

# کاربرد مدل ترکیبی گامبل در تجزیه و تحلیل فراوانی بارش‌های حداکثر حوضه کارون شمالی

دکتر حسنعلی غیور  
استاد جغرافیا دانشگاه اصفهان

دکتر جواد خوشحال  
استادیار جغرافیا دانشگاه اصفهان

داریوش رحیمی  
دانشجوی دکتری جغرافیا دانشگاه اصفهان

## چکیده

حوضه آبی کارون شمالی با وسعت ۲۳۴۰۰ کیلومتر مربع یکی از بزرگترین حوضه‌های آبی ایران می‌باشد که طبق برنامه‌های توسعه کشور در زمینه‌های تأمین آب برای سایر بخش‌ها و تولید انرژی برق آبی مورد توجه جدی قرار گرفته است. رخداد سیلاب‌های با دبی بالا در اثر ریزش بارش‌های سنگین به خصوص در سال‌های اخیر خسارات بسیار زیادی را در بخش‌های زیر بنایی حوضه به دنبال داشته که مدیریت این گونه رخدادها مستلزم شناخت دقیق‌تر عناصر مؤثر در آن می‌باشد. این مقاله با در نظر گرفتن شیوه‌های متداول بررسی مقادیر حد مانند روش گامبل یک متغیره و با استفاده از الگوی توزیع ترکیبی گامبل مقادیر حد بارش روزانه را طی دوره‌ی برگشت‌های مختلف در حوضه‌ی کارون شمالی برآورد نموده است. در این الگو به جای استفاده از مقادیر حد سالانه در روش یک متغیره گامبل از مجموع بارش و داده‌های حد روزانه استفاده می‌گردد. در واقع این روش مقدار حد را برای دوره‌ی برگشت‌های مختلف به صورت مشروط برآورد می‌نماید که علاوه بر آن دوره‌های برگشت شرطی به شرط معلوم بودن مجموع بارش و حداکثر مجموع بارش قابل محاسبه می‌باشند در پایان، این روش در مورد داده‌های مجموع بارش و حداکثرهای ۲۴ ساعته سالانه چهار ایستگاه (ارمند، پل شالو، مرغک و بارز) حوضه‌ی کارون شمالی به کار گرفته شده که نتایج حاصله نشان‌دهنده‌ی دقت بیشتر روش مذکور نسبت به روش یک متغیره گامبل می‌باشد به اضافه این که اطلاعات بیشتری برای وقوع حداکثر بارش‌ها در آینده پیش بینی شده است.

کلیدواژه‌ها: توزیع ترکیبی گامبل، حداکثر بارش محتمل، حوضه کارون شمالی، احتمال شرطی، دوره برگشت شرطی.

## مقدمه

کشور ایران با متوسط بارش حدود ۲۴۰ میلی‌متر و پراکنش زمانی - مکانی شدید از نوسانات بالای بیلان آبی رنج می‌برد که این نوسانات توأم با خشکسالی‌ها و سیلاب‌های بزرگ می‌باشد.

در این گستره حوضه‌ی آبی کارون شمالی با بارش سالانه ۲۵۰ تا ۱۶۰۰ میلی متر طی دوره (۱۳۴۹-۱۳۷۹)، بارش حداکثر ۲۴ ساعته ۱۵۰ میلیمتر، دبی متوسط ۳۰۵ متر مکعب (۱۳۳۵-۱۳۷۸) و دبی اوج ۴۰۳۵ متر مکعب (سال آبی ۱۳۷۷-۱۳۷۶) در مدیریت منابع آب کشور از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. در مقیاس درون حوضه وقوع بارش‌ها و دبی‌ها با مقادیر ذکر شده و عدم شناخت دقیق از مقادیر پهنه‌ای آن موجب شده است که هر ساله خسارات زیادی به بخش‌های آبخیز حوضه از طریق فرسایش خاک، تخریب اراضی، از بین رفتن شبکه‌های آبیاری و در بخش‌های آبرگیر آن به صورت آبرفتگی جلگه خوزستان، پر شدن دریاچه سدها و سازه‌های آبی وارد شود و در مقیاس برون حوضه‌ای نیز نیاز آبی شدید مناطق همجوار حوضه (ایران مرکزی) و افزایش مصرف روزافزون انرژی الکتریسیته در کشور موجب توجه جدی به این حوضه در اسناد چشم‌انداز توسعه و آمایش ۲۰ ساله کشور شده است. از سوی دیگر رخداد بارش و سیلاب‌های بزرگ بخصوص در طی دهه‌های اخیر (۱۳۷۰-۱۳۸۰) و وجود شرایط تیپیک ژئومورفولوژی منطقه در زمینه احداث سازه‌های آبی بزرگ حکایت از پتانسیل بالای آبی حوضه در این زمینه دارد که دستیابی به این توانایی‌ها مستلزم شناخت دقیق‌تر مقادیر حد بارش و دبی است. در این مقاله تلاش شده با روش دقیق‌تری مقادیر حداکثر بارش محتمل در دوره برگشت‌های مختلف برآورد گردند.

بر اساس تعریف، حداکثر بارش محتمل<sup>۱</sup> عبارت است از حداکثر سقف فیزیکی بارش که در سطح یک محدوده مشخص طی یک زمان معین قابل بارش باشد (صدقی، ۱۳۷۹). به منظور محاسبه حداکثر بارش محتمل راهکارهای متفاوت و متنوعی از جمله روش‌های همرفت، توفان‌های منفرد با بیشینه‌سازی رطوبت و باد، جابجایی توفان، رگبارهای کوتاه‌مدت سینوپتیک و روش‌های آماری ارائه گردیده است (نجمائی، ۱۳۶۹).

در این میان روش‌های آماری به دلیل سهولت در استفاده و در دسترس بودن اطلاعات مورد نیاز آن نسبت به روش‌های دیگر رایج‌تر می‌باشد. در روش‌های آماری اولین گام تطبیق داده‌ها با توزیع‌های آماری (نکویی - برارز) می‌باشد (گامبل، ۱۹۶۷: ۵۱۱-۵۶۹). در مورد آزمون‌های نکویی - برارز روش‌های مانند توزیع نرمال در مورد داده‌های نرمال، توزیع‌های پیرسون، فیشر، تیپیت، گامبل در زمینه مقادیر حداکثر داده‌ها را می‌توان نام برد.

بر اساس مطالعات صورت گرفته توزیع مناسب برای داده‌های حداکثر مانند حداکثر بارش، سیلاب، دما و وزش باد توزیع مقادیر نهایی نوع اول گامبل می‌باشد که با تابع توزیع (رابطه‌ی شماره ۱) قابل محاسبه است.

$$F_y(y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-e^{-y}} \quad (1)$$

مطابق این توزیع و با محاسبه مقادیر احتمال وقوع (روش ویبول) دوره برگشت، تعداد داده‌ها و ضرائب دوره برگشت مقدار حداکثر داده‌ها برآورد می‌شود. در این زمینه می‌توان به مطالعات گامبل (۱۹۵۱)، گامبل و مصطفی (۱۹۶۷: ۵۱۸-۵۶۹)، الیورا (۱۹۸۲) و جوی (۱۹۹۲: ۱۸۳-۱۷۱) اشاره داشت. در این روش‌ها، مقدار میانگین و انحراف معیار داده‌ها و طول دوره برگشت داده‌ها از مهمترین عوامل مؤثر در برآورد مقادیر حداکثر محسوب می‌شوند. طبق روش گامبل یک متغیره، آماره‌های مقادیر داده‌ها در ایستگاه‌ها با یکدیگر متفاوت بوده ولی میزان ضریب فراوانی آن در دوره‌های برگشت برابر یکسان است و برآوردها به صورت تئوریک انجام گرفته که میزان خطا را در داده‌ها افزایش می‌دهد که با توجه به استفاده این داده‌ها در طراحی و مدیریت سازه‌های آبی میزان خطرپذیری و منابع مالی را در اجرای پروژه‌ها افزایش می‌دهد لذا کاهش میزان خطا در مقادیر برآوردی بسیار حایز اهمیت بوده و همواره مورد توجه فعالان مدیریت منابع آب قرار داشته است. از مهمترین اقداماتی که در این زمینه به انجام رسیده مطالعه شینگ‌پو (۱۹۹۹: ۱۰۰-۸۸) روی مقادیر توفان‌های سالانه ایستگاه نیگیتا ژاپن بر اساس توزیع ترکیبی گامبل و توزیع‌های شرطی می‌باشد که بر اساس این توزیع برآورد مقدار دقیق‌تر متغیر و احتمال رخداد آن امکان‌پذیر است.

#### محدوده مورد بررسی

محدوده انتخابی جهت مطالعه حوضه‌ی آبی کارون شمالی در مقطع پل شالو با مساحت ۲۳۴۰۰ کیلومترمربع و موقعیت جغرافیایی ۳۱°-۴۵' تا ۳۲°-۲۰' عرض شمالی ۸°-۵۰' تا ۴۰°-۵۱' طول شرقی و سه زیرحوضه‌ی اصلی (خرسان، بازفت و کارون علیا) و چهار زیرحوضه فرعی ونک، کوه‌رنگ، بازفت و بهشت‌آباد می‌باشد (نقشه شماره ۱).

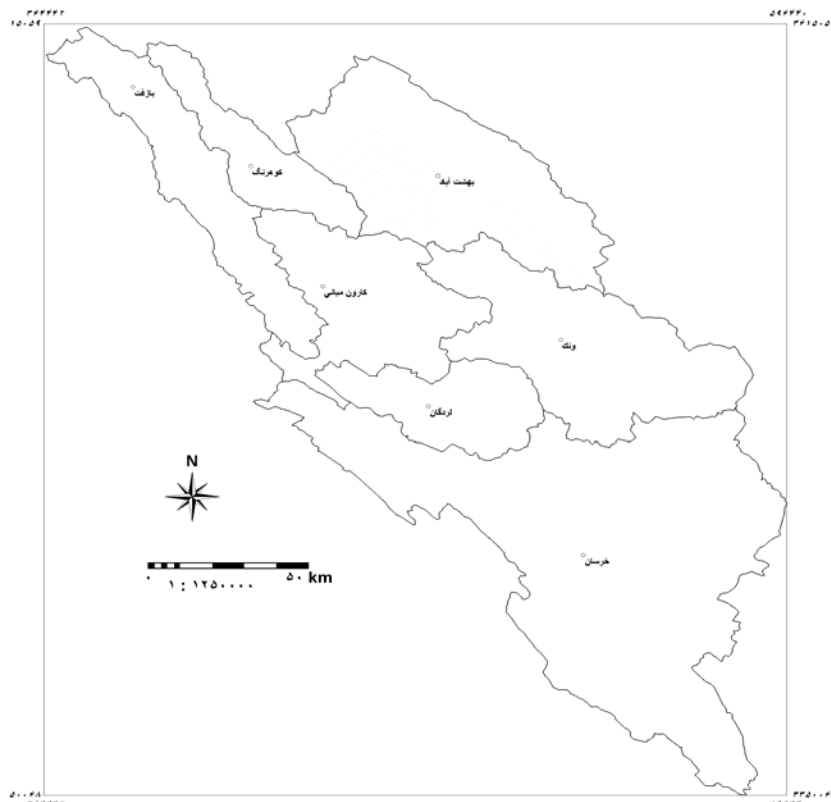
#### مواد و روش شناسی

##### الف- مواد

در این مطالعه از داده‌های حداکثر بارش روزانه و مجموعه بارش سالانه طی دوره‌ی آماری (۱۳۴۹-۱۳۷۹) ایستگاه‌های ذکر شده در جدول زیر استفاده گردیده است.

جدول ۱: مشخصات ایستگاه‌های باران سنجی حوضه دوره ۱۳۴۹-۱۳۷۹

ردیف	نام ایستگاه	عرض	طول	ارتفاع (m)	بارش (میلیمتر)
۱	ارمند	۳۱°-۳۹'	۵۰°-۴۷'	۱۲۴۰	۷۹۸/۸
۲	بارز	۳۱°-۳۱'	۵۰°-۲۵'	۸۰۰	۶۵۹/۸۵
۳	پل شالو	۳۱°-۴۵'	۵۰°-۸'	۷۰۰	۷۵۵
۴	مرغک	۳۱°-۳۹'	۵۰°-۲۸'	۸۶۰	۵۰۲/۲۸



نقشه ۱: حوضه آبخیز کارون شمالی و زیرحوضه‌های آن

### ب- روش

در ابتدا پایگاه داده‌ها در نرم‌افزار Excel تشکیل شده و سپس در نرم‌افزار minitab11 با استفاده از برنامه تهیه شده در محیط macro نرم‌افزار مذکور، ضمن برازش داده‌ها مورد تحلیل قرار گرفتند و در نهایت کنتور پلاتها با استفاده از نرم‌افزار surfer7 جهت برآورد بارش‌های حداکثر روزانه ترسیم شدند.

بررسی‌ها نشان داد که داده‌ها بهترین برازش را با توزیع فیشر- تیپیت ۲ دارند. در ادامه مدل برآورد حداکثر بارش محتمل (PMP) بر اساس توزیع تجمعی ترکیبی گامبل یو با استفاده از متغیرهای حداکثر بارش روزانه (I) و مجموع بارش سالانه (A) ارایه گردید.

تابع توزیع تجمعی گامبل ترکیب شده که توسط یو [17] برای دو متغیر A و به صورت رابطه‌ی شماره (۲) پیشنهاد شده است:

$$F(i, a) = F_I(i) \cdot F_A(a) \exp \left( -\theta \left[ \frac{1}{\ln F_I(i)} + \frac{1}{\ln F_A(a)} \right]^{-1} \right) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2)$$

در  $F_Z(z)$  آن تابع توزیع تجمعی به صورت زیر است رابطه شماره (۳)

$$F_Z(z) = \exp \left[ -\exp \left( -\frac{z - \mu}{\lambda} \right) \right] \quad (3)$$

و پارامترهای  $\theta$  و  $\mu$  و  $\lambda$  به ترتیب نشان‌دهنده پیوند بین دو متغیر تصادفی  $A$  و  $I$ ، میانگین و واریانس متغیر تصادفی مربوطه می‌باشد.

گامبل و مصطفی (۱۹۶۷: ۵۱۸-۵۶۹) و الیورا (۱۹۸۲) برآوردگر زیر را برای  $\theta$  معرفی می‌کنند: رابطه شماره (۴) که در آن  $\rho$  میزان ضریب همبستگی پیرسون می‌باشد

هنگامی که  $\frac{\rho}{3} \leq \rho \leq 0$  باشد پارامتر  $\theta$  به حداکثر مقدار خود که برابر ۱ است می‌رسد. از این رو این روش برای حالاتی که ضریب همبستگی پیرسون بین دو متغیر بیشتر از ۰/۶۷ می‌باشد قابل استفاده نیست.

همچنین پارامترهای  $\mu$  و  $\lambda$  را می‌توان براساس روش گشتاوری با استفاده از روابط ۵ و ۶ تخمین زد. برآوردهای حاصل به روش زیر به دست می‌آیند: روابط (۵ و ۶)

$$\tilde{\mu} = M - 1/577\lambda \quad (5)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} S \quad \text{که: (6)}$$

$M$ : میانگین مشاهدات

$S$ : انحراف از معیار مشاهدات می‌باشد.

تابع چگالی توأم گامبل ترکیب شده را می‌توان با استفاده از مشتق‌گیری از رابطه (۲) به صورت زیر به دست آورد:

با تابع توزیع تجمعی شرطی  $I$  به شرط  $A = a$  رابطه شماره (۷)

$$F_{I|A=a}(i|a) = F(i, a) \left\{ \exp(-SE(a)) - \theta \frac{\exp[2SE(a) + \exp(-SE(a))]}{[SE(i) + \exp(SE(a))]^2} \right\} \quad (7)$$

$$SE(i) = \frac{i - \mu_I}{\lambda_I}, \quad SE(a) = \frac{a - \mu_A}{\lambda_A}$$

بطور مشابه می‌توان  $f_{a|i}(a|i)$  و  $F_{A|I=i}(a|i)$  را تعریف کرد. که با توجه به هدف (برآورد دقیق‌تر بارش‌های حد) توزیع شرطی  $I$  به شرط  $A \leq a$  کاربرد دارد. بنابراین توزیع شرطی غیراستاندارد  $F'_{I|A=a}(i|a) = P[I \leq i | A \leq a]$  نیز با استفاده از رابطه پیشنهادی یو و راسموسن (۲۰۰۰)

از رابطه (۸) حاصل می‌شود:

$$F'_{I|A=a}(i|a) = \frac{F(i,a)}{F_A(a)} = F_I(i) \exp \left\{ -\theta \left[ \frac{1}{\ln F_I(i)} + \frac{1}{\ln F_A(a)} \right]^{-1} \right\} \quad (8)$$

بطور مشابه می‌توان رابطه متناظر برای  $F'_{A|I=i}(a|i)$  را تعریف نمود.

از دیگر عوامل مؤثر در برآورد مقادیر حداکثر، دوره برگشت داده‌ها می‌باشد که رابطه معکوسی با توزیع تجمعی حاشیه‌ای و توأم احتمال وقوع و توابع چگالی دارد که طبق روابط (۹ و ۱۰) بیان می‌شوند:

$$T(i|a) = \frac{1}{1 - F_{I|A=a}(i|a)} \quad (9)$$

و رخداد  $(I > i | A \leq a)$  دوره برگشت شرطی:

$$T'(i|a) = \frac{1}{1 - F'_{I|A=a}(i|a)} \quad (10)$$

به کار گرفته می‌شود.

### بحث

در تجزیه و تحلیل حداکثر بارش‌ها معمولاً مقدار بارش و یا برآورد آن در دست می‌باشد و یا اینکه حداقل می‌توان کران بالای مجموع بارش را به نحوی بر اساس توزیع پیرسون و گامبل تیپ یک در هر ایستگاه باران‌سنجی به منظور استفاده در برنامه‌ریزی‌های منابع آب مشخص کرد.

در برنامه‌ریزی منابع آب طول دوره برگشت برای رخداد یک حداکثر بارش محتمل حایز اهمیت است. زیرا که وقوع سیلاب‌ها و شرایط حاد هیدرولوژیکی در اثر بارش‌های حداکثر متناسب با دوره برگشت‌ها متفاوت بوده و این سیلاب‌ها در بیشتر مواقع ناشی از ریزش بارش‌های حداکثرجوی می‌باشند. در برآورد چنین بارش‌هایی عواملی مانند طول دوره آماری و روابط همبسته بین عناصر گوناگون نقش بسزایی ایفا می‌کند به نحوی که هرچه طول سری زمانی بارش بیشتر باشد از یک‌سو می‌توان مقادیر بارش را جهت دوره‌ی برگشت‌های طولانی‌تر پیش‌بینی نمود و از سوی دیگر میزان خطا در برآورد داده‌ها را کاهش داد. روش ترکیبی گامبل به‌عنوان یک مدل آماری که عناصر بیشتری را جهت پیش‌بینی و تجزیه و تحلیل داده‌ها استفاده می‌کند از میزان دقت بیشتر برخوردار می‌باشد.

حوضه آبی کارون شمالی به عنوان یکی از حوضه‌های آبخیز خلیج فارس از پتانسیل‌های بسیار زیادی در زمینه مدیریت منابع آب کشور برخوردار بوده و لذا آگاهی از مقادیر حداکثر بارشی آن جهت برنامه‌ریزی مدون امری غیر قابل انکار است. در این رهیافت از داده‌های بارش سالانه و حداکثر مقادیر بارش روزانه در دوره‌ی آماری ۱۳۴۹ تا ۱۳۷۹ ایستگاه‌های ارمند- پل

شالو- بارز و مرغک در پیش بینی مقادیر حد بارش حوضه استفاده شده است البته لازم به ذکر است که به دلیل کوتاه بودن طول دوره‌ی آماری داده‌های بارش (سری زمانی ۳۳ سال) برآورد بارش‌های حداکثر آن نیز دارای خطا است.

بر اساس مدل ترکیبی گامبل و با توجه به اینکه از دو متغیر (مجموع بارش و حداکثر بارش سالانه) استفاده می‌کنیم، لذا می‌توان احتمالات شرطی یکی به شرط دیگری (روابط ۱۰ و ۹) و دوره‌ی برگشت شرطی برای حالتی که با مقدار دقیق مجموع بارش روبرو هستیم (رابطه ۹) و برای حالتی که یک کران بالا برای مجموع بارش داریم (رابطه ۱۰) را به دست آورد. از این‌رو این مقادیر به دست آمده خود یک پیش‌بینی است و نسبت به روش گامبل یک متغیره (که میزان بارش برآوردی بیشتر به ضریب حاصل از طول دوره‌ی برگشت و دوره‌ی آماری (k) بستگی دارد و با توجه به این که ضریب مذکور از ایستگاهی به ایستگاه دیگر تفاوت چندانی ندارد لذا مقدار برآوردی آن دارای خطای بیشتری بوده) مقادیر حداکثر بارش روزانه حوضه را برای دوره برگشت‌های یکسان و در ایستگاه‌های مختلف با خطای کمتری با استفاده از کنتورهای ترسیمی شرطی برآورد می‌کند به منظور برآورد دقیق‌تر بارش‌های حداکثر در حوضه کارون شمالی مقادیر بارش بر اساس روابط ارائه شده مدل ترکیبی گامبل مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و کنتورپلات‌های آن بر اساس روابط (۱۰ و ۹) ترسیم گردیده است در این نمودارها محور افقی نشان‌دهنده‌ی سطوح مختلف حداکثر بارش، محور عمودی بیانگر دوره‌ی برگشت حداکثر بارش به شرط مجموع بارش (حداکثر مجموع بارش) بوده و کنتورها برای سطوح مختلف مجموع بارش به صورت خطی ترسیم شده‌اند.

نحوه‌ی تفسیر این نمودارها به این صورت است که با دانستن مجموع بارش سالانه (که معمولاً با استفاده از توزیع پیرسون نوع سوم در دوره‌ی برگشت‌های مختلف قابل محاسبه است) و تعیین دوره‌ی برگشت کنتور مربوطه را به یکدیگر وصل نموده و سپس خط مزبور را به محور افقی که مقادیر حداکثر بارش سالانه می‌باشند متصل کرده تا محورهای افقی و عمودی همدیگر را قطع کند این مقادیر نشان‌دهنده‌ی حداکثر بارش سالانه در دوره‌ی برگشت مربوطه می‌باشد (نمودارهای شماره ۱ تا ۴).

همین تفسیر را می‌توان برای نمودارهای شماره‌ی (۵ تا ۸) بیان کرد با این تفاوت که در اینجا یک کران بالا برای مجموع بارش در دسترس است لذا مقدار بارش برآوردی آن به منظور محاسبه بارش حداکثر محتمل ۲۴ ساعته مناسبتر است و این امر میزان ریسک‌پذیری در زمینه‌ی برآورد دبی طراحی را در سازه‌های آبی کاهش می‌دهد.

به عنوان نمونه در شرایطی که مجموع بارش سالیانه در ایستگاه ارمند برابر با ۵۰۰ میلیمتر تقریباً ۵ سال طول می‌کشد تا یک بارش حداکثری روزانه ۵۰ میلیمتر رخ دهد. برای همین

ایستگاه در شرایطی که برای مجموع بارش سالانه کران بالای ۵۰۰ میلیمتری در دست باشد ۲/۵ سال طول می‌کشد تا یک بارش حداکثری روزانه ۵۰ میلیمتری اتفاق بیافتد.

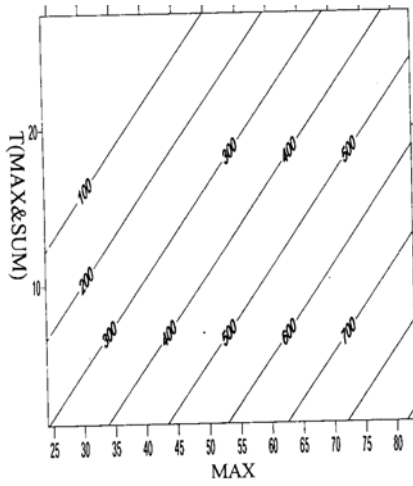
### نتیجه

مدل ترکیبی گامبل به منظور تعمیم توزیع توأم همبسته مجموع و حداکثر بارش مورد استفاده قرار گرفته است. بر اساس این مدل اگر توزیع‌های حاشیه‌ای از توزیع گامبل (مقادیر نهایی) تبعیت کند، می‌توان توزیع احتمال توأم، توزیع‌های شرطی و دوره‌های برگشت دو متغیر همبسته را به دست آورد. پارامترهای مدل را با استفاده از روش گشتاوری و براساس توزیع‌های حاشیه‌ای آنها برآورد می‌کند.

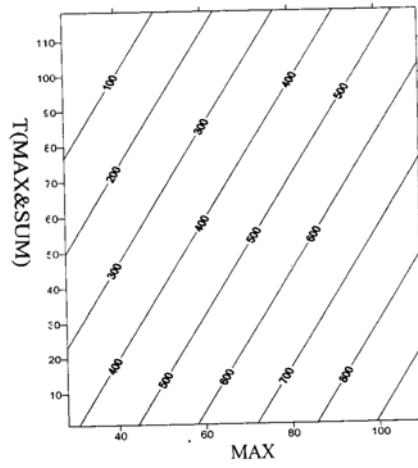
این مدل برای ۴ ایستگاه باران‌سنجی حوضه کارون شمالی (پل‌شالو، ارمند، بارزومرغک) با استفاده از بارش‌های روزانه ثبت شده در این ایستگاه‌ها مورد استفاده قرار گرفته و این مدل اطلاعات اضافی دیگری مثل دوره برگشت توأم و دوره‌ی برگشت شرطی دو متغیره همبسته از توزیع گامبل (مقادیر نهایی) را فراهم می‌سازد که بر اساس تحلیل‌هایی یک متغیره (روش گامبل معمولی) قابل حصول نیست. مدل می‌تواند با استفاده از یک پارامتر به عنوان مثال  $A$  مقدار پارامتر دیگر (I) را به صورت شرطی برآورد نماید. این برآورد از یک سو میزان خطا در پیش‌بینی مقادیر حداکثر را کاهش داده و از سویی دیگر در برآورد داده‌های غیراستاندارد نیز قابل استفاده است. همچنین میزان اطمینان را در برآورد داده‌ها افزایش می‌دهد.

Archive

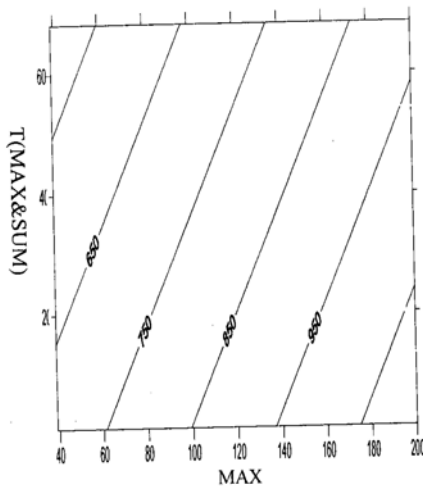




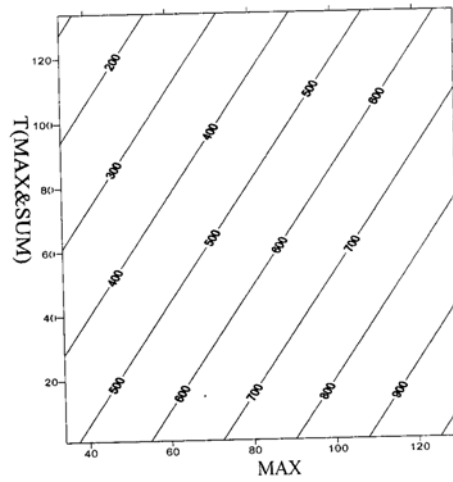
نمودار ۲: کنترولات دوره برگشت شرطی حداکثر بارش به شرط مجموع بارش ایستگاه پل شالو



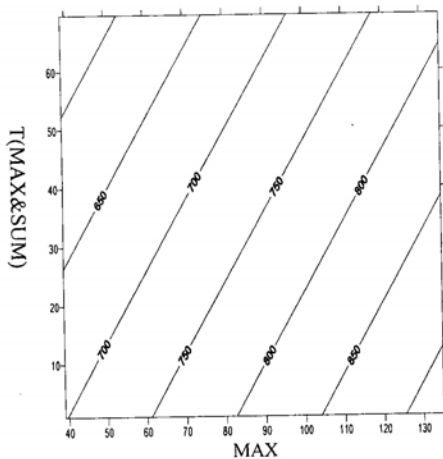
نمودار ۱: کنترولات دوره برگشت شرطی حداکثر بارش به شرط مجموع بارش ایستگاه ارمند



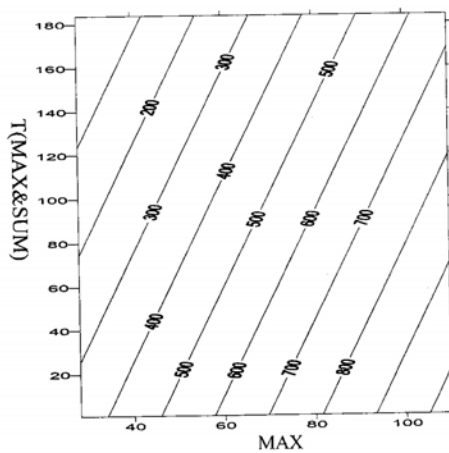
نمودار ۴: کنترولات دوره برگشت شرطی حداکثر بارش به شرط مجموع بارش ایستگاه مرغک



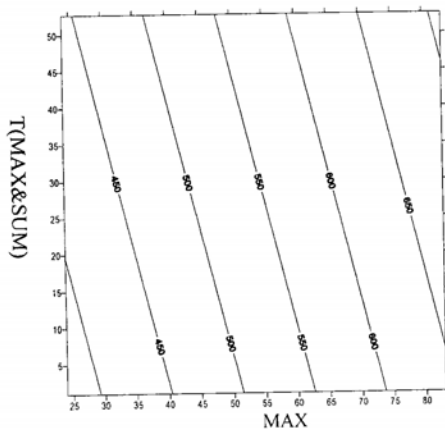
نمودار ۳: کنترولات دوره برگشت شرطی حداکثر بارش به شرط مجموع بارش ایستگاه بارز



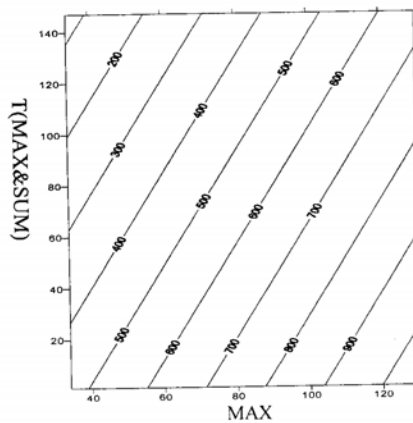
نمودار ۶: کنترپلات دوره برگشت شرطی حداکثر بارش به شرط حداکثر مجموع بارش ایستگاه پل شالو



نمودار ۵: کنترپلات دوره برگشت شرطی حداکثر بارش به شرط حداکثر مجموع بارش ایستگاه ارمند



نمودار ۸: کنترپلات دوره برگشت شرطی حداکثر بارش به شرط حداکثر مجموع بارش ایستگاه مرغک



نمودار ۷: کنترپلات دوره برگشت شرطی حداکثر بارش به شرط حداکثر مجموع بارش ایستگاه بارز

## منابع و مأخذ

- ۱- علیزاده، امین (۱۳۷۴): «اصول هیدرولوژی کاربردی». انتشارات آستان قدس رضوی.
- ۲- صدقی، حسین و عزت‌الله پرهمت (۱۳۷۹): «برآورد حداکثر بارش محتمل در حوضه‌های آبخیز بزرگ و کوهستانی». سمینار بحران آب و راهکارهای آن.
- ۳- ضیایی، حجت‌الله (۱۳۷۶): «کاربرد آمار در هیدرولوژی مهندسی». انتشارات نشر دانشگاهی.
- ۴- نجمایی، محمد (۱۳۶۹): «هیدرولوژی مهندسی». انتشارات دانشگاه علم و صنعت.
- 5- Buishand, T. A (1984) Bivariate extreme-value data and the station-year method, J. Hydrol. Vol 69.
- 6- Castillo, E (1988) Extreme Value Theory in Engineering, Academic Press Inc.
- 7- Coles. S and GandTawnJ. A (1994) Statistical Methods for Multivariate Extremes An Application to Structural Desing. Appl. Stata 43.
- 8- Cunnane, C (1987) Review of Statistical Models for Flood Frequency Estimation, in Hydrologic Frequency Modeling, (ed), by V.P.Sing, Reidel, Dordrecht, The Netherlands.
- 9- Gumbel, E. J (1958) Statistics of Extremes, Columbia University Press, New York.
- 10- Gumbel, E. J. and Mustafi, C. K (1967) Some Analytical Properties of Bivariate Extreme Distribution, J. Am. Stat. Assoc. 62.
- 11- Joe, H (1992) Bivariate Threshold Models for Extremes, J. R. Stat. Soc. B54 (I).
- 12- Oliveria, J. T. D (1982) Bivariate Extremes: Models and Statistical Decision. Tech. Report no. 14, Center for Sochastic Processes, Dept. of Statistics, University of North Carolina, Chapel Hill, North Carolina, U. S. A.
- 13- Tawn, J.A (1988) Bivariate Extreme Value Theory: Models and Estimation, Biometrika 75 (3).
- 14- Yue, S. Ouarda, T. B. M. J, Bobee, B, Legendre, P. and Bruneau, P (1999) The Gumbel Mixed Model for Flood Frequency Analysis, J. Hydrol. 226 (1-2).
- 15- Yue, S (2000) Joint Probability Distribution of Aannula Maximum Storm Peaks and amounts as represented by daily rainfalls, Hydrological Science Jurnal, 45 (2).
- 16- Yue & Rasmussen, P (2000) Multivaririate Fquency Analysis: Discussion of some useful concepts, ASCE, J. Water Resources Planing and Management.
- 17- Yue, S (2000) The Gumbel Mixed Model Applied to Storm Frequency Analaysis Water Resources Management 14.