

بهبود مدل‌سازی معکوس داده‌های الکترومغناطیس هوایی حوزه فرکانس با اعمال قید عمقی

اکو علیپور^۱، علی نجاتی کلاته^{۲*} و علیرضا عرب‌امیری^۳

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران

۲. استادیار، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران

۳. دانشیار، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران

(دریافت: ۹۴/۱/۲۹، پذیرش نهایی: ۹۴/۷/۱۴)

چکیده

در این مطالعه برای بهبود نتایج مدل‌سازی و تفسیر داده‌های الکترومغناطیس هوابرد حوزه فرکانس کوشش شده است. به این منظور با استفاده از قیدهایی چون هموارساز و قید عمقی، الگوریتم وارون‌سازی بر پایه اصلاح مدل در هر تکرار در محیط نرم‌افزار متلب برنامه‌نویسی شده است. از مزایای وارون‌سازی مقید یک‌بعدی داده‌های الکترومغناطیسی، پایداری الگوریتم در روند مدل‌سازی تک‌بعدی سونداژهای الکترومغناطیسی است. با استفاده از این الگوریتم، هموارسازی در طول الگوریتم و با استفاده از خطای عدم برازش کنترل خواهد شد. از طرفی وارون‌سازی با توجه به اطلاعات عمقی لایه‌های مختلف مقاومت‌ویژه در هر سونداژ انجام می‌گیرد و حتی امکان استفاده از اطلاعات وارون‌سازی سونداژهای مجاور با مقایسه اطلاعات عمقی آن‌ها و تعریف قید جانبی فراهم می‌آید. وارون‌سازی مقید می‌تواند مقاطعی شبه‌دو‌بعدی از کنار هم قراردادن مدل‌های یک‌بعدی نتیجه دهد که قابلیت تفسیر بهتر و اطلاعات بیشتری از تغییرات مقاومت ویژه را در منطقه فراهم می‌آورد. از معایب این روش افزایش زمان وارون‌سازی است که در روش‌های هوابرد به دلیل حجم زیاد داده‌ها فاکتور مهمی محسوب می‌شود. در مرحله بعد وارون‌سازی روی مدل مصنوعی استاندارد، حاوی درصدی نوفه، آزمایش و با توجه به نتایج مشخص می‌شود و این روش می‌تواند به‌عنوان روشی کارا و مؤثر در وارون‌سازی داده‌های الکترومغناطیس هوابرد به کار گرفته شود. در نهایت از این الگوریتم برای وارون‌سازی داده‌های واقعی منطقه میرگه نقشینه در حوالی شهرستان سقز در استان کردستان استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: الکترومغناطیس هوابرد، کردستان، مقیدسازی عمقی، میرگه نقشینه، وارون‌سازی.

۱. مقدمه

دستگاه‌های اندازه‌گیری نیز باید بسیار دقیق صورت پذیرد؛ چرا که در غیر این صورت اصلاح افت دقت دستگاه‌های اندازه‌گیری، غیرممکن و هم‌ترازسازی داده‌ها به مسئله‌ای بسیار پیچیده تبدیل می‌شود (فیتزمن و دشرین، ۱۹۹۸).

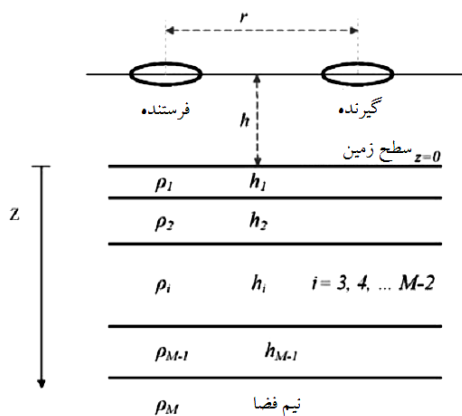
امروزه شبه مقاطع قائم مقاومت‌ویژه‌های لایه‌های زمین و نقشه‌های مشتق‌شده از آن، از روش‌های وارون‌سازی به دست می‌آیند (فلوچی و سنگپیل، ۱۹۹۷). محدودیت‌های روش HEM علاوه بر تفسیر دشوار این است که داده‌ها غالباً تا عمق کمتر از ۲۰۰ متر قابل تفسیر خواهد بود. به دلیل تراکم بسیار زیاد داده‌های برداشت معمولاً تفسیر سونداژها به صورت یک‌بعدی کفایت می‌کند، اما در صورتی که تغییرات جانبی در منطقه زیاد

مطالعات الکترومغناطیس هوابرد قادر است در مدت زمان کوتاهی مقاومت‌ویژه مناطق وسیعی را با در نظر گرفتن عمق مرکزی مقاومت‌ویژه مربوطه به صورت نقشه درآورد (فریزر، ۱۹۷۸؛ سنگپیل، ۱۹۸۸؛ هوانگ و فریزر، ۱۹۹۶). اطلاعات جامعی از سیستم‌های هوابرد الکترومغناطیسی از جمله روش الکترومغناطیسی هلیکوپتری (HEM) در پالاکی و وست ۱۹۹۱ قابل مطالعه است. برداشت‌های هوابرد الکترومغناطیسی حوزه فرکانس شامل برداشت‌های هواپیما با بال ثابت که معمولاً برای برداشت داده در حوزه زمان استفاده می‌شود و برداشت‌های هلی‌کوپتری است که معمولاً در حوزه فرکانس استفاده می‌شود. معمولاً برای سیستم‌های الکترومغناطیسی هلیکوپتری حوزه فرکانس، کالیبراسیون

الکترومغناطیس زمینی به روز شده‌اند (آوکن و کریستنسن، ۲۰۰۴).

نرم‌افزار BGR یکی از نرم‌افزارهای موفق در زمینه مدل‌سازی داده‌های HEM است که توسط مؤسسه فدرال زمین‌شناسی و محیط زیست آلمان، با هدف تحقیقات زمین‌شناسی و آلودگی‌های زیست‌محیطی، برای تفسیر و مدل‌سازی هزاران کیلومتر از داده‌های HEM، استفاده شده و موفق‌ترین نرم‌افزار در این زمینه بوده است (سنگپیل و سیمون، ۱۹۹۸؛ سیمون و همکاران، ۲۰۰۲؛ کرش و همکاران، ۲۰۰۳؛ سیمون و همکاران، ۲۰۰۴). در این نرم‌افزار وارون‌سازی به روش مارکوارت-لونبرگ و بر اساس تبدیل هنکل سریع صورت می‌گیرد که به دنبال هموارترین برازش داده‌هاست (سنگپیل و سیمون، ۱۹۹۸ و ۲۰۰۰). این رویه زمانی متوقف می‌شود که به آستانه تغییرات نسبی برسد و این آستانه تغییرات را تفاضل برازش با داده‌های HEM مشخص می‌کند. این مقدار برای داده‌های مصنوعی معمولاً ۱ درصد و برای داده‌های صحرائی ۱۰ درصد تعیین می‌شود و در تعداد تکرار خاصی متوقف می‌شود.

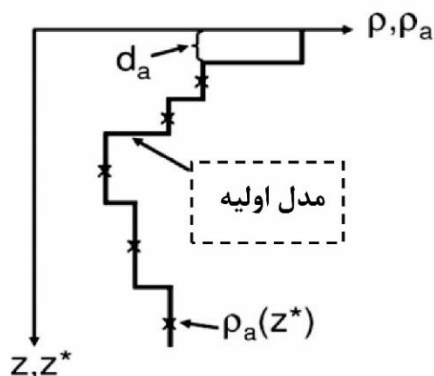
به دلیل محدودیت‌های موجود در روش گفته‌شده، وارون‌سازی به روش مقید عمقی پیشنهاد شده است که به نظر کارا تر و پایدارتر است. در واقع در این روش مدل‌های یک‌بعدی به هم دوخته می‌شوند و در طول پروفیل برداشت نسبت به هم هموارسازی و مقید عمقی خواهند شد (تارانتولو و والت، ۱۹۸۲).



شکل ۱. شمایی از یک سیستم تک‌فرکانسی با پیچیده‌های افقی فرستنده و گیرنده (دیویس، ۲۰۰۷).

شود، کنار هم قراردادن نتایج سونداژهای یک‌بعدی پاسخگو نخواهد بود (سنگپیل و سیمون، ۲۰۰۰). عامل نوفه در داده‌های مذکور نیز به صورت سخت‌افزاری با اعمال یک فیلتر پایین‌گذر تا حدی قابل رفع است، اما باید توجه داشت رفع نوفه با اعمال فیلتر احتمالاً قسمتی از اطلاعات مفید را از داده‌های برداشت‌شده حذف می‌کند (بیکر، ۲۰۰۵).

سیستم‌های برداشت گوناگونی از ترکیب دو حالت قرارگیری عمودی و افقی پیچیده‌های فرستنده و گیرنده نسبت به هم در مطالعات HEM به وجود می‌آید که به صورت مبسوط در دیویس (۲۰۰۷) آمده است. در این تحقیق مدل‌سازی براساس سیستم جفت‌شدگی افقی (Horizontal Coil Planner (HCP)، انجام گرفته است که بیشترین حساسیت را به لایه‌بندی قائم و کمترین حساسیت را به تغییرات جانبی منطقه دارد. سیستم برداشت متشکل از چند فرستنده و گیرنده کوچک است. پیچۀ فرستنده، میدان مغناطیسی متغیر با زمان تولید می‌کند. میدان اولیه که نیروی الکترومغناطیسی به نواحی مجاور از فضای اطراف وارد می‌کند؛ باعث ایجاد جریان‌های القایی در زمین می‌شود. جریان القایی متناسب با میدان اولیه، میدان مغناطیسی متغیری تولید می‌کند. این میدان توسط پیچۀ گیرنده آشکارسازی می‌شود. میدان ثانویه حاوی اطلاعاتی از پراکندگی مقاومت‌ویژه داخلی زمین است. وابستگی میدان ثانویه به مقاومت‌ویژه نیم‌فضا که کاملاً غیر خطی است، ما را به استفاده از جداول و منحنی‌های خاص برای تعیین مدل اولیه طی فرایندهای وارون‌سازی ملزم می‌کند (بیرد و نایکوویست، ۱۹۹۸)؛ بنابراین در مقیاس‌های بزرگ تفسیر را به کاری طاقت‌فرسا و بسیار زمان‌بر تبدیل می‌کند. به منظور کاربردی کردن این روش‌ها در برداشت‌های با حجم انبوه از داده‌ها می‌توان از روش‌های محاسباتی نیم‌فضا به منظور تعیین مدل اولیه استفاده کرد که درباره آن در ادامه بحث می‌شود. روش‌های وارون‌سازی زیادی نیز برای مدل‌سازی دقیق داده‌های الکترومغناطیسی پیشنهاد شده که تمام این روش‌ها بر اساس تبدیل هنکل سریع (Fast Henkel Transform) و تبدیل لاپلاس (Laplace Transform) است (فلوچی و سنگپیل، ۱۹۹۷). معمولاً این روش‌ها برای



شکل ۲. تعیین مدل اولیه بر اساس ضخامت لایه و مقاومت ویژه متناظر (با خطوط تیره مشابه یک نمودار پله ای نشان داده شده است) بر اساس مقاومت ویژه ظاهری و عمق مرکزی متناظر (با علامت ضربدر مشخص شده است). در شکل مقاومت ویژه با ρ ، مقاومت ویژه ظاهری با ρ^* ، عمق با Z و عمق مرکزی با Z^* نشان داده شده است (سیمون و همکاران، ۲۰۰۹).

شکل ۲ به صورت شماتیک تعیین مدل اولیه را با استفاده از مقاومت ویژه ظاهری متناظر با عمق مرکزی نشان می دهد ($\rho(z^*)$).

d_a را فاصله ظاهری می گویند؛ اگر مثبت باشد، لایه زیرین مقاوم تر از روباره است و اگر منفی باشد، لایه زیرین از روباره رساناتر است. استفاده از این پارامتر در تعیین مدل اولیه بسیار مفید است (سنگپیل، ۱۹۸۸).

۲.۲. وارون سازی با اعمال قید عمقی

اطلاعات اولیه کمک می کند تا مدل ها با جواب غیریکتا، راحت تر به جواب یکتا نزدیک شوند (جکسون، ۱۹۷۹). اطلاعات اولیه از دو پارامتر اولیه ضخامت و مقاومت ویژه تشکیل شده است که با m_{prior} در رابطه (۲) وارد می شود (آوکن و کریستنسن، ۲۰۰۴).

$$I\delta m_{true} = \delta m_{prior} + e_{prior} \quad (2)$$

$$\delta m_{prior} = m_{prior} - m_{ref}$$

$$Im_{true} = m_{prior} + e_{prior}$$

که در آن، m_{ref} مدل اولیه ارجاع داده شده در هر تکرار از وارون سازی است. m_{true} نزدیک ترین مدل به مدل واقعی در هر تکرار است. e_{prior} بردار خطا برای اطلاعات اولیه است که انتظار داریم به سمت صفر میل

۲. روابط ریاضی

برای محاسبه پاسخ میدان ثانویه در لایه های ناهمگن زمین در برداشت های HEM حوزه فرکانس از روابط آتی استفاده می شود (وایت، ۱۹۸۲).

$$Z(ppm) = \frac{Z_S}{Z_p} = R + iQ = \quad (1)$$

$$r^{-3} \int_0^\infty R_1(f, \lambda, \rho(z)) \lambda^2 e^{-2\lambda h} j_0(\lambda r) d\lambda$$

که در آن، Z میدان مختلط ثانویه نرمال شده؛ Z_S میدان ثانویه؛ Z_p میدان اولیه؛ R ، Q به ترتیب قسمت های ناهم فاز و هم فاز (داده های برداشتی)؛ r فاصله افقی گیرنده و فرستنده؛ h ارتفاع سنجش گر از زمین؛ λ عدد موج؛ f فرکانس؛ i واحد اختلاط؛ j_0 تابع بسل نوع اول درجه صفر و $R_1(f, \lambda, \rho(z))$ فاکتور بازتاب است که مختلط است.

این روابط تنها زمانی اعتبار دارند که پیچ های برداشت (سیم پیچ های فرستنده و گیرنده) دارای سیستم جفت شدگی افقی (HCP) یا دارای قطبیت مغناطیسی عمودی (Vertical Magnetic Dipole (VMD)) باشند (سیمون، ۲۰۰۱).

۲.۱. مدل اولیه

برای دستیابی به یک مدل اولیه کارا به منظور وارون سازی داده های الکترومغناطیسی هوای برد، مدل باید هم از دقت خوبی برخوردار باشد و هم دارای پیچیدگی های زیادی نباشد. شرط اول باعث پایداری و بهبود نتایج و شرط دوم باعث سرعت بخشیدن به رویه وارون سازی در الگوریتمی اتوماتیک می شود که داده های خام را دریافت کند و مدل مقاومت ویژه متناظر با عمق را نتیجه دهد. در این مقاله با بهره گیری از روش تعیین مقاومت ویژه ماندری که در سال ۱۹۸۴ ارائه شد و عمق مرکزی متناظر با مقاومت ویژه ظاهری که با استفاده از ترکیب روش های ایدلت (۱۹۷۲) و سیمون (۲۰۰۱) تعیین می شود، به منظور تعیین مدل اولیه ای بر اساس ضخامت لایه های متناظر با مقاومت ویژه مربوطه، برنامه ای در محیط نرم افزار متلب نگاشته شده است.

کواریانس نشان داده می‌شود. c_{pp} طوری انتخاب می‌شود که قطری باشد (فارکواریانس و الدنبرگ، ۱۹۹۸).

برای بسیاری از برنامه‌نویسی‌های کاربردی، قیدهای هموارساز و عمقی بسیار مفیدند و تنها زمانی این قیدها با هم قابل اعمال هستند که ضخامت‌ها ناپیوسته در نظر گرفته شوند. حل‌های معکوسی که در این زمینه فرمول‌بندی شده‌اند، از پارامترهای اولیه مدلی یعنی ضخامت و مقاومت ویژه استفاده می‌کنند. زمانی که اطلاعات اولیه مربوط به عمق لایه‌ها در دسترس باشد، با توجه به اطلاعات اولیه عمق یا h_prior اضافه می‌شود (آوکن و کریستنسن، ۲۰۰۴).

$$P_h \delta m_{true} = \delta m_{h_prior} + e_{h_prior} \quad (6)$$

$$\delta m_{h_prior} = h_{prior} - P_h m_{ref}$$

$$P_h m_{true} = h_{prior} + e_{h_prior}$$

$$P_h = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \frac{t_{k,1}}{h_{k,2}} & \frac{t_{k,2}}{h_{k,2}} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \frac{t_{k,1}}{h_{k,n}} & \frac{t_{k,2}}{h_{k,n}} & \frac{t_{k,3}}{h_{k,n}} & \dots & \frac{t_{k,n}}{h_{k,n}} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (7)$$

با استفاده از ماتریس P_h اطلاعات عمق به صورت اطلاعات اولیه فرمول‌بندی می‌شوند و در نهایت ماتریس فوق که ترکیب اطلاعات عمقی و لایه‌بندی پیش‌بینی شده است، برای به کار بردن در روند وارون‌سازی ساخته می‌شود. $t_{k,n}$ ضخامت لایه در سونداژ k ام و لایه n ام است و $h_{k,n}$ عمق قرارگیری سطح لایه سونداژ k ام لایه n ام است. ستون‌های اول با توجه به مقاومت ویژه‌ها تعریف می‌شوند و مقدار صفر به خود می‌گیرند.

اگر G ماتریس کرنل در مدل‌سازی خطی و ماتریس ژاکوبین در مدل‌سازی غیرخطی باشد (منکه، ۱۹۸۹)، δd_{obs} اختلاف داده‌های مدل با داده‌های صحرائی و بردار خطای داده‌ها باشد که انتظار می‌رود صفر شود؛ در نهایت خواهیم داشت (آوکن و کریستنسن، ۲۰۰۴):

$$\begin{bmatrix} G \\ I \\ P_h \\ R_h \\ R_p \end{bmatrix} \delta m_{true} = \begin{bmatrix} \delta d_{obs} \\ \delta m_{prior} \\ \delta m_{h_prior} \\ \delta r_h \\ \delta r_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{obs} \\ e_{prior} \\ e_{h_prior} \\ e_{rh} \\ e_{rp} \end{bmatrix} \quad (8)$$

کند. I ماتریس قطری با درایه‌های قطر اصلی یک است. واریانس یا مغایرت‌ها در مدل اطلاعات اولیه به وسیله یک ماتریس کواریانس توصیف می‌شود (c_{prior}) (آوکن و کریستنسن، ۲۰۰۴). نقش ماتریس کواریانس در مسئله، کنترل قدرت قیدهای اعمالی در هر تکرار از وارون‌سازی است که مقدار آن توسط بردار خطای قید اعمالی کنترل می‌شود. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه، خواننده علاقه‌مند می‌تواند به آوکن و کریستنسن (۲۰۰۴) و آوکن و همکاران (۲۰۰۵) مراجعه کند که به تفصیل در این زمینه بحث کرده‌اند.

در مرحله بعد قید هموارساز اعمال می‌شود. این قید در حالت کلی به m_{true} یا نزدیک‌ترین مدل به مدل واقعی در هر تکرار وابسته است (آوکن و کریستنسن، ۲۰۰۴).

$$R_p \delta m_{true} = \delta r_p + e_{rp} \quad (9)$$

e_{rp} خطای قید اعمالی است که انتظار می‌رود صفر شود.

$$-R_p m_{ref} = \delta r_p \quad (4)$$

$$R_p m_{true} + e_{rp} = 0$$

که در آن، δr_p گام تغییرات مدل اولیه ارجاعی در هر تکرار به واسطه پارامتر هموارسازی R_p است. پارامتر هموارسازی R_p به ازای مکان قیدهای اعمالی یک و منفی یک می‌گیرد و به سایر درایه‌های دیگر صفر اختصاص داده می‌شود (آوکن و کریستنسن، ۲۰۰۴). تعداد سطرهای این ماتریس برابر تعداد لایه‌های مورد نظر در وارون‌سازی است و تعداد ستون‌های این ماتریس برابر تعداد پارامترهای مسئله است (آوکن و کریستنسن، ۲۰۰۴؛ آوکن و همکاران، ۲۰۰۵). برای کسب اطلاعات بیشتر درباره قید هموارساز، خواننده علاقه‌مند می‌تواند به ویرایش دوم کتاب استر و همکاران (۲۰۱۳) مراجعه کند.

$$R_p = \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

واریانس یا قدرت قید اعمالی به وسیله ماتریس

۳. آزمایش مدل اولیه در وارون سازی به روش لونبرگ -

مارکوارت روی مدل مصنوعی حاوی نوفه استاندارد

داده های مصنوعی استفاده شده با استفاده از کد فوروارد بهبود یافته گوپتاساراماسینگ (گوپتاساراما و سینگ، ۱۹۹۷) که پاسخ یک مدل دو بعدی است، برای قسمت های هم فاز و ناهم فاز داده های الکترومغناطیس هوا برد حوزه فرکانس با گام های ۵ متری، ارتفاع پرواز ۳۰ متری و فاصله ۸ متری سیم پیچ های گیرنده و فرستنده، در فرکانس های $f_3=8225$ ، $f_4=1820$ ، $f_5=387$ ($f_1=133200$ Hz، $f_2=41550$ ، محاسبه شده است و در نهایت با ۱ تا ۵ (ppm) نوفه ترکیب شده اند که تا حدی توجیه کننده پیچیدگی های زمین شناسی باشد؛ شایان ذکر است که داده های مدل مصنوعی استفاده شده، به همت محققان دانشگاه شاهرود طی مطالعات قبلی در این زمینه فراهم آمده است و پاسخ کد فوروارد استفاده شده در این الگوریتم وارون سازی نیست (عرب امیری و همکاران، ۲۰۱۰).

در شکل ۳-الف داده های استاندارد حاوی ۱ تا ۵ درصد نوفه تصادفی در فرکانس های برداشت، ۳۷۶، ۱۸۲۰، ۸۲۲۵، ۴۱۵۵۰، ۱۳۳۲۰۰، هر تزن نشان داده شده است. در شکل ۳-ب مدل مصنوعی استفاده شده برای وارون سازی داده های الکترومغناطیس هوا برد حوزه فرکانس با روش مارکوارت - لونبرگ و وارون سازی با اعمال قید عمقی و هموار ساز نشان داده شده است. در قسمت ج، نتایج وارون سازی داده های الکترومغناطیس هوا برد حوزه فرکانس با روش مارکوارت - لونبرگ نشان داده شده است و در قسمت د، وارون سازی داده های الکترومغناطیس هوا برد حوزه فرکانس با اعمال قید عمقی و هموار ساز نشان داده شده است. با مقایسه قسمت ج و ب (شکل ۳) مشاهده می شود که ضخامت لایه اول ۱۵ متر به دست آمده است، در حالی که ضخامت این لایه ۲۰ متر است. ضخامت لایه سوم نیز در قسمت هایی که دوباره رسانا وجود ندارد، ۲۰ متر و در قسمت هایی که دوباره رسانای ۵۰ اهم متری وجود دارد، تقریباً صفر به

که به صورت ساده شده می توان آن را به صورت رابطه (۹) نمایش داد (منکه، ۱۹۸۹):

$$G' \delta m_{true} = \delta d' + e' \quad (9)$$

ماتریس های قطری کواریانس C_{obs} که واریانس داده های مشاهده ای است، C_{prior} که واریانس اطلاعات اولیه است، $C_{h-prior}$ که واریانس قید عمقی است، C_{Rh} که واریانس قید هموار ساز است و C_{Rp} که واریانس قید جانبی است؛ در نهایت ماتریس C' را با استفاده از رابطه (۱۰) نتیجه می دهند که می تواند برای برقراری ارتباط میان وارون سازی و خطاهای موجود e' به صورت ماتریس رابطه (۱۰) تعریف شود (آوکن و کریستنسن، ۲۰۰۴):

$$C' = \begin{bmatrix} C_{obs} & & & & 0 \\ & C_{prior} & & & \\ & & C_{h-prior} & & \\ & & & C_{Rp} & \\ 0 & & & & C_{Rh} \end{bmatrix} \quad (10)$$

اگر δm_{est} گام اصلاح مدل در هر تکرار از الگوریتم وارون سازی باشد (منکه، ۱۹۸۹):

$$\delta m_{est} = (inv[G'^T C'^{-1} G']) G'^T C'^{-1} \delta d' \quad (11)$$

در نهایت می توان رابطه (۱۱) را بازنویسی کرد (منکه، ۱۹۸۹):

$$m_{n+1} = m_n + ((inv[G_n'^T C'^{-1} G_n' + \lambda_n I]) G_n'^T C'^{-1} \delta d_n') \quad (12)$$

که در آن، m_n مدل در تکرار n ام و λ_n ضریب دمپ مارکوارت (مارکوارت، ۱۹۶۳) به ازای تکرار n ام است.

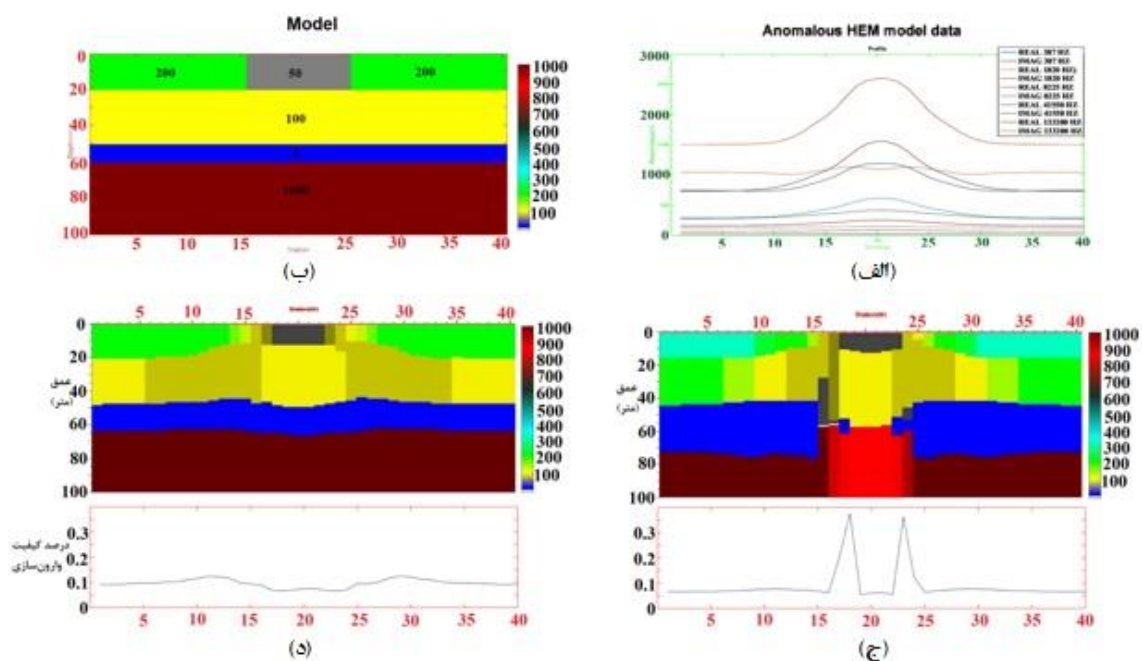
عدم برازش داده ها یا کیفیت وارون سازی نیز از رابطه (۱۳) به دست می آید (سیمون و همکاران، ۲۰۰۹):

$$q[\%] = \frac{100}{2N} \sum_{i=1}^{2N} \left| \frac{d_i - m_i}{d_i} \right| \quad (13)$$

که در آن، d_i داده های واقعی و m_i داده های مدل تولید شده به ازای ایستگاه i ام و N تعداد فرکانس های برداشت داده است. q عدم برازش یا کیفیت وارون سازی را مشخص می کند.

و عدم موفقیت الگوریتم در تعیین مقاومت ویژه لایه آخر مدل علیرغم خطای عدم برازش کم به اشتباه مدل سازی شده است (قاعده عدم یکتایی مدل در وارون سازی (منکه، ۱۹۸۹). در قسمت د تعدیل خطای عدم برازش با به دست آمدن نتایج دقیق و پایدارتر مشاهده می شود. تأثیرات روباره رسانا بین ایستگاه های ۱۵ تا ۲۵ توسط قید عمقی کنترل شده است و الگوریتم موفقیت آمیز عمل کرده است. تأثیرات قید هموارساز نیز با مقایسه لایه دوم از قسمت های ج و د قابل مشاهده است. تأثیرات این قید به وضوح در لایه سوم و خطای عدم برازش مشهود است. دقت شود که خطای عدم برازش شرط کافی برای نشان دادن موفقیت الگوریتم وارون سازی نیست، اما شرط لازم برای تعیین نتایج نزدیک به مدل واقعی است. راهنمای رنگی در کنار مدل های قسمت های ب، ج و د، نشان دهنده تغییرات مقاومت ویژه مدل بر حسب اهم متر است و ضخامت لایه آخر بی نهایت در نظر گرفته شده است.

دست آمده است؛ در حالی که ضخامت این لایه ۱۰ متر است. با اعمال قیدهای عمقی و هموارساز (در شکل ۳-د نتایج اعمال این قیدها نشان داده شده است)، ضخامت لایه اول ۲۰ متر به دست آمده است. مقدار مقاومت ویژه ها نیز متناسب با مقاومت ویژه مدل مصنوعی به دست آمده است. لایه سوم نیز با ضخامت کمی بیشتر از ۱۰ متر تعیین شده است. بهبود نتایج مدل سازی با اعمال قیدهای عمقی و هموارساز با مقایسه قسمت ج و د (شکل ۳) قابل مشاهده است. در زیر مدل های به دست آمده در قسمت ج و د، خطای عدم برازش یا کیفیت وارون سازی با استفاده از رابطه ۱۳ به دست آمده است. این مقدار درصد خطای عدم برازش را نشان می دهد (سیمون و همکاران، ۲۰۰۹). در قسمت ج، از ایستگاه های ۱۵ تا ۲۵ خطای عدم برازش یک تغییر ناگهانی نشان می دهد که به دلیل عدم موفقیت الگوریتم در تعیین دقیق مدل در این ایستگاه ها بوده است. در ایستگاه های مجاور ایستگاه ۲۰، این مقدار کاهش داشته است که به دلیل وجود روباره رسانای ۵۰ اهمتری



شکل ۳. الف) داده های حاوی ۱ تا ۵ درصد نوفه تصادفی در فرکانس های برداشت ۳۷۶، ۱۸۲۰، ۸۲۲۵، ۴۱۵۵۰، ۱۳۳۲۰۰ هرتز؛ ب) مدل مصنوعی استفاده شده برای وارون سازی؛ ج) وارون سازی داده های الکترومغناطیس هوابرد حوزه فرکانس با روش مارکوارت-لونبرگ و د) وارون سازی داده های الکترومغناطیس هوابرد حوزه فرکانس با اعمال قید عمقی و هموارساز. مدل مصنوعی به اقتباس از مدل مصنوعی استاندارد (سیمون و همکاران، ۲۰۰۹) به کار رفته است که مدلی استاندارد در تفسیر داده های الکترومغناطیسی هوابرد محسوب می شود.

قسمت شکل ۴-الف، نتایج وارون‌سازی قیدی و در ۴-ب نتایج وارون‌سازی به روش مارکوارت-لونیبرگ نمایش داده شده است. در این شکل داده‌های واقعی با خطوط توپر به ازای فرکانس‌های برداشت با رنگ‌های مختلف نمایش داده شده است و منحنی‌های داده‌های تولیدشده توسط الگوریتم وارون‌سازی با خط چین نمایش داده شده‌اند.

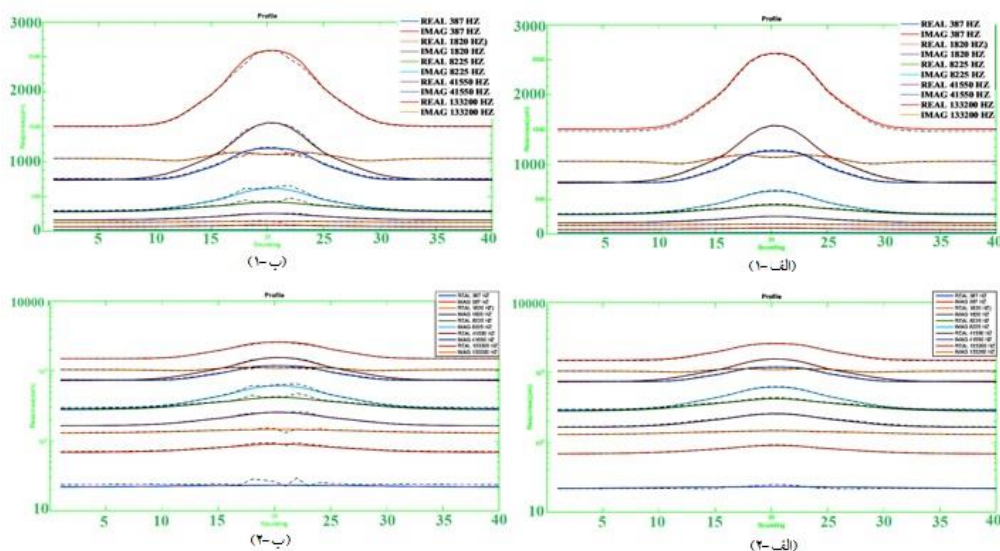
این نتایج نشان می‌دهند که با استفاده از الگوریتم وارون‌سازی قیدی برازش بهتری با داده‌های واقعی حاصل می‌شود و الگوریتم در تعیین مدل نهایی در مقایسه با الگوریتم مارکوارت-لونیبرگ موفق‌تر عمل کرده است.

۴. وارون‌سازی داده‌های واقعی میرگه نقشینه

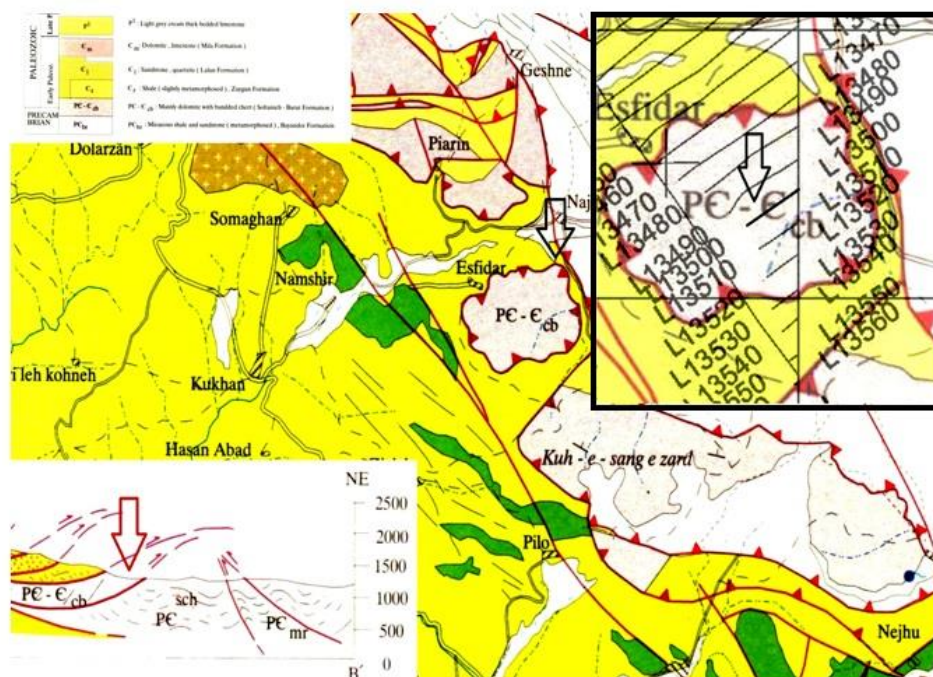
حال داده‌های واقعی برداشت‌شده توسط پرنده دیگم وارون‌سازی می‌شود. منطقه تحقیق در استان کردستان در ناحیه‌ای کوهستانی قرار گرفته است. راه دسترسی به منطقه، فقط راه‌های ارتباطی اصلی و فرعی آبادی‌هاست. دسترسی به منطقه میرگه نقشینه و شیخ چوپان از جاده آسفالته سقز به بانه پس از طی ۲۶ کیلومتر از شرق آبادی میرده با جاده خاکی و پس از طی حدود ۲۰ کیلومتر ممکن است.

دقت شود که نقش قیدها در الگوریتم‌های وارون‌سازی کمک به همگرایی دقیق‌تر به مدل نهایی با استفاده از اطلاعات اولیه یا سایر روش‌هایی است که درباره آن بحث شد. در این مقاله برای مدل‌سازی داده‌های الکترومغناطیس هوا برد از مدل‌سازی لایه‌ای استفاده شده است که امروزه از معتبرترین انواع مدل‌سازی‌ها در این زمینه به شمار می‌آید (سنگیل و سیمون، ۱۹۹۸؛ هوانگ و فریزر، ۲۰۰۳؛ سیمون و همکاران، ۲۰۰۹). مدل‌سازی با این روش که به روش لایه‌های گسسته معروف است، به تعداد لایه‌های مدل اولیه محدود می‌شود. منظور از استفاده از قید عمقی در این روش مفید کردن ضخامت این لایه‌ها بر حسب عمق قرارگیری سایر لایه‌هاست و تأثیری در افزایش عمق مدل‌سازی ندارد (آوکن و کریستنسن، ۲۰۰۴).

برای به دست آوردن نتایج در شکل ۳ از هیچ‌گونه وزن‌دهی به مدل استفاده نشده است و نتایج نهایی مدل در الگوریتم وارون‌سازی به دست آمده است. برای روشن‌تر شدن این مسئله در شکل ۴ منحنی‌های داده‌های واقعی و داده‌های تولیدشده در الگوریتم مدل‌سازی با محورهای پاسخ خطی در قسمت‌های الف-۱ و ب-۱ و ب-۲ و ب-۳ نمایش داده شده است. در قسمت‌های الف-۲ و ب-۲ نمایش داده شده است.



شکل ۴. منحنی‌های برازش داده‌های واقعی به داده‌های تولیدشده در الگوریتم وارون‌سازی. داده‌های واقعی در این شکل با منحنی‌های توپر و رنگ‌های مشخص به ازای فرکانس‌های برداشت مختلف نمایش داده شده‌اند. داده‌های تولیدشده در طول الگوریتم وارون‌سازی با خط‌چین متناظر با هر رنگ نمایش داده شده‌اند؛ (الف) وارون‌سازی قیدی؛ قسمت ۱ نمایش نتایج پاسخ‌های فرکانس‌های گسسته با محور خطی برای تفکیک فرکانس‌های بالا، قسمت ۲ نمایش نتایج پاسخ‌های فرکانس‌های گسسته با محور لگاریتمی برای تفکیک فرکانس‌های پایین. (ب) وارون‌سازی به روش مارکوارت-لونیبرگ؛ قسمت ۱ نمایش نتایج پاسخ‌های فرکانس‌های گسسته با محور خطی برای تفکیک فرکانس‌های بالا، قسمت ۲ نمایش نتایج پاسخ‌های فرکانس‌های گسسته با محور لگاریتمی برای تفکیک فرکانس‌های پایین.



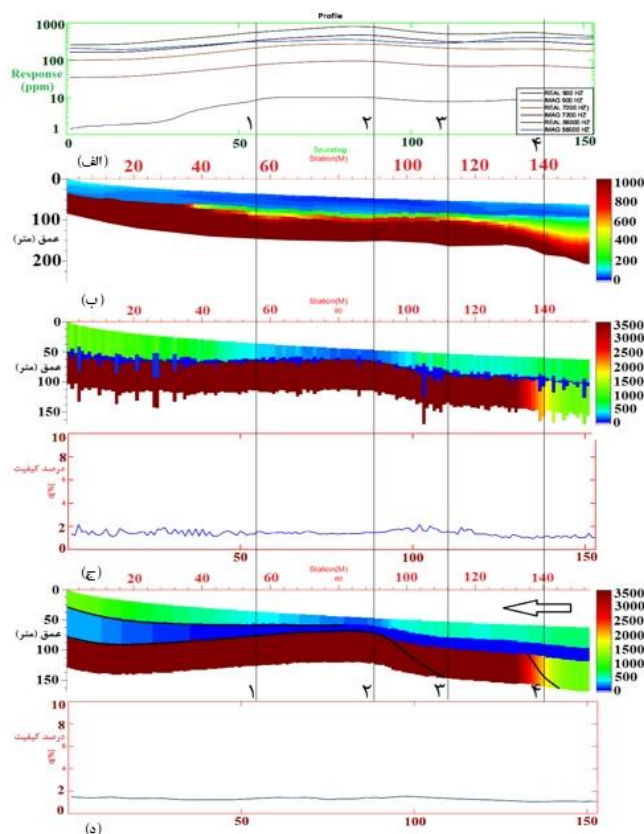
شکل ۵. خط برداشت ۱۳۵۰۰ پروفیل برداشت که با خط تیره پرنگ نشان داده شده است، شامل ۱۵۴ سونداژ است. فلش‌های سیاه، منطقه مورد مطالعه و محل دقیق خط برداشت را نشان می‌دهد. فلش قرمز نشان‌دهنده پهنه برشی منطقه مورد مطالعه است که به صورت شماتیک نشان داده شده است.

می‌شود این مدل‌سازی، یک‌بعدی صورت گیرد. در بیشتر مدل‌سازی‌ها مفسر علاقه‌مند است که با کنار هم گذاشتن سونداژها، شبه‌مقطعی دوبعدی از مقاومت ویژه متناظر با عمق نشان دهد. با مقایسه شکل ۶-ج و ۶-د مشخص می‌شود که روش‌های متداول چون مارکوات-لونبرگ (شکل ۶-ج) حتی در داده‌هایی که حداقل نوفه را دارند اما تغییرات جانبی در مقاومت ویژه منطقه بسیار محسوس است، نمی‌توانند مقطع دوبعدی مناسبی ارائه کنند.

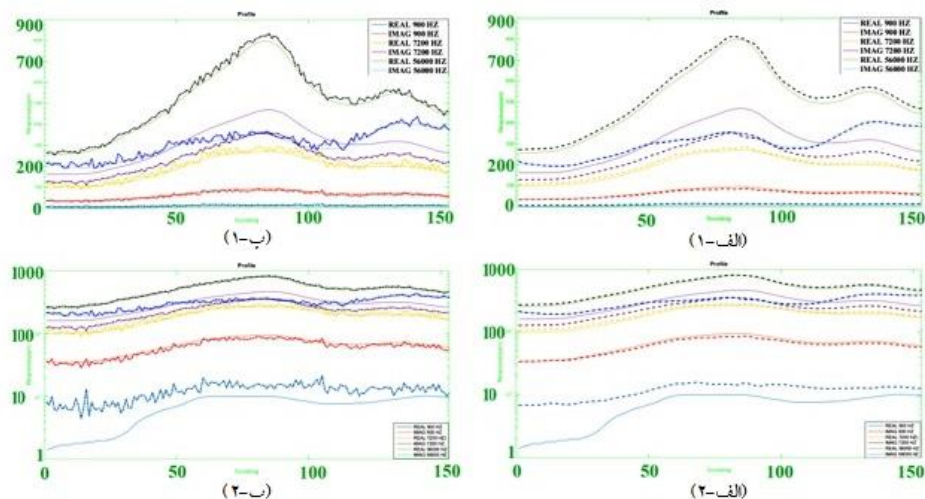
با اعمال قیدهای عمقی و هموارساز در شکل ۶-د می‌توان مشاهده کرد مقطع دوبعدی حاصل از مدل‌سازی یک‌بعدی داده‌های الکترومغناطیس حوزه فرکانس هم افزایش دقت داشته است (به خطای ریشه میانگین در دو روش استفاده شده توجه شود) و هم تغییرات جانبی و عمقی مقاومت ویژه در منطقه را به خوبی نشان می‌دهد. همان‌گونه که گفته شد تنها با توجه به بهتر شدن کیفیت مدل‌سازی و کم شدن خطای عدم برازش نمی‌توان ادعا کرد که مدل‌سازی دقیق انجام گرفته است؛ بنابراین در این قسمت نیز به تحلیل منحنی برازش داده‌های تولید شده و داده‌های واقعی می‌پردازیم (شکل ۷).

نهشته‌های برونزده در منطقه مورد مطالعه بیشتر از سنگ‌های پلیتی و پسامیتی هستند که درون لایه‌هایی از سنگ‌های آتشفشانی دارند و در رخساره پایین شیبست سبز دگرگون شده‌اند. انواعی از سنگ‌های آذرین نفوذی نیز به صورت توده‌های نفوذی گرانیتی، دیوریتی و دایک‌های دیابازی در این مجموعه نفوذ کرده‌اند. مجموعه سنگ‌های موجود در این منطقه پس از نهشته شدن در طی دو مرحله چین خورده‌اند که پهنه‌های برشی شکل‌پذیر همزمان با اولین مرحله چین خوردگی ایجاد می‌شود و در طی دومین مرحله چین خوردگی تغییر روند پیدا می‌کند (شکل ۵).

در این مقاله سعی شده است از داده‌هایی استفاده شود که حداقل نوفه را دارند و تعداد سونداژها طوری انتخاب شده است که تغییرات عمقی آن‌ها قابل تفکیک باشد. هدف استفاده از این داده‌ها که در شکل ۶-الف نشان داده شده است؛ این است که نشان داده شود تغییرات مقاومت ویژه سطحی در تفسیرهای یک‌بعدی الکترومغناطیسی بسیار تأثیرگذار است. در مدل‌سازی داده‌های الکترومغناطیسی هواورد حوزه فرکانس مدل‌سازی‌های دوبعدی و سه‌بعدی بسیار امر پیچیده و زمان‌بری است؛ بنابراین همواره سعی



شکل ۶. (الف) داده‌های مربوط به خط برداشت ۱۳۵۰۰ که در سه فرکانس ۹۰۰ هرتز، ۷۲۰۰ هرتز و ۵۶ کیلوهرتز بر اساس قسمت‌های حقیقی و موهومی نشان داده شده است. (ب) مدل نیم‌فضای لایه‌ای برحسب مقاومت ویژه ظاهری (تغییرات آن براساس راهنمای رنگی مشخص شده است) که به وسیله آن مدل اولیه برای وارن‌سازی براساس الگوریتمی بر پایه اصلاح مدل در هر تکرار تعیین می‌شود. (ج) مدل‌سازی داده‌های الکترومغناطیس هواپرد حوزه فرکانس به روش مارکوارت-لونیبرگ و خطای ریشه میانگین مربعات مربوطه. (د) مدل‌سازی داده‌های الکترومغناطیس داده‌های الکترومغناطیس هواپرد حوزه فرکانس با اعمال قیدهای عمقی و هموارساز و خطای ریشه میانگین مربعات مربوطه. تغییرات مقاومت ویژه برحسب اهم-متر بر اساس راهنمای رنگی برای قسمت‌های (ج) و (د) نمایش داده شده است.



شکل ۷. منحنی‌های برازش داده‌های واقعی به داده‌های تولیدشده در الگوریتم وارن‌سازی. داده‌های واقعی در این شکل با منحنی‌های توپر و رنگ‌های مشخص به ازای فرکانس‌های برداشت مختلف نمایش داده شده‌اند. داده‌های تولیدشده در طول الگوریتم وارن‌سازی با خط‌چین متناظر با هر رنگ نمایش داده شده‌اند. (الف) وارن‌سازی قیدی، قسمت ۱ نمایش نتایج پاسخ‌های فرکانس‌های گسسته با محور خطی برای تفکیک فرکانس‌های بالا؛ قسمت ۲ نمایش نتایج پاسخ‌های فرکانس‌های گسسته با محور لگاریتمی برای تفکیک فرکانس‌های پایین؛ (ب) وارن‌سازی به روش مارکوارت-لونیبرگ، قسمت ۱ نمایش نتایج پاسخ‌های فرکانس‌های گسسته با محور خطی برای تفکیک فرکانس‌های بالا؛ قسمت ۲ نمایش نتایج پاسخ‌های فرکانس‌های گسسته با محور لگاریتمی برای تفکیک فرکانس‌های پایین.

با توجه به شکل ۷ مشخص می‌شود که وارون‌سازی قیدی که برآزش داده‌های واقعی و داده‌های تولیدشده مربوط به آن در قسمت الف نشان داده شده است، در مقایسه با قسمت ب از شکل که برآزش داده‌های واقعی و داده‌های مدل نهایی را در الگوریتم مارکوارت-لونبرگ نشان می‌دهد، نتایج پایدارتری در طول پروفیل داده‌ها دارند. با مقایسه نتایج این شکل با شکل ۴ مشخص می‌شود که برای داده‌های واقعی به ازای فرکانس‌هایی خاص برآزش کامل ایجاد نشده است. دلیل این مسئله این است که مدل زمین واقعی مانند مدل مصنوعی کاملاً همگن و همسانگرد نیست؛ در ضمن لایه‌های زمین واقعی دارای پیچیدگی‌های بیشتری در مقایسه با مدل مصنوعی هستند. در واقع مدل ارائه‌شده با محدودیت لایه‌بندی به ازای ماکزیمم فرکانس‌های برداشت، تنها میانگینی از تغییرات مقاومت ویژه لایه‌های واقعی زمین را در طول پروفیل نتیجه می‌دهد. این عدم برآزش در قسمت ناهم‌فاز (موهومی) فرکانس ۷۲۰۰ بسیار مشهود است که احتمالاً نشان‌دهنده میان‌لایه‌ای بین لایه‌های ۲ و ۳ با مقاومت ویژه بیشتر از لایه دوم است (نیبیین، ۱۹۹۶). به ازای قسمت هم‌فاز (حقیقی) فرکانس ۹۰۰ هرتر نیز یک عدم برآزش به‌ویژه در ایستگاه‌های ۱ تا ۵۰ دیده می‌شود که دلیل آن وجود لایه با مقاومت ویژه بسیار بالا در این قسمت است که الگوریتم موفق به برآزش کامل به آن نشده است. این عامل می‌تواند نشان‌دهنده تغییر تدریجی جنس پی سنگ در ایستگاه ۳۰ م باشد که مقاومت ویژه هر دوی آن‌ها بیشتر از ۳۵۰۰ اهم‌متر است. با استفاده از اطلاعات زمین‌شناسی، مدل به‌دست‌آمده به این شکل قابل تفسیر است؛ لایه اول با ضخامت ۱۰ تا ۳۰ متر رسوبات سطحی منطقه هستند که میانگین مقاومت ویژه بیشتر از ۵۰۰ اهم‌متر را دارند، مقاومت ویژه در سونداژ ۸۰ تا کمتر از ۱۰۰ اهم‌متر افت کرده است. این مقاومت ویژه می‌تواند مربوط به سنگ‌های هوازه باشد که دگرگونی یافته است. این موضوع در لایه دوم قابل تأیید است، چراکه کمترین مقدار مقاومت ویژه در لایه دوم مربوط به این قسمت است. چون در شکل ۷ قسمت‌های هم‌فاز

فرکانس‌های ۵۶۰۰۰ هرتر و ۷۲۰۰ هرتر دارای برآزش مناسب هستند، این مسئله قابل تأیید است. لایه دوم می‌تواند پراکنندگی آب‌های زیرسطحی را با مقاومت ویژه کمتر از ۳۰۰ اهم‌متر نشان دهد. در لایه سوم احتمال وجود یک افتادگی پی‌سنگ در سونداژ ۸۰ وجود دارد که تا حدی احتمال شکستگی در پی‌سنگ را افزایش می‌دهد. این عامل می‌تواند در خوشبینانه‌ترین حالت نشان‌دهنده نفوذ مواد رسانا به لایه‌های بالایی باشد. با توجه به اطلاعات زمین‌شناسی وجود سنگ‌های دگرگونی و پی‌سنگ دولومیتی با مقاومت ویژه ۳۵۰۰ اهم‌متر قابل تأیید است.

۵. نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج به‌دست‌آمده با اعمال قید هموارساز و قید عمقی در این مقاله، می‌توان مشاهده کرد که عملکرد این قیدها در وارون‌سازی داده‌های هوابرد الکترومغناطیسی حوزه فرکانس باعث بهبود نتایج شده است؛ چرا که هم پایداری مدل (با توجه به شکل ۳-د و شکل ۶-ج و ۶-د) و هم مطابقت آن با مدل مصنوعی و اطلاعات زمین‌شناسی منطقه بهبود یافته است. با توجه به نتایج به وضوح مشخص است که هیچ‌کدام از این روش‌ها کامل نیستند. هرچند که با اعمال قید عمقی ضخامت لایه‌ها و مقاومت ویژه از لحاظ عددی بهبود یافته است، اما ضعف این روش در اعمال قید عمقی و پیروی تمامی لایه‌ها از توپوگرافی لایه اول است؛ به عبارت دیگر این روش برای مناطقی که توپوگرافی خشن و ناهمواری دارند، باید با احتیاط به کار برده شود. در نهایت با استفاده از این روش و روش مارکوارت-لونبرگ در مواردی که توپوگرافی ناهموار است، می‌توان تفسیر خوبی از منطقه و لایه‌بندی آن داشت. به عنوان مثال، نتایج تفسیر مدل به‌دست‌آمده از منطقه میرگه نقشینه به دو دسته تقسیم می‌شود. با توجه به نقشه زمین‌شناسی این ناحیه (شکل ۵) که سن زمین‌شناسی این ناحیه را به دوران پالئوزوئیک و تشکیل سازند سلطانیه و باروت ارتباط می‌دهد و با توجه به شکل ۶ می‌توان تفسیری اولیه از لایه‌بندی مقاومت ویژه منطقه

و جهت شکستگی‌هاست. شکستگی‌ها در این ناحیه، روی مدل مورد نظر در شکل ۶-د و جهت نیروی غالب در ناحیه با فلش نشان داده شده است.

روش‌های هوابرد مانند (HEM) و مغناطیس‌سنجی هوابرد به دلیل پاره‌ای محدودیت‌ها فقط تفسیر کلی از منطقه می‌دهند، اما با استفاده از این الگوریتم‌ها حتی می‌توان نتایج مطلوبی در مقیاس‌های کوچک هم انتظار داشت.

تشکر و قدردانی

از آقای مهندس ابوالفضل اسدیان، کارشناس ارشد ژئوفیزیک از دانشگاه شاهرود که با در اختیار گذاشتن الگوریتم یک‌بعدی مدل‌سازی پیشرو الکترومغناطیس هوابرد حوزه فرکانس، تهیه‌شده در محیط برنامه‌متلب ما را در این پژوهش یاری کردند، سپاسگزاریم.

مراجع

- Arabamiri, A. R., Moradzadeh, A., Fathianpour, N. and Siemon, B., 2010, Inverse modeling of HEM data using a new inversion algorithm, *Mining and Environment. J.*, 1, 9-20.
- Aster, R. C., Borchers, B. and Thurber C. H., 2013, *Parameter estimation and inverse problems*, Academic Press is an imprint of Elsevier.
- Auken, E. and Christiansen, A. V., 2004, Layered and laterally constrained 2D inversion of resistivity data, *Geophys. J. Int.*, 69, 752-761.
- Auken, E., Christiansen, A. V., Jacobsen, B. H. and Foged, N., 2005, Piecewise 1D laterally constrained inversion of resistivity data, *Geophys. Prospect*, 53, 497-506.
- Baker, K., 2005, *Singular value decomposition tutorial*, Ohio State University.
- Beard, L. P. and Nyquist, J. E., 1998, Simultaneous inversion of airborne electromagnetic for resistivity and magnetic permeability, *Geophys. J. Int.*, 63, 1556-1564.
- Davis, A., 2007, *Quantitative characterisation of airborne electromagnetic systems*, PhD Thesis, RMIT University.
- Farquharson, C. G. and Oldenburg, D. W., 1998, Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure, *J Appl. Geophys.*, 134, 213-227.

- ارائه کرد؛ عمق قرارگیری پی‌سنگ دولومیتی در لایه سوم در شکل ۶-د نشان داده شده است که دارای مقاومت ویژه ۳۵۰۰ اهم‌متر است. در قسمت مشخص شده با عدد ۴ روی همین شکل، کاهش مقاومت ویژه تا ۵۰۰ اهم‌متر رخ داده است که نشان‌دهنده تغییر ساختار در این ناحیه است. لایه دوم دارای مقاومت ویژه بسیار کم است که نشان‌دهنده وجود مقادیری آب در این لایه است. در لایه اول نیز با توجه به ناحیه بین شماره‌های ۱ و ۳ از همین شکل و مقایسه آن با پاسخ‌های فرکانسی قسمت الف مشخص می‌شود که لایه اول در این ناحیه مقاومت ویژه بسیار کمی دارد. با توجه به افت شیب پاسخ در ناحیه بین اعداد ۲ تا ۳ از شکل ۶-الف، وجود یک شکستگی در پی‌سنگ که در شکل مشخص شده است، شایان توجه است. این شکستگی در پی‌سنگ و افت مقاومت ویژه در لایه‌های فوقانی، می‌تواند نشان‌دهنده احتمال کانه‌زایی در این قسمت باشد. تفسیر ثانویه از نتایج مدل به دست آمده، نشان‌دهنده شکستگی‌های منطقه Fitterman, D. V. and Deszcz-Pan, M., 1998, Helicopter EM mapping of saltwater intrusion in Everglades National Park, Florida, *Exploration Geophysics*, 29, 240-243.
- Fluche, B. and Sengpiel, K. P., 1997, *Grundlagen und Anwendungen der Hubschrauber-Geophysik* In, Beblo, M. (Ed.), *Umweltgeophysik*, Ernst und Sohn, Berlin, 363-393.
- Fraser, D. C., 1978, Resistivity mapping with an airborne multi coil electromagnetic system, *Geophys. J. Int.*, 43, 144-172.
- Guptasarma, D. and Singh, B., 1997, New digital linear filters for Hankel J_0 and J_1 transforms, *Geophys. Prospect*, 45(5), 745-762.
- Huang, H. and Fraser, D. C., 1996, The differential parameter method for multi frequency airborne resistivity mapping, *Geophys. J. Int.*, 61(1), 100-109.
- Huang, H. and Fraser, D. C., 2003, Inversion of helicopter electromagnetic data to a magnetic conductive layered earth, *Geophys. J. Int.*, 68(4), 1211-1223.
- Jackson, D. D., 1979, The use of a priori data to resolve non-uniqueness in linear inversion, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society.*, 57, 137-157.
- Kirsch, R., Sengpiel, K. P. and Voss, W., 2003, The use of electrical conductivity mapping in the definition of an aquifer vulnerability

- index, Near Surface Geophysics, 1, 13-19.
- Marquart, D., 1963, An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters, SIAM, J Appl. Mathematics, 11, 441-443.
- Menke, W., 1989, Geophysical data analysis discrete inverse theory, Academic Press, Inc.
- Mundry, E., 1984, On the interpretation of airborne electromagnetic data for the two-layer case, Geophys. Prospect, 32, 336-346.
- Nabighian, M. N., 1996, Electromagnetic methods in applied geophysics, Application/Parts A and B, SEG Books.
- Palacky, G. J. and West, G. F., 1991, Airborne electromagnetic methods. In M. N. Nabighian, ed, electromagnetic methods in applied geophysics, SEG, pp. 811-880.
- Sengpiel, K. P., 1988, Approximate inversion of airborne EM data from a multi-layered ground, Geophys. Prospect, 36, 446-459.
- Sengpiel, K. P. and Siemon, B., 1998, Examples of 1D inversion of multi frequency HEM data from 3D resistivity distributions, Exploration Geophysics., 29(2), 133-141.
- Sengpiel, K. P. and Siemon, B., 2000, Advanced inversion methods for airborne electromagnetic exploration, Geophys. J. Int., 65, 1983-1992.
- Siemon, B., 2001, Improved and new resistivity depth profiles for helicopter electromagnetic data, J. Appl. Geophys., 46, 65-76.
- Siemon, B., Stuntebeck, C., Sengpiel, K. P., Röttger, B., Rehli, H. J. and Eberle, D. G., 2002, Investigation of hazardous waste sites and their environment using the BGR helicopter-borne geophysical system, Journal of Environmental & Engineering Geophysics, 7, 169-181
- Siemon, B., Eberle, D. G. and Binot, F., 2004, Helicopter-borne electromagnetic investigation of coastal aquifers in North-West Germany, Z. f. Geophys., 32, 385-395.
- Siemon, B., Auken, E. and Christiansen, A. V., 2009, Laterally constrained inversion of helicopter borne frequency-domain electromagnetic data, J. Appl. Geophys., 67, 259-268.
- Tarantola, A. and Valette, B., 1982, Generalized non-linear inverse problems solved using the least squares criterion, Reviews of Geophysics and Space Physics., 20(2), 219-232.
- Wait, J. R., 1982, Geo-electromagnetism, Academic Press, New York.
- Weidelt, P., 1972, The inverse problem of geomagnetic induction, Z. f. Geophys., 38, 257-289.