Archive of SID

منشأ خطاهای دانش‌آموزان در حل مسائل مربوط به سواد ریاضی

■ محبوبه روحانی‌فر* ■ مریم محسن‌پور** ■ زهرا گویا***

چکیده:

هدف پژوهش حاضر، شناسایی خطاهای دانش‌آموزان در حل مسائل مربوط به سواد ریاضی بر مبنای «مطالعات پیزا» بود. این پژوهش با رویکرد کیفی و روش پژوهشی «مصاحبهٔ مبتنی بر تکلیف» انجام شد. مشارکت‌کنندگان در این پژوهش، ۹ دانش‌آموز پایهٔ دهم در ابتدای سال تحصیلی ۹۸-۱۳۹۷ بودند که داوطلبانه تمایل به همکاری داشتند. داده‌های این مطالعه از طریق مصاحبه با مشارکت‌کنندگان بر مبنای چهار تکلیف انتخاب‌شـــده از آزمون سواد ریاضیِ محسن‌پور و همکاران (۱۳۹۴) گردآوری شد. پس از انجام مصاحبه‌ها و پیاده‌سازی آن‌ها، تجزیه‌وتحلیل داده‌ها با کاهش نظام‌وارشان در چند مرحله بر اساس «معناداری» و «عدم معناداری» پاسخ‌ها انجام شد. یافته‌های این پژوهش، خطاهای حل مسئلهٔ شرکت‌کنندگان بودند، که شامل این موارد می‌شـــدند: ۱. بی‌دقتی در خواندن صورت سؤال؛ ۲. غلبهٔ قالب‌های ذهنی قبلی بر فرایند خواندن ســـؤال؛ ۳. ناتوانی در ارائهٔ مدل ریاضی بر اساس مدل زندگی واقعی؛ ۴. ناتوانی در شناخت ویژگی‌های شکل‌های هندسی؛ ۵. درک نکردن معنای ریاضیِ واژه‌هایی که در زبان محاوره‌ای اســـتفاده می‌شوند؛ ۶. اشتباه در درک مفهوم محیط و مساحت؛ ۷. بی‌توجهی به مفهوم واحدهای اندازه‌گیری و تبدیل واحدها، ۸. ناتوانی در تفسیر عددهای ریاضی در دنیای واقعی؛ ۹. دشواری در کار کردن با عددهای اعشاری.

یافته‌های مزبور پژوهشگران را به این نتیجه‌گیری رساند که ریشهٔ این ۹ دسته خطای مذکور، توجه کمتر به یادگیری مفهومی و تأکید بیشتر بر یادگیری طوطی‌وار، ندادن فرصت حدس و آزمایش به‌عنوان یکی از راهبردهای مفید حل مسئله و استفاده صوری و غیرواقعی از مسائل کاربردی ریاضی در برنامه و کلاس‌های درس ریاضی است.

کلید واژه‌ها: **سواد ریاضی، خطا، مصاحبهٔ مبتنی بر تکلیف**

▣ تاریخ دریافت مقاله: ۹۸/۳/۸ ▣ تاریخ شروع بررسی: ۹۸/۴/۳ ▣ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۰/۲۳

* دانش‌آموخته کارشناسی ارشد روان‌شناسی تربیتی.....mrohanifar7889@gmail.com
** استادیار گروه روان‌شناسی تربیتی، دانشگاه الزهرا (نویسنده مسئول).....m.mohsenpour@alzahra.ac.ir
*** استاد گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه شهید بهشتی.....Zahra_gooya@yahoo.com

این مقاله مستخرج از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد نویسنده اول است.

www.SID.ir

Archive of SID

■ مقدمه و بیان مسئله

ریاضی بخشی جداناپذیر از زندگی واقعی است که برای بسیاری از فعالیت‌های روزمره لازم و ضروری است. با وارد شدن دانش و مهارت ریاضی به زندگی واقعی، فرد می‌تواند از دانش ریاضی در حل مسائل روزانهٔ خود بهره ببرد (باکی[1]، کاتلیوگلو[2]، کاستو[3]، بیرجین[4]، ۲۰۰۹). ارتباط ریاضی با دنیای واقعی، باعث افزایش انگیزهٔ یادگیری ریاضی می‌شود و به دانش‌آموزان کمک می‌کند، مفاهیم ریاضی را درک کنند و آن را برای حل مشکلات واقعی به کار ببرند (گاینزبرگ[5]، ۲۰۰۸). بدین سبب در اغلب نظام‌های آموزشی دنیا، تأکید ویژه‌ای بر ریاضی به‌عنوان کلید توسعهٔ جامعه وجود دارد (ظهوری زنگنه، ۱۳۷۹). مصداق بارز این موضوع، اختصاص بخشی از مطالعات «سازمان همکاری توسعهٔ اقتصادی[6]» در چارچوب «برنامهٔ بین‌المللی سنجش دانش‌آموزان (پیزا)[7]» به‌منظور ارزیابی سواد ریاضی دانش‌آموزان در ۱۵ سالگی است (سازمان همکاری توسعه اقتصادی، ۲۰۰۶).

آزمون‌های پیزا از سال ۲۰۰۰ شروع شده‌اند و هر سه سال یک‌بار برگزار می‌شوند. این آزمون‌ها به‌گونه‌ای طراحی می‌شوند که بتوانند با ملاک‌های خود دریابند دانش‌آموزان تا چه مقدار می‌توانند با آموخته‌های ریاضی خود در مدرسه، به حل مسئله‌ها و چالش‌ها در زندگی واقعی‌شان بپردازند (سازمان همکاری توسعه اقتصادی، ۲۰۰۹). یکی از این ملاک‌ها «سواد ریاضی» است که از نظر پیزا، به معنای توانایی فرد برای صورت‌بندی‌کردن مسئله‌های واقعی به زبان ریاضی و تفسیر آن‌ها در زمینه‌های متفاوت است. این سواد شامل استدلال کردن و استفاده از مفاهیم، روندها، حقایق و ابزار ریاضی برای توضیح و پیش‌بینی پدیده‌های مختلف است.

همچنین، سواد ریاضی به افراد کمک می‌کند، تا نقش ریاضی را در دنیای واقعی درک کنند و به‌عنوان شهروندی مؤثر، سازنده و متعهد، تصمیم‌گیری‌های درست انجام دهند (سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی، ۲۰۱۳). در واقع هدف از مطالعهٔ پیزا این است که روشن کند، دانش‌آموزان چه ریاضی‌ای در مدرسه آموخته‌اند، چه مشکلاتی را در حل مسائل کاربردی ریاضی تجربه می‌کنند، و چگونه و تا چه میزان می‌توانند مشکلات زندگی روزمرهٔ خود را به کمک ریاضی، تجزیه‌وتحلیل کنند و راه‌حل‌های مستدل بیابند.

در نظام آموزشی ایران هم توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل روزمره و انتزاعی، از جمله هدف‌های آموزش ریاضی در دوره‌های تحصیلی دانسته شده است (دبیرخانه شورای عالی آموزش‌وپرورش، ۱۳۹۲). اما پژوهش‌هایی که در حوزهٔ سواد ریاضی در ایران انجام شده‌اند، حاکی از عملکرد پایین دانش‌آموزان ایرانی در این زمینه هستند. به‌عنوان نمونه، رفیع‌پور و گویا (۱۳۸۹) پژوهشی را در زمینهٔ ضرورت و جهت تغییرات در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در ایران انجام دادند که نتایج آن نشان دادند: از نظر معلمان ریاضی، عملکرد دانش‌آموزان «نوعیِ[8]» ایرانی در

www.SID.ir

Archive of SID

حل مسائل پیزا که در آن‌ها، ویژگی زمینه‌مدار بودن و مدل‌سازی مسائل واقعی مستتر است، ضعیف پیش‌بینی شده است.

همچنین، محسن‌پور، گویا، شکوهی‌یکتا، کیامنش و بازرگان (۱۳۹۴)، در پژوهشی با عنوان «آزمون تشخیصی صلاحیت شناختی سواد ریاضی بر مبنای مدل شناختی پیزا»، با در نظر گرفتن شش صلاحیت شناختی زیربنای سؤال‌های سواد ریاضی، شامل ارتباطات، استفاده از زبان و عملیات نمادین، رسمی و فنی، ریاضی‌وار کردن و بازنمایی، استدلال و بحث، طراحی راهبرد برای حل مسائل، نشان دادند که هر اندازه سطوح صلاحیت‌های شناختی در سؤال‌ها افزایش یابد، عملکرد دانش‌آموزان نیز به همان میزان کاهش می‌یابد.

افزون بر این‌ها، شایان و یافتیان (۱۳۹۶) در مطالعه‌ای، عملکرد دانش‌آموزان پایهٔ نهم را با استفاده از دو سؤال برگرفته از آزمون سواد ریاضی پیزا، ارزشیابی کردند. بر اساس یافته‌های این تحقیق، دانش‌آموزان در سؤال‌های سواد ریاضی، عملکرد مطلوبی نداشتند. جمع‌بندی این چند پژوهش داخلی در حوزهٔ سواد ریاضی نشان از پایین بودن عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان ۱۵ سالهٔ ایرانی دارد و حاکی از آن است که یکی از عوامل مهم و مؤثر بر عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در حل مسائل سواد ریاضی، خطای دانش‌آموزان است.

در چند دههٔ اخیر شناسایی خطاهای ریاضی دانش‌آموزان از ابعاد متفاوت، موردتوجه پژوهشگران آموزش ریاضی قرار گرفته است و دسته‌بندی‌های متفاوتی از تعریف خطاها در حل مسائل ریاضی، ارائه شده‌اند. به‌عنوان نمونه، در «سی و نهمین کمیسیون بین‌المللی مطالعه و بهبود ریاضی[۹]» که در سال ۱۹۸۷ در «شربروک» کانادا برگزار شد، این معنای برای خطا موردتوافق قرار گرفت؛ «خطا زمانی اتفاق می‌افتد که فرد غلط را به جای درست انتخاب می‌کند» (روچه[۱۰]، ۱۹۸۹، نقل‌شده در سیمونز[۱۱]، ۲۰۱۲). با توجه به تعریف مذکور، یک روش متداول تحلیل خطا، به‌کارگیری «چارچوب تجزیه‌وتحلیل خطای نیومن[۱۲]» است. از نظر نیومن (۱۹۸۳)، زمانی که شخص سعی در ارائهٔ پاسخ مسئله‌ای استاندارد در ریاضی را دارد، باید قادر باشد از این موانع پی‌درپی بگذرد که عبارت‌اند از: ۱. خواندن[۱۳]؛ ۲. درک[۱۴]؛ ۳. تبدیل[۱۵]؛ ۴. پردازش[۱۶]؛ ۵. رمزگشایی[۱۷] (نقل‌شده در وایت[۱۸]، ۲۰۱۰).

به‌طورکلی، خطاها می‌توانند نتیجهٔ بی‌دقتی، اشتباه تفسیر کردن نمادها یا متن، فقدان دانش مرتبط با موضوع، نداشتن آگاهی یا ناتوانی در ارزیابی پاسخ‌های مسئله یا به دلیل بدفهمی‌ها رخ دهند. از این نظر، خالو و بایاگا[۱۹] (۲۰۱۴) معتقدند: شناسایی خطاهای دانش‌آموزان در حل مسئله‌های مربوط به سواد ریاضی، می‌تواند به بهبود تدریس ریاضی کمک کند. هدف پژوهشگران این نوشتار نیز هم‌سو با پژوهش آنان، شناسایی خطاهای رایج دانش‌آموزان ایرانی در پایان پایهٔ نهم با رویکرد تحلیل خطای نیومن، هنگام حل مسئله‌های مربوط به سواد ریاضی بود. مقاله حاضر صرفاً به معرفی خطاهای حاصل پرداخته است[۲۰].

www.SID.ir

Archive of SID

روش پژوهش

پژوهش کیفی نوعی پژوهش است که به جای استفاده از آزمون‌ها و روش‌های آماری و تعمیم کمّی نتایج (اشتراوس و کوربین[۲۱]، ۱۹۹۸)، بر شناخت عمیق‌تر پدیده‌ها با استفاده از رویکردهای اکتشافی و توصیف آن‌ها تمرکز می‌کند (جانسون و کریستنسن، ۱۳۹۵/۲۰۱۴) و تمرکز آن بر تعمیم‌های نظری است. بدین سبب و به دلیل ماهیت پیچیدهٔ ریاضی، در یک روند رو به رشد، محققان آموزش ریاضی از روش‌های کیفی در پژوهش‌های خود بهره جسته‌اند و به بررسی مشکلات یادگیری ریاضی دانش‌آموزان و چرایی آن پرداخته‌اند. به گفتهٔ شارما[۲۲] (۲۰۱۳)، استفاده از پژوهش‌های کیفی در تحقیقات آموزش ریاضی و پیشرفت ریاضی مدرسه‌ای بسیار باارزش است و به فهم و درک ما از مسائل اثرگذار بر اعتلای آموزش ریاضی، کمک می‌کند. در این پژوهش نیز، به دلیل هدف و ماهیت آن، از روش پژوهش «مصاحبهٔ مبتنی بر تکلیف» استفاده شد.

در مصاحبه‌های مبتنی بر تکلیف، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که به جای پاسخ به سؤال‌های مصاحبه‌کننده، به انجام تکلیف با «صدای بلند[۲۳]» بپردازند و با رضایت خودشان اجازه دهند که این فرایند ثبت، ضبط و پیاده‌سازی شود. در این روش، مصاحبه‌شونده از فرایند فکری و استدلالی خود، آگاهی بیشتری می‌یابد و نسبت به چراییِ تصمیم‌هایی که می‌گیرد و گام‌هایی که برمی‌دارد، شناخت بیشتری پیدا می‌کند. اسد[۲۴] (۲۰۱۵) این روش را بر نظریه شناختی پیاژه منطبق می‌داند که در آن دانش‌آموز به فکرکردن تشویق می‌شود تا خودش مفهومی را کشف کند و به‌واسطهٔ آن کشف، مفاهیم را درک کند.

همچنین، شرکت‌کنندگان در این پژوهش، ۹ دانش‌آموز داوطلب پایهٔ دهم شهر تهران در ابتدای سال تحصیلی ۹۸-۱۳۹۷، بودند. انتخاب پایهٔ دهم به این دلیل بود که آزمون سواد ریاضی- هم در پیزا و هم در آزمونی که در ایران و بر همان اساس ساخته شد- بر مبنای محتوای برنامهٔ درسی ریاضی تا پایان پایهٔ نهم بود که در بسیاری از کشورهای شرکت‌کننده در مطالعهٔ پیزا، سال خروج از دورهٔ عمومی و دربرگیرندهٔ ۱۵ ساله‌هاست[۲۵].

برای انتخاب سؤال‌های سواد ریاضی در مصاحبهٔ مبتنی بر تکلیف، از آزمون طراحی‌شده توسط محسن‌پور و همکاران (۱۳۹۴) استفاده شد[۲۶]. سؤال‌های این آزمون در قالب «واحدها» سازمان‌دهی شده بودند و هر واحد، با توصیف یک موقعیت در دنیای واقعی شروع می‌شد. توصیف‌های مزبور شامل اطلاعات موجود در متن‌ها، تصویرها، جدول‌ها، نمودارها و مانند آن بود. در این پژوهش، سؤال‌ها شامل ۴ واحد «خرید خانه» (۲ سؤال)، «نجار» (۱ سؤال)، «استقبال» (۱ سؤال) و «کشتی دریانوردی» (۳ سؤال) بود. همچنین هر سؤال در هر واحد، متشکل از یک فرایند ریاضی، یک زمینه و یک محتوای ریاضی بود. معیار انتخاب چهار واحد در این پژوهش بر اساس آزمون محسن‌پور و همکارانش (۱۳۹۴)، دو مورد زیر بود:

۱. پوشش هر چهار زمینهٔ «علمی»، «اجتماعی»، «شغلی» و «شخصی»؛

۲. سؤال‌هایی با صلاحیت‌های شناختی[۲۷] بالا به‌منظور حل مسئله.

www.SID.ir

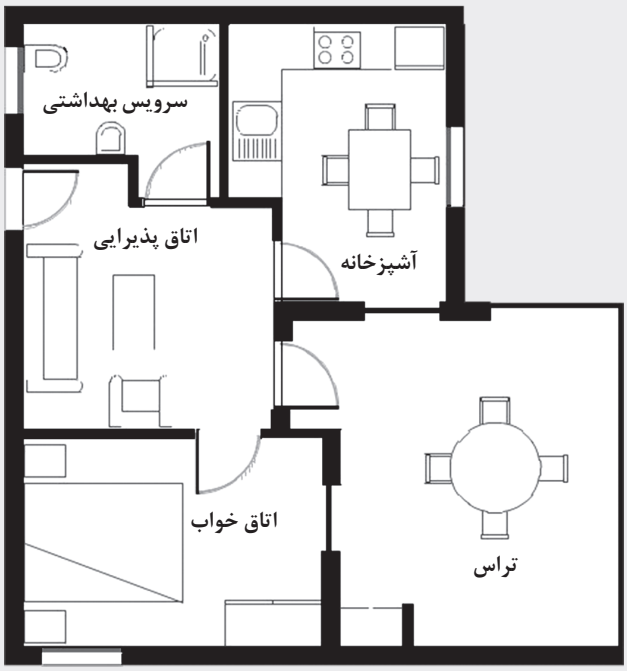
Archive of SID

■ یافته‌ها

در ادامه یافته‌های حاصل از تجزیه‌وتحلیل پاسخ دانش‌آموزان بر مبنای مصاحبه، به ترتیب شامل واحد خرید خانه (شامل ۲ سؤال)، واحد نجار، واحد استقبال و واحد کشتی دریانوردی (شامل ۳ سؤال) ارائه می‌شوند. در این ارائه، همهٔ نقل‌قول‌ها «معرف[۲۸]» هستند و اگر از موردی «نوعی[۲۹]» یا «منحصربه‌فرد[۳۰]» استفاده شده، در متن به آن اشاره شده است. همچنین، برای حفظ «محرمانه ماندن اطلاعات افراد[۳۱]»، از آوردن اسم پرهیز شد.

واحد خرید خانه

در زیر، نقشهٔ خانه‌ای را می‌بینید که خانوادهٔ آقای احمدی، قصد خرید آن را دارد. یکی از شاخص‌های تعیین قیمت خانه، مقدار زیربنای آن است.



سؤال ۱. *برای تخمین زیربنای خانه، می‌توان مساحت هر بخش را اندازه‌گیری و تمام مساحت‌ها را با هم جمع کرد. با این حال، روش مفیدتری برای تخمین مساحت زیربنای خانه وجود دارد که در آن، تنها کافی است چهار طول را اندازه بگیریم. اکنون، برای تخمین مساحت زیربنای این خانه، چهار طول از شکل بالا را که موردنیاز است، روی شکل مشخص کنید.*

www.SID.ir

Archive of SID

یکی از متداول‌ترین خطاهایی که در فرایند پاسخ‌گویی دانش‌آموزان مشاهده شد، نخواندن دقیق سؤال تا انتها بود. به‌عنوان نمونه، یکی از دانش‌آموزان سؤال را بلند خواند و گفت: «می‌تونیم مساحت هر قسمت رو اندازه بگیریم و بعد، مساحت‌ها رو با هم جمع کنیم».

سپس از پژوهشگر پرسید: «باید طول‌ها رو که به دست آوردیم، دوباره با هم جمع کنیم و مساحت رو به دست بیاریم؟»

برداشت مصاحبه‌کننده این بود که دانش‌آموز مسئله را با دقت و تا انتها نخوانده است. چراکه عبارت «روش مفیدتری برای تخمین مساحت زیربنای خانه وجود دارد» در صورت سؤال آمده بود و می‌توانست این ابهام را برطرف کند. درصورتی‌که ذهنیت برخی دانش‌آموزان روی این تصور از مساحت متمرکز شده بود که برای محاسبهٔ مساحت خانه، باید مساحت بخش‌های داخل خانه را محاسبه و آن‌ها را با هم جمع کنند. شاهد دیگری برای این برداشت از سوی مصاحبه‌کننده، این بود که یکی دیگر از دانش‌آموزان به‌طور مشابه، پرسید: «من الان از هر کدوم از این چهار تا اتاق، چهار طول بگم؟» از این گذشته، یکی از دانش‌آموزان با مِداد خود، بعضی از دیوارهای داخلی خانه را مشخص کرد. مجموع پاسخ‌ها مؤید این بود که آنان، بیش از آنکه این واحد را فارغ از دیوارهای داخلی‌اش، به‌عنوان شکل خانه تصور کنند، در تلاش بودند با حذف دیوار اتاق‌ها، به محاسبهٔ مساحت خانه بپردازند.

از دیگر خطاهای دانش‌آموزان این بود که گرچه در سؤال، بر عبارت «وجود روش مفیدتری برای محاسبهٔ مساحت خانه» تأکید شده بود، ولی تصور غالب از مفهوم مساحت، مانع توجه به این نکته شد و آن‌ها را از فکر کردن به «روش مفیدتر»، بازداشت.

از دیگر خطاهای مشهود در پاسخ‌های دانش‌آموزان، بی‌توجهی به بخش انتهایی سؤال، یعنی «مشخص کردن چهار طول» بود که در عوض اصرار داشتند، اندازهٔ آن چهار طول را به دست آورند. زیرا اکثرشان بر این باور بودند که بدون دانستن اندازهٔ ضلع‌ها، مشخص کردن آن‌ها ممکن نیست. البته بعضی با شک پرسیدند: «باید طول اضلاع رو تخمینی بگم؟» یا: «چون عدد نداده، به خطکش نیاز نداریم؟»

این ذهنیت و اصرار بر ضرورت داشتن مقدار عددی برای دادن پاسخ به این سؤال، باعث شده بود که بعضی از آن‌ها، روی برخی ضلع‌هایِ شکل، عدد و رقم گذاشتند تا مسئله برایشان قابل‌فهم و قابل‌حل شود. برای این کار، گاهی تخمین‌های بدون توجیه منطقی هم برای اندازهٔ اضلاع زدند و با تقسیم یک ضلع به چند قسمت، بدون استفاده از یک معیار دقیق، دچار خطا شدند. برای مثال، یکی از دانش‌آموزان با گذاشتن برچسب حرفی روی ضلع‌های شکل خانه، ضلع سمت راست تراس خانه را که یک ضلع اصلی از شکل خانه هم محسوب می‌شد، به‌عنوان نصف ضلع اصلی سمت چپ شکل خانه، برچسب‌گذاری کرد.

www.SID.ir

Archive of SID

یکی دیگر از خطاهای دانش‌آموزان، ارجاع به واقعیتی بود که تجربه کرده بودند. به‌عنوان نمونه، یکی از دانش‌آموزان که موقع بلند فکر کردن و حل مسئله، با خودش گفت: «یک روش مفید محاسبهٔ مساحت خانه، جمع مساحت آشپزخانه، اتاق خواب، سرویس پذیرایی و تراس است» هنگامی‌که مصاحبه‌کننده کنجکاوانه از او پرسید: «چرا سرویس بهداشتی حذف شد؟» پاسخ داد: «وقتی می‌خوایم خونه بخریم، مادر و پدر به اتاق خواب و آشپزخانه و ... اینا توجه می‌کنن. سرویس بهداشتی مهم نیس! اینا مهمه». چنین پاسخی اگرچه ممکن است حمل بر نادیده گرفتن دنیای واقعی توسط وی باشد، ولی برعکس، منطبق بر تجربهٔ واقعی او بود.

گاهی برخی دانش‌آموزان متوجه شکل کلی خانه (فارغ از دیوارها) می‌شدند، اما با تأکید بر عبارت «یافتن چهار طول در شکل»، بیشتر به «محیط شکل» توجه می‌کردند. برای مثال، خیلی‌ها پاسخ دادند: «می‌خوایم ببینیم خونه چند متره، پس باید دنبال چهار طول بگردیم» و با تعجب می‌گفتند: «ولی این خونه، از چهار طول بیشتر داره!»

خطای رایج دیگری که دیده شد، درک نکردن برخی واژه‌ها در صورت سؤال بود. به‌عنوان نمونه، «تخمین» یا «زیربنا» واژه‌هایی بودند که دانش‌آموزان را دچار چنین چالش‌هایی می‌کرد: «نمی‌دونم زیربنا یعنی چی! ولی کلمه‌ش رو شنیدم.» یا اینکه: «زیربنا یعنی کُلش، نه خونه‌اش! حیاط هم جزء اون حساب می‌شه.» و یا با ارجاع به تجربه‌های جسته‌وگریختهٔ واقعی خود، مثلاً: «آخه، می‌گن زیربنا ۱۲۰ متر، ولی ساختمان ۱۰۰ متر»، برایشان مفهوم این واژه قابل‌تصور نبود و نشان می‌داد که بسیاری از آنان واژهٔ «زیربنا» را با «متراژ زمین» اشتباه گرفته بودند. درحالی‌که «زیربنا» سطحی است که تمام کف یک ساختمان را شامل می‌شود.

> ***سؤال ۲.*** *در صورت خرید خانه، خانوادهٔ آقای احمدی تصمیم دارند کاشی‌های کفِ تراس را که فرسوده شده‌اند، تعویض کنند. مساحت تراس ۲۲ مترمربع است و برای پوشاندن آن، قصد دارند از نوعی کاشی به طول ۴۵ سانتی‌متر و عرض ۲۲/۵ سانتی‌متر که در جعبه‌های ۵۰ تایی قرار دارند، استفاده کنند. این خانواده، چند جعبهٔ کاشی خریداری کنند تا همهٔ تراس، کاشی شود؟ مراحل حل مسئله را بنویسید.*

یک خطای رایج در پاسخ به این سؤال، درک نکردن مفهوم «مترمربع» بود؛ مانند این‌که: «مساحت تراس که ۲۲ متر مربعه! اما شکل تراس مربع نیست. پس باید از کاشی‌کاری قسمت درِ ورودی تراس صرف‌نظر کرد، چون از این قسمت در خروجی، مربع‌های کامل بیرون نمی‌یاد.»

یکی دیگر از مشکلاتی که باعث می‌شد اغلب دانش‌آموزان در حل این مسئله دچار مشکل بشوند، بی‌توجهی به این واقعیت بود که واحدهای اندازه‌گیری برای انجام عملیات ریاضی، یکسان نبودند و قبل

www.SID.ir

Archive of SID

از آن، لازم بود که یکسانیِ واحدها انجام شود. به‌عنوان نمونه، یکی از مصاحبه‌شوندگان پس از محاسبهٔ مساحت کاشی برحسب سانتی‌متر، در مرحلهٔ بعد با تقسیم مساحت تراس (۲۲ متر مربع) بر مساحت کاشی (۱۰۱۲/۵ سانتی‌مترمربع) دچار سردرگمی شده و با خود می‌گفت که «آخه چرا عددا جور در نمی‌یاد!؟ کارم باید مشکل داشته باشه.» و در ادامه، تصمیم گرفت مساحت کاشی را بر مساحت تراس تقسیم کند که بخش مهمی از این مشکل، نادیده گرفتن دنیای واقعی بود که، سبب انتخاب این مسیر اشتباه شد.

یکی دیگر از خطاهای رایج در حل این مسئله، مشکل تبدیل واحدها به یکدیگر بود. به‌طوری‌که تعداد زیادی از آن‌ها، پس از محاسبهٔ مساحت کاشی و تصمیم‌گیری به تقسیم مساحت تراس به مساحت کاشی، متوجه شدند: «واحدها یکی نیستند! حالا باید چی کار کنم؟ باید تقسیم بر ۱۰ کنم؟ نه! نه! ضرب‌در ۱۰ یا ۱۰۰ کنم؟ اگر بخوایم کوچیک رو به بزرگ تبدیل کنیم، ضرب می‌کنیم یا تقسیم بر ۱۰۰ می‌کنیم؟ برای تبدیل واحد باید ضرب کنیم یا تقسیم؟» این اظهارات بیانگر آن بودند که تا چه اندازه، شکل و صورت یا قاعده و رویه، بر معنا و مفهوم غلبه پیدا کرده است.

چالش انجام دادن محاسبات با عددهای اعشاری نیز، منشأ خطای متداول دیگری بود که دانش‌آموزان مرتکب می‌شدند. به‌عنوان نمونه، آن‌ها نمی‌توانستند عدد اعشاری را که برای یک کاشی یا تعداد کل کاشی‌ها یافته بودند، در دنیای واقعی تفسیر کنند. از این نمونه‌ها فراوان بود که پس از به دست آوردن مساحت یک کاشی و تبدیل واحد آن، یعنی عدد ۰/۱۰۲۵، اظهار می‌شد که: «این عدد خوش‌قیافه نیست! فکر کنم دارم اشتباه حل می‌کنم.» یا این‌که پس از یافتن تعداد کل کاشی‌ها (عدد ۲۱۷/۲۸)، گفته شد: «حالا می‌فهمیم که چند تا کاشی نیاز داریم و البته ممیز داره که یه مقداریش اضافه می‌یاد و باید ممیز از بین بره! پس ضرب‌در ۱۰۰ می‌کنیم تا عدد راحتی بشه.» تلاش برای پیداکردن رویه برای حل هر مسئله به‌وضوح دیده می‌شد: «قبلاً برای حذف ممیز، گرد هم می‌کردیم! خب می‌گیریم ۲۱۷.»

همچنین خطای دیگری که در رابطه با عددهای اعشاری دیده شد، ناتوانی در تفسیر جواب‌های عددهای اعشاری در دنیای ریاضی بود. مثل زمانی که بعضی از آن‌ها، تعداد جعبه‌های کاشی را از طریق تقسیم تعداد کاشی‌های کل بر محتوای یک جعبه (۵۰ عدد) به دست آوردند، ولی نگران بودند که: «چهار تا جعبه لازم داریم، ولی اون خورده هاش چی؟!» و به این نتیجه می‌رسیدند که: «خب می‌شه اون خورده هاشو نادیده گرفت.»

نقش قالب‌های ذهنی در حل این مسئله نیز نقش عمده‌ای در بروز خطا داشت. برای نمونه، تصور ذهنی برخی دانش‌آموزان این بود که «تراس[۳۱]» فضای کمتری را به خود اختصاص می‌دهد و از اتاق و سایر بخش‌های خانه کوچک‌تر است به این دلیل، به دست آوردن تعداد کاشی‌های زیاد برای تراس، آن‌ها را متعجب می‌کرد و به راه‌حل و جوابی که به دست آورده بودند، اطمینان نداشتند؛ زیرا به گفتهٔ خودشان: «این عدد برای تراس بزرگه! تراس جای کوچیکیه آخه!.»

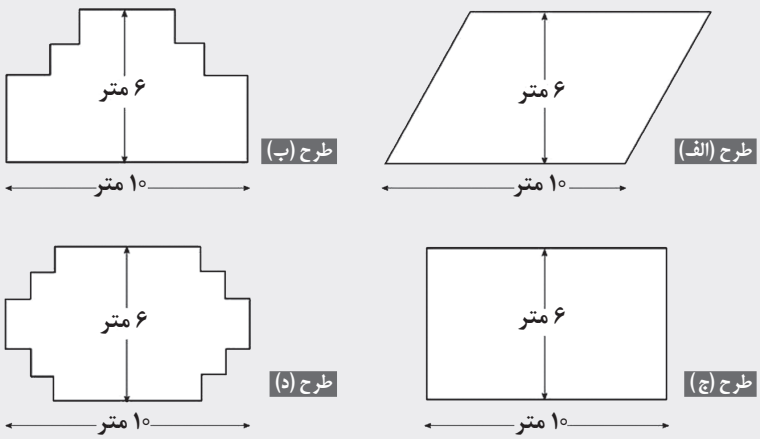
www.SID.ir

Archive of SID

از دیگر خطاهای دانش‌آموزان در حل این مسئله، فراموش کردن فرمول مساحت مستطیل و استفاده از فرمول محیط به جای فرمول مساحت در محاسبهٔ مساحت بود که نشان از یک درک رویه‌ای و یادگیری طوطی‌وار داشت. غیبت درک مفهومی عیان بود، به‌خصوص وقتی شنیده می‌شد که حتی بعد از انجام محاسبهٔ درست، با خود می‌گفتند: «حالا این می‌شه مساحت یا محیط؟ آخه مساحت که توان ۲ داشت!»

واحد نجار

یک نجار با ۳۲ متر الوار می‌خواهد دور تا دور یک محوطهٔ گل‌کاری شده را حصارکشی کند. او برای این کار، چهار طرح زیر را در نظر گرفته است:



از چهار طرح بالا، کدام‌ها قابل‌اجراست؟ با کشیدن دایره دور بله یا خیر، پاسخ خود را در جدول زیر مشخص کنید:

طرح دور تا دور محوطهٔ گل‌کاری شده	آیا می‌توان دور تا دور محوطهٔ گل‌کاری شده را با ۳۲ متر الوار حصارکشی کرد؟
طرح الف	بله / خیر
طرح ب	بله / خیر
طرح ج	بله / خیر
طرح د	بله / خیر

www.SID.ir

Archive of SID

در واحد «نجار»، یکی از خطاهایی که دانش‌آموزان مرتکب شدند، بی‌دقتی در خواندن صورت سؤال بود. به‌طوری‌که برخی با تمرکز بر بخش‌هایی از متن، در یافتن هدف مسئله سردرگم شده بودند. به‌عنوان نمونه، یکی از دانش‌آموزان با خواندن این سؤال پرسید: «اینجا باید دور تا دور را حساب کنیم؟ ولی نه! نه! باید مساحت را محاسبه کنیم. چون گُل رو در کف می‌کاریم، دور تا دور که گل نمی‌کاریم! پس باید مساحت رو بفهمیم که با ۳۲ می‌شه حصار کشید یا نه؟».

این پاسخ نشان می‌داد او به‌جای محیط می‌خواهد مساحت را محاسبه کند. تأکیدش بر «محوطهٔ گل‌کاری» در جملهٔ «می‌خواهد دور تا دور یک محوطهٔ گل‌کاری شده را حصارکشی کند»، باعث این اشتباه شده بود.

از دیگر چالش‌های دانش‌آموزان در این واحد، درک نکردن عمیق مفهوم مساحت و محیط و تفاوت بین این دو مفهوم بود. مصداق بارز این خطا در پاسخ‌ها دیده شد که این یکی، معرف است. دانش‌آموزی که ابتدا تشخیص داد مسئله مربوط به محیط شکل‌هاست و به همین دلیل در تشخیص پاسخ مناسب برای طرح الف و طرح ج موفق بود، دوباره مفهوم محیط و مساحت برایش ابهام ایجاد کرد و برای توضیح طرح د گفت: «گلای کاشته شده در طرح ج، در طرح د جا نمی‌شه!»

دیگری نیز با وجود تشخیص درست مناسب بودن طرح ب، ج و د، در مورد طرح الف که متوازی‌الاضلاع بود، گفت: «خُب می‌یام مثلثِ سمت چپ رو می‌ذارم کنار سمت راست. الآن دقیقاً این شکلِ مثلث رفته اون طرف و شکل الف فرقی نمی‌کنه با شکل ج. پس الف هم می‌شه.»

در واقع، او با تبدیل شکل الف به ج، و یکسان بودن مساحت طرح الف و ج، این مطلب را به محیط دو شکل نیز تعمیم داد. بدون این‌که توجه کند، دو شکلی که دارای مساحت یکسان هستند، لزوماً محیط برابر ندارند.

خطای دیگری که برای حل این مسئله از دانش‌آموزان سر زد، ناشی از شناخت ناکافی آن‌ها نسبت به ویژگی‌های شکل‌های هندسی بود. برای مثال، یکی از دانش‌آموزان در مورد طرح الف که متوازی‌الاضلاع بود، نظرش این بود که «محیط دور تا دور باید باشه.» یعنی تعریف محیط را برای خودش یادآوری کرد. سپس با اشاره به ضلع کوتاه‌تر در متوازی‌الاضلاع، پرسید: «این ضلع رو می‌تونیم بگیم همون ۶ متره؟» و خودش جواب داد: «ولی اریب شده! یعنی وقتی اریب می‌شه، می‌تونه همین ۶ باشه؟!» و باز هم قانع نشد و ادامه داد: «ولی نه، نمی‌تونه! آخه چی کار باید بکنم؟»

دیگری هم در رابطه با طرح الف، سرگردان بود و پاسخ داد: «اما الف همون طرح ب هستش، فقط خط‌هاش کج شده که فکر کنم همون ۶ متره.» این نوع پاسخ‌ها و درگیری‌ها نشان می‌دادند که بسیاری از آن‌ها، از این ویژگی که ضلع اریب را وتر مثلث در نظر بگیرند و از این ویژگی که فاصلهٔ بین دو خط موازی ثابت است و در نتیجه، ضلع اریب بلندتر از ضلع عمود است، نتوانستند استفاده کنند و برای حل این مسئله، آن را به کار گیرند.

www.SID.ir

Archive of SID

علاوه بر این‌ها، بعضی از دانش‌آموزان فرمول‌های روابط هندسی مهم را که در سال‌های قبل با آن‌ها آشنا شده بودند، فراموش کرده بودند یا از آن‌ها به اشتباه استفاده می‌کردند. مانند این نمونه که در استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه، رابطهٔ $c^2 = a^2 + b^2$ را با خود بلند گفت ولی موقع نوشتن، آن را به‌صورت $c = a + b$ نوشت.

همچنین، انجام محاسبه‌ها با عددهای رادیکالی و استفاده از تقسیم بر ۲ به جای جذر، از دیگر خطاهای شناسایی‌شده در فرایند پاسخ‌گویی به این مسئله بود. سختیِ محاسبه با عددهای غیر سرراست و تفسیر جواب‌های غیر سرراست در دنیای واقعی، تقریباً در همه راه‌حل‌ها دیده شد. مثل این مورد که در خصوص طرح الف، یکی رابطهٔ فیثاغورس را به‌صورت $۴۵/۲۵ = ۲/۵^2 + ۶^2$ نوشت و بعد افزود که «طول ضلع متوازی‌الاضلاع می‌شه ۲۱ و خورده‌ای! از ۶ بیشتره! پس محیطش از ۳۲ بیشتره! پس نمی‌شه.»

مشکل دیگری هم که در خصوص طرح‌های ب و د رخ داد، ناشی از خطای دید بود. اکثر دانش‌آموزان در برآورد محیط شکل‌ها، مرتکب خطای چشم شدند و خط‌های شکسته را در طرح‌ها، بلندتر از خط‌های صاف تصور کردند؛ مثل اینکه: «اگه شکل رو کامل کنم، شکل تغییر نمی‌کنه. همون مستطیله و یه چیزایی حذف شده! ولی چون این شکل پیچ‌وخم داره، دورش بیشتر شده! پس برای حصار کشی کم می‌یاد. پس نمی‌شه.»

واحد استقبال

سؤال ۱. *در بازگشت تیم ملی والیبال ایران پس از کسب مقام قهرمانی آسیا، بسیاری از علاقه‌مندان، برای استقبال از بازیکنان به فرودگاه رفتند. استقبال‌کنندگان در محوطه‌ای مستطیل شکل به طول ۱۰۰ متر و عرض ۵۰ متر، جمع شدند (صندلی در محوطه نبود). با توجه به این‌که محوطه کاملاً پر شده بود. به نظر شما کدام‌یک از عددهای زیر، تخمین مناسبی برای تعداد کل افرادِ حاضر در محوطه است؟*

الف) ۲/۰۰۰ **ب)** ۵/۰۰۰ **ج)** ۲۰/۰۰۰
د) ۵۰/۰۰۰ **ه)** ۱۰۰/۰۰۰

در پاسخ به این سؤال معلوم شد، بیشتر دانش‌آموزان درک درستی از مفهوم واحد سطح (مترمربع یا سانتی‌متر مربع) و تخمینی از آن در دنیای واقعی، ندارند. در مقابل این پرسش که: «۱ مترمربع حدوداً چقدر است؟ نشان بده.» یکی از آن‌ها گفت: «می‌شه این دو تا ۱ متر رو کنار هم بذاریم.» یعنی ۱ مترمربع را به معنای دو ۱ متر در کنار هم تصور کرده بود.

www.SID.ir

Archive of SID

خطای دیگر دانش‌آموزان به این علت بود که انتظار داشتند، همه چیز در مسئله مقدار کمّی و عددی داشته باشد و نبود آن را به حساب ناقص بودن صورت‌مسئله گذاشتند که اعتراض به مشخص نبودن اندازهٔ عددی میزان فضای اشغال‌شده توسط یک نفر، نمونهٔ نوعی آن بود: «مسئله می‌گه چند نفر می‌تونن اون جا باشن؟ ما باید عددی در مورد اینکه یه نفر چقدر جا اشغال می‌کنه داشته باشیم که نداده.»

این خطا، هم ریشه در غلبهٔ تصور کمّی- عددی دانش‌آموزان در مسائل ریاضی داشت و هم نشان می‌داد اکثر آنان مهارت لازم را در تخمین زدن ندارند. پاسخ دانش‌آموزی که با خواندن سؤال گفت: «می‌خواهیم ببینیم در مساحت ۵۰۰۰ مترمربع، چند نفر جا می‌شن؟» و برای خود توضیح داد: «اگر هر آدمی یه مترمربع جا بخواد، همون ۵۰۰۰ می‌شه، درسته؟» و بعد با کمی مکث ادامه داد: «نه! ۱ متر یا همون ۱۰۰ سانتی‌متر، خیلی بزرگه! نه یک نفر، ۱ متر نمی‌خواد! فکر کنم توی ۱ متر، ۵۰ نفر جا بشن.»

در این سؤال نیز مشابه واحد «خرید خانه»، مواجه‌شدن با عددهای اعشاری در دنیای واقعی، برایشان یک چالش بود. زیرا اغلب مسائل معمولی کتاب‌های درسی، پاسخ‌های سرراست دارند، درصورتی‌که چنین اتفاقی در رابطه با مسائل دنیای واقعی تقریباً رخ نمی‌دهد. به‌عنوان نمونه، وقتی دانش‌آموزی فضای اشغال‌شده توسط یک نفر را چنین توصیف کرد که: «اگر بخواد یه نفر روی یک کاشی بایسته، مثلاً ۶۰ سانتی‌مترمربع جا بگیره!» بدون درنگ ادامه داد: «نه! سانتی‌مترمربع می‌شه! مساحت یعنی ۶۰ × ۶۰، یعنی ۳۶۰۰ سانتی‌متر مربع جا بگیره، که باید به مترمربع تبدیل کنیم، یعنی ۰/۳۶» و با ناامیدی اضافه کرد: «ولی نه! رُند نشد! نظرم عوض شد! نه! همان ۱ مترمربع می‌گیرم. یعنی جواب می‌شه ۵۰۰۰ نفر.»

علاوه بر این‌ها، ناتوانی در صورت‌بندی یک مسئله از دنیای واقعی به یک مدل ریاضی با استفاده از نسبت و تناسب، در تلاش برای حل این مسئله، مشهود بود. یعنی دانش‌آموزان با وجود دانستن «میزان فضای اشغال‌شده توسط یک نفر»، قادر نبودند این مقدار را برای ۵۰۰۰ نفر تخمین بزنند و با استفاده از نسبت و تناسب، تعداد افراد را در آن محوطه حدس بزنند «اگه حدوداً ۵ نفر تو یک مترمربع جا بشن، اگه محوطه ۵۰۰۰ مساحتش باشه، حالا باید تقسیم کنم یا ضرب؟» که چنین تصورهایی ناشی از آن است که برایشان ریاضی از واقعیت جداست.

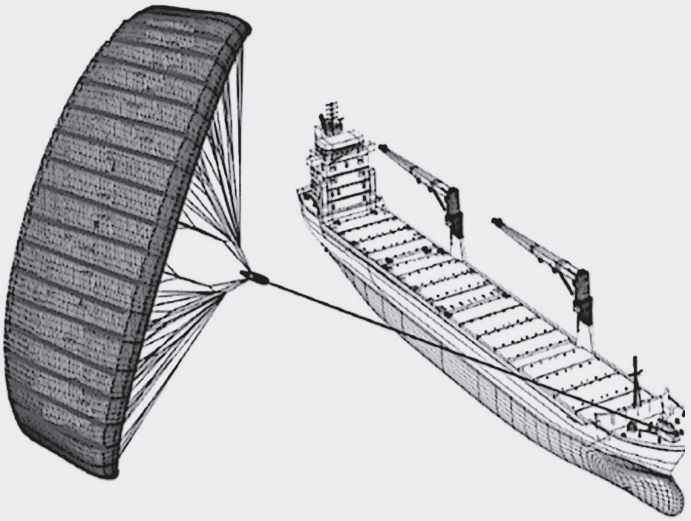
علاوه بر این، توجه و تمرکز ویژه بر بعضی واژه‌های خاص و بی‌توجهی به‌صورت‌مسئله در حالت کلی آن، باعث بروز خطا در حل این مسئله شد. این نمونه نوعی است که: «محوطه مستطیله! طول و عرض را داده، منظورش محیطه که می‌شه ۲ × (عرض + طول). چون گفته محوطه، پس یعنی محیط» و غافل شدن از این‌که وقتی در صورت‌مسئله گفته شده: «محوطه کاملاً پر شده»، به معنای درون، یعنی مساحت محوطه است نه اطراف آنکه محیط باشد.

www.SID.ir

Archive of SID

واحد کشتی دریانوردی

۹۵ درصد تجارت دنیا، از طریق دریا و به‌وسیلهٔ حدود ۵۰/۰۰۰ تانکر یدک‌کش و کشتی‌های باربری انجام می‌شود. بیشتر این کشتی‌ها از سوخت دیزلی استفاده می‌کنند که تأثیر مخربی بر محیط‌زیست دارد. برای حفظ محیط‌زیست، پژوهشگران توصیه کرده‌اند که با وصل کردن کایت‌های بادبانی به کشتی‌ها، می‌توان از نیروی باد، برای به حرکت درآوردن کشتی‌ها و درنتیجه کاهش مصرف سوخت دیزلی استفاده کرد.



سؤال ۱. *کایت‌های بادبانی در ارتفاع ۱۵۰ متری پرواز می‌کنند که در آنجا، سرعت باد تقریباً ۲۵٪ بیشتر از سطح عرشهٔ کشتی است و این مزیت استفاده از این کایت‌هاست. به‌طور تقریبی، زمانی که سرعت باد در سطح عرشهٔ کشتی ۲۴ کیلومتر بر ساعت است، با چه سرعتی باد به کایت بادبانی می‌وزد؟*

یکی از خطاهای رایج در پاسخ به این سؤال، درک نکردن صورت‌مسئله و تأکید بر استفاده از تمام اطلاعات موجود در مسئله بود. مثلاً دانش‌آموزی اصرار داشت که از «ارتفاع ۱۵۰ متر کایت» که در صورت‌مسئله مطرح شده بود، حتماً استفاده کند. او گفت: «اگر زمین و سطح عرشه را ۱ در نظر بگیریم، ارتفاع ۱۵۰ متری، ۲۵ درصد بیشتر است. حالا باید از عدد ۲۴ درصد بگیرم، یعنی ۲۵ درصد از این ۲۴! آخه تکلیف این ۱۵۰ چی می‌شه؟»

خطای دیگری که برای برخی دانش‌آموزان رخ داد، درک نکردن صورت‌مسئله به خاطر درک

www.SID.ir

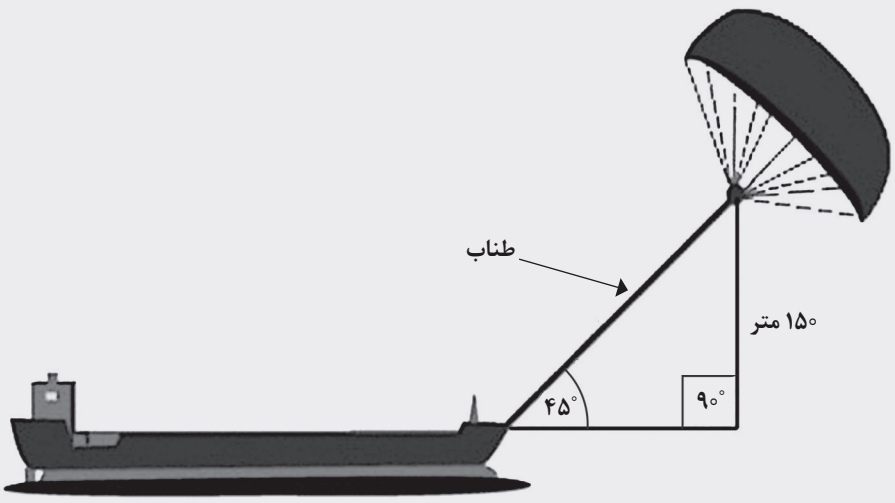
Archive of SID

نکردن جملهٔ «سرعت باد تقریباً ۲۵ درصد بیشتر از سطح عرشهٔ کشتی است» بود. دانش‌آموزی سؤال را خواند و این‌گونه گفت: «سطح عرشهٔ کشتی رو دارم. باید ۲۵ درصد بهش اضافه کنم، یعنی $\frac{۲۵}{۱۰۰}+۲۴$.» یا دانش‌آموز دیگری گفت: «می‌تونیم بگیم اگر سرعت باد در عرشه ۱ باشه، در ارتفاع ۱۵۰ متری ۱/۲۵ می‌شه. ولی وقتی می‌گه ۲۴ کیلومتر بر ساعت، دوباره نمی‌تونیم بگیم ۲۴/۲۵؟»

همچنین دانش‌آموز دیگری گفت: «نمی‌دونم درسته یا نه، ۲۵ درصد رو به‌صورت کسری می‌نویسیم بعد به مخرج ۱،۲۴ می‌دیم و ضرب می‌کنیم یعنی $\frac{۲۵}{۱۰۰}+۲۴$ که می‌شه ۶، حالا باید اینو از ۲۴ کم کنیم.»

یک خطای رایج دیگر اشراف نداشتن در کار کردن با عددهای درصدی بود. یکی از دانش‌آموزان در این مورد اظهار داشت: «اول باید ببینیم، ۲۵ درصد بیشتر از عرشهٔ کشتی چقدر می‌شه. یعنی باید ببینیم ۲۵ درصد بیش‌تر از ۲۴ کیلومتر چقدر می‌شه. اما نمی‌دونم ۲۵ درصد رو باید کسری بنویسیم؟ نمی‌دونم چی جوری کار کنم!».

سؤال ۲. *اگر برای کشیدن کشتیِ شکل زیر، از یک کایت بادبانی با زاویهٔ ۴۵ درجه و ارتفاع ۱۵۰ متر استفاده شود، به‌طور تقریبی، طول طناب این کایت چقدر است؟ الف)۱۷۳ متر ب)۲۱۲ متر ج)۲۸۵ متر د)۳۰۰ متر*



یکی از خطاهای متداول، توانایی نداشتن برای به‌کارگیری ویژگی شکل‌های هندسی در فرایند حل مسئله بود. به‌عنوان نمونه، وقتی سؤال توسط دانش‌آموزی خوانده شد، او این‌گونه نظر داد: «در

www.SID.ir

Archive of SID

اصـل می‌خواهیم وتر را محاسـبه کنیم. باید از راه فیثاغـورس حل کنم، ولی اندازهٔ این ضلع رو چه جـوری پیدا کنم؟ نمی‌دونم که!» چنانچه دانش‌آموز با اسـتفاده از تعریف مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث، زاویهٔ سـوم مثلث را پیدا می‌کرد و سـپس با اسـتفاده از خواص مثلث متساوی‌الساقین، قاعدهٔ مثلث قائم‌الزاویه را می‌یافت، مسئله قابل‌حل بود.

ناتوانی در بازنمایی شکل دنیای واقعی طناب و کشتی در دنیای ریاضی و تمرکز بر شکل هندسی مثلث قائم‌الزاویه، از دیگر خطاها بود. یکی از دانش‌آموزان وقتی که سـؤال را خواند گفت: «این‌که می‌گه زاویهٔ ۴۵، زاویهٔ طناب با سـطح عرشـس. و ارتفاع ۱۵۰ رو نمی‌فهمم! آخه چه جوری طناب زاویهٔ ۴۵ می‌سازه؟».

افـزون بر این‌ها، بعضی از خطاها ریشـه در عدم توانایی اسـتفادهٔ بجا و درسـت از قاعده‌های ریاضی و در اینجا عددهای توان‌دار بود. شـواهدی که حامی این ادعا هسـتند، مانند این خطا بود: « $۳۰۰^۲ = ۱۵۰^۲ + ۱۵۰^۲$ » که در آن، قوانین ضرب عددهای توان‌دار به جای جمع عددهای توان‌دار استفاده شده بود.

مشابه واحد نجار، در انجام محاسبه‌های عددهای رادیکالی به کمک ماشین‌حساب، نداشتن درک درست از معنای قوانین نمایان بود؛ مثل این‌که پس از محاسبهٔ مجذور وتر مثلث که عدد ۴۵۰۰۰ شد، یکی پرسید: «اول باید عدد رو بنویسم یا رادیکال رو؟»

> ***سـؤال ۳.*** *مصرف سوخت سالانهٔ یک کشتی خاص بدون اسـتفاده از کایت بادبانی، تقریباً ۳۵/۰۰۰ لیتـر و قیمت هر لیتر از این سـوخت ۵۰ تومان اسـت. به‌طـور تقریبی، هر کایت بادبانی، توان کاهش ۲۰٪ هزینهٔ کل سـوخت یک کشتی را دارد. هزینهٔ مجهز کردن کشتی به یک کایت بادبانی، ۲/۵۰۰/۰۰۰ تومان اسـت. در صـورت خرید کایت، حدوداً پس از چند سال صرفه‌جویی سوخت دیزلی، هزینه کایت بادبانی تأمین می‌شود؟ برای پاسخ‌گویی فرایند محاسبه‌ها را نشان دهید.*

خطای رایجی که در این سـؤال شناسـایی شد، سختی درک و تفسـیر عددهای اعشاری در دنیای واقعی بود. در حل این مسـئله، چون تعداد سال‌های صرفه‌جویی، یک عدد اعشاری به‌دست‌آمده بود، اغلب مصاحبه‌شـوندگان نمی‌توانستند تخمین موجهی برای آن در دنیای واقعی داشته باشند که هم‌سو با عقل سلیم‌شـان باشـد. به‌عنوان نمونه، یکی از دانش‌آموزان در حل این مسـئله با صدای بلند فکر می‌کرد و می‌گفت: «۷۰۰۰ تومن صرفه‌جویی می‌شه که ۵۰ × ۷۰۰۰ = ۳۵۰۰۰۰ که این ۳۵۰۰۰۰ می‌شه صرفه‌جویی در یک سـال، که ۲/۵۰۰/۰۰۰ رو بر ۳۵۰/۰۰۰ تقسـیم می‌کنیم می‌شه ۷ سال و خورده‌ای. یعنی ۷/۱۴ که حالا باید ببینیم ۰/۱۴ چقدر از یه سال می‌شه؟ جواب می‌شه ۷ سال و چند روز.»

www.SID.ir

Archive of SID

خطـای دیگری که در این سـؤال دیده شـد، بی‌دقتی در خواندن متن و توجـه نکردن به بعضی واژه‌ها برای انجام محاسبه‌ها، در صورت سؤال بود. مثلاً برای محاسبهٔ ۲۰٪ از «هزینهٔ کل سوخت»، ابتدا اکثر آنان بدون توجه به یکسـان نبودن واحدها در نسـبت و تناسـب، ۲۰٪ «هزینهٔ سوخت» را محاسبه کردند و بعد با ضرب کردن مقدار حاصل در عدد ۵۰، به پاسخ درست، یعنی ۳۵/۰۰۰ تومان صرفه‌جویی در سال دست یافتند.

در این سـؤال، ناتوانی در ارائهٔ یک مدل ریاضی برای مسـئله‌ای در زندگی واقعی نیز دیده شد. به‌عنـوان نمونه، برخی دانش‌آموزان برای برآورد «هزینهٔ کل سـوخت»، «میزان صرفه‌جویی در یک سـال» و «تعداد سـال‌های موردنیاز برای جبران هزینه»، از طریق کوشش و خطا، از عملیات اشتباه ضرب به جای تقسـیم یا تقسـیم به جای ضرب اسـتفاده می‌کردند و درک درستی از نحوهٔ به دست آمدن عددها نداشتند. طوری که دانش‌آموزی پس از آن‌که سؤال را خواند گفت: «هزینه کل سوخت؟ ۳۵۰۰۰ لیتر مصرف می‌کنه، هر لیتر ۵۰ تومانه، باید ۳۵۰۰۰ را بر ۵۰ تقسیم کنم.» و وقتی از او پرسیده شد: «به راه‌حل خودت اطمینان داری؟» پاسخ داد: «نمی‌دونم، شاید باید ضرب کنم!»

چالش کار کردن با عددهای اعشـاری نیز در این سـؤال همچنان دیده شـد. به‌طوری‌که برخی دانش‌آموزان، وقتی تعداد سـال صرفه‌جویی را با یک عدد اعشـاری درمی‌آوردند، احسـاس می‌کردند که محاسـبه‌ها را اشـتباه انجام داده‌اند و سـعی می‌کردند مسـیر حل مسـئله را تغییر دهند. به‌عنوان نمونه، یکی از آن‌ها پس از انتخاب راه‌حل درست برای محاسبهٔ تعداد سال‌های صرفه‌جویی، گفت: «۲/۵۰۰/۰۰۰ را بر ۳۵۰/۰۰۰ تقسـیم می‌کنم، ولی عددمون اعشـاری درمی‌یاد. فکر کنم اشـتباه حل کردم!.»

■ بحث و نتیجه‌گیری ■

این پژوهش با هدف شناسایی خطاهای رایج دانش‌آموزان در حل مسئله‌های مربوط به سواد ریاضی و بر اساس محتوای پایان دورهٔ متوسطهٔ اول انجام شد. زیرا شناسایی خطاهای دانش‌آموزان در حل مسئله‌های ریاضی می‌تواند به بهبود تدریس و یادگیری ریاضی کمک کند. آگاهی از خطاهای دانش‌آموزان باعث می‌شود معلمان بتوانند از تأثیر منفی این خطاها بر درک و فهم ریاضی آنان جلوگیری کنند. از سوی دیگر، می‌تواند به شناسایی ریشه‌های درک مفهومی پایینِ ریاضی در دانش‌آموزان منجر شود (دورکایا و همکاران[۳۳]، ۲۰۱۱).

یافته‌های این پژوهش در خصوص خطاهای دانش‌آموزان در حل مسـائل مربوط به سواد ریاضی، بیانگر آن بود که در سؤال اول از واحد «خرید خانه»، درک نکردن واژه‌هایی مانند «زیربنا» و «تخمین» که مفهوم کمّی دارند، ناتوانی در نشان دادن شکلی کل از اجزای

www.SID.ir

Archive of SID

خانه، دقیق نخواندن سؤال و توجه نکردن به برخی جمله‌ها یا واژه‌ها، از متداول‌ترین خطاها بودند. در سؤال دوم، خطاهای رایج مربوط به عدم توانایی ارائهٔ یک مدل ریاضی برای مسئله‌ای از دنیای واقعی و انجام عملیات تقسیمِ نامناسب، در محاسبهٔ تعداد کاشی‌ها از طریق تقسیم مساحت کاشی بر تراس، محاسبهٔ نادرست تعداد جعبه‌های کاشی موردنیاز در دنیای واقعی و بی‌توجهی به یکسان نبودن واحدها برای انجام عملیات ریاضی بودند.

در واحد «نجار»، نداشتن درک عمیق از مفاهیم هندسی و فراموش کردن روابط هندسی، درک مغشوش از دو مفهوم مساحت و محیط که گاهی سبب تفاوت قائل نشدن بین آن‌ها می‌شد، و در واحد «استقبال»، نداشتن تصوری صحیح از اندازهٔ ۱ مترمربع در دنیای واقعی و ناتوانی در تخمین مقدار فضایی که یک انسان اشغال می‌کند، از رایج‌ترین خطاهای شناسایی‌شده بودند. در سؤال اول از واحد «کشتی دریانوردی»، ناتوانی در استفاده از مدل ریاضیِ نسبت و تناسب در محاسبه درصد و در سؤال دوم از همین واحد، استفاده نکردن یا ناتوانی در استفاده از ویژگی‌های شکل‌های هندسی در فرایند حل مسئله مشاهده شد. در سؤال سوم این واحد، خطای تبدیل یک مسئله از دنیای ریاضی به دنیای واقعی برای محاسبه تعداد سال‌های صرفه‌جویی به‌منظور ارائه یک مدل ریاضی برای برآورد هزینهٔ کل سوخت و میزان صرفه‌جویی در یک سال، از همه متداول‌تر بود.

به‌طورکلی در همهٔ واحدهای بررسی‌شده در این پژوهش، خطاهایی در فرایند خواندن صورت سؤال بروز کرد. این خطاها ناشی از بی‌توجهی به برخی واژگان، عبارت‌ها و جمله‌هایی بود که بعضی ماهیت ریاضی داشتند و بعضی دیگر، به معنای محاوره‌ای در مسئله‌ها آمده بودند. تفکیک بین آن‌ها برای اکثر قریب به اتفاق شرکت‌کنندگان در این پژوهش سخت بود و باعث ایجاد خطاهای بسیاری شد.

علاوه بر این‌ها، نداشتن دقت در خواندن و درک صورت سؤال، منشأ خطاهای جدی شده بود. این بی‌دقتی در خواندن و درک مسئله می‌تواند تا حدودی ریشه در توجه کم یا صوری به مسائل کلامی معنادار و قابل توجیه در برنامهٔ درسی و در عوض، تأکید بیشتر بر مسائل محاسباتی و استفاده از عدد و اندازه، در کتاب‌های درسی باشد.

همچنین، ارائه ندادن یک مدل ریاضی برای حل مسئله‌ای از دنیای واقعی و بی‌توجهی یا کم‌توجهی به آموزش آن، ریشهٔ یکی دیگر از خطاهای رایج دانش‌آموزان بود و مثال بارز آن در این پژوهش، به‌کارگیری نسبت و تناسب بود درحالی‌که اغلب دانش‌آموزان با این مفهوم آشنایی داشتند، از کاربرد آن در حل مسئله‌های واقعی، ناتوان بودند. دانش‌آموزان به دلیل مشکلاتی که در فهم و درک عمیق مفاهیم ریاضی داشتند و یادگیری‌شان بیشتر از آن‌که مفهومی باشد، رویه‌ای و طوطی‌وار بود. در نتیجه، در به‌کارگیری ریاضی در حل

www.SID.ir

Archive of SID

مسائل زندگی روزانه و شرایط دنیای واقعی، ناتوان بودند و نمی‌توانستند به‌راحتی، یک موقعیت در دنیای واقعی را به‌درستی درک و آن را در دنیای ریاضی صورت‌بندی کنند.

شایان‌ذکر است، به دلیل طولانی بودن فرایند مصاحبهٔ مبتنی بر تکلیف، تأثیر عواملی نظیر خستگی را نمی‌توان در روند پاسخ‌گویی دانش‌آموزان به مسائل بی‌اثر دانست. از سوی دیگر، در فرآیند گردآوری داده‌ها پژوهشگر متوجه بروز حالات عاطفی دانش‌آموزان از طریق گفتن جمله‌هایی مانند: «اعتمادبه‌نفسم رو از دست دادم!» و یا: «اضطراب دارم» شد. از آنجا که شاید بروز خطاها به دلیل غلبهٔ حالات عاطفی بر ویژگی‌های شناختی بوده که باعث به‌هم‌ریختگی فکری شده است، توصیه می‌شود در پژوهش‌های بعدی به تعامل رفتارهای عاطفی و شناختی در فرایند حل مسئله توجه شود. همچنین، از آنجا که همهٔ شرکت‌کنندگان این مطالعه دانش‌آموزان دختر بودند، ارائهٔ تصویری کامل‌تر از خطاهای دانش‌آموزان در حل مسئله‌های مربوط به سواد ریاضی، به مصاحبه با دانش‌آموزان پسر نیز نیاز دارد.

پژوهش حاضر به این جمع‌بندی رسید که شکل‌گیری بسیاری از خطاهای رایج دانش‌آموزان در ایران در رابطه با حل مسائل ریاضی در دنیای واقعی، در نوع و سطح انتظارهای آموزشی ریشه دارد. هر چه بر آزمون‌ها بیشتر تأکید شود و نقش آن‌ها را در آموزش مدرسه‌ای پررنگ‌تر کنیم، طبیعی است که زمان پرداختن به یادگیری مفهومی و مسائل کلامی کمتر می‌شود. در چنین اوضاعی، جنبهٔ انتزاعی و محاسباتی ریاضی بر جنبهٔ واقعی و کاربردی آن غلبه می‌یابد، فضا برای استفاده از راهبرد «حدس و آزمایش» تنگ‌تر می‌شود و در نهایت، «آزمون و خطا» جای این راهبرد را می‌گیرد که بحث آن، موضوع این پژوهش نبوده است. در نتیجه، بروز خطا در صورت‌بندی مسائل دنیای واقعی به دنیای ریاضی و برعکس، قابل پیش‌بینی بود و یافته‌های پژوهش حاضر، مؤید آن شد.

در حقیقت، فرایند یاددهی با فرایند یادگیری درهم‌تنیده‌اند و بدون آموزش حل مسئله در دنیای واقعی، انتظار آموختن آن توسط دانش‌آموزان منطقی نیست. آموزش مفاهیم پیچیده، انتزاعی و غالباً سلسله‌مراتبی ریاضی، بدون اطمینان از فهم و درک عمیق مفاهیم پایه از سوی دانش‌آموزان، عامل مهم دیگری در وقوع خطاهاست. بنابراین، هم‌زمان با دوباره‌نگری در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای و تبیین هدف‌های واقع‌بینانه برای تولید محتوای درسی مناسب در جهت ارتقای سواد ریاضی در دانش‌آموزان ۱۵ ساله در ایران، بازنگری در برنامهٔ آموزش معلمان ریاضی نیز یک ضرورت عاجل است.

www.SID.ir

Archive of SID

منابع

- جانسون، آر. بورک و کریستینسن، لری. (۱۳۹۵). *پژوهش آموزشی: رویکردهای کمی، کیفی و ترکیبی* (ترجمهٔ علیرضا کیامنش، نیلوفر اسمعیلی، صبا حسنوندی، مریم دانای طوس، محمدرضا فتحی و مریم محسن‌پور). تهران: انتشارات علم. (اثر اصلی در سال ۲۰۱۴ چاپ شده است).
- دبیرخانه شورای عالی آموزش‌وپرورش (۱۳۹۲). *مجموعه مصوبات شورای عالی آموزش‌وپرورش*. گردآوری شرکایی اردکانی، جواد، ریاحی نژاد، حسین و رزاقی، هادی. تهران: مؤسسه فرهنگی مدرسه برهان (انتشارات مدرسه).
- رفیع‌پور، ابوالفضل و گویا، زهرا. (۱۳۸۹). ضرورت و جهت تغییرات در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای در ایران از دیدگاه معلمان. *فصلنامه نوآوری‌های آموزشی*،۹(۳۳)، ۹۱-۱۲۰.
- شایان، مریم و یافتیان، نرگس. (۱۳۹۶). *ارزیابی عملکرد سواد ریاضی دانش‌آموزان پایه نهم در آزمون مطالعه پیزا*. اولین کنفرانس آموزش و کاربرد ریاضی، کرمانشاه.
- ظهوری زنگنه، بیژن. (۱۳۷۹). ریاضیات: کلید راه توسعه. *مجله رشد آموزش ریاضی*، (۵۹ و ۶۰)، ۳۷-۳۴.
- محسن پور، مریم؛ گویا، زهرا؛ شکوهی یکتا، محسن؛ کیامنش؛ علیرضا و بازرگان، عباس. (۱۳۹۴). سنجش تشخیصی صلاحیت‌های سواد ریاضی. *فصلنامه نوآوری‌های آموزشی*، ۱۴(۵۳)،۷-۳۳.

- Assad, D. A. (2015). Task-based interviews in mathematics: Understanding student strategies and representations through problem solving. *International Journal of Education and Social Science, 2*(1), 17-26
- Baki, A., Çatlıoğlu, H., Coştu, S., & Birgin, O. (2009). Conceptions of high school students about mathematical connections to the real-life. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 1402-1407.
- Durkaya, M., Aksu, Z., Öçal, M. F., Şenel, E. Ö., Konyalıoğlu, A. C., Hızarcı, S., & Kaplan, A. (2011). Secondary school mathematics teachers' approaches to students' possible mistakes. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 15*, 2569-2573.
- Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(3), 199-219.
- Khalo, X. & Bayaga A. (2014).Underlying factors related to errors in financial mathematics due to incorrect or rigidity of thinking, *The Journal for Transdisciplinary Research in Southern Africa, 10*(3), 340-354.
- OECD (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006*. Paris: OECD Publications.
- OECD (2009). *Learning Mathematics for Life: A Perspective from PISA*. Paris: OECD Publications.
- OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy.* Paris: OECD Publications.
- Simons, M. (2012). *Analysis of the ways of working of learners in the final grade 12 Mathematical Literacy examination papers: Focussing on questions related to Measurement* (Doctoral dissertation, University of Western Cape).
- Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd. Ed). Thousand Oaks, CA: Sag
- Sharma, S. (2013). Qualitative approaches in mathematics education research: Challenges and possible solutions. *Education Journal, 2*(2), 50-57.
- White, A.L. (2010). Numeracy, Literacy and Newman's Error Analysis. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 33*(2), 129-148.
- Zohrabi, M. (2013). Mixed Method Research: Instruments, Validity, Reliability and Reporting Findings. *Theory & practice in language studies, 3*(2)254-262.

www.SID.ir

Archive of SID

پی‌نوشت‌ها

1. Baki
2. Catlioglu
3. Castu
4. Birgin
5. Gainsburg,
6. Organization for Economic Coperation and Development(OECD)
7. Programme for International Student Assessment: PISA
8. Typical
9. Commission for the study and Improvement of Mathematics teaching (CIEAEM)
10. Rouche
11. Simons
12. Newmans Error Analysis
13. Reading
14. Comprehension
15. Transformation
16. Process
17. Encoding
18. White
19. Khalo and Bayaga

۲۰. تجزیه‌وتحلیل خطاهای شناسایی‌شده در چارچوب نیومن در مقاله دیگری ارائه می‌شود.

21. Strauss & Corbin
22. Sharma
23. Think aloud
24. Assad

۲۵. طبق قانون، سال پایان دوره آموزش عمومی در ایران، پایه هشتم است ولی اکثریت دانش‌آموزان، تا پایه ۱۲ ادامه تحصیل می‌دهند و از آموزش عمومی به معنای رایگان، بهره‌مند می‌شوند. همچنین در این پژوهش، برای همسویی با آزمون سواد ریاضی، ۱۵ ساله‌ها شرکت کردند که پایه نهم را تمام کرده و در شروع سال تحصیلی، پایه دهم را آغاز کردند.

۲۶. محتوای این آزمون براساس چارچوب مطالعات پیزا و با توجه به محتوای کتاب‌های درسی ریاضی در ایران و نظرات دبیران ریاضی درخصوص تناسب سؤال‌ها برای دانش‌آموزان ۱۵ ساله طراحی شده است.

۲۷. در چارچوب مطالعه پیزا (۲۰۱۲) صلاحیت‌ها عبارت‌اند از ارتباطات، مدل‌سازی، بازنمایی، استدلال، طراحی راهبرد برای حل مسائل و استفاده از زبان و عملیات نمادین، رسمی و فنی

28. Representative
29. Typical
30. Idiocyncratic
31. Confidentiality

۳۲. به دلیل بافت شهری پایتخت، اغلب منازل یا تراس نداشته یا اغلب دارای تراس‌های کوچکی هستند.

33. Durkaya

www.SID.ir