مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۷، شماره ۱، ۱۳۹۰، صفحهٔ ۳۳- ۴۹

استفاده از الگوریتم MSAA در حل دستگاه معادلات مربوط به بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE

عبدالرضا صفری[1*]، محمدعلی شریفی[2] و بابک امجدی‌پرور[3]

[1] استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران
[2] استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران
[3] دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۸/۲/۱۴ ، پذیرش نهایی: ۸۸/۱۲/۱۸)

چکیده

ساختار LL-SST (Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking) اولین‌بار با پرتاب ماهواره GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) در ۲۰۰۲ اجرایی شد. برای رسیدن به دقت و حساسیت بیشتر در بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی می‌توان ساختار LL-SST را با ساختار HL-SST (High-Low Satellite-to-Satellite Tracking)که قبلاً در ماهواره CHAMP (CHAllenging Minisatellite Payload) استفاده شده ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE (Line Of Sight(LOS) acceleration difference)، ساده‌ترین کمیت مشاهداتی است که در آن از مشاهدات هر دو ساختار HL و LL استفاده شده است. در این مقاله در ابتدا روابط مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی با استفاده از تابعک مشاهداتی شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE بیان شده است و دستگاه معادلات مربوطه برای برآورد ضرایب بنا شده است. بیشینه درجه و مرتبه قابل بازیابی با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE، ۱۲۰ است. به بیان دیگر تعداد مجهولاتی که باید در این دستگاه برآورد شوند ۱۴۶۴۱ مجهول است. ازآنجاکه حل دستگاه معادلاتی با این تعداد مجهول در یک دستگاه رایانه‌ای شخصی و با نرم‌افزار مطلب (MATLAB) امکان‌پذیر نیست، در این مقاله الگوریتم تکراری MSAA (Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm) که از جمله روش‌های تجزیه حوزه (Domain decomposition) است، برای حل دستگاه معادلات نرمال با ابعاد بزرگ عرضه شده و در حل دستگاه معادلات مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده دینامیکی ماهواره GRACE به اجرا گذاشته شده است. نتایج حاصل، حاکی از کارایی این روش از نظر دقت و سرعت همگرایی در حل دستگاه معادلات بزرگ مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی است.

واژه‌های کلیدی: بازیابی میدان جاذبه، روش MSAA، Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking

Using the Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm(MSAA) for Solving the Large Linear System of Equations Related to Global Gravity Field Recovery up to Degree and Order 120

Safari, A.[1], Sharifi, M. A.[2] and Amjadiparvar, B.[3]

[1] *Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran*
[2] *Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran*
[3] *M. Sc. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran*

(Received: 4 May 2009 , Accepted: 9 March 2010)

نگارنده رابط: تلفن: ۰۲۱-۸۸۰۰۸۸۳۷ دورنگار: ۰۲۱-۸۸۰۰۸۸۳۷ E-mail: asafari@ut.ac.ir

Abstract

The GRACE mission has substantiated the Low–Low Satellite-to-Satellite Tracking (LL-SST) concept. The LL-SST configuration can be combined with the previously realized high–low SST concept in the CHAMP mission to provide a much higher accuracy. The line of sight (LOS) acceleration difference between the GRACE satellite pair is the most frequently used observable for mapping the global gravity field of the Earth in terms of spherical harmonic coefficients.

The following relationship is valid for each evaluation point:

$$\langle \Delta\ddot{r}, \mathbf{e} \rangle = \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\|\Delta\dot{r}\|^2}{\rho} \tag{1}$$

The GRACE ranging system provides inter-satellite range ρ and its first time derivative, $\dot{\rho}$, as the LL-SST observations and the GPS receivers mounted on the GRACE satellites provide the position vectors as the HL-SST mode observations. The inter-satellite range acceleration, $\ddot{\rho}$, and $\Delta\dot{r}$ are obtained by numerical differentiation of $\dot{\rho}$ and Δr, respectively.

In the absence of non-gravitational forces, the left-hand side of Eq. (1) can be considered as the LOS gravitational acceleration differences, $\Delta\Gamma^{LOS}$

$$\Delta\Gamma^{LOS} := \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\|\Delta\dot{r}\|^2}{\rho} \tag{2}$$

A sequence of observations with M evaluation points sets up a system with M linear equations. In this paper, the corresponding linear system of equations has been set up for spherical harmonic up to degree and order 120. The total number of unknowns, u, is

$$u = 1 + 3 + \cdots + 2(N_{\max} + 1) - 1 = (N_{\max} + 1)^2 = 121^2 = 14641 \tag{3}$$

Such a linear equation system can be solved with iterative solvers or direct solvers. However, the runtime of direct methods or that of iterative solvers without a suitable preconditioner increases tremendously. This is the reason why we need a more sophisticated method to solve the linear system of problems with a large number of unknowns.

Multiplicative variant of the Schwarsz alternating algorithm is a domain decomposition method, which allows it to split the normal matrix of the system into several smaller overlaped submatrices. In each iteration step the multiplicative variant of the Schwarz alternating algorithm solves linear systems with the matrices obtained from the splitting successively. It reduces both runtime and memory requirements drastically. An MSAA example with two submatrices is shown in Fig. 1

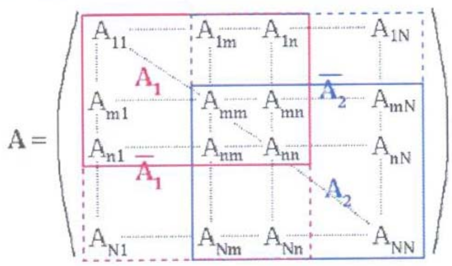


Figure 1. MSAA example with two submatrices.

This method dates back to H. A. Achwarsz' work, published in 1980, and has been investigated by many authors since then. In this paper we propose the Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm (MSAA) for solving the large linear system of gravity field recovery. The proposed algorithm has been applied in a close-loop simulation to the International Association of Geodesy (IAG)-simulated data of the GRACE mission. The achieved results indicate the validity and efficiency of the proposed algorithm in solving the linear system of equations from accuracy and runtime points of view.

Key words: Gravity field recovery, Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm, Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking

۱ مقدمه

تعیین دقیق میدان گرانی زمین برای همهٔ علوم وابسته به زمین مفید خواهد بود. در میان این علوم، ژئودزی به برآورد دقیقی از میدان گرانی زمین در مقیاس محلی (برای کاربردهای مهندسی) و جهانی (برای کاربردهای تعیین مدار) نیاز دارد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). رفتار محلی میدان گرانی زمین با استفاده از روش‌های گرانی‌سنجی زمینی (Terrestrial gravimetry) و هوایی (گرانی‌سنجی با هواپیما (Airborne gravimetry)) قابل بیان است. اگرچه با استفاده از این روش‌ها می‌توان به میدان گرانی زمین با قدرت تفکیک مکانی (Spatial resolution) زیادی رسید، اما این روش‌ها پوشش همگنی را در کل جهان حتی در مناطق خشکی ایجاد نمی‌کنند. در نتیجه تعیین میدان گرانی زمین در مقیاس جهانی با استفاده از مشاهدات ماهواره‌های مصنوعی، به دلیل پوشش همگن مشاهدات آن در کل جهان، ارجح خواهد بود. به بیان دیگر مشاهدات تقریباً همگن و همچنین پوشش جهانی آن‌ها، مزیت‌های اصلی روش‌های ماهواره‌ای برای تعیین میدان گرانی زمین در مقیاس جهانی در مقایسه با روش‌های زمینی و هوایی می‌باشند (کلر و شریفی، ۲۰۰۵).

روش‌های ماهواره‌ای جهت تعیین میدان گرانی زمین، پس از پرتاب مأموریت‌های اختصاصی گرانی‌سنجی (Dedicated gravity field missions) حیات دوباره‌ای یافته‌اند. با پرتاب ماهواره‌های CHAMP و GRACE که به ترتیب در سال ۲۰۰۰ و ۲۰۰۲ پرتاب شده‌اند، روش SST به واقعیت پیوست. با توجه به ساختار ماهواره‌های مورد استفاده در روش SST دو مفهوم زیر را خواهیم داشت (شریفی، ۲۰۰۴):

- **HL-SST**:

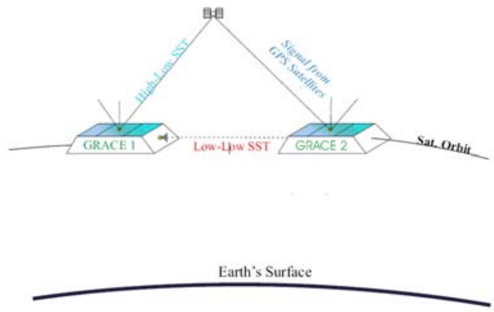
در این فن یک ماهوارهٔ کم‌ارتفاع (LEO (Low Earth Orbiter)) به‌منزلهٔ حسگر میدان جاذبه زمین با یک یا چند گروه از ماهواره‌های مرتفع (HEO (High Earth Orbiter)) درحکم نقاط کنترل ثابت که در حال گردش به دور زمین هستند، ردیابی می‌شوند. این مفهوم اولین‌بار با پرتاب ماهواره CHAMP به واقعیت پیوست. با استفاده از این روش اطلاعات بسیار ارزشمندی برای بازیابی طول موج‌های بلند و متوسط میدان جاذبه زمین (ضرایب هماهنگ‌های کروی با درجه و مرتبه کوچک‌تر از ۷۰) قابل دستیابی است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵).

- **LL-SST**:

در این فن دو ماهواره کم‌ارتفاع با یک یا چند گروه از ماهواره‌های مرتفع (ماهواره‌هایی با ارتفاع زیاد درنقش نقاط کنترل ثابت که در حال گردش به دور زمین‌اند)، ردیابی می‌شوند. این دو ماهواره کم‌ارتفاع شبیه به هم‌اند و در یک مدار مشابه به دنبال هم به دور زمین می‌گردند. فاصله بین این دو ماهواره حدود چندصد کیلومتر است و فاصله بین این دو (ρ)و تغییرات این فاصله $(\dot{\rho})$ با حسگرهایی اندازه‌گیری می‌شود. این دو ماهواره مشابه،

نقش یک حسگر را در میدان جاذبه زمین ایفا می‌کنند. این مفهوم اولین‌بار با پرتاب ماهواره GRACE محقق شد. با استفاده از مشاهدات حاصل از این روش، طول موج‌های کوتاه‌تری از میدان جاذبه زمین (ضرایب هماهنگ‌های کروی با درجه و مرتبه کوچک‌تر از ۲۰۰) در مقایسه با روش HL-SST قابل بازیابی است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵).

در شکل زیر دو مفهوم HL-SST و LL-SST به‌صورت نمادین به نمایش گذاشته شده‌است.



شکل ۱. ساختارهای HL-SST و LL-SST.

نکته قابل ذکر اینکه طول موج‌های بسیار کوتاه‌تری از میدان جاذبه زمین (ضرایب هماهنگ‌های کروی با درجه و مرتبه بزرگ‌تر از ۲۰۰) با استفاده از روش SGG (Satellite Gravity Gradiometry) با ماهواره GOCE (Gravity Field and Steady_State Ocean) که در اوایل ۲۰۰۹ به فضا پرتاب شد) قابل بازیابی است (رومل و همکاران، ۲۰۰۲).

ماهواره GRACE شامل دو ماهواره شبیه به هم است که در یک مدار مشابه به دنبال هم با فاصله‌ای در حدود 220 ± 50 KM در حال گردش به دور زمین‌اند (رومل و همکاران، ۲۰۰۲). فاصله نسبی بین این دو ماهواره (ρ) و تغییرات این فاصله $(\dot{\rho})$ به‌صورت پیوسته با دقت زیادی از سامانهٔ KBR (K-band Ranging System)که در ماهواره‌ها تعبیه شده‌است، اندازه‌گیری می‌شود.

علاوه بر مشاهدات KBR، هرکدام از ماهواره‌های GRACE مجهز به یک شتاب‌سنج سه‌محوری (Three-axis accelerometer) در مرکز جرم خود هستند که شتاب‌های غیر جاذبی وارد بر ماهواره را اندازه‌گیری می‌کنند. سری زمانی حاصل از مشاهدات سامانهٔ تعیین موقعیت جهانی و مشاهدات KBR اطلاعات بسیار ارزشمندی از موقعیت، سرعت و شتاب نسبی دو ماهواره به‌دست می‌دهد. در نتیجه برای رسیدن به دقت و حساسیت بیشتر در بازسازی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی، با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE می‌توان مشاهدات روش HL-SST را با مشاهدات روش LL-SST ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE ساده‌ترین کمیت مشاهداتی است که در آن از مشاهدات هر دو ساختار HL و LL استفاده شده است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). از این نوع مشاهده ماهواره GRACE به طور گسترده‌ای برای بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی استفاده شده است که می توان به تحقیقات صورت گرفته از سوی گارسیا (۲۰۰۲)، هاجلا (۱۹۷۴)، هان و همکاران (۲۰۰۳)، کلر و شریفی (۲۰۰۵)، رومل (۱۹۸۰) اشاره کرد. علاوه‌براین مشاهده ترکیبی، با استفاده از مشاهده $\dot{\rho}$ دستگاه KBR و به روش انتگرال انرژی می‌توان پتانسیل واپیچشی را به‌دست آورد که در این زمینه می توان به تحقیقات صورت گرفته از سوی هان (۲۰۰۳)، هان و همکاران (۲۰۰۳) و رومل (۲۰۰۳) اشاره کرد. همچنین ساختار هندسی ماهواره GRACE می‌تواند درحکم یک گرادیومتر یک‌بُعدی بسیار بزرگ با طول بازوی 250 km در نظر گرفته شود. دقت اندازه‌گیری‌های گرادیومتر ماهواره GRACE نسبت معکوس با طول بازوی گرادیومتر یا همان فاصله نسبی میان دو ماهواره GRACE دارد. جزئیات این روش را می‌توانید در کلر و شریفی (۲۰۰۵)، رومل (۲۰۰۳)، شریفی (۲۰۰۴)، شریفی (۲۰۰۶) بیابید.

هدف این مقاله استفاده از مشاهده تفاوت شتاب در

راستای خط دید دو ماهواره GRACE برای بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی است. بیشینه درجه و مرتبه ضرایب ژئوپتانسیلی قابل بازیابی با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE، ۱۲۰ است (شریفی، ۲۰۰۴). به بیان دیگر تعداد مجهولاتی که باید در این دستگاه معادلات برآورد شود، ۱۴۶۴۱ است. مشکلی که در این راستا با آن مواجه خواهیم بود، حل دستگاه معادلات خطی بزرگ مربوطه در یک دستگاه رایانهٔ شخصی است. ماتریس نرمال مربعی با ابعاد ۱۴۶۴۱ را نمی‌توان به‌صورت مستقیم در یک رایانهٔ شخصی معکوس کرد، در نتیجه برای حل یک دستگاه معادلات بزرگ در چنین رایانه‌ای، ناچار به استفاده از الگوریتم‌های ریاضی خواهیم بود. در این مقاله الگوریتمی با عنوان الگوریتم MSAA برای حل دستگاه معادلات بزرگ عرضه خواهد شد و کارایی این الگوریتم در حل دستگاه معادلات مربوط، مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت. بنابراین برای رسیدن به اهداف مقاله، ابتدا در قسمت۲ روابط ریاضی مربوط به برآورد ضرایب ژئوپتانسیلی با استفاده از تابعک مشاهداتی شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE و همچنین نحوه تشکیل دستگاه معادلات خطی مربوط بیان خواهد شد. در قسمت۳ روش MSAA برای حل دستگاه معادلات با ابعاد بزرگ بیان خواهد شد. در قسمت۴ نتایج عددی را بیان خواهیم کرد، و در پایان، قسمت ۵ به بیان خلاصه‌ای از دستاوردها و نتیجه‌گیری اختصاص داده شده است.

۲ روابط ریاضی

اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE، تابعی از فاصله نسبی دو ماهواره یعنی ρ و تغییرات زمانی آن $\dot{\rho}$ است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). سامانهٔ KBR مورد استفاده در ماهواره‌های GRACE مشاهدات ρ و $\dot{\rho}$ را به‌منزلهٔ مشاهدات LL-SST با بسامد نمونه‌برداری $10\ Hz$ تأمین می‌کنند. ضمناً گیرنده سامانهٔ تعیین موقعیت جهانی دو بسامدی Blackjack که روی جفت ماهواره GRACE نصب شده‌است، بردار موقعیت ماهواره را به عنوان مشاهدات HL-SST با بسامد نمونه‌برداری کمتری نسبت به سامانهٔ KBR یعنی با بسامد $0.1\ Hz$ تأمین می‌کند (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). مشاهدات هر دو روش با استفاده از رابطه زیر به یکدیگر ارتباط پیدا می‌کنند (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\langle \ddot{r}_2-\ddot{r}_1\ ,\ r_2-r_1\rangle=\dot{\rho}^2+\rho\ddot{\rho}-\langle \dot{r}_2-\dot{r}_1\ ,\ \dot{r}_2-\dot{r}_1\rangle \quad (۱)$$

که در رابطه بالا $\dot{r}_1$ و $\dot{r}_2$ بردار سرعت دو ماهواره هستند و با استفاده از روش‌های مشتق‌گیری عددی از مشاهدات بردار موقعیت ماهواره‌ها به‌دست می‌آیند. تغییرات $\dot{\rho}$ میان دو ماهواره GRACE یعنی $\ddot{\rho}$ نیز با استفاده از روش‌های مشتق‌گیری عددی از مشاهدات $\dot{\rho}$ به‌دست می‌آید (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). طرف چپ معادله (۱) عبارت‌است از حاصل‌ضرب داخلی اختلاف بردار موقعیت دو ماهواره در اختلاف بردار شتاب آنها. با تقسیم دو طرف رابطه (۱) به ρ به رابطه اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE خواهیم رسید (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\langle \Delta\ddot{r},\mathbf{e}\rangle=\ddot{\rho}+\frac{\dot{\rho}^2}{\rho}-\frac{\|\Delta\dot{r}\|^2}{\rho} \quad (۲)$$

در رابطه بالا $\mathbf{e}$ بردار یکه در راستای خط دید دو ماهواره است. در غیاب نیروهای غیر جاذبی، طرف چپ معادله بالا را می‌توانیم درحکم اختلاف شتاب جاذبه در راستای خط دید دو ماهواره GRACE در نظر بگیریم (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\Delta\Gamma^{LOS}:=\ddot{\rho}+\frac{\dot{\rho}^2}{\rho}-\frac{\|\Delta\dot{r}\|^2}{\rho} \quad (۳)$$

طرف چپ معادله (۳) تابعی از مشتقات جزئی پتانسیل جاذبه و بردار یکه در راستای خط دید دو ماهواره است. بردار یکه $\mathbf{e}$ از مشاهدات سامانهٔ تعیین موقعیت جهانی در

دستگاه مختصات دکارتی زمین‌ثابت به‌دست می‌آید، درحالی‌که معمولاً از بسط پتانسیل جاذبه به سری هماهنگ‌های کروی برحسب مختصات کروی (r,ϕ,λ) استفاده می‌شود. برای به‌دست آوردن اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره، مشتقات جزئی بسط پتانسیل جاذبه نسبت به مؤلفه‌های مختصاتی دستگاه مختصات کروی به‌دست می‌آید. بنابراین این امکان وجود دارد که (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

مشتقات جزئی پتانسیل جاذبه برحسب مختصات دکارتی با استفاده از قانون مشتق‌گیری زنجیره‌ای محاسبه شود.

بردار یکه در راستای خط دید دو ماهواره GRACE برحسب مؤلفه‌های مختصاتی دکارتی کروی بازنویسی شود که این کار از طریق انتقال از دستگاه مختصات زمین‌ثابت به دستگاه مختصات محلی کروی امکان‌پذیر است.

اگرچه نتایج هر دو روش یکسان است، اما به خاطر سادگی در این مقاله در محاسبات از روش دوم استفاده خواهیم کرد. برای به‌دست آوردن بردار **e** در دستگاه مختصات کروی، ابتدا دستگاه مختصات کروی محلی (LSCS(Local Spherical Coordinate System)) ماهواره با خصوصیات زیر تعریف می‌شود (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

مرکز دستگاه مختصات منطبق بر موقعیت ماهواره

e_r بردار یکه در راستای شعاعی نسبت به مرکز زمین

e_ϕ بردار یکه در راستای شمال

e_λ بردار یکه به سمت شرق که یک دستگاه مختصات دست چپی را بنا کند.

بردار **e** در دستگاه مختصات زمین‌ثابت با استفاده از رابطه زیر به دستگاه مختصات کروی محلی ماهواره تبدیل می‌شود (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\mathbf{e}_{r\phi\lambda} = \mathbf{J}\,\mathbf{e}_{xyz} \qquad (۴)$$

که در رابطه بالا **J** ماتریس انتقال و به شکل صریح زیر است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \\ -\sin\phi\cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

پتانسیل جاذبه در نقطه‌ای دلخواه به مختصات (r,ϕ,λ) در فضای خارج زمین ($r \ge R_{earth}$) برحسب هماهنگ‌های کروی نرمال‌شده به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$V(r,\phi,\lambda) = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}\left(\bar{c}_{nm}\cos m\lambda + \bar{s}_{nm}\sin m\lambda\right)\bar{P}_{nm}(\sin\phi) \qquad (۶)$$

در رابطه بالا GM حاصل‌ضرب ثابت جهانی جاذبه در جرم زمین، R شعاع میانگین زمین و $\bar{P}_{nm}$ توابع نرمال‌شده لژاندر است. رابطه (۶) پتانسیل جاذبه را به‌منزلهٔ تابعی از مؤلفه‌های مختصاتی منحنی‌الخط یعنی r، ϕو λ بیان می‌کند. به‌طور مشابه می‌توان شتاب جاذبه را برحسب مؤلفه‌های r، ϕو λ به‌صورت زیر بیان کرد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\begin{aligned}\Gamma(r,\phi,\lambda) = \frac{GM}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} & -(n+1) \\ & \times\left(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda\right)\bar{P}_{nm}(\sin\phi)\mathbf{e}_r \\ & +\left(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda\right)\bar{P}'_{nm}(\sin\phi)\mathbf{e}_\phi \\ & +\sec\phi\left(-m\bar{C}_{nm}\sin m\lambda + m\bar{S}_{nm}\cos m\lambda\right)\bar{P}_{nm}(\sin\phi)\mathbf{e}_\lambda\end{aligned} \qquad (۷)$$

رابطه بالا بیان‌کنندهٔ شتاب جاذبه برحسب مختصات کروی در دستگاه مختصات کروی محلی ماهواره است. درنتیجه بردار شتاب جاذبه هرکدام از ماهواره‌های GRACE را می‌توان در دستگاه مختصات کروی محلی مربوط به خود، به‌صورت زیر نوشت (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &:= \Gamma(r_1,\phi_1,\lambda_1) = \Gamma_{11}e_{r_1} + \Gamma_{12}e_{\phi_1} + \Gamma_{13}e_{\lambda_1} \\ \Gamma_2 &:= \Gamma(r_2,\phi_2,\lambda_2) = \Gamma_{21}e_{r_2} + \Gamma_{22}e_{\phi_2} + \Gamma_{23}e_{\lambda_2}\end{aligned} \qquad (۸)$$

برای به‌دست آوردن اختلاف شتاب جاذبه در راستای خط دید دو ماهواره (معادله (۳)) هرکدام از بردارهای

رابطه (۸) روی بردار یکه راستای خط دید دو ماهواره مربوط به دستگاه مختصات کروی محلی مربوط به خود تصویر می‌شود (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\Delta\Gamma^{LOS} = \left\langle \Gamma(r_2, \phi_2, \lambda_2), e_2 \right\rangle - \left\langle \Gamma(r_1, \phi_1, \lambda_1), e_1 \right\rangle = e_2^T \Gamma_2 - e_1^T \Gamma_1 \qquad (۹)$$

در رابطه بالا $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ به‌ترتیب بردار یکه در راستای خط اتصال دو ماهواره در دستگاه کروی محلی ماهواره شماره ۱و۲ هستند. رابطه (۹) یک معادله مشاهده خطی برحسب ضرایب ژئوپتانسیلی نرمال‌شده $\bar{C}_{nm}$ و $\bar{S}_{nm}$ است.

با توجه به رابطه (۹) اگر یک سری زمانی با P نقطه مشاهداتی داشته باشیم، می‌توانیم به‌ازای هر نقطه مشاهداتی، یک معادله مشاهده خطی بنویسیم. در عمل در بسط مربوط به رابطه (۷) ، حد بالای بسط یعنی ∞ باید با بیشینه درجه و مرتبه قابل بازیابی با استفاده از مشاهدات ماهواره جایگزین شود. در نتیجه تعداد کل مجهولات u به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$u = 1 + 3 + \cdots + 2(N_{\max} + 1) - 1 = (N_{\max} + 1)^2 \qquad (۱۰)$$

اگر از دیدگاه هندسی به دستگاه معادلات خود نگاه کنیم، دستگاه معادلات خطی بنا شده قابل حل خواهد بود اگر تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد یعنی $(P \geq u)$. باوجوداین با توجه به نظریهٔ نمونه‌برداری شَنون Shannon، بسامد نمونه‌برداری باید حداقل دو برابر بیشینه بسامد اندازه‌گیری باشد. زمانی که بسامد بیشتر از حد بسامد نایکویست (Nyquist frequency) (نصف بسامد نمونه‌برداری) باشد، تداخل سیگنال (Aliasing) رخ خواهد داد. بنابراین، ارضا کردن شرط نظریهٔ نمونه‌برداری برای بازیابی کامل طیف میدان جاذبه بسیار مهم و حیاتی خواهدبود (سانسو، ۱۹۹۰ و کلر و شریفی، ۲۰۰۵). برای بازیابی ضرایب هماهنگ کروی تا درجه و مرتبه $N_{\max}$، بسامد نمونه‌برداری را باید با افزایش طول روزهای مشاهداتی ماهواره افزایش داد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵).

مشکل دیگری که منجر به فقدان بازیابی کامل و درست طیف میدان جاذبه با استفاده از روش کمترین مربعات خواهد شد، جایگزینی حد بالای بسط یعنی ∞ با $N_{\max}$ است. در واقع این جایگزینی باعث ایجاد نوع دیگری از تداخل سیگنال در برآورد ضرایب می‌شود (سانسو، ۱۹۹۰). این موضوع در قسمت نتایج عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت.

اکنون برای برای بنا کردن دستگاه معادلات مربوط و به‌منظور برآورد ضرایب، فقط نیاز به روابطی برای محاسبه توابع وابسته نرمال‌شده لژاندر و مشتقات مرتبه اول آن نسبت به شناسه ϕ است. برای محاسبه این توابع، روش‌های تکراری گوناگونی وجود دارد که در این مقاله به‌منظور عملی ساختن محاسبات عددی از روابط پیش‌گفته در (شریفی ۲۰۰۴) استفاده شده است. این روابط بازگشتی در جدول(۱) آورده شده است.

۳ الگوریتم MSAA جهت حل دستگاه معادلات نرمال خطی با ابعاد بزرگ

هدف این قسمت معرفی الگوریتمی برای حل دستگاه معادلات نرمال خطی با ابعاد بزرگ است. معادله خطی زیر با ماتریس ضرایب معین مثبت متقارن را در نظر می‌گیریم (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

$$\mathbf{A}x = b \qquad (۱۱)$$

که در معادله بالا داریم:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \ \mathbf{A}^T = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}y.y > 0, \ y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \ x, b \in \mathbb{R}^N \qquad (۱۲)$$

چنین معادله خطی را می‌توان با استفاده از روش‌های مستقیم و یا روش‌های تکراری حل کرد. در استفاده از روش‌های مستقیم در حل دستگاه معادلات به شکل معادله (۱۱) اگر N خیلی بزرگ باشد، (برای مثال $N \geq 10000$) با مشکل حافظه در رایانه‌های شخصی مواجه خواهیم بود.

برای حل این مشکل ناچار به استفاده از روش های تکراری در حل دستگاه مربوط خواهیم شد. زمان حل این دستگاه خطی، با استفاده از روش‌های تکراری معمول (برای مثال روش مزدوج (CG (Conjugate Gradient)، بدون استفاده از یک پیش‌شرط (Preconditioner) مناسب شدیداً افزایش می‌یابد. بنابراین برای حل دستگاه معادلات با ابعاد بزرگ، نیاز به یک الگوریتم پیچیده‌تر ریاضی خواهیم داشت (فریدن و میشل، ۲۰۰۴). یکی از این روش‌ها، روش MSAA است. این روش از جمله روش‌های تجزیه حوزه است که در آن ماتریس **A** به زیرماتریس‌های کوچک‌تری که با یکدیگر هم‌پوشانی دارند، تجزیه می‌شود. روش MSAA یک روش تکراری برای حل دستگاه معادلات نرمال خطی است که در آن در هر تکرار حل دستگاه، یک دستگاه معادلات خطی کوچک‌تر که از تجزیه دستگاه معادلات اصلی به‌دست آمده، حل می‌شود که این کار، هم زمان حل دستگاه را کاهش می‌دهد و هم از مقدار حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی ماتریس‌ها می‌کاهد (فریدن ومیشل، ۲۰۰۴).

این الگوریتم را اولین‌بار شوارتس (Schwarsz) در ۱۸۹۰ عرضه کرد و به چاپ رسانید و پس از آن نیز بسیاری از نویسندگان در مورد این روش، تحقیق کردند و مطالبی به چاپ رساندند. با پیدایش رایانه‌های پیشرفته و سامانهٔ رایانه‌های موازی (Parallel compurets) در ۱۹۸۵، روش شوارتس مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفت.

جدول ۱. روابط بازگشتی برای محاسبه توابع وابسته نرمال‌شده لژاندر.

- *Diagonal recursion* $n \geq 2$

$$\bar{P}_{n,n} = f_1 \cos\phi \bar{P}_{n-1,n-1}$$
$$\bar{P}'_{n,n} = f_1 \left[\cos\phi \bar{P}'_{n-1,n-1} - \sin\phi \bar{P}_{n-1,n-1} \right]$$

- *Horizontal recursion – first step* $n \geq 1$

$$\bar{P}_{n,n-1} = f_2 \sin\phi \bar{P}_{n-1,n-1}$$
$$\bar{P}'_{n,n-1} = f_2 \left[\cos\phi \bar{P}_{n-1,n-1} + \sin\phi \bar{P}'_{n-1,n-1} \right]$$

- *Horizontal recursion – next step*

$$\bar{P}_{n,m} = f_3 \left[f_4 \sin\phi \bar{P}_{n-1,m} - f_5 \bar{P}_{n-2,m} \right]$$
$$\bar{P}'_{n,m} = f_3 \left[f_4 \sin\phi \bar{P}'_{n-1,m} + f_4 \cos\phi \bar{P}_{n-1,m} - f_5 \bar{P}'_{n-2,m} \right]$$

where

$$f_1 = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}}$$
$$f_2 = \sqrt{2n+1}$$
$$f_3 = \sqrt{\frac{2n+1}{(n-m)(n+m)}}$$
$$f_4 = \sqrt{2n-1}$$
$$f_5 = \sqrt{\frac{(n+m-1)(n-m-1)}{2n-3}}$$

Initial values

$$\bar{P}_{0,0} = 1 \qquad \bar{P}'_{0,0} = 0 \qquad \bar{P}_{1,1} = \sqrt{3}\cos\phi \qquad \bar{P}'_{1,1} = -\sqrt{3}\sin\phi$$

در واقع اگر بخواهیم به‌طورکلی صحبت کنیم، دو روش متفاوت شوارتس وجود دارد: (۱) روش ضربی (Multiplicative) (روش مورد استفاده در این مقاله) و (۲) روش جمعی (Additive) که این روش را می‌توان در سامانه‌های رایانه‌ای موازی به‌کار برد و معمولاً سریع‌تر است. برای اطلاعات بیشتر در مورد روش‌های شوارتس، به لیونز (۱۹۸۸،۱۹۸۹و۱۹۹۹) مراجعه شود. در سال‌های اخیر نیز توجه ویژه‌ای به رابطه بین روش‌های شوارتس و روش‌های تکراری دیگر نظیر Multispliting، روش Multigrid و روش PCG (Preconditioned Conjugate Gradient) شده است. برای اطلاعات بیشتر در این مورد نیز به گروتن (۱۹۷۹)، گریبل و اسوالد (۱۹۹۵) و هسه (۲۰۰۳) مراجعه شود.

حل معادله خطی (۱۱) با استفاده از روش MSAA بر پایه دو خاصیت زیر استوار است (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):

۱- هر ماتریس معین مثبت متقارن، یک ماتریس گرام (Gram matrix) است.

۲- اثبات همگرایی روش MSAA بر پایه فرمول‌بندی آن براساس تصویرگرهای قائم (Orthogonal projector) صورت می‌گیرد.

با توجه به فرضیات ، ماتریس $\mathbf{A}=\left(A_{i,j}\right)_{i,j=1,\dots,N}$ در معادله خطی (۱۱)، یک ماتریس معین مثبت و متقارن است. با توجه به قضیه عامل‌گیری خولسکی Cholesky factorization (هامرلین و هافمن، ۱۹۹۲) یک ماتریس پایین مثلثی معکوس‌پذیر **L** با درایه‌های قطری مثبت وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathbf{A}=\mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathbf{T}} \tag{۱۳}$$

سطرهای ماتریس **L** را به‌صورت $v_1,\dots,v_N$ نشان می‌دهیم. بنابراین با توجه به رابطه (۱۳) داریم:

$$A_{i,j}=v_i\ .\ v_j \quad , \quad i,j=1,\dots,N \tag{۱۴}$$

در نتیجه ماتریس **A** یک ماتریس گرام با پایه $\{v_1,\dots,v_N\}$ از فضای $\mathbb{R}^N$ است و جواب $x=\left(x_1,\dots,x_N\right)^T$ دستگاه خطی (۱۱) در واقع جواب مسئله تصویر قائم زیر است:

بردار $x=\left(x_1,\dots,x_N\right)^T$ را طوری بیابید که $f\in\mathbb{R}^N$ که به‌صورت $i=1,\dots,N \quad , \quad f\ .\ v_i=b_i$ است، دارای نمایشی به‌صورت زیر باشد:

$$f=\sum_{i=1}^{N}x_i v_i \tag{۱۵}$$

در واقع حل این مسئله نیازمند حل دستگاه خطی زیر است:

$$\sum_{i=1}^{N}x_i\ (v_i\ .\ v_j)=f\ .\ v_j=b_j \quad , \quad j=1,\dots,N \tag{۱۶}$$

که معادله بالا همان دستگاه خطی (۱۱) است. عملگر تصویر قائم مربوط به رابطه(۱۵)، یک عملگر یکه است: ما به دنبال بیان $f=Id_{\mathbb{R}^N}f$ با توجه به پایه $\{v_1,\dots,v_N\}$ هستیم. اکنون پایه $\{v_1,\dots,v_N\}$ را به چندین زیرمجموعه کوچک‌تر $\Xi_r^{N_r}=\left\{v_1^r,\dots,v_{N_r}^1\right\}\subset\{v_1,\dots,v_N\},\ r=1,\dots,M$ که با یکدیگر هم‌پوشانی داشته باشند، تقسیم می‌کنیم به‌صورتی که:

$$\bigcup_{r=1}^{M}\Xi_r^{N_r}=\{v_1,\dots,v_N\} \tag{۱۷}$$

تصویر قائم از $\mathbb{R}^N$ به $span(\Xi_r^{N_r})$ را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$P_r:\mathbb{R}^N\to span\left\{v_1^r,\dots,v_{N_r}^1\right\}, \quad g\mapsto P_r g \tag{۱۸}$$

یعنی $P_r=P_r\circ P_r$ و $P_r v\ .\ w=v\ .\ P_r w$ به ازای هر $v,w\in\mathbb{R}^N$. برای محاسبه $P_r g$، فرض می‌کنیم که $g\ .\ v_i \ ,\ i=1,\dots,N$ مشخص است. ما می‌خواهیم بردار ضرایب $y=\left(y_1,\dots,y_{N_r}\right)$ معادله زیر را محاسبه کنیم:

$$P_r g=\sum_{i=1}^{N_r}y_i v_i^r \tag{۱۹}$$

با ضرب داخلی طرفین به‌صورت متوالی با $v_1^r,...,v_{N_r}^r$ به یک دستگاه خطی به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$\sum_{i=1}^{N_r} y_i(v_i^r.v_j^r) = P_r g.v_j^r = g.P_r v_j^r \ , \ j=1,...,N_r \qquad (۲۰)$$

ماتریس $\mathbf{A}_r = (v_i^r.v_j^r)_{i,j=1,...,N_r}$ یک زیرماتریس از ماتریس $\mathbf{A}$ در معادله خطی (۱۱) است.

ما اکنون الگوریتم MSAA را برای حل مسئله تصویر قائم $Id_{\mathbb{R}^N} f = f$ براساس تصویرگرهای قائم P_r بیان می‌کنیم. این الگوریتم در جدول (۲) آورده شده‌است. سپس همگرایی این الگوریتم را اثبات و درنهایت این الگوریتم را به ماتریسی برای حل دستگاه خطی (۱۱) تبدیل می‌کنیم. این الگوریتم ماتریسی، دستگاه خطی (۱۱) را با حل متناوب دستگاه‌های خطی به شکل (۲۰)، حل خواهدکرد.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که دنباله تکرارهای $\{s_{nM}^f\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ در الگوریتم پیش‌گفته در جدول (۲)، وقتی $n \to \infty$ به سمت f میل می‌کند. قبل از اثبات این موضوع، قضیه زیر را که در فهم الگوریتم ذکرشده در جدول شماره(۲) بسیار مفید است، بیان خواهیم کرد:

قضیه ۱: اگر همهٔ نمادها و فرضیات همانند الگوریتم جدول شماره(۲) باشد و همچنین تصویر قائم به فضای $\left(span\{v_1^r,...,v_{N_r}^r\}\right)^\perp$ را که در آن $r \in \{1,...,M\}$ به‌صورت $Q_r : \mathbb{R}^N \to \left(span\{v_1^r,...,v_{N_r}^r\}\right)^\perp$ نمایش دهیم، یعنی $Q_r = Id - P_r$ ، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برای کلیه $n \in \mathbb{N}_0 \ , \ r \in \{1,...,M\}$ برقرار خواهدبود:

$$s_{nM+r}^f = \sum_{j=1}^{r} P_j\left(f_{nM+(j-1)}\right) + \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{M} P_j\left(f_{lM+(j-1)}\right)$$

$$f_{nM+r} = f - s_{nM+r}^f$$

$$s_{nM+r}^f = s_{nM+(r-1)}^f + P_r\left(f - s_{nM+(r-1)}^f\right)$$

$$f_{nM+r} = (Q_r...Q_1)(Q_M...Q_1)^n f$$

$$s_{nM+r}^f = f - (Q_r...Q_1)(Q_M...Q_1)^n f$$

ویژگی‌های شماره ۲،۱و۴ به‌صورت مستقیم اثبات می‌شود درحالی‌که ویژگی‌های ۳ و ۵ نتایج ساده‌ای از ویژگی‌های ۲،۱و۴ هستند. اثبات این ویژگی‌ها را می‌توان برای مثال در هسه (۲۰۰۳) یافت.

با توجه به ویژگی‌های شماره ۱ و ۳ متوجه می‌شویم که الگوریتم پیش‌گفته در جدول (۲) دارای ساختار استاندارد یک الگوریتم تکراری است: با مقدار $f_0 = f \ , s_0^f = 0$ شروع می‌کنیم و $s_1^f = P_1(f)$ را محاسبه می‌کنیم که در آن P_1 تقریبی از $Id_{\mathbb{R}^N}$ است. سپس مقدار باقی‌مانده $f_1 = f - P_1(f)$ را محاسبه می‌کنیم. پس از آن $P_2(f_1) = P_2(f - s_1^f)$ را محاسبه می‌کنیم که در این زمان P_2 درحکم تقریبی از $Id_{\mathbb{R}^N}$ به‌کار می‌رود. سپس تکرار جدید $s_2^f = s_1^f + P_2(f_1)$ و باقی‌مانده جدید $f_2 = f - s_2^f = f_1 - P_2(f_1)$ را محاسبه می‌کنیم. این روند با استفاده از $P_3,...,P_M$ درحکم تقریب‌هایی از $Id_{\mathbb{R}^N}$ به‌صورت پیاپی تکرار می‌شود. درنهایت اولین تکرار الگوریتم کامل می‌شود و ما دوباره با استفاده از P_1 و با ساختاری مشابه قبل شروع می‌کنیم:

$$s_{nM+r}^f = s_{nM+(r-1)}^f + P_r\left(f - s_{nM+(r-1)}^f\right) \qquad (۲۱)$$

جدول۲. الگوریتم MSAA.

$$\begin{array}{l}
Set \ \ f_0 = f \in \mathbb{R}^N \ \ and \ \ s_0^f = 0 \\
for \ \ n = 0,1,2,... \ \ do \\
\qquad for \ \ r = 1,...,M \ \ do \\
\qquad\qquad calculate \ \ s_{nM+r}^f = s_{nM+(r-1)}^f + P_r\left(f_{nM+(r-1)}\right) \\
\qquad\qquad update \ \ f_{nM+r} = f_{nM+(r-1)} - P_r\left(f_{nM+(r-1)}\right) \\
until \ \ \dfrac{\left|\left(f_{(n+1)M}.v_1,...,f_{(n+1)M}.v_N\right)^T\right|}{\left|\left(f.v_1,...,f.v_N\right)^T\right|} \le \varepsilon
\end{array}$$

ویژگی‌های ۴ و ۵ قضیه ۱ برای اثبات همگرایی الگوریتم ذکرشده در جدول (۲) مهم خواهد بود.

اکنون در زیر قضیه مربوط به همگرایی الگوریتم ذکرشده در جدول (۲) را بیان می‌کنیم و اثبات آن را نیز خواهیم آورد:

قضیه ۲: اگر همهٔ نمادها و فرضیات همانند الگوریتم جدول (۲) و قضیه ۱ باشد، دنباله $\{s^f_{nM}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ مربوط به تکرارهای بردار $f\in\mathbb{R}^N$ به بردار f همگرا می‌شود.

اثبات: با توجه به قضیه ۱ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|f-s^f_{nM}\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\left(Q_M\ldots Q_1\right)^n f\right|=\left|Pf\right| \quad (۲۲)$$

که در عبارت بالا P تصویرگر قائم به‌صورت $P:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ به روی $\bigcap_{r=1}^{M}\left(im(Q_r)\right)$ است. اما داریم:

$$\begin{aligned}\bigcap_{r=1}^{M}\left(im(Q_r)\right)&=\bigcap_{r=1}^{M}\left(span\left\{v_1^r,\ldots,v_{N_r}^r\right\}\right)^{\perp}\\&=\left(\sum_{r=1}^{M}span\left\{v_1^r,\ldots,v_{N_r}^r\right\}\right)^{\perp}\\&=\left(\mathbb{R}^N\right)^{\perp}=\{0\}\end{aligned} \quad (۲۳)$$

در نتیجه $P=0$ و $\lim_{n\to\infty}\left|f-s^f_{nM}\right|=0$. تساوی ذکرشده در عبارت بالا از عبارت زیر نتیجه می‌شود:

اگر H یک فضای هیلبرت با تعریف ضرب داخلی $(.,.)_H$ باشد و همچنین M زیرفضای بسته به‌صورت $v_1,\ldots,v_M$ از فضای H داشته باشیم، آن‌گاه:

$$\left(\sum_{i=1}^{M}v_i\right)^{\perp}=\bigcap_{i=1}^{M}v_i^{\perp} \quad (۲۴)$$

که در عبارت بالا داریم:

$$\sum_{i=1}^{M}v_i=span\left\{\bigcup_{i=1}^{M}v_i\right\} \quad (۲۵)$$

بنابراین تاکنون همگرایی الگوریتم ذکرشده در جدول شماره (۲) به اثبات رسیده است. در زیر الگوریتم جدول (۲) را با استفاده از روابط (۱۶) و (۲۰) به حالت ماتریسی تبدیل می‌کنیم. برای این منظور نیاز داریم که عملگرهای R_r و I_r مربوط به زیرفضای $\mathbb{R}^{N_r}$ یعنی مربوط به رابطه (۲۰) را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$R_r:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N_r},\ w\mapsto R_r(w)=\left(\left(R_r(w)\right)_1,\ldots,\left(R_r(w)\right)_{N_r}\right)^T \quad (۲۶)$$
$$\left(R_r(w)\right)_i=w_j\ \ for\ the\ index\ \ j\in\{1,\ldots,N\}\ \ with\ \ v_i^r=v_j$$

$$I_r:\mathbb{R}^{N_r}\to\mathbb{R}^N\ ,\ z\mapsto I_r(z)=\left(\left(I_r(z)\right)_1,\ldots,\left(I_r(z)\right)_N\right)^T \quad (۲۷)$$
$$\left(I_r(z)\right)_i=\begin{cases}z_j & if\ \ there\ \ exists\ \ j\in\{1,\ldots,N\}\ \ with\ \ v_j^r=v_i\\0 & otherwise\end{cases}$$

در جدول شماره (۳) روابط ماتریسی الگوریتم MSAA آورده شده است.

تنها موضوع باقی‌مانده این است که نشان دهیم الگوریتم ذکرشده در جدول (۳) پس از تکرارهای لازم تا رسیدن به شرط خروج از حلقه تکرار، جواب مسئله اولیه ما یعنی $\mathbf{A}x=b$ را به‌دست می‌دهد، درحالی‌که $f\in\mathbb{R}^N$ در الگوریتم جدول (۳) در عبارت زیر صدق می‌کند:

$$f\ .\ v_j=b_j\ ,\ j=1,\ldots,N \quad (۲۸)$$

و همچنین $\mathbf{A}$ عبارت‌است از:

$$\mathbf{A}=\left(v_i\ .\ v_j\right)_{i,j=1,\ldots,N} \quad (۲۹)$$

قبل از اثبات این موضوع لازم به ذکر است که در کلیه مراحل محاسبات مربوط به الگوریتم جدول (۳)، نیازی به محاسبه $v_1,\ldots,v_N\in\mathbb{R}^N$ نداریم یعنی در واقع نیازی به تجزیه خولسکی ماتریس $\mathbf{A}$ وجود ندارد. ماتریس‌های $\mathbf{A}_r$ در واقع زیرماتریس‌هایی از ماتریس $\mathbf{A}$ هستند و در مرحله روزآمدسازی (update) نیز که نیاز به عملیات ضرب بردار در ماتریس $\left(v_k\ .\ v_i^r\right)_{\substack{k=1,\ldots,N\\ i=1,\ldots,N_r}}$ وجود دارد، ماتریس مربوط نیز زیر ماتریسی از ماتریس $\mathbf{A}$ است.

در زیر قضیه مربوط به همگرایی جواب الگوریتم جدول (۳) به جواب دستگاه خطی $\mathbf{A}x=b$ و اثبات آن آورده شده است:

جدول۳. روابط ماتریسی الگوریتم MSAA برای حل دستگاه معادلات نرمال با ابعاد بزرگ.

$$
\begin{array}{l}
\textit{Define the matrices } \mathbf{A}_r = \left(v_i^r v_j^r\right)_{i,j=1,\dots,N_r},\ r=1,\dots,M \\
\textit{set } \tilde{f}_0 = \left(f\cdot v_1,\dots,f\cdot v_N\right)^T,\ a_0=\left(0,\dots,0\right)^T \in \mathbb{R}^N,\ \textit{where } f\in\mathbb{R}^N \\
\textit{for } n=0,1,2\dots \textit{ do} \\
\quad \textit{for } r=1,\dots,M \textit{ do} \\
\qquad \textit{solve } \mathbf{A}_r d = R_r\left(\tilde{f}_{nM+(r-1)}\right),\ d=\left(d_1,\dots,d_{N_r}\right)^T \in \mathbb{R}^{N_r} \\
\qquad \textit{update } a_{nM+r} = a_{nM+(r-1)} + I_r\left(d\right) \\
\qquad \textit{update } \tilde{f}_{nM+r} = \tilde{f}_{nM+(r-1)} - \left(\left(\sum_{i=1}^{N_r} d_i v_i^r \cdot v_k\right)_{k=1,\dots,N}\right)^T \\
\textit{until } \dfrac{\left|\tilde{f}_{(n+1)M}\right|}{\left|\tilde{f}_0\right|} \le \varepsilon \\
\textit{compute } s^f_{(n+1)M} = \sum_{i=1}^{M} \left(a_{(n+1)M}\right)_i v_i
\end{array}
$$

قضیه ۳: اگر همهٔ نمادها و فرضیات همانند الگوریتم جدول شماره(۳) باشد، و $\mathbf{A}=\left(v_i \cdot v_j\right)_{i,j=1,\dots,N}$ و $b=\left(f\cdot v_1,\dots,f\cdot v_N\right)^T$ باشد آن‌گاه دنباله $\{a_{nM}\}_{n\in\mathbb{N}_0}\subset\mathbb{R}^N$ در الگوریتم مربوطه به جواب $x\in\mathbb{R}^N$ مربوط به دستگاه خطی $\mathbf{A}x=b$ همگرا می‌شود.

اثبات: با توجه به قضیه ۲ و همچنین روابط (۱۶) و (۲۰) می‌دانیم که:

$$s^f_{nM}=\sum_{i=1}^{N}\left(a_n M\right)_i \cdot v_i \tag{۳۰}$$

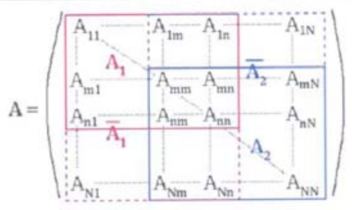
به سمت $f=\sum_{i=1}^{N} x_i v_i$ که x جواب دستگاه خطی $\mathbf{A}x=b$ است، همگرا می‌شود. با توجه به اینکه $\{v_1,\dots,v_N\}$ یک پایه $\mathbb{R}^N$ است، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{nM}\right)_i = x_i \quad \textit{for} \quad i=1,\dots,N \tag{۳۱}$$

و در نتیجه همگرایی الگوریتم جدول (۳) به جواب دستگاه خطی $\mathbf{A}x=b$ به اثبات می‌رسد.

درنهایت برای روشن شدن موضوع، یک نمونه از تجزیه ماتریس $\mathbf{A}$ در روش MSAA به دو زیرماتریس کوچک‌تر در شکل شماره (۲) به نمایش گذاشته شده و نحوه محاسبات مربوط به دو تکرار اول این الگوریتم در جدول شماره (۴) آورده شده است. عملگرهای R_r و I_r در این حالت به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{array}{l}
R_1:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^n\ ,\ R_2:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{n-m} \\
I_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^N\ ,\ I_2:\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^N
\end{array} \tag{۳۲}
$$



شکل۲. نمونه‌ای از تجزیه ماتریس نرمال به دو زیر ماتریس در الگوریتم MSAA. (فریدن و میشل، ۲۰۰٤).

جدول ٤. محاسبات مربوط به دو تکرار اول الگوریتم MSAA با توجه به شکل شماره (۲).

$$Initialization:\ r_0 = b\ ,\ a_0 = 0 = (0,...,0)^T$$

$$First\ step:$$
$$\bullet\ solve\ A_1 d = R_1(\tilde{f}_0)\ ,\ set\ \ a_1 = a_0 + I_1(d);\ \tilde{f}_1 = -\overline{A}_1 d$$
$$\bullet\ solve\ A_2 d = R_2(\tilde{f}_1)\ ,\ set\ \ a_2 = a_1 + I_2(d);\ \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 - \overline{A}_2 d$$

$$Second\ step:$$
$$\bullet\ solve\ A_1 d = R_1(\tilde{f}_2)\ ,\ set\ \ a_3 = a_2 + I_1(d);\ \tilde{f}_3 = -\overline{A}_1 d$$
$$\bullet\ solve\ A_2 d = R_2(\tilde{f}_3)\ ,\ set\ \ a_4 = a_3 + I_2(d);\ \tilde{f}_4 = \tilde{f}_3 - \overline{A}_2 d$$

۴ نتایج عددی

در این قسمت برای محاسبات از داده‌های شبیه‌سازی‌شده دینامیکی ماهواره GRACE قابل دسترسی از سایت http://www.geod.uni-bonn.de/index.html، استفاده شده است. شبیه‌سازی مدار با استفاده از روش‌های عددی تولید مدار (روش‌های انتگرال‌گیری عددی) صورت گرفته است. به‌این‌صورت که با استفاده از یک نقطه اولیه، مدار به‌صورت عددی در میدان جاذبه حاصل از یک مدل ژئوپتانسیلی تولید می‌شود. در شبیه‌سازی داده‌ها از مدل ژئوپتانسیلی EGM96 تا درجه و مرتبه ۳۰۰ استفاده شده است. مدار ماهواره برای دوره زمانی ۳۰ روزه با فواصل زمانی ۵ ثانیه تولید شده‌است. خروجی تولید مدار به‌صورت عددی عبارت است از بردارهای موقعیت و سرعت در دستگاه لَختی که پس از آن با استفاده از روابط و تبدیلات لازم، بردار شتاب نیز در دستگاه لَختی به‌دست آمده است. داده‌های شبیه‌سازی‌شده دینامیکی ماهواره‌های GRACE شامل زمان برحسب تاریخ جولیانی (Julian) و بردارهای موقعیت، سرعت و شتاب در دستگاه مختصات شبه‌لَختی است. ویژگی‌های دستگاه مختصات شبه‌لَختی و جزئیات بیشتر در مورد داده‌های شبیه‌سازی شده از پایگاه http://www.geod.uni-bonn.de/englisch/apmg/lehrstuhl/simulationsszenarien/sc7/Readme.pdf قابل دست‌یابی است. فرمت داده‌های شبیه‌سازی شده ماهواره GRACE در فایل مربوط به‌صورت زیر است:

$$time\quad x\quad y\quad z\quad \dot{x}\quad \dot{y}\quad \dot{z}\quad \ddot{x}\quad \ddot{y}\quad \ddot{z} \tag{۳۳}$$

برای محاسبات از داده‌های ۳۰ روز ماهواره با فاصله زمانی ۳۰ ثانیه استفاده شده است. علت استفاده از داده‌های ۳۰ روز ماهواره همان بحث ارضای شرط نظریهٔ نمونه‌برداری است که در قسمت دوم مقاله در مورد آن صحبت شد. از طرف دیگر چون در راستای نصف‌النهارها پوشش کامل است، پس نیازی به استفاده از داده‌ها با فاصله زمانی ۵ ثانیه نیست (شریفی، ۲۰۰۴). بنابراین مشاهدات با فاصله زمانی ۳۰ ثانیه در نظر گرفته شده است که با این کار تعداد معادلات کاهش می‌یابد و از بار محاسباتی بدون اینکه لطمه‌ای به نتایج وارد شود، به شدت کاسته می‌شود. در نتیجه تعداد معادلات ۸۶۴۰۰ خواهد بود.

ازآن‌جایی که موقعیت ماهواره و مشتقات مرتبه اول و دوم آن تنها داده‌های موجود در فایل شبیه‌سازی شده هستند، مشاهدات سامانهٔ KBR ماهواره با استفاده از روابط زیر شبیه‌سازی شده است (شریفی ۲۰۰۴):

$$\rho(t) = \sqrt{\langle \Delta\mathbf{r}(t), \Delta\mathbf{r}(t)\rangle} \tag{۳۴}$$

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{\rho(t)}\langle \Delta\mathbf{r}(t), \Delta\dot{\mathbf{r}}(t)\rangle \tag{۳۵}$$

$$\dot{\rho}(t)=\frac{1}{\rho(t)}\langle \Delta\mathbf{r}(t),\Delta\dot{\mathbf{r}}(t)\rangle + \frac{1}{\rho(t)}\Delta\dot{\mathbf{r}}^T(t)\left[\mathbf{I}_{3\times3}-\frac{1}{\rho^2}\Delta\mathbf{r}^T(t)\otimes\Delta\mathbf{r}(t)\right]\Delta\dot{\mathbf{r}}(t) \tag{۳۶}$$

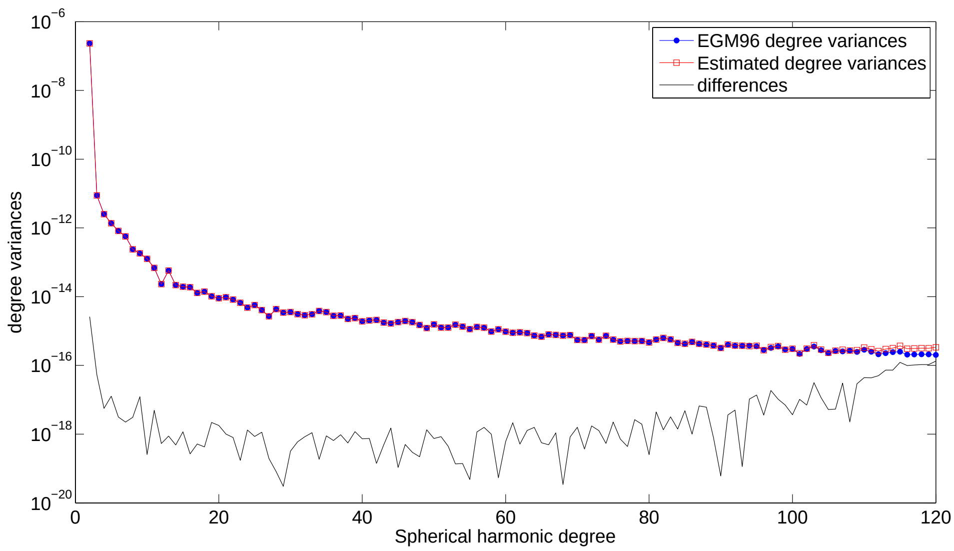
هدف برآورد ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ است. بنابراین، تعداد مجهولات برابر ۱۴۶۴۱ است. با توجه به عاری بودن مدار شبیه‌سازی شده ماهواره GRACE از هرگونه نوفه‌ای و همچنین ارضای شرط نظریهٔ نمونه‌برداری در راستای مدارها (با استفاده از مشاهدات ۳۰ روز ماهواره)، انتظار این است که بتوان ضرایب هماهنگ کروی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ را به‌طور کامل و با دقت زیادی بازیابی کرد. اما تنها مشکل موجود همان تداخل سیگنال ناشی از درجه و مرتبه‌های بالای ۱۲۰ موجود در مشاهدات است که در قسمت دوم مقاله در مورد آن صحبت شد. در زیر این موضوع از نظر عددی تجزیه و تحلیل شده است.

دستگاه معادلات خطی با ابعاد ۸۶۴۰۰ معادله و ۱۴۶۴۱ مجهول تشکیل شده، دستگاه معادلات نرمال مربوط با استفاده از الگوریتم MSAA حل شده و در پایان ضرایب هماهنگ کروی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ برآورد شده است.

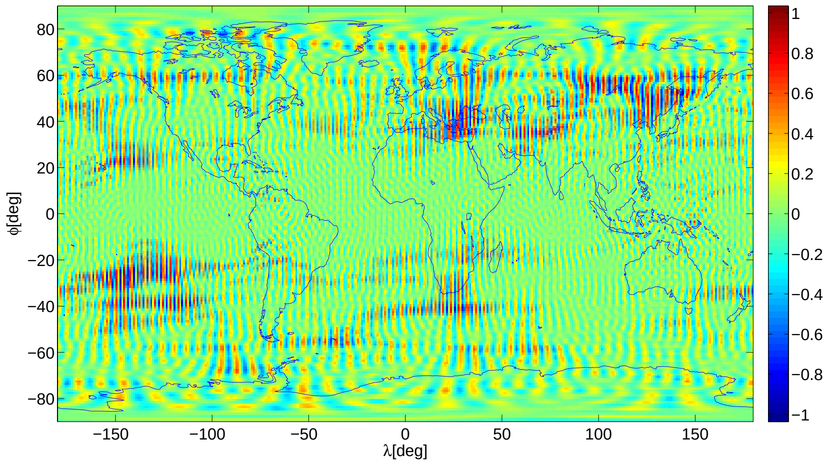
زیرماتریس‌های لازم برای اجرای الگوریتم MSAA با ۵۰ درصد هم‌پوشانی تشکیل شده است. با این مقدار درصد هم‌پوشانی، تعداد زیرماتریس‌های مربوط یعنی مقدار M در الگوریتم جدول (۳) ۲۹ زیرماتریس است. با این درصد هم‌پوشانی و تعداد زیرماتریس، دستگاه پس از ۲۰ تکرار همگرا شده و مدت زمان تکرارها تا رسیدن به شرط موردنظر برای خروج از حلقه تکرار حدود ۳۰ دقیقه است.

در مرحله بعد برای تحلیل نتایج خود با استفاده از ضرایب برآورد شده و همچنین با استفاده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰، ارتفاع ژئویید روی یک گرید منظم $1^{\circ}\times1^{\circ}$ در کل جهان به‌دست آمده است. برای به‌دست آوردن ارتفاع ژئویید از میدان نرمال GRS80 (موریتز، b۱۹۸۰) استفاده شده است.

در شکل (۴) ضرایب برآوردشده و همچنین ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ به‌صورت degree variance به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل (۵) اختلاف ارتفاعات ژئویید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ و ارتفاعات محاسبه شده از ضرایب برآورد شده به نمایش درآمده است.

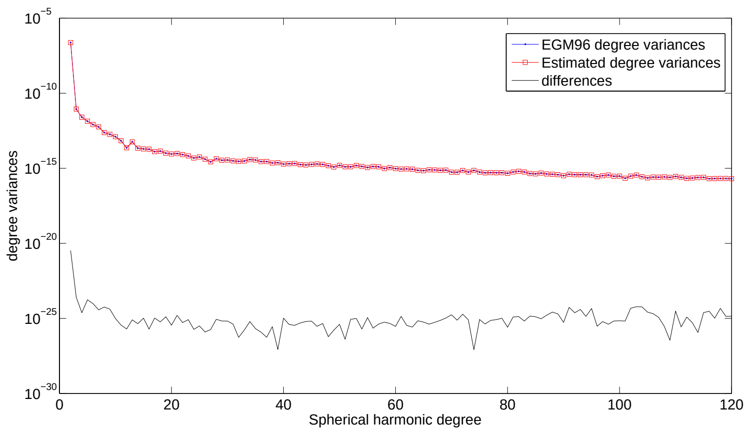


شکل ٤. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی‌شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE.

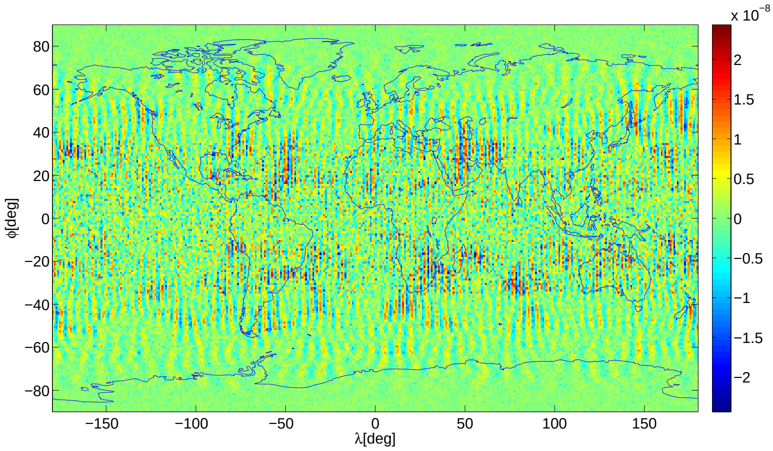


شکل ۵. اختلاف ارتفاع ژئویید محاسبه شده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ و ضـرایب بـرآورد شـده تـا درجـه و مرتبـه ۱۲۰ بـا اسـتفاده از مـشاهدات شبیه‌سازی‌شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد برحسب متر).

همان‌گونه که در شکل شماره (۴) مـشاهده مـی‌شـود، میزان جدایی میان ضـرایب بـرآورد شـده و ضـرایب مـدل EGM96 در درجه و مرتبه‌های بالا افـزایش مـی‌یابـد. ایـن جـدایی در اخـتلاف ارتفاعـات ژئوییـد محاسـبه شـده در شکل (۵) نیز نمایان می‌شود، که این امر مورد انتظار است. زیـرا همـان‌طـور کـه ذکـر شـد، اگرچـه داده‌هـای شبیه‌سازی‌شده ماهواره عـاری از هرگونـه نوفـه‌ای اسـت و همچنین شرط نظریهٔ نمونـه‌بـرداری ارضـا شـده اسـت، امـا درجه و مرتبه‌های بـالای ۱۲۰ تـا ۳۰۰ کـه در شـبیه‌سـازی مدار ماهواره از آن استفاده شده است، باعث ایجاد تداخل سیگنال در برآورد ضرایب تا درجه و مرتبه ۱۲۰ می‌شود و در نتیجه اختلاف ضرایب بـرآورد شـده و ضـرایب واقعـی (ضرایب مدل EGM96) را به دنبال دارد. در مرحلـه بعـد، مقادیر شتاب در نقاط مشاهداتی ماهواره تا درجـه و مرتبـه ۱۲۰ محاسـبه و از ایـن شـبه‌مـشاهدات (Quasi observation) در بـرآورد ضـرایب اسـتفاده شـده اسـت. نتـایج در شـکل‌هـای (۶) و (۷) آورده شده است.



شکل٦. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از شبه مشاهدات شبیه‌سازی‌شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE.



شکل۷. اختلاف میان ارتفاعات ژئوید محاسبه شده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ و ضرایب برآورد شده تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از شبه‌مشاهدات شبیه‌سازی‌شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد برحسب متر).

همان‌گونه که در شکل‌های (۶) و (۷) مشاهده می‌شود، بازیابی ضرایب به‌صورت کامل و با دقت بسیار زیادی صورت گرفته و بیشینه اختلاف ارتفاعات ژئوید محاسبه شده از مدل EGM96 و ضرایب برآورد شده به 10^{-8} متر رسیده است. با رسیدن به این حد از دقت در بازیابی ضرایب، کارایی الگوریتم MSAA (از نظر دقت و سرعت همگرایی) در حل دستگاه معادلات مربوطه به اثبات می‌رسد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده دینامیکی ۳۰ روزه ماهواره‌های GRACE و با استفاده از تابعک مشاهداتی اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE، دستگاه معادلات خطی مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ بنا شد. دستگاه معادلات نرمال مربوطه با استفاده از الگوریتم MSAA حل شد و درنهایت ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ برآورد شد. نتایج به‌دست آمده حاکی از کارایی روش MSAA از نظر دقت و سرعت همگرایی در حل دستگاه معادلات مربوط است.

تشکر و قدردانی

از حمایت مالی دانشگاه تهران از این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شماره ۸۱۰۸۰۱۲/۱/۰۴ قدردانی می گردد.

منابع

Freeden, W. and Michel, V., 2004, Multiscale (Geo) Potential theory, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin.

Garcia, R. V., 2002, Local geoid determination from GRACE mission. Rep 460, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.

Griebel, M. and Oswald, P. 1995, On the Abstract Theory of Additive and Multiplicative Schwarz Algorithms, Numer. Math., **70**, 163-180.

Groten, E., 1979, Geodesy and the Earth's Gravity Field, DÄummler, Bonn.

Hajela, D. P., 1974, Improved procedures for the recovery of 5° mean gravity anomalies from ATS-6/GEOS-3 satellite-to-satellite range-rate observation. Rep 276, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus

HÄammerlin, G. and Hoffmann, K. H., 1992, Numerische Mathematik. Springer,Berlin.

Han, S. C., 2003, Efficient global gravity determination from satelliteto- satellite tracking (SST). Rep 467, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.

Han, S. C., Jekeli, C. and Shum, C. K., 2003, Static and temporal gravity field recovery thesis, Department of Geodesy and Geoinformatics, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany.

Sharifi, M. A., 2004, Satellite gradiometry using a satellite pair. Diploma Thesis, Geodetic Institute, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy, University of Stuttgart.

Visser, PNAM, Sneeuw, N. and Gerlach, C., 2003, Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates. J.Geod., **77**, 207–216.

using grace potential difference observables. Adv Geosci., **1**, 19–26.

Hesse, K., 2003, Domain Decomposition Methods in Multiscale Geopoten-tial Determination from SST and SGG,Ph.D. Thesis, University ofKaiserslautern, Germany, Geomathematics Group, Shaker, Aachen.

Jekeli, C., 1999, The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking. Celest Mech Dynam Astron **75**, 85–101

Keller, W. and Sharifi, M. A., 2005, Satellite Gradiometry using a satellite pair. J. Geodesy.,**78**, 544-557.

Lions, P. L., 1988, On the Schwarz Alternating Method I, in: Proc. 1st Internat. Symp. \Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations", Paris, January 1987, R. Glowinski et al. (eds), SIAM, Philadelphia, 1- 42.

Lions, P. L., 1989, On the Schwarz Alternating Method II: Stochastic Interpretation and Order Properties, in: Proc. 2nd Internat. Symp. “Domain Decomposition Methods”, Los Angeles, CA, January 1998, T.F.Chan et al. (eds), SIAM, Philadelphia, 47-70.

Lions, P. L., 1999, On the Schwarz Alternating Method III: A Variant for Nonoverlapping Subdomains, in: Proc. of the 3rd Internat. Symp.”Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations”, Houston, TX, March 1989, T.F. Chan et al. (eds), SIAM Philadelphia, 202-223.

Moritz, H., 1980b, Geodetic Reference System 1980. Technical report.

Rummel, R., 1980, Geoid height, geoid height differences, and mean gravity anomalies from ‘low–low’ satellite-to-satellite tracking—an error analysis. Rep 306, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.

Rummel, R., 2003, How to climb the gravity wall. Space Sci Rev **108**,1–14.

Rummel, R., Balmino, G., Johannessen, J., Visser, P. and Woodworth, P., 2002, Dedicated gravity field missions—principles and aims. J. Geodynam, **33**, 3–20.

Sanso, F., 1990, On the aliasing problem in the spherical harmonic analysis. Bulletin Géodésique, **64**, 313-330.

Schwarz, H. A., 1890, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Vol **2**, Springer Verlag, Berlin.

Sharifi, M. A., 2006, Satellite to Satellite Tracking in the Space-Wise Approach, Ph.D