معلمان ریاضی ما از مثال دارد. بیشتر معلمان شکل‌ها و نمودارها و تمرینات حل شده را در زمره مثال دانسته‌اند. گرچه شکل‌ها و نمودارها می‌توانند در فرایند تدریس به‌عنوان مثال ایفای نقش کنند، اما تعاریف و قضایا و اثبات و استدلال نیز در آموزش به‌عنوان مثال به‌طور مکرر مورد استفاده قرار می‌گیرند. با آنکه تعداد کمی از معلمان به این موضوع توجه کرده‌اند (جدول ۲) اما دلایل و توضیحات آنان روشن‌گر و امید بخش است (جدول ۳). به نظر می‌رسد به غیر از تصور و درک نادرست معلمان از مثال، محدودیت فضای مثال‌معلمان ریاضی نیز باعث به‌دست آمدن چنین نتیجه‌ای شده است. این نقص در پاسخ به سؤالات دیگر نیز مشاهده شد. برخی از پاسخ‌های معلمان در موافقت یا مخالفت با مصادیق مثال در جدول ۳ ارائه شده است.

جدول ۳. برخی از پاسخ‌های موافق و مخالف معلمان راجع به بخش دوم سؤال یک

پاسخ‌های مخالف	پاسخ‌های موافق
<ul style="list-style-type: none"> <li>• تعاریف، کلی، انتزاعی و مجردند درحالی که مثال‌ها باید ملموس و شهودی و قابل تجسم باشند و این دو با هم سازگاری ندارند. به عبارتی مثال‌ها شهودی و بیان‌کننده حالات خاص یک تعریف هستند. تعاریفی مانند مجموعه، عدد، احتمال و خطای اندازه‌گیری، مفاهیمی کلی و انتزاعی‌اند که با مثال‌های خاص فهمانده می‌شوند.</li> <li>• پذیرش مسئله یا قضیه با عنوان مثال، ذهن دانش‌آموز را به تقلید کشانده و از اهمیت آن کاسته و فراگیر را از تفکر عمیق در مورد آن باز می‌دارد.</li> <li>• تمرینات حل شده باعث می‌شوند که دانش‌آموزان صرفاً به تقلید روی آورند و از تفکر فاصله می‌گیرند.</li> <li>• تمرینات حل شده مثال نیستند زیرا دانش‌آموز در ساخت و یا در حل آنها نقشی ندارد.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• گاهی اوقات تعاریف مختلف یک مفهوم می‌توانند مثالی برای بیان «معادل بودن یا هم ارزی دو تعریف» باشند و یا اینکه بعضی از مفاهیم ممکن است به صورت‌های مختلفی تعریف شوند و فقط یک تعریف برای آن‌ها وجود نداشته باشد. به عنوان مثال دو تعریف <math>\{ \frac{a}{b}   a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}</math> و <math>\{ \frac{a}{b}   a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \}</math> مثالی از تعاریف معادل برای معرفی اعداد گویا هستند.</li> <li>• صورت بعضی از قضایا و مسئله‌ها مثال‌هایی هستند از قضایا و مسئله‌های معادل که می‌توان هرکدام از آن‌ها را به عنوان اصل پذیرفت و دیگری را به کمک آن اثبات کرد. مثل اصل خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی و اصل استقراء ریاضی.</li> <li>• هر استدلال می‌تواند مثالی از یکی از روش‌های استدلال در ریاضی باشد. مثلاً اثبات قضیه «ثابت کنید <math>\sqrt{2}</math> عددی گنگ است» می‌تواند یک مثال از به کارگیری روش برهان خلف باشد.</li> <li>• مثال نقض بارزترین نوع مثال است که در اثبات و استدلال مورد استفاده است.</li> </ul>

سؤال دوم

به نظر شما یک مثال آموزشی خوب و مناسب در زمینه درس ریاضی، باید دارای چه ویژگی‌هایی باشد؟

یافته‌های سؤال دوم: در مجموع، ویژگی‌های مطرح شده برای مثال آموزشی مناسب و خوش ساخت توسط دبیران، عبارتند از: ۱. هدفمند بودن ۲. در دسترس بودن ۳. صحیح بودن ۴. غنی و قوی بودن ۵. تعمیم‌پذیر بودن ۶. شفافیت ۷. مطابق بودن با علاقه و زندگی روزمره فراگیران ۸. قدرت کنترل و ارزیابی.

این موارد با ویژگی‌های یک مثال آموزشی مناسب و یا چارچوب تحلیل مثال‌ها که در بخش نظری ارائه شد، انطباق دارد. جدول ۴ نشان می‌دهد که معلمان از ویژگی‌های یک مثال آموزشی مناسب به خوبی آگاهند و یکی از اصلی‌ترین معیارها و ویژگی‌های یک مثال آموزشی مناسب از نظر آنان، شفافیت و نمایانگر بودن یک مثال (۹۷/۳ درصد) است.

## جدول ۴. ویژگی‌های بیان شده برای یک مثال آموزشی مناسب توسط معلمان

تعداد پاسخ‌ها	نوع ویژگی بیان شده برای یک مثال آموزشی مناسب	در دسترس بودن	هدفمند بودن	تعمیم پذیری	غنی و قوی بودن	صحیح بودن	قدرت کنترل و ارزیابی	مطابقت بودن با علاقه و زندگی فراگیران	شفافیت
۷۳		۲۸	۳۵	۴۶	۵۳	۵۸	۵۸	۶۸	۷۳
درصد پاسخ‌ها		۳۷/۳	۴۶/۶	۶۱/۳	۷۰/۶	۷۷/۳	۷۷/۳	۹۰/۶	۹۷/۳

## سؤال سوم

به نظر شما در آموزش ریاضی، از مثال‌ها در چه موارد و زمینه‌هایی می‌توان استفاده کرد؟ در صورت امکان برای پاسخ‌های خود مصداق ارائه دهید.

یافته‌های سؤال سوم: در مورد زمینه‌های کاربرد مثال، بیشتر معلمان اشاره کرده‌اند که مثال‌ها را در تدریس، اثبات و استدلال، مفهوم‌سازی، ایجاد انگیزه، حل مسئله و ساخت پیش زمینه‌های لازم برای ارائه مفهوم، به کار می‌گیرند. جدول ۵ شامل مواردی از کاربرد مثال مطابق با بخش نظری تحقیق است و همچنین بیانگر تعداد و درصد افرادی است که به هر یک از این موارد اشاره کرده‌اند. نکته مهمی که از داده‌های جدول ۵ به دست می‌آید، این است که تعداد کمی از معلمان به کاربرد مثال‌ها در ارزشیابی، خلاقیت، ایجاد ارتباط، تعمیم، زمینه‌های پژوهشی و درک ساختارهای کلی ریاضیات اشاره کرده‌اند. تنها ۱۶ درصد از شرکت کنندگان به کاربرد مثال در ایجاد ارتباط - که به اعتقاد پژوهشگران (رولند، ۲۰۰۸ و گلدنبرگ و میسون، ۲۰۰۸ و واتسون و چیک، ۲۰۱۱) یک کاربست قوی پداگوژیکی است - اشاره کرده‌اند. کاربرد مثال‌ها در زمینه‌های پژوهشی یکی از موارد تأثیرگذار بر ارتقای مهارت‌های حرفه‌ای معلمان است (گلدنبرگ و میسون، ۲۰۰۸ و زاسلاوسکی و لای، ۲۰۰۵) که ۱.۴ درصد از شرکت کنندگان به آن اشاره کرده‌اند. عدم آگاهی از برخی زمینه‌های کاربرد مثال در آموزش ریاضی، یک نقص به حساب می‌آید که می‌تواند ناشی از تصور محدود از مثال و همچنین ناشی از فقر فضای مثال معلمان باشد (بلیز و دیگران، ۲۰۰۶ و واتسون و میسون، ۲۰۰۵). این نتایج می‌تواند انگیزه‌ای برای تحقیقات بیشتر درباره برنامه‌های درسی دوره‌های کارشناسی ریاضی و برنامه‌های تربیت دبیر فراهم نماید.

جدول ۵. تعداد و درصد پاسخ دهندگان به هر مورد از زمینه‌های استفاده از مثال‌ها

نوع پاسخ	فرایند تدریس	مفهوم سازی	ایجاد انگیزه	اثبات و استدلال	ساخت پیش زمینه	حل مسئله	تعمیم و کاربردهای مفهوم	ایجاد ارتباط	خلاقیت و خودیاداری	ارزشیابی و کنترل	درک ساختارهای کلی	زمینه‌های پژوهش
تعداد پاسخ	۷۵	۵۸	۴۴	۴۲	۳۶	۳۲	۱۴	۱۲	۸	۶	۲	۱
درصد پاسخ	۱۰۰	۷۷/۳	۵۸/۷	۵۶	۴۸	۴۲/۶	۱۸/۶	۱۶	۱۰/۶	۸	۲/۶	۱/۴

### سؤال چهارم

به نظر شما هریک از ایده‌های الف و ب، با چه هدفی اجرا می‌شوند؟ در تجارب آموزشی شما کدام یک بیشتر اتفاق افتاده است؟  
 الف: بهتر است عمل تدریس با مثال شروع شود و ارائه مثال‌ها قبل از معرفی مفهوم یا رویه کارایی بیشتری دارد.  
 ب: ارائه مثال‌ها بعد از معرفی مفهوم یا رویه مورد نظر کارایی بیشتری دارد و بهتر است که دانش‌آموزان در خاتمه فرایند تدریس با مثال‌ها مواجه شوند.

یافته‌های سؤال چهارم: نظرات بیان شده معلمان در پرسش‌نامه‌ها در جدول ۶ خلاصه شده است

جدول ۶. تعداد و درصد افراد معتمد به شیوه‌های الف و ب و تجارب عملی آنان در سؤال چهارم

۳۹ نفر	۵۲ درصد	موافقان شیوه الف	نظر معلمان
۳۰ نفر	۴۰ درصد	موافقان شیوه ب	
۶ نفر	۸ درصد	موافقان با تلفیقی از هر دو شیوه	
۳۱ نفر	۴۱/۳ درصد	افرادی که شیوه الف را در تجارب عملی خود بیشتر به کار می‌برند	تجارب علمی معلمان
۳۸ نفر	۵۰/۷ درصد	افرادی که شیوه ب را در تجارب عملی خود بیشتر به کار می‌برند	
۶ نفر	۸ درصد	افرادی که در تجارب خود تلفیقی از هر دو شیوه را به کار می‌برند	



برخی از پاسخ‌ها و دلایل معلمان برای مناسب‌تر بودن شیوه‌های الف یا ب در جدول ۷ ذکر شده است.

جدول ۷. برخی از نظرات معلمان در خصوص مناسب‌تر بودن شیوه‌های الف یا ب در سؤال چهارم

دلایل معلمان برای مناسب‌تر بودن شیوه الف	دلایل معلمان برای مناسب‌تر بودن شیوه ب
<ul style="list-style-type: none"> <li>- سهولت در برقراری ارتباط</li> <li>- جذاب کردن مفاهیم، ایجاد انگیزه و تمرکز</li> <li>- مشارکت دانش‌آموز در مفهوم‌سازی و فعال نمودن وی</li> <li>- بروز بهتر حس کنجکاوی و خلاقیت و اعتماد به نفس و خودباوری و از بین بردن حس ترس و عدم توانایی</li> <li>- تثبیت و ماندگاری بیشتر مطالب در ذهن فراگیر</li> <li>- احساس مسئولیت بیشتر معلم در قبال چگونگی و کیفیت آموخته‌های فراگیر</li> <li>- ارزیابی دانسته‌های قبلی دانش‌آموز و در صورت لزوم اصلاح و یا ترمیم آن‌ها</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- تثبیت و تعمیق بهتر مفاهیم</li> <li>- در دست نبودن مثال مناسب برای شروع و یا تا حد زیادی انتزاعی بودن مطلب</li> <li>- عدم آشنایی و تسلط به حد کافی برخی معلمان با شیوه آموزش که با مثال شروع شود.</li> <li>- سهولت مدیریت زمان نسبت به آموزش با شیوه الف</li> <li>- در مواجهه با مطالب کاملاً جدید که فراگیر هیچ زمینه آشنایی قبلی با موضوع ندارد، بهتر است از شیوه ب استفاده شود.</li> </ul>

در مقایسه این دو روش، معلمانی که شیوه الف را بهتر می‌دانند، معتقدند که مثال‌های ساده و عینی باید قبل از ارائه مفهوم در اختیار فراگیر قرار گیرد و مثال‌های پیچیده و مشکل پس از ارائه مفهوم بیان شود. به اعتقاد این افراد استفاده از مثال پس از ارائه مفهوم بیشتر در روش‌ها و تدریس‌های مبتنی بر رفتارگرایی اتفاق می‌افتد. در این‌گونه موارد مثال‌ها بیشتر نقش انتقال مفاهیم را برعهده دارند و در ساخت و کشف مفاهیم مشارکت و سهم چندانی ندارند. این معلمان بیان کرده‌اند که در مورد شیوه ب قابلیت بدفهمی بیشتر است، زیرا ذهن فراگیر بیشتر حالت منفعل دارد و کمتر درگیر موضوع است و بیشتر به تقلید و حفظ کردن روی می‌آورد. در شیوه الف فرایند تدریس می‌تواند با در نظر گرفتن واکنش‌های فراگیران هدایت شود و فراگیر نقشی فعال دارد.

مطابق نظر معلمانی که شیوه ب را مناسب‌تر می‌دانند، آموزش به شیوه الف با مشکلاتی همراه است که از مواردی مانند: انتخاب مثال نامناسب و یا نداشتن مثال آموزشی خوب در دسترس، عدم طراحی قبلی تدریس توسط معلم و عدم صرف وقت و مطالعه پیش از تدریس، عدم آشنایی و مهارت کافی معلم با شیوه الف، ناشی می‌شود.

شیوه‌های الف و ب را به ترتیب می‌توان با ایده «مثالهایی از» و «مثالهایی برای» که در بخش نظری تشریح شد متناظر کرد. در تدریس به شیوه الف بیشتر مواردی مانند برقراری ارتباط، ایجاد انگیزه، مفهوم‌سازی و خلاقیت مد نظر است و در تدریس به شیوه ب بیشتر به مواردی چون تثبیت و تعمیق یادگیری و قابلیت ارزیابی کیفیت مفهوم شکل گرفته در ذهن فراگیر تأکید می‌شود. درصد معلمانی که شیوه الف را مناسب‌تر می‌دانند، از درصد معلمانی که شیوه ب را بهتر می‌دانند، بیشتر است، با این حال در عمل بیشتر معلمان شیوه ب را به کار می‌گیرند. این تضاد می‌تواند به عدم آشنایی کافی معلمان با مثال‌ها و نحوه کار با آن‌ها مربوط شود. به نظر می‌رسد کیفیت دانش قبلی فراگیران، مفهوم و موضوعی که باید تدریس شود، هدف از ارائه مثال و عواملی از این دست، بر انتخاب روش الف یا ب مؤثر باشند و در حالت بهینه باید از هر دو حالت بهره جست و به‌طور مطلق نمی‌توان یکی از این دو شیوه را بر دیگری ترجیح داد.

### سؤال پنجم

دو معلم ریاضی نمودارهای زیر را به‌عنوان مثالی برای نشان دادن قرینه نمودار یک تابع نسبت به محور عرض‌ها ارائه دادند. به نظر شما کدام مثال برای نمایش تقارن مناسب‌تر است؟ چرا؟

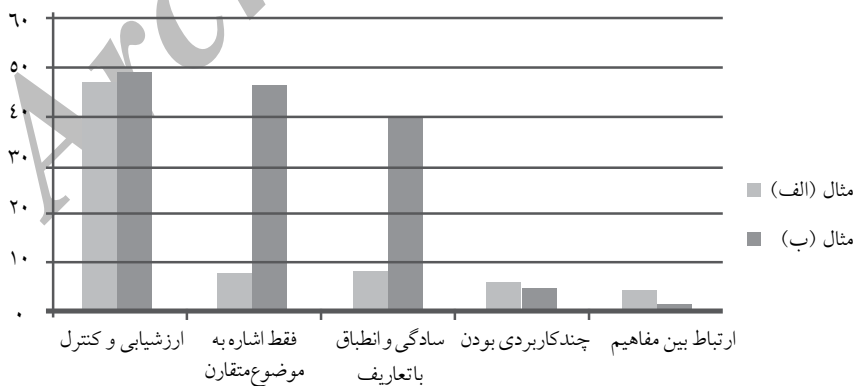
(الف)

(ب)

یافته‌های سؤال پنجم: پاسخ‌های معلمان به این سؤال در جدول ۸ و نمودار ۳ خلاصه شده است.

## جدول ۸. خلاصه تحلیل سؤال پنجم

عوامل منجر به بد فهمی که در مثال مستتر هستند.	موارد مثبت موجود در مثال			تعداد پاسخها	درصد پاسخها
	تعداد	درصد	تعداد		
کارآمدتر در ارزشیابی پایانی	۳۷	۴۹/۳	مثال الف		
	۳۵	۳۶/۶	تعداد		
	۴	۵/۳	درصد		
بیان ارتباط بین مفاهیم	۵	۶/۶	تعداد		
	۴	۵/۳	درصد		
	۶	۸	تعداد		
چند کاربردی بودن	۴	۵/۳	تعداد		
	۵	۶/۶	درصد		
	۶	۸	تعداد		
انتقال - دوران و انتقال	۵	۶/۶	تعداد		
	۴	۵/۳	درصد		
	۶	۸	تعداد		
تقاطع نمودار با قرینه خود	۴	۵/۳	تعداد		
	۵	۶/۶	درصد		
	۶	۸	تعداد		
متقارن بودن نمودار و وجود دو محور تقارن	۴	۵/۳	تعداد		
	۵	۶/۶	درصد		
	۶	۸	تعداد		
کارآمدتر در ارزشیابی چینی تدریس	۳۸	۵۰/۷	مثال ب		
	۳۵	۴۶/۶	تعداد		
	۳۶	۴۸	درصد		
فقط اشاره به موضوع تقارن	۴۰	۵۰/۳	تعداد		
	۴	۵/۳	درصد		
	۳۰	۴۰	تعداد		
سادگی و انطباق با تعریف تقارن	۴	۵/۳	تعداد		
	۳۰	۴۰	درصد		
	۴	۵/۳	تعداد		
چند کاربردی بودن	۴	۵/۳	تعداد		
	۳۰	۴۰	درصد		
	۴	۵/۳	تعداد		
عدم بیان تقارن برای تقاطع روی محور تقارن	۴	۵/۳	تعداد		
	۳۰	۴۰	درصد		
	۴	۵/۳	تعداد		



نمودار ۳: درصد پاسخ شرکت کنندگان به هر یک از ویژگیهای موجود در مثالهای سوال پنجم

جدول ۹. برخی از دلایل معلمان در خصوص انتخاب مثالهای سوال پنجم

برخی از دلایل انتخاب مثال ب	برخی از دلایل انتخاب مثال الف
<p>- مثال ب برای مراحل اولیه تدریس مناسب‌تر است</p> <p>- مثال ب صرفاً به موضوع تقارن، نزدیک‌تر و ظرفیت بدفهمی در آن کمتر است. ولی مثال الف به موضوعات متعدد بیشتری پرداخته است و می‌تواند پتانسیلی از بدفهمی را به همراه داشته باشد.</p> <p>- مثال ب ساده‌تر است و با آموخته‌های دبستانی سازگارتر است.</p>	<p>- مثال الف می‌تواند مثالی چند کاربردی باشد که برای موضوعات تقارن، انتقال، دوران و ترکیب دوران و انتقال با هم، به کار رود. و دانش‌آموز ارتباط این تبدیلات را در مثال الف ببیند. درضمن مثال الف برای ارزشیابی در مراحل پایانی تدریس مناسب‌تر است.</p> <p>- مثال الف برای مراحل پایانی و تسلط بر موضوع مناسب‌تر است.</p> <p>- مثال الف یک مثال چند کاربردی است زیرا علاوه بر مفهوم تقارن و انتقال به موضوعاتی مانند تقاطع (تقاطع نمودار اصلی با محور مختصات و همچنین تقاطع نمودار اصلی با نمودار متقارن آن)، متقارن بودن شکل اولیه، موجود بودن دو محور تقارن در نمودار الف که یکی متعلق به نمودار اصلی و دیگری محور تقارن بین دو نمودار است، اشاره دارد.</p>
<p>- هر دو مثال می‌توانند با یک دوران <math>180^\circ</math> و سپس انتقال، به نمودار متقارن خود منطبق شوند. البته این موضوع در مثال ب بسیار بهتر دیده می‌شود.</p>	

اگر هدف را همان‌گونه که در متن سؤال آمده است، ارائه «مثالی برای نشان دادن قرینه نمودار یک تابع نسبت به محور عرض‌ها» بدانیم باید دلایل ذکر شده توسط موافقان مثال ب را بهتر درک کنیم. به نظر این معلمان با ارائه یک مثال چند کاربردی، ممکن است سادگی و دقت و تأکید بر مفهوم اصلی نادیده انگاشته شود و علاوه بر آن موجب ایجاد بدفهمی شود. مثال الف نیز در شرایطی که به دنبال درک عمیق‌تر و یا ارزیابی عملکرد و یادگیری دانش‌آموز درباره چند مفهوم متفاوت و مرتبط هستیم قابل استفاده است. برخی از پاسخ‌های معلمان در خصوص دلیل انتخاب هر کدام از مثال‌های سؤال پنجم در جدول ۹ ارائه شده است.

سؤال ششم

دانش‌آموزی معتقد است که چنانچه نمودار یک تابع و نمودار تابع معکوس آن همدیگر را قطع کنند، نقاط تقاطع حتماً روی نیمساز ربع اول و سوم است. به نظر شما آیا حرف این دانش‌آموز در حالت کلی درست است؟ در صورتی که پاسخ شما منفی است، مثالی ارائه دهید که نظر فوق را رد کند؟

یافته‌های سؤال ششم: اطلاعات این سؤال در جدول ۱۰ خلاصه شده است.

## جدول ۱۰. نوع پاسخ‌های داده شده به سؤال ششم

رد نظر دانش‌آموزان		عدم تأیید یا رد نظر دانش‌آموز (نظر خاصی ندارند)		تأیید نظر دانش‌آموزان	
ارائه مثال نقض درست	ارائه مثال نقض نادرست	بدون ذکر دلیل	ارائه دلیل		
۴۲ نفر	۳ نفر	۵ نفر	۲۳ نفر	۲ نفر	
۵۶ درصد	۴ درصد	۶۷ درصد	۳۰/۶ درصد	۲/۷ درصد	

جدول ۱۱: دلایل دو نفر از معلمان برای تأیید حدس نادرست دانش‌آموز در سؤال ششم

• طبق خاصیت تابع معکوس داریم:  $(f^1 \circ f)(x) = (f \circ f^1)(x) = x$  و چون دقیقاً روی نیمساز ناحیه اول و سوم مقادیر دو تابع یکسانند، پس نظر دانش‌آموز درست است.

• یک نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم مانند  $(x_0, f(x_0))$  در نظر می‌گیریم. داریم پس بنابراین نظر دانش‌آموز مورد تأیید است.

هدف از این سؤال بررسی «فضای مثال» معلم و محک زدن توانایی او در ارائه مثال است. تعداد قابل ملاحظه‌ای از دبیران نظر نادرست دانش‌آموز را تأیید کرده و یا اظهار نظری نکرده‌اند. حتی دو نفر از معلمان ضمن تأیید نظر نادرست دانش‌آموز دلایلی مطابق آنچه در جدول ۱۱ دیده می‌شود، ارائه داده‌اند.

پاسخ‌های ارائه شده نشان می‌دهند که فضای مثال معلمان دارای ساختارهای ترکیبی متفاوتی است و غنای فضای مثال آن‌ها و نحوه ساماندهی مثال در آن‌ها بسیار متفاوت است. برخی از معلمان به استدلال‌های نموداری یا ارائه مثال نقض به کمک نمودار و یا به صورت زوج‌های مرتب استناد نموده و از مثال‌های در دسترس استفاده کرده‌اند. برخی دیگر سعی در ارائه یک تابع به فرم ضابطه داشته‌اند و گاهی در تولید چنین مثالی دچار مشکل شده و یا زمان زیادی صرف کرده‌اند. این گروه از معلمان مثال‌هایی از توابع به فرم‌های رادیکالی یا هموگرافیک مانند:

$$y = \frac{x+3}{x-2}, y^{-1} = \frac{2x+3}{x-1} \quad y = -x+2, \quad y^{-1} = 2-x \quad y = -x^2+1, \quad y^{-1} = \sqrt[3]{1-x}$$

ارائه داده‌اند. مثال‌های  $y = \frac{1}{x}$  و  $y = \frac{x+1}{x-1}$  بیشترین تکرار را در پاسخ‌ها

دارند و می‌توانند مثال‌های مرجع در این زمینه باشند. مثال‌هایی به فرم کلی

ارائه شده‌اند که حالت مثال عام و نشان از یک فضای مثال  $y = \frac{ax+b}{cx-a}$  که

ساختار یافته و مرتب دارند. به نظر می‌رسد که این دسته از معلمان در ارائه مثال توانمندتر

از بقیه باشند. بعضی افراد علاوه بر ارائه مثال‌های نقض از توابع خاص (مانند توابع خطی، هموگرافیک و چندجمله‌ای و توابع به صورت زوج مرتبی و یا نمودارها) شرایط و حالاتی را تعیین کرده‌اند که تحت آن شرایط نظر دانش آموز می‌تواند درست باشد. مثلاً بیان کرده‌اند که «نظر دانش آموز برای توابع اکیداً صعودی درست است». برخی از معلمان مثال‌های نقضی ارائه داده‌اند که صحت ریاضی ندارند و نقض کننده نظر دانش آموز نیستند. مانند نمودارهای توابع  $y^{-1} = \log_2$  و

مطابق جدول ۱۰ تقریباً ۳۳/۳ درصد معلمان به دلیل محدودیت فضای مثال در دسترس، نظر نادرست دانش آموز را تأیید کرده‌اند. پژوهش‌ها (به طور مثال واتسون و میسون، ۲۰۰۵) بر تأثیرات نامطلوب فضای مثال محدود معلمان در یاددهی ریاضی تأکید می‌کنند. هر چند با تحلیل یک سؤال نمی‌توان در مورد سطح دانش موضوعی معلم قضاوت کرد، ولی با یک نگاه نقادانه می‌توان اصلاح و بازنگری در کیفیت برنامه درسی تربیت دبیران و معلمان ریاضی را پیشنهاد داد. این نکته تأمل برانگیز است که دوره‌های کارشناسی، با وجود ارائه دروس نظری پیشرفته ریاضی، دبیران را به قدر کافی آماده نمی‌کند. موضوع برنامه درسی دوره‌های دبیری مستلزم تحقیق بیشتری است. در حقیقت همان‌گونه که ریحانی و صالح صدق‌پور (۱۳۹۰) تأکید کرده‌اند «تصمیم در مورد اینکه چه موضوعی در برنامه درسی دبیری ریاضی دارای اهمیت است و اینکه با چه عمق و شیوه‌ای باید به دانشجویان آموزش داده شود، چالشی دشوار برای ریاضی‌دان‌ها و برنامه‌ریزان دوره کارشناسی دبیری ریاضی به حساب می‌آید».

### سؤال هفتم

مثال‌هایی در زمینه‌های خواسته شده از ریاضیات دوره متوسطه ارائه دهید.

الف: یک مثال ریاضی از یک مبحث دلخواه ارائه دهید که ارائه آن در هنگام تدریس موجب ایجاد بدفهمی برای فراگیران شود (منظور از بدفهمی برداشت نامناسب، کاربرد نابجا یا تعمیم نادرست یک مفهوم می‌باشد). مورد یا موارد ایجاد بدفهمی در مثال خود را توضیح دهید.

ب: یک مثال ریاضی از یک مبحث دلخواه ارائه دهید که بتواند در زمینه‌های گوناگون به کار رود و موارد کاربردهای آن را بیان کنید (مثلاً عدد ۳۶ می‌تواند به عنوان مثالی از یک عدد زوج، عدد قابل قسمت بر ۳، یک عدد مربع کامل، یک عدد مثلثی و مانند آن‌ها به کار رود). به نظر شما مزایا و معایب بیان چنین مثال‌هایی چیست؟

یافته‌های سؤال هفتم: هدف این سؤال بررسی دقت و توانمندی معلمان در تولید مثال و شناسایی عوامل منجر به بدفهمی است. با توجه به این که اکثر معلمان شرکت کننده در زمان انجام این پژوهش، سابقه کافی (حداقل ۳ سال و به طور متوسط ۱۲ سال) در تدریس ریاضی داشتند و همچنین طی صحبت‌های مختصری که با برخی از آنان در این زمینه انجام شد، به نظر می‌رسد که شرکت کنندگان با مفهوم بدفهمی در ریاضیات آشنایی کافی داشته و به دفعات با آن روبه‌رو شده‌اند. اما مطابق داده‌های جدول ۱۲ برخی از آن‌ها در شناسایی عوامل منجر به بدفهمی‌ها ضعیف هستند. جدول ۱۲ نشان می‌دهد که از دیدگاه معلمان شرکت کننده در پژوهش، عواملی که در تولید و یا انتخاب مثال‌ها می‌توانند موجب بروز بدفهمی شوند شامل مواردی چون تعمیم نادرست، کاربرد نمادها، عدم درک صحیح نقش متغیرها، عدم دقت در تعاریف، کافی نبودن تعداد مثال‌ها و مانند آن است. این موارد با نظر محققانی از قبیل رولند، توایتس و هاگستپ (۲۰۰۳)، نقل شده در زودیک و زاسلاوسکی، (۲۰۰۸) که در بخش نظری تحقیق عنوان شد تا حد زیادی مطابقت دارد. گرچه تنها ۱۶ درصد از معلمان پاسخی ارائه نکرده‌اند، اما در آموزش دانش‌آموزان، ارزش و اهمیت یک معلم نیز قابل اندازه‌گیری نیست. نمونه‌هایی از پاسخ‌های معلمان در ارتباط با این بخش از سؤال هفتم را در جدول ۱۳ می‌توان مشاهده کرد.

جدول ۱۲. پاسخ‌های ارائه شده به هر یک از مصادیق بدفهمی توسط معلمان در قسمت اول سؤال هفتم

درصد	تعداد	افرادی که به سؤال پاسخ نداده‌اند	
۱۶	۱۲		
۲۴	۱۶	تعمیم نابجا	افرادی که به سؤال پاسخ (داده‌اند) (۶۳ نفر و ۸۴ درصد)
۱۸/۶	۱۴	کاربرد نمادها	
۱۰/۶	۸	عدم درک صحیح نقش متغیرها	
۸	۶	عدم دقت در تعاریف و یا بیان ناقص آن‌ها	
۵/۳	۴	عدم بیان استثنائات در مثال‌های کلی	
۹/۳	۷	تساوی‌های مشابه عددی	
۱۰/۶	۸	کافی نبودن تعداد مثال‌ها	

### جدول ۱۳. چند نمونه از پاسخ‌های معلمان در قسمت اول سؤال هفتم

- مواردی که از تعمیم نابجا و نادرست، تعمیم بیش از حد یا از تعمیم ویژگی‌های موجود درحالت‌های خاص ناشی می‌شوند، مانند: رسم  $y = |x + a|$  به کمک انتقال و با انتقال مشابه آن، که در این موارد تعمیم نادرست انجام شده است.

- مواردی که از کاربرد نمادها در جاهای گوناگون اتفاق می‌افتد، مانند کاربرد عدد  $\pi$  در اعداد گنگ و در بیان زوایای مثلثاتی و یا بیان (۳۰۵) به عنوان بازه عددی، یک نقطه و ب.م.م دو عدد ۳ و ۵.

- مواردی که از عدم درک صحیح نقش متغیرها در مثال ناشی می‌شوند، مانند استفاده از مختصات (۳ و ۳) در نمایاندن نقطه در صفحه که دانش آموز درک نکند کدام  $x$  و کدام  $y$  است.

- مواردی که از تساوی‌هایی نظیر  $2 \times 2 = 2^2$  و یا  $4^2 = 2^4$  ناشی می‌شود.

جدول ۱۴ خلاصه پاسخ‌های معلمان در مورد مثال چند کاربردی (بخش دوم سوال ۷) را نشان می‌دهد.

### جدول ۱۴. نوع، تعداد و درصد پاسخ‌های ارائه شده به سؤال هفتم (قسمت دوم)

درصد	تعداد	افرادی که به سوال پاسخ نداده‌اند	
۱۴/۷	۱۱		
۴۶/۶ درصد	۳۵	مثال‌های مختلفی از توابع	افرادی که به سؤال پاسخ داده‌اند (۶۴ نفر و ۸۵,۳ درصد)
۲۰ درصد	۱۵	مثال‌های مختلفی از شکل‌های هندسی و یا نمودارها	
۱۴/۷ درصد	۱۱	مثال‌های مختلفی از نمادها	
۴ درصد	۳	مثال‌های مختلفی از روش‌ها	

برخی از مزایا و معایب مثال‌های چند کاربردی از دیدگاه معلمان و چند نمونه از مثال‌های آنان در این خصوص، در جدول ۱۵ ذکر شده است. از جداول ۱۴ و ۱۵ چنین استنباط می‌شود که به‌کارگیری یک مثال چندکاربردی از نظر معلمان بستگی به محتوای موضوع ریاضی و نیز سطح دانش فراگیران دارد، که پاسخی منطقی است. درصد قابل توجهی به این سؤال پاسخ نداده‌اند و این نشان از عدم دسترسی آسان آنان به مثال غنی و قابل تعمیم می‌باشد. بیشتر معلمان چنین مثال‌هایی را در حوزه توابع جست‌وجو کرده‌اند و تعداد اندکی از آن‌ها به جست‌وجو در روش‌ها و نمادها پرداخته‌اند. شاید این به آن علت است که بیشتر



معلمان روش‌ها و نمادها را مصادیقی از مثال نمی‌دانند.

جدول ۱۵. نمونه‌هایی از مزایا و معایب مثال چندکاربردی از نظر معلمان در قسمت دوم سؤال هشتم

مزایا	معایب
<ul style="list-style-type: none"> <li>- سازماندهی فضای مثال و نیز سازماندهی مطالب و مفاهیم آموخته شده در ذهن ساده‌تر است.</li> <li>- با ایجاد ارتباط و شبکه بین مفاهیم باعث ماندگاری بیشتر مفاهیم می‌شوند.</li> <li>- باعث سهولت در فراخوانی و به‌خاطر سپاری مفاهیم آموخته شده می‌شوند.</li> <li>- در شکوفایی خلاقیت مؤثرند.</li> <li>- برای دانش‌آموزان قوی مؤثر و جذاب‌اند.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- تولید این مثال‌ها مشکل است و این مثال‌ها در نوع خود اندک‌اند و یا در فضای مثال در دسترس نیستند.</li> <li>- برای شروع کار تدریس مناسب نیستند و بهتر است در مراحل بعدی و پایانی تدریس ارائه شوند.</li> <li>- ممکن است دانش‌آموزان ضعیف‌تر را به اشتباه اندازند و آن‌ها مفاهیم را جابجا به کار ببرند.</li> <li>- ممکن است در مواردی باعث محدودیت فضای مثال دانش‌آموزان شوند و فراگیران یک مثال را در چندین زمینه به کار برده و از تلاش برای تولید مثال‌های متنوع خودداری کنند.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- تابع <math>y = \frac{1}{x}</math>: ناپیوسته، یک به یک، معکوس‌پذیر، متقارن، هموگرافیک، هذلولوی، دارای مجانب قائم و افقی، فاقد مجانب مایل</li> <li>- شکل مربع: چهارضلعی محدب، چهارضلعی محیطی، چهارضلعی محاطی، چهارضلعی منظم، لوزی، مستطیل، متوازی‌الاضلاع.</li> <li>- نماد [ ]: برای نمایش بازه، برای نمایش کم م دو عدد، برای نمایش ماتریس، برای نمایش محاسبات.</li> <li>- روش کم م: در کوچک‌ترین مضرب مشترک، در مخرج مشترک، در فاکتورگیری</li> </ul>	

### سؤال هشتم

نمودار تابعی مانند  $f$  را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند: الف) وارون پذیر نباشد. ب) برای هر عدد حقیقی  $x$  داشته باشیم  $f(x) < x$ : ج)  $f(x) > 0$  (حسابان، سال سوم متوسطه، ۱۳۸۹، ص ۹۷)

یافته‌های سؤال هشتم: جدول ۱۶ تعداد و درصد و نوع پاسخ‌های ارائه شده به این سؤال را نشان می‌دهد.

## جدول ۱۶. نوع، تعداد و درصد پاسخ‌های ارائه شده به سؤال هشتم

درصد	تعداد	افرادی که پاسخ نداده‌اند	
۸	۶		
۵/۳	۴	فقط ضابطه تابع صادق در شرایط گفته شده را ارائه داده‌اند	افرادی که پاسخ درست داده‌اند (۶۹ نفر و ۹۲ درصد)
۸	۶	افرادی که پاسخ نادرست داده‌اند	
۲۸	۲۱	فقط نمودار رسم کرده‌اند	
۵۰/۷	۳۸	نمودار رسم کرده و ضابطه آن را نیز ارائه داده‌اند	

پاسخ‌های معلمان مطابق با معیارهای ارزیابی بیان شده در بخش نظری از قبیل صحت ریاضی، مولد بودن یا زاینده‌گی، غنی بودن، قابل دسترس بودن و تعمیم پذیری بررسی شد. در ارتباط با این سؤال می‌توان موارد ذیل را استنباط کرد:

- تابع  $y = |x| + a$  باشد و تابع  $y = |x| + a$  باشد، بیشترین تکرار را در بین مثال‌های ارائه شده دارد.

- برخی بیان کرده‌اند که هر تابع غیر یک به یک که نمودار آن بالای خط جواب صحیح است.

- برخی پاسخ‌های نادرست عنوان کرده‌اند، مانند نمودار توابع  $y = [x]$  و  $y = x$ ،  
- برخی پاسخ‌های چندضابطه‌ای و یا حتی نمودارهایی که خط مجانب آن‌هاست، ارائه داده‌اند.

با توجه به جدول ۱۶ درمی‌یابیم که درصد قابل توجهی از افراد به این سؤال پاسخ نداده (۸ درصد) و یا پاسخ نادرست داده‌اند (۸ درصد) این امر مؤید نظر محققانی از قبیل زازکیس و لیکین (۲۰۰۷) و واتسون و میسون (۲۰۰۵) است، مبنی بر اینکه محدودیت فضای مثال معلم، می‌تواند مانعی برای فرایند تدریس ریاضی به حساب آید. برخی دیگر مثالی ارائه داده‌اند که از لحاظ صحت و دقت ریاضی نامعتبر است و شرایط و خواسته‌های مسئله را برآورده نمی‌کند. بعضی دیگر مثال‌هایی ارائه داده‌اند که سادگی و زیبایی لازم را ندارند. بعضی از شرکت کنندگان از مثال‌های مرجع مانند  $y = |x|$  استفاده کرده و با اعمال تغییرات اندک در آن‌ها شرایط مسئله را تأمین نموده‌اند. برخی دیگر پاسخ‌هایی به صورت مثال‌های کلی و عام ارائه داده‌اند که نه یک مثال بلکه صدها مثال از ذهن آن‌ها

تراوش کرده است. مثلاً گفته‌اند که «هر نمودار غیر یک به یک که بالای نیمساز ربع اول و سوم باشد پاسخ است» و این نشان از فضای مثال منظم و ساختاریافته و قدرت تحلیل و استنتاج بالا در آن‌هاست. عموماً افرادی که نسبت به بقیه پاسخ‌های مناسب‌تری داده‌اند (مطابق جدول ۱۶ تقریباً نیمی از شرکت‌کنندگان)، نمودار را رسم کرده و ضابطه آن را نیز ارائه داده‌اند. از پاسخ‌های معلمان به این سؤال برمی‌آید که حدود نیمی از شرکت‌کنندگان در ارائه مثال‌های خوش ساخت ناتوان بوده‌اند.

البته لازم به ذکر است که سؤال‌های پنجم تا هشتم همگی به نوعی توانمندی و مهارت معلمان را در ارتباط با تولید و یا انتخاب مثال مدنظر قرار داده‌اند و اشتراکاتی از قبیل بررسی وضعیت فضای مثال معلمان، بررسی عوامل مهم در انتخاب مثال، به کارگیری دانش موضوعی و دانش پداگوژیکی معلمان در کار با مثال‌ها در اهداف این سؤال‌ها وجود دارد. به همین دلیل درصد و تعداد افرادی که به این سؤالات پاسخ نداده‌اند نیز در خور تأمل است.

### بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش درک معلمان ریاضی از مثال و چگونگی کاربرد مثال توسط آنان در آموزش ریاضی، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج تحقیق نشان داد که عمده معلمان، مثال آموزشی ریاضی را به مثابه یک ابزار مفید و ضروری و یا یک زبان مشترک و قابل فهم برای فراگیر می‌دانند که در آموزش دخالت مستقیم دارد. معلمانی که دید گسترده‌تری نسبت به مثال‌ها داشتند، تعاریف و قضایا و مسئله‌ها و استدلال‌ها را نیز نوعی مثال می‌دانستند. این دسته از معلمان در ارائه مثال بسیار موفق‌تر و در شناسایی موارد بدفهمی مستتر در مثال‌ها توانا تر بودند. با این حال بیشتر معلمان مثال‌ها را موضوعاتی مجزا از قضایا و مسئله‌ها، تعاریف و اثبات و استدلال‌ها پنداشته‌اند که در تعارض با نتایج پژوهش‌های انجام گرفته درباره مصادیق مثال (به‌طور نمونه گلدنبرگ و میسون، ۲۰۰۸ و بلیز و همکاران، ۲۰۰۶) است. این عدم همسویی نشان می‌دهد که عمده معلمان، علی‌رغم این که به ضرورت استفاده از مثال‌ها واقفند، ولی شناخت کافی از مثال آموزشی ندارند و فضای مثال آن‌ها به قدر کافی توسعه یافته نیست.

در مورد کاربردهای مثال در آموزش ریاضی، معلمان به استفاده از مثال در تدریس ریاضی، مفهوم‌سازی، ایجاد انگیزه و اثبات و استدلال اشاره کردند ولی بیشتر معلمان از زمینه‌های دیگر استفاده از مثال مانند ساخت پیش زمینه‌ها، ارزشیابی، ایجاد ارتباط، تعمیم ریاضی، خلاقیت ریاضی و حل مسئله آگاهی کافی ندارند. در مورد نحوه استفاده معلمان از

مثال‌ها در کلاس درس، نتایج حاکی از این است که بیشتر معلمان شرکت کننده در پژوهش، از مثال‌ها فقط در برخی از قسمت‌های فرایند آموزش ریاضی مانند مفهوم سازی یا آموزش رویه‌ها، آن هم با شیوه‌های سنتی که خود مطابق آن آموزش دیده‌اند، استفاده می‌کنند و اغلب از کارایی مثال‌ها مطلع نیستند. تقریباً تمامی معلمان به استفاده از مثال در اکثر موقعیت‌های تدریس مخصوصاً در ساخت و جذب مفهوم اعتقاد دارند، اما خیلی از آن‌ها تدریس و آموزش متکی بر به‌کارگیری مثال‌های مناسب را زمان بر می‌دانند و یا اظهار کرده‌اند که با چنین روش‌هایی آشنایی کافی ندارند.

معلمان در مجموع به هشت ویژگی مهم از یک مثال آموزشی مناسب اشاره کردند که این ویژگی‌ها تا حد زیادی با نتایج پژوهش‌های ذکر شده در بخش نظری تحقیق مطابقت دارند و می‌توانند تعیین کننده یک الگوی قابل اعتماد برای تولید و یا انتخاب مثال‌ها باشند. البته درصد معلمانی که به هر یک از این ویژگی‌ها اشاره کرده‌اند قابل تأمل و توجه است. اکثر معلمان به ویژگی‌هایی از قبیل شفافیت و سادگی، صحت ریاضی، قابلیت کنترل و ارزیابی و حساسیت‌های فراگیران اشاره کرده‌اند، ولی بخش قابل توجهی از معلمان از ویژگی‌های مهمی همچون تعمیم پذیری، در دسترس بودن و غنی بودن و قوت (چندکاربردی بودن) یک مثال ریاضی غفلت ورزیده و به آن اشاره نکرده‌اند. عدم آشنایی بعضی از معلمان شرکت کننده در پژوهش با ویژگی‌های یک مثال آموزشی مناسب، در برخی موارد منجر به انتخاب مثالی با ویژگی‌های غیر مرتبط شد. به نظر می‌رسد که آشنایی با معیارهای ارزیابی یک مثال مناسب و نقش و تأثیر این‌گونه مثال‌ها در آموزش مفاهیم ریاضی، معلمان را به استفاده از مثال‌های مناسب در آموزش هدایت خواهد کرد.

به نظر می‌رسد که تأکید بر آموزش رویه‌ها و الگوریتم‌ها در تدریس باعث شده است که اکثریت معلمان از بخش‌هایی از توانایی و ظرفیت قوی مثال‌ها در امر آموزش غافل بمانند و برای آشنایی بیشتر با آن احساس نیاز نکنند. حتی بعضی از معلمان به دلیل در دست نداشتن مثال نقض مناسب نتوانستند از دانش موضوعی خود نیز به خوبی استفاده کنند و استدلال نادرست ارائه کردند. با توجه به تحقیقات بسیار اندکی که در کشورمان درباره مثال و نقش آن در یاددهی و یادگیری ریاضی انجام شده است، لزوم پژوهش‌های بیشتر در این زمینه به خوبی حس می‌شود. موضوعاتی مانند بررسی درک و تصور دانش‌آموزان از مثال، بررسی مثال در کتاب‌های درسی، توسعه فضای مثال معلمان به شیوه درس پژوهی و بررسی توانایی دانش‌آموزان در ارائه مثال می‌توانند در پژوهش‌های بعدی مورد مطالعه قرار گیرند.

## منابع

- اصلاح پذیر، بهمن و همکاران. (۱۳۸۹). حسابان، سال سوم متوسطه، چاپ اول، دفتر برنامه ریزی و تالیف کتاب های درسی.
- بازرگان، عباس. (۱۳۸۷). مقدمه ای بر روش های تحقیق کیفی و آمیخته. تهران: نشر دیدار.
- کتیری، حسین. (۱۳۸۸). نقش مثال در آموزش ریاضی (پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی)، دانشگاه شهید بهشتی، تهران.
- گال، مردیت و همکاران. (۱۳۸۶). روشهای تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روان شناسی. جلد دوم. (ترجمه احمد رضا نصر و همکاران). تهران: انتشارات دانشگاه شهید بهشتی.
- ریحانی، ابراهیم و صالح صدق پور، بهرام. (۱۳۹۰). شناسایی عوامل تاثیر گذار در برنامه درسی کارشناسی پیوسته دبیری ریاضی ایران و چگونگی ارتباط این عوامل با یکدیگر. مطالعات برنامه درسی، (۲۰) ۱۱۶-۱۴۱.
- Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral student use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 129-111
- Antonini, S., Presmeg, N., Mariotti, M., & Zaslavsky, O. (2011). On examples in mathematical thinking and learning. *ZDM Mathematics Education*, 43, 191-194.
- Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D.W. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research*, 70, 181-214.
- Bardelle, C. & Ferrari, P. (2011). Definitions and examples in elementary calculus: the case of monotonicity of functions. *ZDM Mathematics Education*, 43, 233-246.
- Goldenberg, E. P. (2005). *What constitutes a good example?* Note prepared for mini-conference on exemplification, Oxford.
- Goldenberg, P. & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 183-194.
- Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. & Zaslavsky, O. (2006). *Exemplification in Mathematics Education*. In J. Novotna (Ed.), Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Prague, Czech Republic: PME.
- Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. In R. Zazkis, & S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (41-68). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Press.
- Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM Mathematics Education* 43, 257-267.
- Rissland, E., Michener, E. R. (1978/2008-). "Understanding understanding mathematics". *Cognitive Science*, 2, 361-383.
- Rowland, T. & Zaslavsky, O. (2005). *Pedagogical Example-Spaces*. Notes for the mini-conference on Exemplification in Mathematics, Oxford University.
- Rowland, T.)2008(.The purpose, design and use of examples in the teaching of elemen-

tary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 149–163.

Tsamir, P., & Tirosh, D., Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 81–95.

Vinner, S. (1983). Concept image, concept definition and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D.O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM Mathematics Education* 43, 283–294.

Watson, A., & Mason, J. (2002). Student-Generated Examples in the Learning of Mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. 2 (2), 237-249.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learner generating examples*. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.

Watson, A., & Shipman, S. (2008). Using learner generated Examples to introduce new Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 97–109.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209-234.

Zaslavski, O., & Iavi, O. (2005). *Teacher's use of instructional Examples*. Paper presented at the 15th ICMI study conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Águas de Lindóia, Brazil.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student-teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 67-78.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). *generating examples: from pedagogical tool to a reaserch tool. For the Learning of Mathematics*, 27, 11–17.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teacher's choice of examples in and for the Mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 165–182.

1. Bardelle & Ferrari
  2. Rowland
  3. Rissland & Michener
  4. Illustrative Material
  5. Watson & Mason
  6. Hazzan and Zazkis
  7. Zodik & Zaslavsky
  8. Watson & Chick
  9. Well-Constructed Examples
  10. Tsamir & Tirosh & Levenson
  11. Ball
  12. Bills
  13. Algorithm
  14. Goldenberg
  15. Example Space
  16. Zazkis & Leikin
  17. Alcock & Inglis
  18. Start-up Examples
  19. Reference Examples
  20. Model or Generic Examples
  21. Counterexamples
  22. Vinner
  23. Concept Image
  24. Concept Definition
  25. Rowland
  26. Examples-of
  27. Examples-for
  28. Weber & Alcock
  29. Atkinson
  30. Antonini & Presmeg & Mariotti & Zaslavsky
  31. Transparency
  32. Generalisability
  33. Lavi
  34. Peled
  35. Correctness
  36. Productiveness
  37. Accesibility
  38. Richness
  39. Generality
  40. Type
  41. Structure
  42. Thwaites
  43. Huckstep
  44. Didactication
  45. Pedemont & Buchbinder
  46. Pedagogical Implementation
۴۷. به دومین و چهارمین منبع در بخش منابع فارسی مراجعه شود.