استفاده از الگوریتم MSAA در حل دستگاه معادلات مربوط به بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE

عبدالرضا صفری"، محمدعلی شریفی ً و بابک امجدیپرور ً

استادیار، گروه مهندسی نقشهبرداری، پردیس دانشکدههای فنی، دانشگاه تهران، ایران استادیار، گروه مهندسی نقشهبرداری، پردیس دانشکدههای فنی، دانشگاه تهران، ایران دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشهبرداری، پردیس دانشکدههای فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۸٬۲٬۱۴ ، پذیرش نهایی: ۸۸٬۱۲٬۱۸)

چکیدہ

Gravity Recovery) GRACE اولین با پرتاب ماهواره Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking) LL-SST اولین با پرتاب ماهواره (And Climate Experiment عجهانی می توان ساختار And Climate Experiment) الماختار (High-Low Satellite-to-Satellite Tracking) HL-SST) استفاده شده ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره جهانی می توان ساختار LL-SST (LL-SST) استفاده شده ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره CHAIP (Low Satellite-to-Satellite Tracking) استفاده شده ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره (LL-SST) استفاده شده ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره (LL-SST) استفاده شده ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره (LL-SST) استفاده شده ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره (LL-SST) استفاده شده ترکیب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره استختار LL-SST) استفاده از مشاهداتی است که در آن از مشاهداتی هدو دو استختار HL-SST (LL-SST) استان در راستای خط دید دو ماهواره استان در اینا روابط مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی با استفاده از تابعک مشاهداتی استخار با در راستای خط دید دو ماهواره SGRACE (Line Of Sight(LOS) مرافترا LL-SST) است. بر آورد ضرایب با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE ، معادلات مربوطه برای برآورد ضرایب بنا شده است. در این مقاله در این شده است و دستگاه معادلات مربوطه برای برآورد ضرایب بنا شده است. در این مقاله در این مقاله معادلاتی با این تعداد مجهول در یک دستگاه مادد این نیز ماوزار مطلب (ISST) مجهول است. از آنجاکه حل دستگاه معادلاتی با این تعداد مجهول در یک دستگاه رایانهای شخصی و با درمافزار مطلب (MATLAB) محکن پذیر نیست، در این مقاله الگوریتم تکراری MSAA (MATLAB) معادلات نرمال با ابعاد بزرگ نرمافزار مطلب (Algorithm) محکن می می مانه الگوریتم تکراری ASAC (CLAB) معادلات نرمال با ابعاد بزرگ مرمافزار مطلب (آلمله روشهای تجزیه حوزه (CLAB) معادلاتی با استفاده از مشاهدات شبیه مازی می این بزرگ مرمافزار مطلب (گذاشته شده است. از آن مقاله الگوریتم تکراری MSAA (CLAB) معادلات نرمال با ابعاد بزرگ مرمافزار مطلب (آلمله الله معادلات مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی با استفاده از مشاهدات شبیه مازی می مای ر مرمافزار مله ای مرمانی مرمون از نور این این می مای ر

واژههای کلیدی: بازیابی میدان جاذبه، روش MSAA، Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking،

Using the Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm(MSAA) for Solving the Large Linear System of Equations Related to Global Gravity Field Recovery up to Degree and Order 120

Safari, A.¹, Sharifi, M. A.² and Amjadiparvar, B.³

¹ Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

² Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of

Tehran, Iran

³ M. Sc. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 4 May 2009, Accepted: 9 March 2010)

E-mail: asafari@ut.ac.ir

دورنگار: ۸۸۰۰۸۸۳۷–۲۱

تلفن: ۸۸۰۰۸۸۳۷–۰۲۱

نگارنده رابط:

Abstract

The GRACE mission has substantiated the Low–Low Satellite-to-Satellite Tracking (LL-SST) concept. The LL-SST configuration can be combined with the previously realized high–low SST concept in the CHAMP mission to provide a much higher accuracy. The line of sight (LOS) acceleration difference between the GRACE satellite pair is the most frequently used observable for mapping the global gravity field of the Earth in terms of spherical harmonic coefficients.

The following relationship is valid for each evaluation point:

$$\left\langle \Delta \ddot{r}, \mathbf{e} \right\rangle = \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\left\| \Delta \dot{r} \right\|^2}{\rho} \tag{1}$$

The GRACE ranging system provides inter-satellite range ρ and its first time derivative, $\dot{\rho}$, as the LL-SST observations and the GPS receivers mounted on the GRACE satellites provide the position vectors as the HL-SST mode observations. The inter-satellite range acceleration, $\ddot{\rho}$, and $\Delta \dot{r}$ are obtained by numerical differentiation of $\dot{\rho}$ and Δr , respectively.

In the absence of non-gravitational forces, the left-hand side of Eq. (1) can be considered as the LOS gravitational acceleration differences, $\Delta\Gamma^{LOS}$

$$\Delta\Gamma^{LOS} := \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\left\|\Delta \dot{r}\right\|^2}{\rho}$$
(2)

A sequence of observations with M evaluation points sets up a system with M linear equations. In this paper, the corresponding linear system of equations has been set up for spherical harmonic up to degree and order 120. The total number of unknowns, u, is

$$u = 1 + 3 + \dots + 2(N_{\max} + 1) - 1 = (N_{\max} + 1)^2 = 121^2 = 14641$$
(3)

Such a linear equation system can be solved with iterative solvers or direct solvers. However, the runtime of direct methods or that of iterative solvers without a suitable preconditioner increases tremendously. This is the reason why we need a more sophisticated method to solve the linear system of problems with a large number of unknowns.

Multiplicative variant of the Schwarsz alternating algorithm is a domain decomposition method, which allows it to split the normal matrix of the system into several smaller overlaped submatrices. In each iteration step the multiplicative variant of the Schwarz alternating algorithm solves linear systems with the matrices obtained from the splitting successively. It reduces both runtime and memory requirements drastically. An MSAA example with two submatrices is shown in Fig. 1



Figure 1. MSAA example with two submatrices.

This method dates back to H. A. Achwarsz' work, published in 1980, and has been investigated by many authors since then. In this paper we propose the Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm (MSAA) for solving the large linear system of gravity field recovery. The proposed algorithm has been applied in a close-loop simulation to the International Association of Geodesy (IAG)-simulated data of the GRACE mission. The achieved results indicate the validity and efficiency of the proposed algorithm in solving the linear system of equations from accuracy and runtime points of view.

Key words: Gravity field recovery, Multiplicative Schwarz Alternating Algorithm, Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking

SST به واقعیت پیوست. با توجه به ساختار ماهوارههای مورد استفاده در روش SST دو مفهوم زیر را خواهیم داشت (شريفي، ۲۰۰۴):

:HL-SST -

در این فن یک ماهوارهٔ کمارتفاع (LEO (Low Earth Orbiter)) بەمنزلة حسگر ميدان جاذبه زمين با يک يا چند گروه از ماهوارههای مرتفع (High Earth) HEO Orbiter)) درحکم نقاط کنترل ثابت که در حال گردش به دور زمين هستند، رديابي مي شوند. اين مفهوم اولين بار با پرتاب ماهواره CHAMP به واقعیت پیوست. با استفاده از این روش اطلاعات بسیار ارزشمندی برای بازیابی طول موجهای بلند و متوسط میدان جاذبه زمین (ضرایب هماهنگهای کروی با درجه و مرتبه کوچکتر از ۷۰) قابل دستبابي است (کلر و شریفي، ۲۰۰۵).

:LL-SST -

در این فن دو ماهواره کمارتفاع با یک یا چند گروه از ماهوارههای مرتفع (ماهوارههایی با ارتفاع زیاد درنقش نقاط کنترل ثابت که در حال گردش به دور زمین اند)، ردیابی میشوند. این دو ماهواره کمارتفاع شبیه به هماند و در یک مدار مشابه به دنبال هم به دور زمین می گردند. فاصله بین این دو ماهواره حدود چندصد کیلومتر است و فاصله بين اين دو (ρ) و تغييرات اين فاصله $(\dot{\rho})$ با حسگرهایی اندازه گیری می شود. این دو ماهواره مشابه، تعیین دقیق میدان گرانی زمین برای همهٔ علوم وابسته به زمین مفید خواهد بود. در میان این علوم، ژئودزی به برآورد دقیقی از میدان گرانی زمین در مقیاس محلی (برای کاربردهای مهندسی) و جهانی (برای کاربردهای تعیین مدار) نیاز دارد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). رفتار محلی میدان گرانی زمین با استفاده از روش های گرانی سنجی زمینی (Terrestrial gravimetry) و هوایی (گرانی سنجی با هواييما (Airborne gravimetry)) قابل بيان است. اگرچه با استفاده از این روش ها می توان به میدان گرانی زمین با قدرت تفکیک مکانی (Spatial resolution) زیادی رسید، اما این روشها یوشش همگنی را در کل جهان حتى در مناطق خشكى ايجاد نمىكنند. در نتيجه تعیین میدان گرانی زمین در مقیاس جهانی با استفاده از مشاهدات ماهوارههای مصنوعی، به دلیل پوشش همگن مشاهدات آن در کل جهان، ارجح خواهد بود. به بیان دیگر مشاهدات تقریباً همگن و همچنین پوشش جهانی آنها، مزیتهای اصلی روشهای ماهوارهای برای تعیین میدان گرانی زمین در مقیاس جهانی در مقایسه با روش های زمینی و هوایی میباشند (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). روشهای ماهوارهای جهت تعیین میدان گرانی زمین، پس از پرتاب مأموریتهای اختصاصی گرانیسنجی

(Dedicated gravity field missions) حبات دوبارهای یافتهاند. با یر تاب ماهوارههای CHAMP و GRACE که به ترتیب در سال ۲۰۰۰ و ۲۰۰۲ یرتاب شدهاند، روش

١

مقدمه

نقش یک حسگر را در میدان جاذبه زمین ایفا می کنند. این مفهوم اولینبار با پرتاب ماهواره GRACE محقق شد. با استفاده از مشاهدات حاصل از این روش، طول موجهای کوتاه تری از میدان جاذبه زمین (ضرایب هماهنگ های کروی با درجه و مرتبه کوچک تر از ۲۰۰) در مقایسه با روش HL-SST قابل بازیابی است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). در شکل زیر دو مفهوم HL-SST و HL-SST به به وسورت نمادین به نمایش گذاشته شدهاست.



Earth's Surface

شکل ۱. ساختارهای HL-SST و LL-SST

نکته قابل ذکر اینکه طول موجهای بسیار کوتاهتری از میدان جاذبه زمین (ضرایب هماهنگهای کروی با درجه و مرتبه بزرگتر از ۲۰۰) با استفاده از روش SGG GOCE (با ماهواره Satellite Gravity Gradiometry) (که در (Gravity Field and Steady_State Ocean) که در اوایل ۲۰۰۹ به فضا پرتاب شد) قابل بازیابی است (رومل و همکاران، ۲۰۰۲).

ماهواره GRACE شامل دو ماهواره شبیه به هم است که در یک مدار مشابه به دنبال هم با فاصلهای در حدود KM 220 \pm 02 در حال گردش به دور زمیناند (رومل و همکاران، ۲۰۰۲). فاصله نسبی بین این دو ماهواره (ϕ) و تغییرات این فاصله ($\dot{\phi}$) به صورت پیوسته با دقت زیادی از سامانهٔ KBR (Kband Ranging) بدانه گیری می شود.

علاوه بر مشاهدات KBR، هرکدام از ماهوارههای

Three-) مجهز به یک شتابسنج سهمحوری (-GRACE axis accelerometer) در مرکز جرم خود هستند که شتابهای غیر جاذبی وارد بر ماهواره را اندازه گیری می کنند. سری زمانی حاصل از مشاهدات سامانهٔ تعیین موقعیت جهانی و مشاهدات KBR اطلاعات بسیار ارزشمندی از موقعیت، سرعت و شتاب نسبی دو ماهواره بهدست میدهد. در نتیجه برای رسیدن به دقت و حساسیت بیشتر در بازسازی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی، با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE می توان مشاهدات روش HL-SST را با مشاهدات روش LL-SST تركيب کرد. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE ساده ترین کمیت مشاهداتی است که در آن از مشاهدات هر دو ساختار HL و LL استفاده شده است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). از این نوع مشاهده ماهواره GRACE به طور گستردهای برای بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی استفاده شده است که می توان به تحقیقات صورت گرفته از سوی گارسیا (۲۰۰۲)، هاجلا (۱۹۷۴)، هان و همکاران (۲۰۰۳)، کلر و شریفی (۲۰۰۵)، رومل (۱۹۸۰) اشاره کرد. علاوهبراین مشاهده ترکیبی، با استفاده از مشاهده *p* دستگاه KBR و به روش انتگرال انرژی میتوان پتانسیل واپیچشی را بهدست آورد که در این زمینه می توان به تحقیقات صورت گرفته از سوی هان (۲۰۰۳)، هان و همکاران (۲۰۰۳) و رومل (۲۰۰۳) اشاره کرد. همچنین ساختار هندسی ماهواره GRACE می تواند درحکم یک گرادیومتر یک ُبعدی بسیار بزرگ با طول بازوی km 250 در نظر گرفته شود. دقت اندازه گیریهای گرادیومتر ماهواره GRACE نسبت معکوس با طول بازوی گرادیومتر یا همان فاصله نسبی میان دو ماهواره GRACE دارد. جزئیات این روش را می توانید در کلر و شریفی (۲۰۰۵)، رومل (۲۰۰۳)، شريفی (۲۰۰۴)، شريفی (۲۰۰۶) بيابيد.

هدف این مقاله استفاده از مشاهده تفاوت شتاب در

راستای خط دید دو ماهواره GRACE برای بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی است. بیشینه درجه و مرتبه ضرایب ژئوپتانسیلی قابل بازیابی با استفاده از مشاهدات ماهواره GRACE، ۱۲۰ است (شریفی، ۲۰۰۴). به بیان دیگر تعداد مجهولاتی که باید در این دستگاه معادلات بر آورد شود، ۱۴۶۴۱ است. مشکلی که در این راستا با آن مواجه خواهیم بود، حل دستگاه معادلات خطی بزرگ مربوطه در یک دستگاه رایانهٔ شخصی است. ماتریس نرمال مربعی با ابعاد ۱۴۶۴۱ را نمی توان به صورت مستقیم در یک رایانهٔ شخصی معکوس کرد، در نتیجه برای حل یک دستگاه معادلات بزرگ در چنین رایانهای، ناچار به استفاده از الگوریتمهای ریاضی خواهیم بود. در این مقاله الگوريتمي با عنوان الگوريتم MSAA براي حل دستگاه معادلات بزرگ عرضه خواهد شد و کارایی این الگوریتم در حل دستگاه معادلات مربوط، مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت. بنابراین برای رسیدن به اهداف مقاله، ابتدا در قسمت۲ روابط ریاضی مربوط به بر آورد ضرایب ژئوپتانسیلی با استفاده از تابعک مشاهداتی شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE و همچنین نحوه تشکیل دستگاه معادلات خطی مربوط بیان خواهد شد. در قسمت۳ روش MSAA برای حل دستگاه معادلات با ابعاد بزرگ بیان خواهد شد. در قسمت۴ نتایج عددی را بیان خواهیم کرد، و در پایان، قسمت ۵ به بیان خلاصهای از دستاوردها و نتیجه گیری اختصاص داده شده است.

۲ روابط رياضي

اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE، تابعی از فاصله نسبی دو ماهواره یعنی *q* و تغییرات زمانی آن *d* است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). سامانهٔ KBR مورد استفاده در ماهوارههای GRACE مشاهدات *q* و *d* را بهمنزلهٔ مشاهدات LL-SST با بسامد نمونهبرداری ID Hz تأمین می کنند. ضمناً گیرنده سامانهٔ تعیین موقعیت جهانی

دو بسامدی Blackjack که روی جفت ماهواره را به عنوان نصب شدهاست، بردار موقعیت ماهواره را به عنوان مشاهدات HL-SST با بسامد نمونهبرداری کمتری نسبت به سامانهٔ KBR یعنی با بسامد *Hz* 10 تأمین می کند (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). مشاهدات هر دو روش با استفاده از رابطه زیر به یکدیگر ارتباط پیدا می کنند (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\langle \ddot{r}_{2} - \ddot{r}_{1}, r_{2} - r_{1} \rangle = \dot{\rho}^{2} + \rho \ddot{\rho} - \langle \dot{r}_{2} - \dot{r}_{1}, \dot{r}_{2} - \dot{r}_{1} \rangle$$
 (1)

که در رابطه بالا $\dot{r_2}$ و $\dot{r_1}$ بردار سرعت دو ماهواره هستند و با استفاده از روشهای مشتق گیری عددی از مشاهدات بردار موقعیت ماهواره ها به دست می آیند. تغییرات \dot{q} میان دو ماهواره GRACE یعنی \ddot{q} نیز با استفاده از روشهای مشتق گیری عددی از مشاهدات \dot{q} به دست می آید (کلر و شریفی، ۲۰۰۵). طرف چپ معادله (۱) عبارت است از حاصل ضرب داخلی اختلاف بردار موقعیت دو ماهواره در اختلاف بردار شتاب آنها. با تقسیم دو طرف رابطه (۱) به q به رابطه اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE خواهیم رسید (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\left\langle \Delta \ddot{r}, \mathbf{e} \right\rangle = \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\left\| \Delta \dot{r} \right\|^2}{\rho}$$
 (Y)

در رابطه بالا e بردار یکه در راستای خط دید دو ماهواره است. در غیاب نیروهای غیر جاذبی، طرف چپ معادله بالا را میتوانیم درحکم اختلاف شتاب جاذبه در راستای خط دید دو ماهواره GRACE در نظر بگیریم (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\Delta \Gamma^{LOS} := \ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\left\|\Delta \dot{r}\right\|^2}{\rho} \tag{(\ref{eq:prod})}$$

طرف چپ معادله (۳) تابعی از مشتقات جزئی پتانسیل جاذبه و بردار یکه در راستای خط دید دو ماهواره است. بردار یکه e از مشاهدات سامانهٔ تعیین موقعیت جهانی در

دستگاه مختصات دکارتی زمین ثابت بهدست می آید، درحالی که معمولاً از بسط پتانسیل جاذبه به سری هماهنگ های کروی برحسب مختصات کروی (r, ϕ , λ) استفاده می شود. برای بهدست آوردن اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره، مشتقات جزئی بسط پتانسیل جاذبه نسبت به مؤلفه های مختصاتی دستگاه مختصات کروی بهدست می آید. بنابراین این امکان وجود دارد که (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

مشتقات جزئی پتانسیل جاذبه برحسب مختصات دکارتی با استفاده از قانون مشتق گیری زنجیرهای محاسبه شود.

بردار یکه در راستای خط دید دو ماهواره GRACE برحسب مؤلفههای مختصاتی دکارتی کروی بازنویسی شود که این کار از طریق انتقال از دستگاه مختصات زمین ثابت به دستگاه مختصات محلی کروی امکان پذیر است.

اگرچه نتایج هر دو روش یکسان است، اما به خاطر سادگی در این مقاله در محاسبات از روش دوم استفاده خواهیم کرد. برای بهدست آوردن بردار e در دستگاه مختصات کروی، ابتدا دستگاه مختصات کروی محلی (LSCS(Local Spherical Coordinate System)) ماهواره با خصوصیات زیر تعریف میشود (کلر و شریفی، (۲۰۰۵):

که در رابطه بالا **J** ماتریس انتقال و به شکل صریح
زیر است (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \\ -\sin\phi\cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \end{bmatrix}$$
(۵)

پتانسیل جاذبه در نقطهای دلخواه به مختصات پتانسیل ($r \ge R_{eanh}$) در فضای خارج زمین (r, ϕ, λ) برحسب هماهنگهای کروی نرمال شده به صورت زیر بیان می شود:

$$V(r,\phi,\lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n$$

$$\sum_{m=0}^n \left(\overline{c}_{nm} \cos m\,\lambda + \overline{s}_{nm} \sin m\,\lambda\right) \overline{P}_{nm}(\sin\phi)$$
(\$\$

در رابطه بالا *GM* حاصل ضرب ثابت جهانی جاذبه در جرم زمین، *R* شعاع میانگین زمین و *P*_{nm} توابع نرمال شده لژاندر است. رابطه (۶) پتانسیل جاذبه را به منزلهٔ تابعی از مؤلفه های مختصاتی منحنی الخط یعنی *r*، *φ*و *k* بیان می کند. به طور مشابه می توان شتاب جاذبه را بر حسب مؤلفه های *r*، *φ*و *k* به صورت زیر بیان کرد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\Gamma(r,\phi,\lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} -(n+1)$$

$$\times (\overline{C}_{nm} \cos m\lambda + \overline{S}_{nm} \sin m\lambda) \overline{P}_{nm} (\sin \phi) \mathbf{e}_r$$

$$+ (\overline{C}_{nm} \cos m\lambda + \overline{S}_{nm} \sin m\lambda) \overline{P}_{nm} (\sin \phi) \mathbf{e}_{\phi}$$

$$+ \sec \phi \left(-m\overline{C}_{nm} \sin m\lambda + m\overline{S}_{nm} \cos m\lambda\right) \overline{P}_{nm} (\sin \phi) \mathbf{e}_{\lambda}$$

رابطه بالا بیان کنندهٔ شتاب جاذبه برحسب مختصات کروی در دستگاه مختصات کروی محلی ماهواره است. درنتیجه بردار شتاب جاذبه هرکدام از ماهوارههای GRACE را میتوان در دستگاه مختصات کروی محلی مربوط به خود، بهصورت زیر نوشت (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\begin{split} & \Gamma_{1} \coloneqq \Gamma(r_{1}, \phi_{1}, \lambda_{1}) = \Gamma_{11} e_{r_{1}} + \Gamma_{12} e_{\phi_{1}} + \Gamma_{13} e_{\lambda_{1}} \\ & \Gamma_{2} \coloneqq \Gamma(r_{2}, \phi_{2}, \lambda_{2}) = \Gamma_{21} e_{r_{2}} + \Gamma_{22} e_{\phi_{2}} + \Gamma_{23} e_{\lambda_{2}} \end{split}$$
(A)

برای بهدست آوردن اختلاف شتاب جاذبه در راستای خط دید دو ماهواره (معادله (۳)) هرکدام از بردارهای

رابطه (۸) روی بردار یکه راستای خط دید دو ماهواره مربوط به دستگاه مختصات کروی محلی مربوط به خود تصویر میشود (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

$$\Delta \Gamma^{LOS} = \left\langle \Gamma(r_2, \phi_2, \lambda_2), e_2 \right\rangle - \left\langle \Gamma(r_1, \phi_1, \lambda_1), e_1 \right\rangle$$

$$= e_2^T \Gamma_2 - e_1^T \Gamma_1$$
(**4**)

در رابطه بالا \mathbf{e}_1 و \mathbf{e}_2 بهترتیب بردار یکه در راستای خط اتصال دو ماهواره در دستگاه کروی محلی ماهواره شماره ۱و۲ هستند. رابطه (۹) یک معادله مشاهده خطی برحسب ضرایب ژئوپتانسیلی نرمال شده \overline{c}_{nm} و \overline{c}_{nm} است.

با توجه به رابطه (۹) اگر یک سری زمانی با P نقطه مشاهداتی داشته باشیم، میتوانیم بهازای هر نقطه مشاهداتی، یک معادله مشاهده خطی بنویسیم. در عمل در بسط مربوط به رابطه (۷) ، حد بالای بسط یعنی ∞ باید با بیشینه درجه و مرتبه قابل بازیابی با استفاده از مشاهدات ماهواره جایگزین شود. در نتیجه تعداد کل مجهولات *u* بهصورت زیر بهدست میآید (کلر و شریفی، ۲۰۰۵):

 $u = 1 + 3 + \dots + 2(N_{\max} + 1) - 1 = (N_{\max} + 1)^{2}$ (1.)

اگر از دیدگاه هندسی به دستگاه معادلات خود نگاه کنیم، دستگاه معادلات خطی بنا شده قابل حل خواهد بود اگر تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد یعنی ($P \ge q$). باوجوداین با توجه به نظریهٔ نمونهبرداری شَنون در جاها دو برابر بیشینه (مامد اندازه گیری باشد. زمانی که بسامد بیشتر از حد بسامد اندازه گیری باشد. زمانی که بسامد بیشتر از حد بسامد نایکویست (Nyquist frequency) (نصف بسامد نمونهبرداری) باشد، تداخل سیگنال (Aliasing) رخ خواهد داد. بنابراین، ارضا کردن شرط نظریهٔ نمونهبرداری برای بازیابی کامل طیف میدان جاذبه بسیار مهم و حیاتی خواهدبود (سانسو، ۱۹۹۰ و کلر و شریفی، ۲۰۰۵). برای بازیابی ضرایب هماهنگ کروی تا درجه و مرتبه N_{max} بسامد نمونهبرداری را باید با افزایش طول روزهای مشاهداتی ماهواره افزایش داد (کلر و شریفی، ۲۰۰۵).

مشکل دیگری که منجر به فقدان بازیابی کامل و درست طیف میدان جاذبه با استفاده از روش کمترین مربعات خواهد شد، جایگزینی حد بالای بسط یعنی ∞ با مربعات در واقع این جایگزینی باعث ایجاد نوع است. در واقع این جایگزینی باعث ایجاد مورد دیگری از تداخل سیگنال در برآورد ضرایب میشود (سانسو، ۱۹۹۰). این موضوع در قسمت نتایج عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت.

اکنون برای برای بنا کردن دستگاه معادلات مربوط و به منظور بر آورد ضرایب، فقط نیاز به روابطی برای محاسبه توابع وابسته نرمال شده لژاندر و مشتقات مرتبه اول آن نسبت به شناسه ¢ است. برای محاسبه این توابع، روش های تکراری گوناگونی وجود دارد که در این مقاله به منظور عملی ساختن محاسبات عددی از روابط پیش گفته در (شریفی ۲۰۰۴) استفاده شده است. این روابط بازگشتی در جدول(۱) آورده شده است.

 ۳ الگوریتم MSAA جهت حل دستگاه معادلات نرمال خطی با ابعاد بزرگ
 مدف این قسمت معرفی الگوریتمی برای حل دستگاه معادلات نرمال خطی با ابعاد بزرگ است. معادله خطی معادلات نرمال خطی با ابعاد بزرگ است. معادله نطی معادلات نرمال خطی با ۲۰۰۴ ابعاد بزرگ است. معادله مطی
 معادلات نرمال خطی با ۲۰۰۴ معین مثبت متقارن را در نظر می گیریم (فریدن و میشل، ۲۰۰۴):
 (۱۱)

که در معادله بالا داريم:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N} , \mathbf{A}^{T} = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} y. y > 0, \ y \in \mathbb{R}^{N} \setminus \{0\}, \ x, b \in \mathbb{R}^{N}$$
(1Y)

چنین معادله خطی را میتوان با استفاده از روشهای مستقیم و یا روشهای تکراری حل کرد. در استفاده از روشهای مستقیم در حل دستگاه معادلات به شکل معادله (۱۱) اگر N خیلی بزرگ باشد، (برای مثال 10000 ≤ N) با مشکل حافظه در رایانههای شخصی مواجه خواهیم بود. برای حل دستگاه معادلات نرمال خطی است که در آن در هر تکرار حل دستگاه، یک دستگاه معادلات خطی کوچک تر که از تجزیه دستگاه معادلات اصلی بهدست آمده، حل می شود که این کار، هم زمان حل دستگاه را کاهش می دهد و هم از مقدار حافظه مورد نیاز برای ذخیره سازی ماتریس ها می کاهد (فریدن ومیشل، ۲۰۰۴). این الگوریتم را اولین بار شوارتس (Schwarsz) در این الگوریتم را اولین بار شوارتس (Schwarsz) در بسیاری از نویسندگان در مورد این روش، تحقیق کردند و مطالبی به چاپ رساندند. با پیدایش رایانههای پیشرفته و سامانهٔ رایانههای موازی (Parallel computes) در (مه ۱۹۸۵) روش شوارتس مورد توجه ویژه ای قرار گرفت. برای حل این مشکل ناچار به استفاده از روش های تکراری در حل دستگاه مربوط خواهیم شد. زمان حل این دستگاه خطی، با استفاده از روشهای تکراری معمول (برای مثال روش مزدوج (Conjugate Gradient) CG)، بدون استفاده از یک پیش شرط (Preconditioner) مناسب شدیداً افزایش می یابد. بنابراین برای حل دستگاه معادلات با ابعاد بزرگ، نیاز به یک الگوریتم پیچیده تر ریاضی نورشها، روش MSAA است. این روش از جمله روشهای تجزیه حوزه است که در آن ماتریس A به زیرماتریسهای کوچکتری که با یکدیگر هم پوشانی دارند، تجزیه می شود. روش MSAA یک روش تکراری

جدول۱. روابط بازگشتی برای محاسبه توابع وابسته نرمالشده لژاندر.

• Diagonal recursion
$$n \ge 2$$

 $\overline{P}_{n,n} = f_1 \cos \phi \overline{P}_{n-1,n-1}$
 $\overline{P}'_{n,n} = f_1 \Big[\cos \phi \overline{P}'_{n-1,n-1} - \sin \phi \overline{P}_{n-1,n-1} \Big]$
• Horizontal recursion - first step $n \ge 1$
 $\overline{P}_{n,n-1} = f_2 \sin \phi \overline{P}_{n-1,n-1}$
 $\overline{P}'_{n,n-1} = f_2 \Big[\cos \phi \overline{P}_{n-1,n-1} + \sin \phi \overline{P}'_{n-1,n-1} \Big]$
• Horizontal recursion - next step
 $\overline{P}_{n,m} = f_3 \Big[f_4 \sin \phi \overline{P}'_{n-1,m} - f_5 \overline{P}_{n-2,m} \Big]$
 $\overline{P}'_{n,m} = f_3 \Big[f_4 \sin \phi \overline{P}'_{n-1,m} + f_4 \cos \phi \overline{P}_{n-1,m} - f_5 \overline{P}'_{n-2,m} \Big]$
where
 $f_1 = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}}$
 $f_2 = \sqrt{2n+1}$
 $f_3 = \sqrt{\frac{2n+1}{(n-m)(n+m)}}$
 $f_4 = \sqrt{2n-1}$
 $f_5 = \sqrt{\frac{(n+m-1)(n-m-1)}{2n-3}}$
Initial values
 $\overline{P}_{0,0} = 1$ $\overline{P}'_{0,0} = 0$ $\overline{P}_{1,1} = \sqrt{3} \cos \phi$ $\overline{P}'_{1,1} = -\sqrt{3} \sin \phi$

در واقع اگر بخواهیم به طورکلی صحبت کنیم، دو روش متفاوت شوارتس وجود دارد: (۱) روش ضربی (Multiplicative) (روش مورد استفاده در این مقاله) و (۲) روش جمعی (Additive) که این روش را می توان در سامانه های رایانه ای موازی به کار برد و معمولاً سریع تر سامانه های رایانه ای موازی به کار برد و معمولاً سریع تر است. برای اطلاعات بیشتر در مورد روش های شوارتس، به لیونز (۱۹۸۹،۱۹۸۹و ۱۹۹۹) مراجعه شود. در سال های اخیر نیز توجه ویژه ای به رابطه بین روش های شوارتس و روش های تکراری دیگر نظیر Multisplitng، روش Preconditioned Conjugate) PCG (Isophile و مس (Gradient نیز به گروتن (۱۹۷۹)، گریبل و اسوالد (۱۹۹۵) و هسه نیز به گروتن (۱۹۷۹)، گریبل و اسوالد (۱۹۹۵) و هسه

حل معادله خطی (۱۱) با استفاده از روش MSAA بر پایه دو خاصیت زیر استوار است (فریدن و میشل، ۲۰۰۴): ۱- هر ماتریس معین مثبت متقارن، یک ماتریس گرام (Gram matrix) است.

۲- اثبات همگرایی روش MSAA بر پایه فرمولبندی آن براساس تصویر گرهای قائم (Orthogonal projector) صورت می گیرد.

با توجه به فرضیات ، ماتریس $A = (A_{i,i})_{i,j=1,\dots,N}$ در معادله خطی (۱۱)، یک ماتریس معین مثبت و متقارن است. با توجه به قضیه عامل گیری خولسکی Cholesky factorization (هامرلین و هافمن، ۱۹۹۲) یک ماتریس پایین مثلثی معکوس پذیر L با درایه های قطری مثبت وجود دارد به طوری که

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

$$A_{i,j} = v_i \cdot v_j$$
, $i, j = 1, ..., N$ (14)

$$\mathbb{R}^{N} = \mathbb{R}^{N} = \mathbb{R}^{N} = \mathbb{R}^{N} = \mathbb{R}^{N} = \mathbb{R}^{N}$$

$$\mathbb{R}^{N} = \mathbb{R}^{N} = \mathbb{R}^{N}$$

در نتيجه ماتريس A يک ماتريس گرام با يايه

$$P_r: \mathbb{R}^N \to span\left\{v_1^r, \dots, v_{N_r}^1\right\}, \quad g \mapsto P_r g \tag{1A}$$

یعنی $P_r = P_r \circ P_r$ و $W_r = v \cdot P_r v$ به ازای هر $P_r = P_r \circ P_r$ به ازای هر $v, w \in \mathbb{R}^N$ فرض می کنیم که $w, w \in \mathbb{R}^N$ مشخص است. ما می خواهیم بردار $g \cdot v_i$, i = 1, ..., Nضرایب $(y_1, ..., y_{N_r}) = y$ معادله زیر را محاسبه کنیم:

$$P_rg = \sum_{i=1}^{N_r} y_i v_i^r \tag{19}$$

www.SID.ir

$$s_{nM+r}^{f} = \sum_{j=1}^{r} P_{j} \left(f_{nM+(j-1)} \right) + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{M} P_{j} \left(f_{lM+(j-1)} \right)$$

$$f_{nM+r} = f - s_{nM+r}^{f}$$

$$s_{nM+r}^{f} = s_{nM+(r-1)}^{f} + P_{r} \left(f - s_{nM+(r-1)}^{f} \right)$$

$$f_{nM+r} = \left(Q_{r} ... Q_{1} \right) \left(Q_{M} ... Q_{1} \right)^{n} f$$

$$s_{nM+r}^{f} = f - \left(Q_{r} ... Q_{1} \right) \left(Q_{M} ... Q_{1} \right)^{n} f$$

ویژگیهای شماره ۱،۲و۴ بهصورت مستقیم اثبات میشود درحالیکه ویژگیهای ۳ و ۵ نتایج سادهای از ویژگیهای ۱،۲و۴ هستند. اثبات این ویژگیها را میتوان برای مثال در هسه (۲۰۰۳) یافت.

با توجه به ویژگیهای شماره ۱ و ۳ متوجه می شویم که الگوریتم پیش گفته در جدول (۲) دارای ساختار استاندارد یک الگوریتم تکراری است: با مقدار $p_1 = p_1 (f)$ می کنیم و $f_1 = P_1 (f)$ محاسبه می کنیم که در آن $f_0 = f$ شروع می کنیم و $f_1 = P_1 (f)$ محاسبه می کنیم که در آن $f_1 = f - f$ محاسبه می کنیم. پس از آن باقی مانده (1) $f_1 = f - P_1 (f)$ محاسبه می کنیم. پس از آن باقی مانده (1) $p_2 (f_1) = f_1 (f)$ محاسبه می کنیم که در این زمان $p_2 (f - s_1^f) = p_1 (f)$ محاسبه می کنیم که در این زمان باقی مانده (1) $p_2 (f_1) = f_1 (f)$ محاسبه می کنیم که در این زمان $p_2 (f - s_1^f) = f_2 (f)$ محاسبه می کنیم که در این زمان جدید (1) $p_2 (f_1) = f_2 (f)$ محاسبه می کنیم که در این زمان $p_2 (f - s_1^f) = f_2 (f)$ محاسبه می کنیم که در این زمان با استفاده از $f_1 - f_2 = f_1 - f_2 (f)$ محاسبه می کنیم. این روند با استفاده از $f_1 - f_2 = f_2 - f_2 = f_1$ محاسبه می کنیم. این روند به صورت پیاپی تکرار می شود. درنهایت اولین تکرار الگوریتم کامل می شود و ما دوباره با استفاده از $f_1 = f_1$ و با ساختاری مشابه قبل شروع می کنیم:

 $s_{nM+r}^{f} = s_{nM+(r-1)}^{f} + P_r \left(f - s_{nM+(r-1)}^{f} \right)$ (Y1)

به یک دستگاه خطی به صورت زیر می رسیم: $\sum_{i=1}^{N_{r}} y_{i}(v_{i}^{r} \cdot v_{j}^{r}) = P_{r}g \cdot v_{j}^{r} = g \cdot P_{r}v_{j}^{r}, \quad j = 1, ..., N_{r} \quad (\Upsilon \cdot)$ ماتریس ماتریس $A_{r} = (v_{i}^{r} \cdot v_{j}^{r})_{i,j=1,...,N_{r}}$ یک زیر ماتریس از ماتریس A در معادله خطی (۱۱) است.

با ضرب داخلي طرفين بهصورت متوالى با ٧٠٠٠٠٠٧

ما اکنون الگوریتم MSAA را برای حل مسئله تصویر قائم $f = f_{\pi}$ الراساس تصویر گرهای قائم P_r بیان می کنیم. این الگوریتم در جدول (۲) آورده شدهاست. سپس همگرایی این الگوریتم را اثبات و درنهایت این الگوریتم را به ماتریسی برای حل دستگاه خطی (۱۱) تبدیل می کنیم. این الگوریتم ماتریسی، دستگاه خطی (۱۰) را با حل متناوب دستگاههای خطی به شکل (۲۰)، حل خواهد کرد.

اکنون میخواهیم نشان دهیم که دنباله تکرارهای اکنون میخواهیم نشان دهیم که دنباله تکرارهای s_{nM}^{f} در الگوریتم پیش گفته در جدول (۲)، وقتی $\infty \to \infty$ به سمت f میل میکند. قبل از اثبات این موضوع، قضیه زیر را که در فهم الگوریتم ذکرشده در جدول شماره(۲) بسیار مفید است، بیان خواهیم کرد: **قضیه 1:** اگر همهٔ نمادها و فرضیات همانند الگوریتم **قضیه 1:** اگر همهٔ نمادها و فرضیات همانند الگوریتم **قضیه 1:** اگر همهٔ نمادها و فرضیات همانند الگوریتم **قضیه 1:** اگر همهٔ نمادها و فرضیات همانند الگوریتم **بدول شماره(۲)** باشد و همچنین تصویر قائم به فضای $^{+}(\{, ', ..., v_{N, r}^{'}\})$ را که در آن $\{N, ..., N\}$ به صورت $^{+}(\{, ..., M\}) \rightarrow (span \{v_{1}^{'}, ..., v_{N, r}^{'}\})$ نمایش دهیم، یعنی $P_{r} = Id - P_{r}$ می رز کاه ویژگیهای زیر برای کلیه $\{N, ..., M\}$ برقرار خواهدبود:

جدول۲. الگوريتم MSAA.

$$Set \ f_{0} = f \in \mathbb{R}^{N} \ and \ s_{0}^{f} = 0$$

$$for \ n = 0, 1, 2, ..., do$$

$$for \ r = 1, ..., M \ do$$

$$calculate \ s_{nM+r}^{f} = s_{nM+(r-1)}^{f} + P_{r}\left(f_{nM+(r-1)}\right)$$

$$update \ f_{nM+r} = f_{nM+(r-1)} - P_{r}\left(f_{nM+(r-1)}\right)$$

$$until \ \frac{\left|\left(f_{(n+1)M} \cdot v_{1}, ..., f_{(n+1)M} \cdot v_{N}\right)^{T}\right|}{\left|\left(f_{n+1}, ..., f_{n+1}, ..., f_{n+1}, ..., r_{N}\right)^{T}\right|} \leq \varepsilon$$

41

د رابطه رابطه و العندي
$$\mathbb{R}^{N_r}$$
 یعنی مربوط به رابطه R_r و الطه R_r R_r R_r R_r R_r R_r (۲۰) را به صورت زیر تعریف کنیم:
 $R_r : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N_r}, w \mapsto R_r(w) = \left(\left(R_r(w) \right)_{i}, \dots, \left(R_r(w) \right)_{N_r} \right)^T$ (۲۶) $\left(R_r(w) \right)_i = w_j$ for the index $j \in \{1, \dots, N\}$ with $v_i^r = v_j$

$$I_{r}: \mathbb{R}^{N_{r}} \to \mathbb{R}^{N} , z \mapsto I_{r}(z) = \left(\left(I_{r}(z) \right)_{1}, ..., \left(I_{r}(z) \right)_{N} \right)^{T}$$

$$\left(I_{r}(z) \right)_{i} = \begin{cases} z_{j} & \text{if there exists } j \in \{1, ..., N\} \text{ with } v_{j}^{r} = v_{i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\left(Y \lor \right)$$

تنها موضوع باقیمانده این است که نشان دهیم الگوریتم ذکرشده در جدول (۳) پس از تکرارهای لازم تا رسیدن به شرط خروج از حلقه تکرار، جواب مسئله اولیه ما یعنی Ax =b را بهدست میدهد، درحالی که f $\in \mathbb{R}^{N}$ می کند:

$$f \cdot v_j = b_j , \ j = 1, \dots, N \tag{YA}$$

$$\mathbf{A} = \left(v_i \cdot v_j \right)_{i, j=1,\dots,N}$$

قبل از اثبات این موضوع لازم به ذکر است که در کلیه مراحل محاسبات مربوط به الگوریتم جدول (۳)، نیازی به محاسبه $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni \mathbb{N}, \dots, \mathbb{N}$ نداریم یعنی در واقع نیازی به محاسبه م $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ مین از ماتریس م ماتریس های م در واقع زیرماتریس هایی از ماتریس A مستند و در مرحله روز آمدسازی (update) نیز که نیاز به عملیات ضرب بردار در ماتریس $\mathbb{R}_{\mathbb{R}^{N-1}}$ وجود A عملیات ضرب بردار در ماتریس از ماتریس از ماتریس دارد، ماتریس مربوط نیز زیر ماتریسی از ماتریس A است.

در زیر قضیه مربوط به همگرایی جواب الگوریتم جدول (۳) به جواب دستگاه خطی Ax =b و اثبات آن آورده شده است:

$$e_{2}(\tilde{z}, S_{2}, S_$$

اگر H یک فضای هیلبرت با تعریف ضرب داخلی $_{H}$ (.,.) باشد و همچنین M زیرفضای بسته به صورت $_{H}$ داشته باشیم، آن گاه: $v_{1},...,v_{M}$

$$\left(\sum_{i=1}^{M} v_i\right)^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{M} v_i^{\perp} \tag{YF}$$

که در عبارت بالا داريم:

$$\sum_{i=1}^{M} v_i = span\left\{\bigcup_{i=1}^{M} v_i\right\}$$
(Y Δ)

بنابراین تاکنون همگرایی الگوریتم ذکرشده در جدول شماره (۲) به اثبات رسیده است. در زیر الگوریتم جدول (۲) را با استفاده از روابط (۱۶) و (۲۰) به حالت ماتریسی تبدیل میکنیم. برای این منظور نیاز داریم که عملگرهای **جدول۳.** روابط ماتریسی الگوریتم MSAA برای حل دستگاه معادلات نرمال با ابعاد بزرگ.

$$\begin{array}{l} \text{Define the matrices } \mathbf{A}_{r} = \left(v_{i}^{r} v_{j}^{r}\right)_{i,j=1,\ldots,N_{r}}, \ r = 1,\ldots,M\\ \text{set } \tilde{f_{0}} = \left(f \ v_{1},\ldots,f \ v_{N}\right)^{T}, \ a_{0} = \left(0,\ldots,0\right)^{T} \in \mathbb{R}^{N}, \text{where } f \in \mathbb{R}^{N}\\ \text{for } n = 0,1,2\ldots \ do\\ \text{for } r = 1,\ldots,M \ do\\ \text{solve } \mathbf{A}_{r}d = R_{r}\left(\tilde{f}_{nM+(r-1)}\right), \ d = \left(d_{1},\ldots,d_{N_{r}}\right)^{T} \in \mathbb{R}^{N_{r}}\\ update \ a_{nM+r} = a_{nM+(r-1)} + I_{r}\left(d\right)\\ update \ \tilde{f}_{nM+r} = \tilde{f}_{nM+(r-1)} - \left(\left(\sum_{i=1}^{N_{r}} d_{i} v_{i}^{r} v_{k}\right)_{k=1,\ldots,N}\right)^{T}\\ until \ \frac{\left|\tilde{f}_{(n+1)M}\right|}{\left|\tilde{f}_{0}\right|} \leq \varepsilon\\ compute \ s_{(n+1)M}^{f} = \sum_{i=1}^{M} \left(a_{(n+1)M}\right)_{i} v_{i}\end{array}$$

$$R_{1}: \mathbb{R}^{N} \to \mathbb{R}^{n} , R_{2}: \mathbb{R}^{N} \to \mathbb{R}^{n-m}$$

$$I_{1}: \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{N} , I_{2}: \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{N}$$
(**YY**)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{1m} & A_{1n} & A_{1N} \\ A_{m1} & A_{mm} & A_{mn} & \overline{A}_{2} & A_{mN} \\ A_{n1} & A_{nm} & A_{nn} & A_{nN} \\ A_{N1} & A_{Nm} & A_{Nn} & A_{NN} \\ \end{array} \end{pmatrix}$$

شکل۲. نمونهای از تجزیه ماتریس نرمال به دو زیر ماتریس در الگوریتم MSAA. (فریدن و میشل، ۲۰۰٤). قضیه ۲: اگر همهٔ نمادها و فرضیات همانند الگوریتم جـدول شـماره(۳) باشـد، و $_{N_{i,j=1,j}}(v_i, v_j) = A$ و $f_{i,j}(v_i, v_j) = A$ باشـد آن گـاه دنبالـه $x \in \mathbb{R}^N = \{f_{n_N}, f_{n_N}\}$ در الگوریتم مربوطه به جواب $x \in \mathbb{R}^N$ $a_{n_N} \}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}^N$ Ax = b همگرا می شود. اثبات: با توجه به قضیه ۲ و همچنین روابط (۱۶) و (Y) می دانیم که:

$$s_{nM}^{f} = \sum_{i=1}^{N} \left(a_{n} M \right)_{i} . v_{i}$$

$$(\Upsilon \cdot)$$

به سمت $x_i v_i = f = \sum_{i=1}^N x_i v_i$ جواب دستگاه خطی اب می اینکه $\mathbf{A} = b$ است، همگرا می شود. با توجه به اینکه $\mathbf{A} = b$ یک پایه \mathbb{R}^N است، می توان نتیجه گرفت که:

$$\lim_{n \to \infty} (a_{nM})_i = x_i \quad \text{for} \quad i = 1, \dots, N \tag{(1)}$$

و در نتیجـه همگرایـی الگـوریتم جـدول (۳) بـه جـواب دستگاه خطی Ax =b به اثبات میرسد. **جدول ٤**. محاسبات مربوط به دو تكرار اول الگوريتم MSAA با توجه به شكل شماره (٢).

Initialization: $r_0 = b$, $a_0 = 0 = (0, ..., 0)^T$

First step:

• solve $A_1 d = R_1(\tilde{f}_0)$, set $a_1 = a_0 + I_1(d)$; $\tilde{f}_1 = -\overline{A}_1 d$ • solve $A_2 d = R_2(\tilde{f}_1)$, set $a_2 = a_1 + I_2(d)$; $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 - \overline{A}_2 d$

Second step:

• solve $A_1 d = R_1(\tilde{f}_2)$, set $a_3 = a_2 + I_1(d)$; $\tilde{f}_3 = -\overline{A_1}d$ • solve $A_2 d = R_2(\tilde{f}_3)$, set $a_4 = a_3 + I_2(d)$; $\tilde{f}_4 = \tilde{f}_3 - \overline{A_2}d$

قابل دست یابی است. فرمت داده های شبیه سازی شده ماهواره GRACE در فایل مربوط به صورت زیر است: time $x y z \dot{x} \dot{y} \dot{z} \ddot{x} \ddot{y} \ddot{z}$ (۳۳) برای محاسبات از داده های ۳۰ روز ماهواره با فاصله زمانی ۳۰ ثانیه استفاده شده است. علت استفاده از دادههای ۳۰ روز ماهواره همان بحث ارضای شرط نظریه نمونه برداری است که در قسمت دوم مقاله در مورد آن صحبت شد. از طرف دیگر چون در راستای نصف النهارها پوشش کامل است، پس نیازی به استفاده از داده ا با فاصله زمانی ۵ ثانیه نیست (شریفی، ۲۰۰۴). بنابراین مشاهدات با فاصله زمانی ۳۰ ثانیه در نظر گرفته شده است که با این کار تعداد معادلات کاهش می یابد و از بار محاسباتي بدون اينكه لطمهاي به نتايج وارد شود، به شدت کاسته می شود. در نتیجه تعداد معادلات ۸۶۴۰۰ خواهد بو د.

از آنجایی که موقعیت ماهواره و مشتقات مرتبه اول و دوم آن تنها داده های موجود در فایل شبیه سازی شده هستند، مشاهدات سامانهٔ KBR ماهواره با استفاده از روابط زیر شبیه سازی شده است (شریفی ۲۰۰۴):

$$\rho(t) = \sqrt{\left\langle \Delta \mathbf{r}(t), \Delta \mathbf{r}(t) \right\rangle} \tag{(34)}$$

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{\rho(t)} \left\langle \Delta \mathbf{r}(t), \Delta \dot{\mathbf{r}}(t) \right\rangle \tag{\mathcal{T}}$$

۴ نتایج عددی

در این قسمت برای محاسبات از دادههای شبیهسازی شده دینامیکی ماهواره GRACE قابل دسترسی از سایت http://www.geod.uni-bonn.de/index.html، استفاده شده است. شبیه سازی مدار با استفاده از روش های عددی توليد مدار (روش هاي انتگر ال گيري عددي) صورت گرفته است. بهاین صورت که با استفاده از یک نقطه اولیه، مدار بهصورت عددي در ميدان جاذبه حاصل از يک مدل ژئویتانسیلی تولید می شود. در شبیه سازی داده ها از مدل ژئويتانسيلي EGM96 تا درجه و مرتبه ۳۰۰ استفاده شده است. مدار ماهواره برای دوره زمانی ۳۰ روزه با فواصل زمانی ۵ ثانیـه تولیـد شـدهاسـت. خروجـی تولیـد مـدار بهصورت عددی عبارت است از بردارهای موقعیت و سرعت در دستگاه لَختی که پس از آن با استفاده از روابط و تبديلات لازم، بردار شتاب نيز در دستگاه لَختي بهدست آمده است. دادههای شبیه سازی شده دینامیکی ماهوارههای GRACE شامل زمان برحسب تاريخ جولياني (Julian) و بردارهای موقعیت، سرعت و شتاب در دستگاه مختصات شبهلختی است. ویژگیهای دستگاه مختصات شبهلختی و جزئیات بیشتر در مورد دادههای شبیهسازی شده از پایگاه http://www.geod.uni-

bonn.de/englisch/apmg/lehrstuhl/simulationsszena rien/sc7/Readme.pdf زیرماتریس های لازم برای اجرای الگوریتم MSAA با ۵۰ درصد هم پوشانی تشکیل شده است. با این مقدار درصد هم پوشانی، تعداد زیرماتریس های مربوط یعنی مقدار M در الگوریتم جدول (۳) ۲۹ زیرماتریس است. با این درصد هم پوشانی و تعداد زیرماتریس، دستگاه پس از ۲۰ تکرار همگرا شده و مدت زمان تکرارها تا رسیدن به شرط موردنظر برای خروج از حلقه تکرار حدود ۳۰ دقیقه است. در مرحله بعد برای تحلیل نتایج خود با استفاده از

ضرایب بر آورد شده و همچنین با استفاده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰، ارتفاع ژئویید روی یک گرید منظم °ا× °۱ در کل جهان بهدست آمده است. برای بهدست آوردن ارتفاع ژئویید از میدان نرمال GRS80 (موریتز، ۱۹۸۰) استفاده شده است.

در شکل (۴) ضرایب بر آوردشده و همچنین ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ بهصورت degree variance به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل (۵) اختلاف ارتفاعات ژئویید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ و ارتفاعات محاسبه شده از ضرایب بر آورد شده به نمایش در آمده است. $\ddot{\rho}(t) = \frac{1}{\rho(t)} \langle \Delta \mathbf{r}(t), \Delta \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle^{+}$ $\frac{1}{\rho(t)} \langle \Delta \mathbf{r}(t), \mathbf{I} \rangle^{-1} \langle \Delta \mathbf{r}(t) \mathbf{I} \rangle^{-1} \mathbf{I} \rangle^{-1} \Delta \dot{\mathbf{r}}(t)$ $\frac{1}{\rho(t)} \Delta \dot{\mathbf{r}}^{T}(t) \left[\mathbf{I}_{3\times3} - \frac{1}{\rho^{2}} \Delta \mathbf{r}^{T}(t) \otimes \Delta \mathbf{r}(t) \right]^{-1} \Delta \dot{\mathbf{r}}(t)$ $\Delta \dot{\mathbf{r}}(t)$ $\Delta \mathbf{r}(t)$ $\Delta \mathbf{r}(t) \left[\mathbf{I}_{3\times5} - \frac{1}{\rho^{2}} \Delta \mathbf{r}^{T}(t) \otimes \Delta \mathbf{r}(t) \right]^{-1} \Delta \dot{\mathbf{r}}(t)$ $\Delta \mathbf{r}(t)$ $\mathbf{r}(t)$ $\mathbf{r}(t)$ $\mathbf{$

دستگاه معادلات خطی با ابعاد ۸۶۴۰۰ معادله و ۱۴۶۴ مجهول تشکیل شده، دستگاه معادلات نرمال مربوط با استفاده از الگوریتم MSAA حل شده و در پایان ضرایب هماهنگ کروی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ بر آورد شده است.



شکل ٤. ضرایب ژئوپتانسیلی بر آورد شده تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از مشاهدات شبیهسازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE.



شکل ۵. اختلاف ارتفاع ژنویید محاسبه شده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۲۰ و ضرایب بر آورد شده تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از مشاهدات شبیهسازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد برحسب متر).

مدار ماهواره از آن استفاده شده است، باعث ایجاد تداخل سیگنال در برآورد ضرایب تا درجه و مرتبه ۱۲۰ می شود و

در نتیجه اختلاف ضرایب بر آورد شده و ضرایب واقعی

(ضرایب مدل EGM96) را به دنبال دارد. در مرحله بعد،

مقادیر شتاب در نقاط مشاهداتی ماهواره تا درجه و مرتبه

۱۲۰ مجاسب و از ایسن شیبه میشاهدات

Quasi) در بـــر آورد ضــرایب

ت. نتایج در شکل های (۶) و (۷)

همان گونه که در شکل شماره (۴) مشاهده می شود، میزان جدایی میان ضرایب بر آورد شده و ضرایب مدل EGM96 در درجه و مرتبه های بالا افزایش می یابد. این جدایی در اختلاف ارتفاعات ژئویید محاسبه شده در شکل (۵) نیز نمایان می شود، که این امر مورد انتظار است. زیرا همان طور که ذکر شد، اگرچه داده های شبیه سازی شده ماهواره عاری از هر گونه نوفه ای است و همچنین شرط نظریهٔ نمونه برداری ارضا شده است، اما درجه و مرتبه های بالای ۱۲۰ تا ۳۰۰ که در شبیه سازی



observation)

تفادہ شے

آورده شده اس

لده ار

شکل7. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۱۲۰ با استفاده از شبه مشاهدات شبیهسازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE.



شکل۷. اختلاف میان ارتفاعات ژنویید محاسبه شده از مدل EGM96 تـا درجـه و مرتبـه ۱۲۰ و ضـرایب بـرآورد شـده تـا درجـه و مرتبـه ۱۲۰ بـا استفاده از شبهمشاهدات شبیهسازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد برحسب متر).

تشکر و قدردانی از حمایت مالی دانشگاه تهران از این تحقیق در قالب طرح پژوهشی شماره ۸۱۰۸۰۱۲/۱/۰۴ قدردانی می گردد.

```
منابع
```

- Freeden, W. and Michel, V., 2004, Multiscale (Geo) Potential theory, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin.
- Garcia, R. V., 2002, Local geoid determination from GRACE mission. Rep 460, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Griebel, M. and Oswald, P. 1995, On the Abstract Theory of Additive and Multiplicative Schwarz Algorithms, Numer. Math., **70**, 163-180.
- Groten, E., 1979, Geodesy and the Earth's Gravity Field, DÄummler, Bonn.
- Hajela, D. P., 1974, Improved procedures for the recovery of 5° mean gravity anomalies from ATS-6/GEOS-3 satellite-to-satellite range-rate observation. Rep 276, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus
- HÄammerlin, G. and Hoffmann, K. H., 1992, Numerische Mathematik. Springer, Berlin.
- Han, S. C., 2003, Efficient global gravity determination from satelliteto- satellite tracking (SST). Rep 467, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Han, S. C., Jekeli, C. and Shum, C. K., 2003, Static and temporal gravity field recovery

همان گونه که در شکلهای (۶) و (۷) مشاهده می شود، بازیابی ضرایب به صورت کامل و با دقت بسیار زیادی صورت گرفته و بیشینه اختلاف ارتفاعات ژئویید محاسبه شده از مدل EGM96 و ضرایب بر آورد شده به 10⁻⁸ متر رسیده است. با رسیدن به این حد از دقت در بازیابی ضرایب، کارایی الگوریتم MSAA (از نظر دقت و سرعت همگرایی) در حل دستگاه معادلات مربوطه به اثبات می رسد.

۵ نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از مشاهدات شبیه سازی شده دینامیکی ۳۰ روزه ماهواره های GRACE و با استفاده از تابعک مشاهداتی اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE، دستگاه معادلات خطی مربوط به بازیابی ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ بنا شد. دستگاه معادلات نرمال مربوطه با استفاده از الگوریتم MSAA حل شد و درنهایت ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۱۲۰ بر آورد شد. نتایج به دست آمده حاکی از کارایی روش MSAA از نظر دقت و سرعت همگرایی در حل دستگاه معادلات مربوط است. thesis, Department of Geodesy and Geoinformatics, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany.

- Sharifi, M. A., 2004, Satellite gradiometry using a satellite pair. Diploma Thesis, Geodetic Institute, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy, University of Stuttgart.
- Visser, PNAM, Sneeuw, N. and Gerlach, C., 2003, Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates. J.Geod., **77**, 207–216.

using grace potential difference observables. Adv Geosci., 1, 19–26.

- Hesse, K., 2003, Domain Decomposition Methods in Multiscale Geopoten-tial Determination from SST and SGG,Ph.D. Thesis, University ofKaiserslautern, Germany, Geomathematics Group, Shaker, Aachen.
- Jekeli, C., 1999, The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking. Celest Mech Dynam Astron **75**, 85–101
- Keller, W. and Sharifi, M. A., 2005, Satellite Gradiometry using a satellite pair. J. Geodesy.,78, 544-557.
- Lions, P. L., 1988, On the Schwarz Alternating Method I, in: Proc. 1st Internat. Symp. \Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations", Paris, January 1987, R. Glowinski et al. (eds), SIAM, Philadelphia, 1-42.
- Lions, P. L., 1989, On the Schwarz Alternating Method II: Stochastic Interpretation and Order Properties, in: Proc. 2nd Internat. Symp. "Domain Decomposition Methods", Los Angeles, CA, January 1998, T.F.Chan et al. (eds), SIAM, Philadelphia, 47-70.
- Lions, P. L., 1999, On the Schwarz Alternating Method III: A Variant for Nonoverlapping Subdomains, in: Proc. of the 3rd Internat. Symp."Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations", Houston, TX, March 1989, T.F. Chan et al. (eds), SIAM Philadelphia, 202-223.
- Moritz, H., 1980b, Geodetic Reference System 1980. Technical report.
- Rummel, R., 1980, Geoid height, geoid height differences, and mean gravity anomalies from 'low-low' satellite-to-satellite tracking—an error analysis. Rep 306, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Rummel, R., 2003, How to climb the gravity wall. Space Sci Rev **108**,1–14.
- Rummel, R., Balmino, G., Johannessen, J., Visser, P. and Woodworth, P., 2002, Dedicated gravity field missions—principles and aims. J. Geodynam, **33**, 3–20.
- Sanso, F., 1990, On the aliasing problem in the spherical harmonic analysis. Bulletin Géodésique, **64**, 313-330.
- Schwarz, H. A., 1890, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Vol 2, Springer Verlag, Berlin.
- Sharifi, M. A., 2006, Satellite to Satellite Tracking in the Space-Wise Approach, Ph.D