

## مدل‌سازی موقعیت سه‌بُعدی ماهواره‌های GRACE با تلفیق تقریب چندجمله‌ای

### Lagrange و درونیابی Hermite

محمدعلی شریفی<sup>۱\*</sup> و زهره عرفانی جزی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران  
<sup>۲</sup>دانش‌آموخته کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۷/۱۰/۸، پذیرش نهایی: ۸۸/۱۲/۱۸)

#### چکیده

ژئودزی فیزیک شاخه‌ای از دانش ژئودزی است که به بررسی دقیق و موشکافانه میدان گرانی زمین و تغییرات آن می‌پردازد. در این راستا علاوه بر مطالعات خاص و دقیق روی سطح زمین، به بررسی مدار ماهواره‌های در گردش پیرامون زمین می‌پردازد و با تحلیل مدار ماهواره‌ها تغییرات میدان گرانی را به صورت دقیق تر و در مقیاس‌های جهانی به دست می‌آورد. ماهواره GRACE دومین نسل از ماهواره‌های مخصوص گرانی‌سنجی است که هدف از مأموریت آن بررسی تغییرات زمانی میدان گرانی زمین است. این ماهواره از دو کانال متفاوت به ثبت اطلاعات مدار می‌پردازد. گیرنده‌های نصب شده روی جفت ماهواره GRACE مختصات را هر ۶۰ ثانیه در سامانه مختصات جهانی WGS84 ثبت می‌کنند. سامانه فاصله‌یابی (K-band Ranging System, KBR) تغییرات موقعیت نسبی دو ماهواره و سرعت این تغییرات را هر ۵ ثانیه ضبط می‌کند. در بررسی تغییرات محلی میدان گرانی، در صورت اکتفا کردن به مشاهداتی با نرخ اندازه‌گیری موقعیت با گیرنده‌های GPS با کمبود مشاهدات مواجه خواهیم شد. تلفیق این مشاهدات سبب می‌شود تا توانایی تجزیه و تحلیل مدار ماهواره و به تبع آن میدان گرانی زمین را تا درجه و مرتبه‌های بالاتر افزایش یابد. از این رو در این مقاله سعی شده تا با تلفیق روش درونیابی لاگرانژ (Lagrange) و تقریب ارمیت (Hermite) به نحو مطلوب از مختصات سه‌بُعدی ماهواره‌های GRACE و مشاهدات اسکالر دستگاه KBR در مدل‌سازی تغییرات میدان گرانی بهره برد.

واژه‌های کلیدی: GRACE، درونیابی، تقریب ارمیت، تقریب لاگرانژ، تلفیق داده‌ها

## 3D Modeling of the GRACE Satellites Positions Using and Integration of the Hermite Polynomial Approximation and the Legendre Interpolation

Sharifi, M. A.<sup>1</sup> and Erfani Jazy, Z.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

<sup>2</sup>Graduate Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

#### Abstract

The Gravity Recovery And Climate Experiment (GRACE), twin satellites launched in March 2002, are making detailed measurements of the Earth's gravity field. It will yield discoveries about gravity and the Earth's natural systems.

Different sensors and instruments have been placed in the GRACE satellites to fulfill the primary scientific objective of the mission in mapping the Earth's gravity field and its temporal variations. The K-band inter-satellite ranging system observes the key observations of the twin satellites which continuously records the changes of the inter-satellite distance. However, the two satellites three dimensional (3D) positions are

recorded using the Global Positioning System (GPS) with lower sampling rate. Densification of the position vector with a sampling rate compatible with that of the K-band ranging system is the main purpose of this article.

Interpolation methods are the simplest way to calculate the position of the satellites between a few measured positions. The Lagrange interpolation method is the most frequently used scheme for orbit interpolation purposes. However, the accuracy of the method is not convincing for satellite gravimetry applications. On the other hand, the Hermite polynomials approximation can be used to combine a function and its derivatives for interpolation applications. It has shown its high performance wherever a function and its derivatives have been observed.

In the GRACE mission, only 3D positions are observed by the onboard GPS receivers. Moreover, the K-band system measurement can be expressed as a nonlinear function of the relative position and velocity of the two satellites. Consequently, the Hermite polynomial approximation cannot be employed in its original form because of the nonlinearity of derivatives. Herein, we propose the idea of integration of the Lagrange interpolation and Hermite polynomials for coordinate estimation. The Lagrange interpolation is used to provide approximate coordinates between the sampling points. Finally, the Hermite polynomial approximation is utilized for simultaneous adjustment of all the GPS-derived positions, K-band measurements and the approximate position derived from the Lagrange interpolation. Numerical analysis shows that the proposed method outperforms both the Lagrange interpolation and the Hermite polynomial approximation in terms of accuracy.

**Key words:** Hermite approximation, Lagrange Interpolation, GRACE satellites, 3D positions

## ۱ مقدمه

به صورت پالایش یافته توصیف کنند. همچنین قادر نیستند تغییرات کوچک ماهانه را در ارتباط با چرخه هیدرولوژیکی توضیح دهند. برای رفع این نواقص ماهواره‌های گرانی‌سنجی با به عرصه وجود گذاشتند (شریفی، ۲۰۰۴). ماهواره GRACE پس از ماهواره CHAMP دومین ماهواره قدرتمند در زمینه گرانی‌سنجی و اولین نسل از ماهواره‌های خوشه‌ای است که از یک جفت ماهواره مشابه تشکیل شده است که در یک مدار ۴۵۰ کیلومتری قرار دارند و ماهواره عقبی با فاصله ۲۲۰ کیلومتری، ماهواره جلویی را تعقیب می‌کند (شکل ۱). اطلاعات به دست آمده از این ماهواره‌ها مدل‌های گرانی را تا چندین درجه و مرتبه بهبود می‌دهد و باعث شده تا جزئیات میدان گرانی زمین چه روی دریا و چه در خشکی در مقیاس‌های وسیع‌تر و به صورت پالایش یافته تر به دست آید (جاگی و همکاران، ۲۰۰۷).

گرانی نیرویی نامرئی است که از طرف دو جرم به یکدیگر اعمال می‌شود. با وجودی که گرانی نسبت به سایر نیروهای اساسی موجود در طبیعت نظیر الکتروسیته و مغناطیس ضعیف‌تر است، تأثیرات آن چشمگیر و در همه جا قابل درک است. گرانی می‌تواند از حرکت جزرومد اقیانوس‌ها گرفته تا گسترش گیتی را تحت کنترل داشته باشد. ژئودزی فیزیک شاخه‌ای از دانش ژئودزی است که اندازه‌گیری‌های دقیقی از زمین را عملی می‌سازد تا بتوان به بررسی میدان گرانی آن پرداخت. تهیه یک مدل دقیق از واپیچش‌های میدان گرانی روی سطح زمین کاری بسیار دشوار است. امروزه داده‌های به دست آمده از ماهواره‌ها را می‌تواند برای مدل کردن میدان جاذبه زمین مورد استفاده قرار داد. این مدل‌ها نقش مهمی در به دست آوردن جزئیات میدان جاذبه زمین در مقیاس‌های بزرگ ایفا می‌کنند اما نمی‌توانند جزئیات را با دقت بیشتر و

عددی است، که به ما اجازه می‌دهد مشتقات نقاط داده شده را هم‌زمان با خود نقاط در مدل‌سازی عددی مورد استفاده قرار دهیم. در این روش از توابع چندجمله‌ای برای مدل‌سازی داده‌ها استفاده می‌شود. علاوه بر خود تابع، مشتقات آن نیز در حل مسئله شرکت می‌کنند و لذا از میان روش‌های درون‌یابی ساده این روش به خاطر در بر داشتن مشتقات تابع به صورت مشاهده در مدل‌سازی می‌تواند بهترین برازش را به داده‌ها داشته باشد (مث ورلد، math world).

هرگاه  $n+1$  مقدار تابعی مجهول در نقاط گوناگون به صورت  $(x_i, f(x_i))$  موجود باشد که در آن هیچ دو  $x_i$  یکسان نباشد، می‌توان چندجمله‌ای  $P(x)$  را به صورت زیر به منزله یک تابع تقریب کننده، به این داده‌ها برازش داد.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

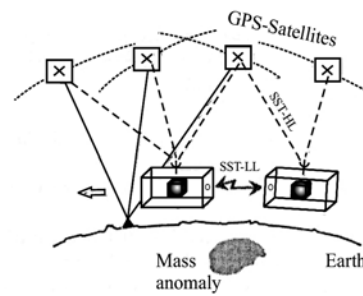
و می‌توان آن را به صورت  $P(x_i) = f(x_i) = y_i$  برای  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  بیان کرد. هرگاه مشتقات این داده‌ها نیز در نقاط مربوط موجود باشد یا به عبارتی داده‌ها به صورت  $(x_i, f(x_i), \dot{f}(x_i), \dots, f^{(m)}(x_i))$  داده شده باشند، آنگاه مشتق این چندجمله‌ای نیز به این داده‌ها برازش داده می‌شود.

$$\dot{f}(x) \approx \dot{P}(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1 \quad (2)$$

$$\ddot{f}(x) \approx \ddot{P}(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 6 a_3 x + 2 a_2 \quad (3)$$

به این ترتیب برای به دست آوردن ضرایب چندجمله‌ای مناسب که به داده‌ها برازش یابد دستگاه معادلات به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} x_i^n & x_i^{n-1} & \dots & x_i & 1 \\ n x_i^{n-1} & (n-1) x_i^{n-2} & \dots & 1 & 0 \\ n(n-1) x_i^{n-2} & (n-1)(n-2) x_i^{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n! & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ \dot{y}_i \\ \ddot{y}_i \\ \vdots \\ y_i^{(m)} \end{bmatrix}$$



شکل ۱. ماهواره‌های دوقلوی GRACE و سامانه‌های تعیین موقعیتی آن (شریفی، ۲۰۰۴).

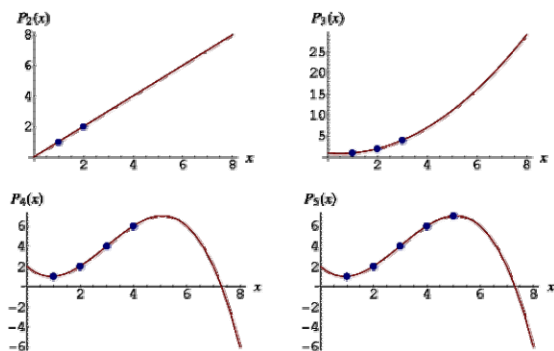
اطلاعات مدار این ماهواره از دو دستگاه اندازه‌گیری متفاوت حاصل می‌شود. موقعیت دو ماهواره از طریق سامانه تعیین موقعیت جهانی GPS با استفاده از گیرنده‌هایی که روی جفت‌ماهواره قرار دارند ثبت می‌شود که سرعت ثبت اطلاعات موقعیتی جفت‌ماهواره در آن ۶۰ ثانیه است. به علاوه سرعت و شتاب نسبی دو ماهواره با دستگاه KBR در فواصل زمانی ۵ ثانیه ثبت می‌شود. (شکل ۱). لذا هنگام پردازش هم‌زمان این اطلاعات بخش عظیمی از داده‌های مداری سرعت و شتاب برای هماهنگی با داده‌های موقعیتی کنار گذاشته می‌شود. از این‌رو هدف از این مقاله متراکم کردن داده‌های موقعیتی دو ماهواره  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$  از راه اطلاعات حاصل از دستگاه KBR سرعت  $(\dot{\rho})$  و شتاب  $(\ddot{\rho})$  است. از این‌رو ابتدا رابطه سرعت و شتاب با مختصات دکارتی ماهواره به دست می‌آید و سپس با کمک درون‌یابی لاگرانژ مختصات ۵ ثانیه‌ای ماهواره‌ها تعیین می‌شود. بعد از آن به‌طور هم‌زمان با مشاهدات سرعت و شتاب به روش تقریب ارمیت سرشکن و نتایج به دست آمده با مشاهدات شبیه‌سازی شده مقایسه می‌شود.

## ۲ مدل‌سازی ریاضی

### ۱-۲ معرفی تقریب چندجمله‌ای ارمیت

درون‌یابی به روش چندجمله‌ای ارمیت روشی بسیار نزدیک به روش درون‌یابی تقسیم تفاضلی نیوتن در آنالیز

همکاران، ۱۳۸۷).



شکل ۲. درون‌یابی نقاط با توابع چندجمله‌ای از درجات متفاوت (مث‌ورلد).

از آنجا که هدف متراکم‌سازی نقاط و تعیین مختصات ماهواره در حد فاصل نقاط مشاهداتی است لذا روش درون‌یابی لاگرانژ که روشی متداول در بحث درون‌یابی‌های مداری است، کارایی نخواهد داشت. ولی می‌توان از این روش به‌مانند یک الگوریتم تولیدکننده مختصات تقریبی در حدفاصل نقاط مشاهداتی استفاده کرد و نتایج حاصل را در حکم اطلاعات اولیه موقعیت‌های مجهول در مدل تقریب موقعیت‌های ماهواره وارد کرد.

### ۳-۲ مدل‌سازی تقریب چندجمله‌ای ارمیت در ترکیب با درون‌یابی لاگرانژ

از آنجا که مختصات ماهواره‌های GRACE هر ۶۰ ثانیه و سرعت و شتاب نسبی آنها در فواصل زمانی ۵ ثانیه ثبت می‌شود، علاقمندیم که با تلفیق مشاهداتی که نرخ نمونه‌برداری آنها متفاوت است، داده‌های ماهواره GRACE را که از راه گیرنده‌های GPS ثبت می‌شوند با تراکم بالاتر و دقت مناسبی بازیابی کنیم. برای این منظور از تقریب چندجمله‌ای ارمیت کمک می‌گیریم. در مقاله شریفی و همکاران (۱۳۸۷) با روش ارمیت فاصله نسبی بین ماهواره‌های GRACE با چندجمله‌ای‌ها مدل‌سازی شده و نتایج مناسبی به‌دست آمده است. علت استفاده از روش ارمیت نیز این است که مشاهدات، فاصله، سرعت و شتاب

با به‌دست آوردن ضرایب چندجمله‌ای می‌توان روی داده‌های موجود درون‌یابی کرد.

وجود مشاهدات مشتق تابع باعث می‌شود تغییرات ناخواسته تقریب با چندجمله‌ای‌ها که نقص اصلی این روش به‌شمار می‌رود، برطرف شود و از طرفی می‌توان با تعداد مشاهدات کمتری تقریب خوبی از تابع مجهول  $f(x)$  به‌دست آورد.

### ۲-۲ درون‌یابی لاگرانژ

چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ به ازای  $n$  نقطه مشاهداتی یک چندجمله‌ای از درجه  $n-1$  ایجاد می‌کند که به‌صورت  $P(x) = \sum_{j=1}^{n-1} P_j(x)$  است. بزرگ‌ترین درجه چندجمله‌ای  $n-1$  است که از بین  $n$  نقطه عبور  $(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \dots, (x_n, y_n = f(x_n))$  می‌شود و مطابق رابطه  $P_j(x) = y_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$  است. در حالت بسط یافته، این رابطه به‌صورت زیر خواهد بود (مث‌ورلد):

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} y_2 + \dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n \quad (4)$$

هنگامی که چندجمله‌ای‌های درون‌یاب در این روش به‌کار گرفته می‌شوند، رابطه‌ای بین داشتن یک برازش بهتر و داشتن یک تابع برازش یافته هموار وجود دارد. هرچه تعداد نقاط به‌کار رفته در درون‌یابی بیشتر باشد، درجه بالاتری از چندجمله‌ای به‌دست می‌آید (شکل ۲) و چندجمله‌ای با درجه بالاتر در بین نقاط نوسانات زیادی خواهد داشت. بنابراین یک درون‌یاب درجه بالا یک تابع پیش‌بینی‌کننده ضعیف در فاصله بین نقاط است، هرچند که دقت در بین نقاط مشاهداتی مناسب باشد (شریفی و

که در آن  $K_0 = P^{(j)T} P^{(j)}$  ماتریس حاصل از ضرب چندجمله‌ای‌ها است.

$$\dot{\rho}(t) = \frac{\Delta \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \Delta \mathbf{r}(t)}{\sqrt{\Delta \mathbf{r}(t) \cdot \Delta \mathbf{r}(t)}} = \frac{\mathbf{a}_j^T K_1 \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j^T K_1 \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_j^T K_1 \mathbf{c}_j}{\rho(t)} \quad (10)$$

که در آن  $K_1 = P^{(j)T} \dot{P}^{(j)}$  ماتریس حاصل از ضرب چندجمله‌ای‌ها و مشتقات مرتبه اول آنها است. در نهایت شتاب تغییرات فاصله نیز به صورت

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{\Delta \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \Delta \mathbf{r}(t)}{\rho(t)} + \frac{\Delta \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \Delta \dot{\mathbf{r}}(t)}{\rho(t)} - \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)^2} \Delta \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \Delta \mathbf{r}(t)$$

خواهد بود که بر حسب چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\ddot{\rho}(t) = -\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)^2} [\mathbf{a}_j^T K_2 \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j^T K_2 \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_j^T K_2 \mathbf{c}_j] + \frac{1}{\rho(t)} [\mathbf{a}_j^T (K_2 + K_3) \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j^T (K_2 + K_3) \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_j^T (K_2 + K_3) \mathbf{c}_j] \quad (11)$$

که در آن  $K_2 = P^{(j)T} \ddot{P}^{(j)}$ ,  $K_3 = \dot{P}^{(j)T} \dot{P}^{(j)}$  و  $\ddot{\rho}$ ,  $\dot{\rho}$ ,  $\rho$  به ترتیب اندازه بردارهای فاصله، سرعت و شتاب نسبی ماهواره هستند. در این معادلات چنانچه دیده می‌شود، معادلات مشاهدات خطی نیست و نیاز به خطی‌سازی دارد. لذا برای حل مسئله نیاز به مقادیر اولیه مجهولات است که وجود مقادیر بردارهای موقعیت حاصل از روش لاگرانژ باعث سهولت تعیین این مقادیر می‌شود و مسئله غیرخطی با بسط به سری تیلور خطی و مسئله به صورت تکراری حل می‌شود. شکل ۳ نشان‌دهنده مشاهدات دو اپک مشاهداتی است.

در صورتی که کلیه ضرایب مجهول در بردار مجهولات  $\mathbf{u}$  و بردار مشاهدات  $\mathbf{l}$  شامل مشاهدات  $\Delta \mathbf{r}$ ,  $\dot{\rho}$  و  $\ddot{\rho}$  باشند و ماتریس‌های ضرایب  $A_1$ ,  $A_2$  و  $A_3$  به ترتیب مشتق مشاهدات بردار موقعیت نسبی، اندازه سرعت و شتاب نسبی نسبت به بردار مجهولات باشند می‌توان بردار مجهولات، بردار مشاهدات و ماتریس ضرایب دستگاه خطی شده را به صورت زیر نمایش داد:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

نسبی هستند، و از آنجا که سرعت و شتاب مشتقات مراتب اول و دوم فاصله هستند، بهترین روش مدل‌سازی مسئله روش ارمیت است. چرا که در این روش به طور هم‌زمان یک مدل برای همه مشاهدات به دست می‌آید. حال از این روش در مسئله‌ای استفاده می‌شود که سرعت و شتاب به طور مستقیم از مشتق موقعیت دکارتی سه‌بعدی ماهواره به دست نمی‌آیند و لذا مسئله ارمیت دیگر نمی‌تواند مسئله‌ای خطی باشد. از این رو لازم است که ابتدا رابطه بین موقعیت با سرعت و شتاب به دست آید. برای این منظور ابتدا فرض می‌کنیم هریک از سه مؤلفه موقعیت نسبی  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  و  $\Delta z$  در هر بازه مثل  $Z$  بین دو نقطه مشاهداتی با یک چندجمله‌ای از مرتبه  $n$  تقریب شوند:

$$\Delta x(t) = \sum_{i=0}^n a_{ij} P_i(t) = P^{(j)} \mathbf{a}_j \quad (5)$$

$$\Delta y(t) = \sum_{i=0}^n b_{ij} P_i(t) = P^{(j)} \mathbf{b}_j \quad (6)$$

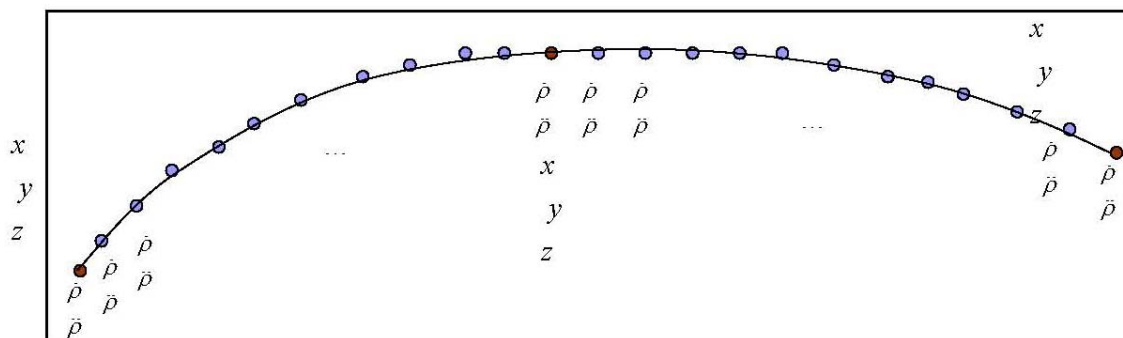
$$\Delta z(t) = \sum_{i=0}^n c_{ij} P_i(t) = P^{(j)} \mathbf{c}_j \quad (7)$$

که در آن  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  ضرایب مجهول چندجمله‌ای‌های تقریب‌کننده  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  هستند که در حالت برداری به صورت  $\mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{b}_j$  و  $\mathbf{c}_j$  نمایش داده می‌شوند. همچنین  $P^{(j)}$  چندجمله‌ای تقریب‌کننده از درجه  $j$  است.

$$\Delta \mathbf{r}_k = \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \\ \Delta z_k \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, i-1 \quad (8)$$

در صورتی که بردار اختلاف مختصات به صورت رابطه (۸) نمایش داده شود، می‌توان روابط زیر را برای فاصله، سرعت و شتاب تغییرات بین دو ماهواره بر حسب چندجمله‌ای‌ها نوشت:

$$\rho(t) = \sqrt{\Delta \mathbf{r}(t) \cdot \Delta \mathbf{r}(t)} = \sqrt{\mathbf{a}_j^T K_0 \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j^T K_0 \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_j^T K_0 \mathbf{c}_j} \quad (9)$$



شکل ۳. مدل مشاهدات مداری ماهواره GRACE در دو اپک متوالی.

زمین است. با استفاده از روش‌های عددی تولید مدار داده‌ها شبیه‌سازی می‌شوند. به این صورت که با استفاده از نقطه‌ی اولیه‌ی مدار را به صورت عددی در میدان گرانی حاصل از ضرایب ژئوپتانسیلی EGM96 تا درجه و مرتبه ۳۰۰ تولید می‌کنند. خروجی تولید مدار به صورت عددی عبارت است از بردارهای موقعیت و سرعت در سامانه لختی؛ سپس با استفاده از روابط و تبدیل‌های لازم، بردار شتاب را نیز در سامانه لختی به دست می‌آورند. داده‌های ماهواره‌های GRACE1 و GRACE2 شامل زمان برحسب تاریخ ژولین و بردارهای موقعیت و سرعت و شتاب در سامانه لختی است. قالب داده‌ها در فایل مربوط به صورت زیر است:

time x y z  $\dot{x}$   $\dot{y}$   $\dot{z}$   $\ddot{x}$   $\ddot{y}$   $\ddot{z}$

از این داده‌ها که عاری از خطا هستند استفاده و مشاهدات را با روش ارمیت و لاگرانژ مدوله می‌کنیم تا امکان بررسی صحت روش مورد استفاده در مدل کردن و متراکم ساختن مشاهدات وجود داشته باشد.

### ۳-۲ حل مسئله به روش ارمیت

مسئله ارمیت را در مورد داده‌های شبیه‌سازی شده بررسی می‌کنیم. در این حالت سرعت ثبت  $x, y, z$  هر ۳۰ ثانیه و  $\dot{\rho}, \ddot{\rho}$  هر ۵ ثانیه است. با توجه به درجه چندجمله‌ای تعداد مجهولات که همان ضرایب چندجمله‌ای است،

که در آن  $I_1, I_2, I_3$  به ترتیب شامل مشاهدات  $\dot{\rho}, \Delta \mathbf{r}$  و  $\ddot{\rho}$  هستند و  $u_1, u_2, u_3$  شامل مجهولات  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  است.

در این مسئله معادلات شرط جهت پیوستگی چندجمله‌ای‌های اپک‌های گوناگون و نیز هموار بودن آنها به کار می‌روند. این شروط باعث می‌شوند که در نقاط گرهی گسستگی و شکستگی ایجاد نشود و چندجمله‌ای‌های اپک‌های ۲۴۵ متوالی به‌طور هموار در کنار یکدیگر قرار گیرند. لذا علاوه بر معادلات مشاهدات معادلاتی که به صورت قید تابعی‌اند بایستی به دستگاه معادلات افزوده شوند. ماتریس ساختار این معادلات با نام C وارد مسئله می‌شود.

در نهایت با اعمال شرط کمینه شدن مجموع مربعات خطاهای تصادفی مجهولات از رابطه (۱۳) قابل حصول است [۱].

$$\begin{bmatrix} A^T P A & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P \delta L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

### ۳ تجزیه و تحلیل عددی

#### ۳-۱ داده‌های شبیه‌سازی شده

شبیه‌سازی داده‌های ماهواره‌ها به صورتی است که گویا ماهواره در فضایی در حال گردش به دور زمین است و تنها نیروی مؤثر در این فضا، نیروی حاصل از میدان گرانی

درجه دو تا شش) حل کرد.

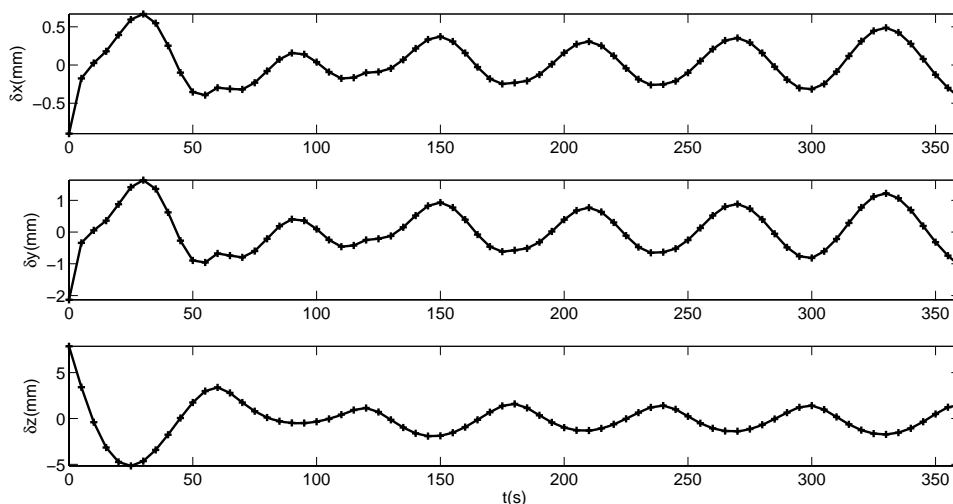
در فایل داده‌های شبیه‌سازی شده، همه مشاهدات با نرخ ۵ ثانیه‌اند. بنابراین پس از حل مسئله می‌توان مقادیر درون‌یابی شده برای فواصل ۵ ثانیه‌ای را که با تقریب چندجمله‌ای ارمیت به‌دست آمده‌اند با مقادیر نظیر در فایل داده‌های شبیه‌سازی شده مقایسه کرد و میزان دقت روش ارمیت را در این روش به‌دست آورد.

### ۳-۳ نتایج درون‌یابی ارمیت

پس از سرشکنی، نتایج به‌دست آمده از چندجمله‌ای‌های ارمیت در فواصل ۵ ثانیه‌ای با داده‌های موجود در فایل شبیه‌سازی شده مقایسه و تفاوت این مقادیر در شکل ۴ و جدول ۱ نشان داده شده است.

مشخص می‌شود. برای محاسبه مقادیر اولیه با توجه به تعداد مجهولات به همان تعداد معادله در نظر می‌گیریم و معادلات را حل می‌کنیم. مثلاً اگر چندجمله‌ای درجه سه باشد ۱۲ مجهول وجود دارد که برای حل آنها ۱۲ معادله نیاز است. از این میان ۱۰ معادله از  $\ddot{\rho}, \dot{\rho}, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  های نقاط گرهی ابتدا و انتهای اپک حاصل می‌شود و دو معادله نیز از  $\ddot{\rho}, \dot{\rho}$  یکی از نقاط میانی تشکیل می‌شود و با حل معادلات مقادیر اولیه به‌دست می‌آیند. بنابراین برای داده‌های شبیه‌سازی شده، تا سقف ۲۰ مجهول که یک چندجمله‌ای درجه ۶ است را می‌توان مورد استفاده قرار داد.

بعد از به‌دست آوردن مقادیر اولیه می‌توان ماتریس‌های ساختار را برای  $\ddot{\rho}, \dot{\rho}, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  تشکیل داده و مسئله تقریب را برای چندجمله‌ای‌های متفاوت (از



شکل ۴. تفاوت مقادیر به‌دست آمده از درون‌یابی ارمیت با نقاط موجود در فایل داده‌های شبیه‌سازی شده، چندجمله‌ای درجه ۶.

جدول ۱. بیشینه قدر مطلق تفاوت بین مقادیر درون‌یابی شده با روش ارمیت و مقادیر موجود در فایل داده‌های شبیه‌سازی شده.

6	5	4	3	2	درجه چندجمله‌ای
$2 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^{-4}$	$1.6 \times 10^{-2}$	0.57	$\Delta x(m)$
$5.3 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-3}$	$2.4 \times 10^{-3}$	$9 \times 10^{-3}$	$\Delta y(m)$
$2 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$	$1.65 \times 10^{-2}$	$7.3 \times 10^{-2}$	$\Delta z(m)$

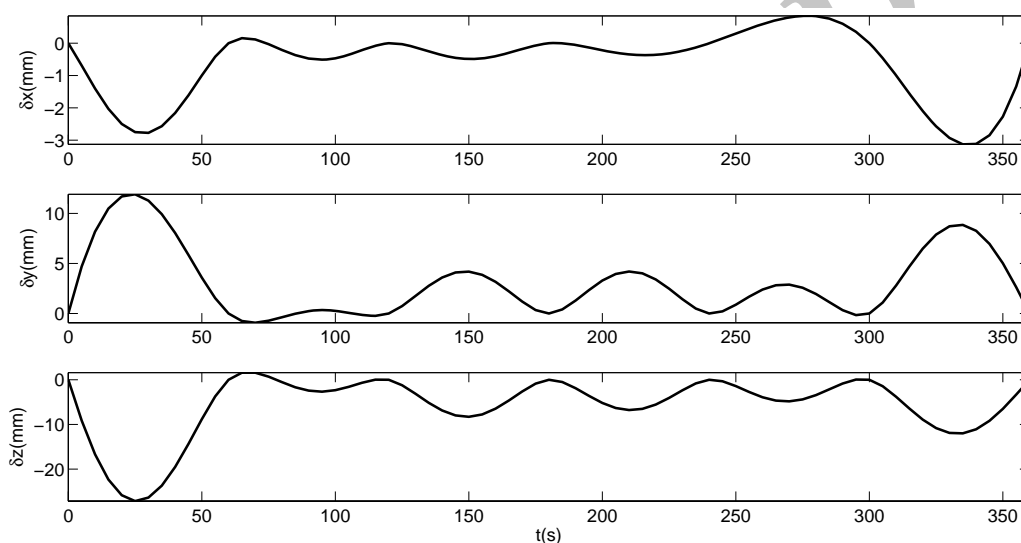
## ۴-۳ درون‌یابی لاگرانژ

اگر با درون‌یابی لاگرانژ مشاهدات کم‌تراکم تر  $Z, Y, X$  را با تراکم ۵ ثانیه‌ای درون‌یابی کنیم، و نتایج درون‌یابی چندجمله‌ای‌های گوناگون را با داده‌های فایل شبیه‌سازی شده مورد مقایسه قرار دهیم، مشاهده می‌کنیم که درون‌یابی لاگرانژ تا دهم میلی‌متر با مقادیر موجود در فایل داده‌ها منطبق است. نتایج این مقایسه در شکل ۵ و جدول ۲ آمده است.

## ۵-۳ تلفیق درون‌یابی ارمیت و درون‌یابی لاگرانژ و

## حل یکجا

قبل از ورود به مراحل سرشکنی کمترین مربعات، می‌توان فواصل  $Z, Y, X$  بین نقاط گرهی را با روش لاگرانژ برای فواصل زمانی ۵ ثانیه‌ای پر ساخت و سپس همه  $Z, Y, X$  ها را با  $\dot{p}, \ddot{p}$  ها سرشکن کرد. مشاهدات سرشکن شده را با داده‌های فایل شبیه‌سازی شده مقایسه می‌کنیم. نتایج به‌دست آمده در شکل ۶ و جدول ۳ آورده شده است.



شکل ۵. تفاوت مقادیر به‌دست آمده از درون‌یابی لاگرانژ با نقاط موجود در فایل داده‌های شبیه‌سازی شده، چندجمله‌ای درجه ۶

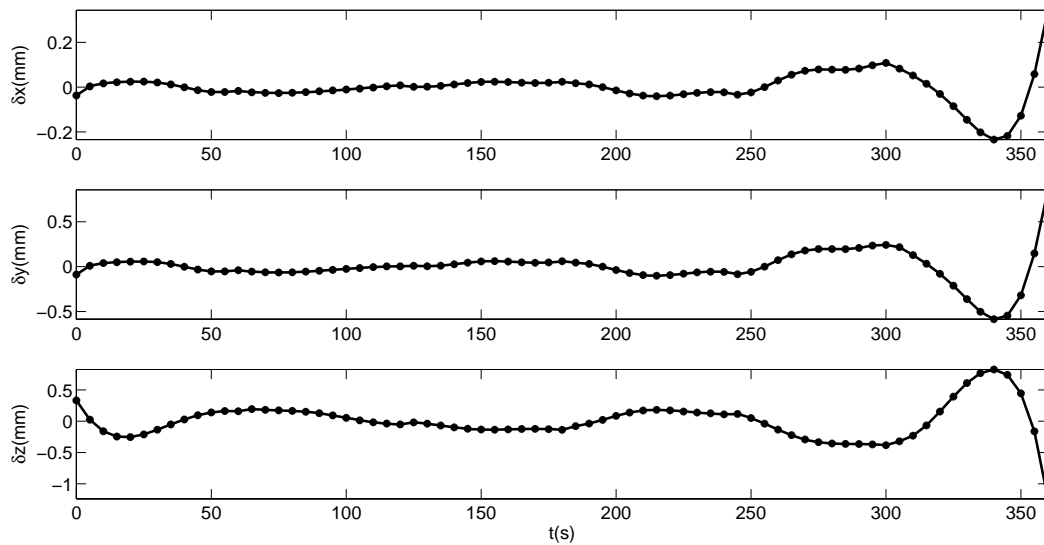
جدول ۲. بیشینه قدرمطلق تفاوت بین مقادیر درون‌یابی شده با روش لاگرانژ و فایل داده‌های شبیه‌سازی شده.

6	5	4	3	2	درجه چندجمله‌ای
$5.9 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-3}$	$1.6 \times 10^{-4}$	$6.1 \times 10^{-3}$	0.57	$\Delta x(m)$
$2 \times 10^{-4}$	$1.4 \times 10^{-4}$	$1.9 \times 10^{-4}$	$3.1 \times 10^{-4}$	$3.1 \times 10^{-3}$	$\Delta y(m)$
$4.7 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	$1.35 \times 10^{-2}$	0.357	$\Delta z(m)$

جدول ۳. بیشینه قدر مطلق تفاوت مقادیر به‌دست آمده از تلفیق روش لاگرانژ و ارمیت با نقاط موجود در فایل داده‌های شبیه‌سازی شده.

6	5	4	3	2	درجه چندجمله‌ای
$2 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-3}$	0.05	$\Delta x(m)$
$4 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-5}$	$4 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-3}$	$\Delta y(m)$
$2 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	0.01	0.02	$\Delta z(m)$

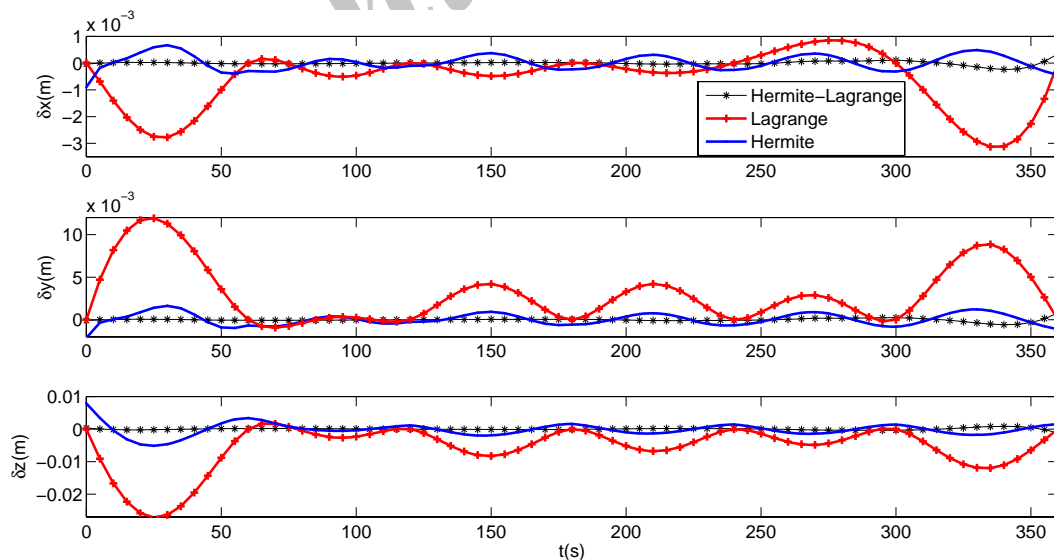




شکل ۶. تفاوت مقادیر به‌دست آمده از تلفیق روش لاگرانژ و ارمیت با نقاط موجود در فایل داده‌های شبیه‌سازی شده، چندجمله‌ای درجه ۶.

بالا رفتن دقت کار می‌شود. حال اگر نتایج جدول ۳ را با نتایج جدول ۱ مقایسه کنیم به راحتی در می‌یابیم که استفاده از نتایج حاصل از روش لاگرانژ، بهبود قابل توجهی در نتایج حاصل ایجاد کرده است. شکل ۷ نمایش هم‌زمان شکل‌های ۴ و ۵ و ۶ است که نشان می‌دهد در روش تلفیقی نتایج بهتری به‌دست می‌آید.

مقایسه جدول‌های ۳ و ۲ نشان می‌دهد که تلفیق درون‌یابی لاگرانژ با تقریب ارمیت موجب به‌دست آمدن مدل دقیق‌تر برای مشاهدات می‌شود و چون در این روش تلفیق مشاهدات دو سامانه مشاهداتی متفاوت نیز صورت می‌پذیرد، سرشکنی هم‌زمان نتایج بهتری به‌دست می‌دهد. به‌علاوه معادلات شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری نیز باعث



شکل ۷. نمودارهای مربوط به تفاوت مقادیر به‌دست آمده از تلفیق روش لاگرانژ و ارمیت، روش ارمیت و روش لاگرانژ با نقاط موجود در فایل داده‌های شبیه‌سازی شده، چندجمله‌ای درجه ۶.

## ۴ نتیجه گیری

روش درون‌یابی ارمیت به‌عنوان روشی کارآمد می‌توان در تقریب داده‌های مشاهداتی شامل یک مجموعه اطلاعات به همراه مشتقات همان اطلاعات مورد استفاده قرار داد. لذا در مسئله‌ای که در این مقاله مطرح شد، به دلیل نبود مشتقات مستقیم  $Z, Y, X$  و غیرخطی بودن رابطه موجود بین مشاهدات و مشتقاتشان، امکان حل مستقیم مسئله به روش ارمیت نیست تا بتوان برای به‌دست آوردن مدل مناسب مشاهداتی که نیاز به درون‌یابی دارند تا متراکم‌تر شوند استفاده کرد. با توجه به اینکه روابط بین مشاهدات غیرخطی است و نیاز به داشتن مقادیر اولیه و حل تکراری مسئله هست، برای حل این مشکل می‌توان روش تقریب ارمیت را با روش درون‌یابی لاگرانژ تلفیق کرد.

درون‌یابی لاگرانژ قادر به تلفیق مشاهدات گوناگون نیست و به هر گروه مشاهداتی به صورت جدا، یک چندجمله‌ای برازش می‌دهد. این روش برای چندجمله‌ای‌های درجه پائین قابل اطمینان‌تر است، چون خطر نوسان چندجمله‌ای فواصل بین نقاط را تهدید نمی‌کند. مهم‌ترین نقص درون‌یابی لاگرانژ نبود کنترل تابع از نظر مشتقات آن است. این مشکل در تلفیق با روش تقریب ارمیت از بین می‌رود. چون در این روش حضور مشتقات در روند حل مسئله به‌منزله عامل کنترل‌کننده نوسانات تابعی عمل می‌کند.

نتایج حاصل از درون‌یابی لاگرانژ در مورد مشاهدات  $\Delta z, \Delta y, \Delta x$  در فواصل ۵ ثانیه‌ای در حکم مشاهده در تقریب ارمیت استفاده شد و در نهایت نتایج روش ارمیت بهبود قابل توجهی یافت. علاوه‌براین، روش ارمیت نیز با سرشکن کردن هم‌زمان مشاهدات نتایج حاصل از لاگرانژ را بهبود می‌بخشد و باقی‌مانده‌های کوچک‌تری را به‌دست می‌دهد.

## منابع

- شریفی، م. ع.، عرفانی جزئی، ز. و امیری سیمکویی، ع. ر.، ۱۳۸۷، متراکم‌سازی داده‌های موقعیتی سیستم ماهواره GRACE با کمک تلفیق پارامترهای موقعیت، سرعت و شتاب از طریق درون‌یابی Hermite. *مجله فیزیک زمین و فضا*، جلد ۳۴، شماره ۴، ۷۹-۶۷.
- شریفی، م. ع.، عرفانی جزئی، ز. و امیری سیمکویی، ع. ر.، تعیین مؤلفه‌های واریناس بهینه مشاهدات ماهواره‌های GRACE. پذیرفته شده در *مجله فیزیک زمین و فضا*.
- Bettadpur, B., 2007a, Gravity Recovery and Climate Experiment Level-2 gravity field product user handbook. Rep, GRACE 327-734, Cent. For Space Res., Austin, Tex.
- Berrut, J. P. and Trefethen, L. N., 2004, "Barycentric Lagrange Interpolation" in *SIAM. Review Volume 46* (3), pages 501-517. DOI:10.1137/S0036144502417715.
- Jäggi, A., Hugentobler, U., Bock, H. and Beutler, G., 2007, Precise orbit determination for GRACE using undifferenced or doubly differenced GPS data. *Advances in Space Research*, Volume 39, Issue 10, p. 1612-1619.
- Krakiwsky, E. J., 1975, A Synthesis of Recent Advances in the Method of Least Squares. Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Canada.
- Rummel, R., Gelderen, M. van, Koop, R., Schrama, E., Sanso, F., Brovelli, M. and Migliacci, F., 1993, Spherical Harmonic Analysis of satellite Gradiometry. Netherlands Geodetic Commission, New Series, 39, Delf.
- Sharifi, M. A., 2004, satellite gradiometry using a satellite pare. Ph. D. thesis, University of Stuttgart.
- Tapley, B. D. and Reigber, C., 2006, GRACE mission status and future plans. paper presented at GRACE Science Working Team Meeting, NASA, San Francisco, Calif., 8-9 Dec.
- <http://mathworld.wolfram.com/LagrangeInterpolatingPolynomial.html>