فیزیک زمین و فضا، دوره ۴۲، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۵، صفحهٔ ۳۳۷- ۳۴۸

وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی با استفاده از پایدارکنندهٔ نرم یک

کیلان راست‌بین[۱]، سعید وطن‌خواه[۲*] و وحید ابراهیم‌زاده اردستانی[۳]

۱. کارشناس ارشد ژئوفیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران
۲. استادیار، گروه فیزیک زمین، مؤسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران
۳. استاد، گروه فیزیک زمین، مؤسسهٔ ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۳/۱۲/۱۰، پذیرش نهایی: ۹۴/۷/۱۴)

چکیده

در این مقاله روشی برای وارون سازی داده‌های گرانی سنجی با استفاده از تابع منظم‌کنندهٔ نرم یک ارائه شده است. استفاده از این نوع پایدارکننده مسئلهٔ وارون را به سمت حصول جواب‌هایی متراکم و با مرزهای تیز سوق می‌دهد؛ بنابراین برای بازسازی ساختارهای زمین شناسی دارای مرزهای گسسته مناسب است. ارتباط نزدیک بین منظم‌کنندهٔ نرم یک با قید فشردگی بررسی شده است. برای محاسبهٔ جوابی که تابع هدف نرم یک را کمینه کند، الگوریتم IRLS (Iteratively Reweighted Least Square) به کار می‌رود. در هر تکرار تابع وزن‌دهی پارامترهای مدل، با استفاده از مدل به‌دست‌آمده در تکرار قبل بهنگام می شود. حل عددی مسئلهٔ وارون با استفاده از تجزیهٔ مقادیر تکین تعمیم‌یافته انجام شده است. پارامتر تنظیم‌کنندهٔ تعادل بین دو عبارت تابع هدف با استفاده از روش UPRE (Unbiased Predictive Risk Estimator) محاسبه می شود. برای بررسی کارایی روش، دادهٔ مصنوعی تولید شده توسط یک دایک شیب‌دار استفاده شده است. مدل حاصل از وارون‌سازی، تفکیک‌پذیری نسبتاً زیادی دارد. مرزهای بازسازی‌شده، شیب و تباین چگالی آن نزدیک به مدل اصلی هستند. نتایج دلالت برآن دارد که استفاده از منظم‌کنندهٔ نرم یک، به همراه سایر قیود مورد نیاز، می‌تواند روشی مؤثر برای شناسایی مرزهای تودهٔ زیر سطحی باشد. برای نشان‌دادن کارایی عملی این روش، دادهٔ گرانی برداشت شده بر روی سد گتوند در جنوب غربی ایران برای مدل‌سازی استفاده شده است. نتایج وارون‌سازی این داده‌ها با نتایج حفاری‌های منطقه تطابق نسبتاً خوبی نشان می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: پارامتر تنظیم، گرانی‌سنجی، منظم‌سازی، نرم یک، وارون‌سازی.

۱. مقدمه

در بررسی‌های گرانی‌سنجی از وارون‌سازی داده‌ها به‌عنوان روشی مؤثر برای حصول اطلاعات کمی دربارهٔ چگالی و هندسهٔ چشمه‌های زیرسطحی استفاده می‌شود. وارون گرانی سنجی از نوع مسائل بدوضع (Ill-posed) است؛ بنابراین جواب باید به نحوی منظم شود. در منظم‌سازی (Regularization) تابع هدفی مرکب از دو عبارت عدم انطباق داده‌ها (Data Misfit) و عبارت پایدارکننده (Stabilizer) جایگزین مسئلهٔ بدوضع اولیه می‌شود و جواب از کمینه‌کردن این تابع هدف به دست می‌آید. غالباً فرض بر آن است که نوفهٔ موجود در داده‌های گرانی از توزیع گوسی (Gaussian) پیروی می‌کند؛ بنابراین برای عبارت عدم انطباق داده از نرم دو ($L_2-\mathrm{norm}$) خطای بین دادهٔ مشاهده‌ای و دادهٔ پیش‌بینی‌شده، استفاده می‌شود. در مورد عبارت تنظیم گزینه‌های بسیاری وجود دارد که با توجه به ویژگی‌های ساختار زمین شناسی مورد جست‌وجو انتخاب می شوند. در بسیاری از پژوهش‌های ژئوفیزیکی نرم دو مشتقات پارامترهای مدل برای عبارت تنظیم استفاده شده است (لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۸؛ بولانگر و چوتو، ۲۰۰۱). استفاده از چنین منظم‌کننده‌ای هرچند محاسبات را ساده می‌کند، اما مدل حاصل غالباً هموار است و مرز مشخصی با سنگ‌های دربرگیرنده‌اش ندارد (فارکوهارسن، ۲۰۰۸). در نواحی‌ای که تغییرات شدید بین ساختارهای زمین شناسی وجود نداشته باشد، چنین مدل‌هایی انطباق قابل قبولی با زمین‌شناسی دارند. در برخی حالت‌ها ممکن است تباین چگالی بین ساختارهای زیرسطحی شدید باشد؛ بنابراین مدل‌های صاف و هموار نمی‌توانند تصویری مناسب از چنین ساختاری ارائه دهند. برای غلبه

*نگارنده رابط: E-mail: svatan@ut.ac.ir

بر این مشکل راهکارهای متفاوتی ارائه شده است؛ نخستین و پرکاربردترین شیوه در وارون‌سازی گرانی توسط لاست و کوبیک (۱۹۸۳) با معرفی قید فشردگی (Compactness) مطرح شد. فشردگی به معنای جست‌وجوی مدلی با کمترین حجم (درحالت سه‌بعدی) یا کمترین مساحت (در حالت دوبعدی) است. چنین مدل‌هایی مرزهای تیز و گسسته با محیط پیرامونی خود دارند. پورتنیاگوین و زادانف (۱۹۹۹) بر مبنای قید فشردگی که آن‌ها نام MS (Minimum Support) به آن دادند، قید MGS (Minimum Gradient Support) را معرفی کردند. در MGS از مشتقات مدل در عبارت تنظیم استفاده می‌شود. برای هردو قید MS و MGS عبارت تنظیم دارای نرم دو است؛ بنابراین کمینه‌کردن تابع هدف همانند کمینه‌کردن تابع تیخونف معمولی است. تنها تفاوت آن است که تابع وزن‌دهی پارامترهای مدل در عبارت تنظیم وارد می شود. این تابع وزن‌دهی به پارامترهای مدل وابسته است؛ در نتیجه تابع هدف کلی دیگر درجه دوم (Quadratic) نیست، بلکه شبه درجه دوم (Pseudo-quadratic) است (زادانف، ۲۰۰۲)؛ بنابراین نیاز است که مسئلهٔ وارون به صورت تکرار (Iterative) حل شود. در هر تکرار تابع وزن‌دهی با استفاده از مقادیر پارامترهای مدل به‌دست‌آمده در تکرار قبل، محاسبه و به کار برده می‌شود. راهکار دیگر برای باز سازی مدل‌های تُنُک (Sparse) استفاده از نرم یک ($L_1 - \text{norm}$) برای عبارت تنظیم است. درجواب به‌دست‌آمده با استفاده از این نرم، تعداد پارامترهای مدل غیرصفر کمینه است. در این حالت نیز الگوریتم به‌صورت تکرار حل می‌شود و به استفاده از یک تابع وزن‌دهی پارامترهای مدل نیاز است. فارکوهارسن و اولدنبرگ (۱۹۹۸) نرم یک مشتق قائم پارامترهای مدل را در وارون‌سازی یک‌بعدی داده‌های الکترومغناطیس به کار بردند. لوک و همکاران (۲۰۰۳) از نرم یک مشتقات افقی و قائم پارامترهای مدل در وارون‌سازی داده‌های مقاومت ویژه استفاده کردند. فارکوهارسن (۲۰۰۸)، علاوه بر مشتقات قائم و افقی، از مشتقات قطری در عبارت تنظیم نرم یک استفاده کرد. هدف او آن بود که به الگوریتم توانایی لازم را برای بازسازی ساختارهای شیب‌دار بدهد. در این مقاله از نرم یک برای عبارت تنظیم استفاده می‌شود (بدون واردکردن مشتقات) و نشان داده می‌شود که ارتباط نزدیکی بین پایدارکنندهٔ نرم یک و قید MS وجود دارد.

یکی از نکات مهم درتمامی روش‌های منظم‌سازی، برآورد مناسب پارامتر تنظیم است. این پارامتر، تعادل بین دو عبارت تابع هدف را برقرار می‌کند. تاکنون روش‌های مختلفی برای تعیین پارامتر تنظیم در مسائل وارون میدان پتانسیل به کار رفته‌اند. این روش‌ها عبارتند از MDP (Morozov Discrepancy Principle)، LC (L_curve)، GCV (Generalized Cross Validation)، χ^2 Principle و UPRE (Unbiased Predictive Risk Estimator) (فارکوهارسن و اولدنبرگ، ۲۰۰۴؛ لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۶؛ لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۹؛ وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۴a؛ وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۴b). بررسی‌های قبلی در وارون‌سازی دوبعدی و سه‌بعدی گرانی‌سنجی دلالت بر آن دارد که روش UPRE توانایی خوبی در برآورد پارامتر تنظیم دارد؛ بنابراین در این مقاله استفاده می‌شود. باید توجه داشت که حل عددی مسئلهٔ وارون به ابعاد ماتریس کرنل وابسته است. برای ماتریس‌هایی با ابعاد کوچک تا متوسط می‌توان از تجزیهٔ مقادیر تکین تعمیم‌یافته (Generalized Singular Value Decomposition) استفاده کرد. علاوه بر آن تابع UPRE نیز با استفاده از این ابزارسودمند به شکل ساده و کاربردی نوشته می‌شود. در این مقاله فرض بر آن است که تجزیهٔ مقادیر تکین تعمیم‌یافته امکان‌پذیر است و از بررسی مسائل با ابعاد بزرگ صرف‌نظر می‌شود.

در بخش دوم در مورد مسئلهٔ وارون گرانی سنجی و انواع پایدارکننده‌های استفاده‌شده در حل آن توضیحاتی ارائه می‌گردد. سپس تابع هدف نرم یک و روش تبدیل آن به یک تابع هدف قابل مشتق‌گیری نشان داده شده

است. حل عددی مسئلهٔ وارون بر اساس تجزیهٔ مقادیر تکین تعمیم‌یافته و نیز روش تعیین پارامتر UPRE از دیگر مباحث مطرح‌شده در این بخش است. در بخش سوم نتایج کاربرد الگوریتم روی داده‌های مصنوعی ارائه می‌شود. نتایج کاربرد روش برای داده‌های میدانی برداشت شده در ناحیهٔ سد گتوند در بخش چهارم نشان داده شده است. بخش پنجم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲. تئوری و روش

فرض کنید زمین موردمطالعه توسط تعداد زیادی مکعب با ابعاد ثابت مدل شده است. چگالی مکعب‌ها به‌عنوان پارامترهای نامعلوم در بردار $\mathbf{m}\in\mathbb{R}^{n}$ قرار دارد. همچنین داده‌های برداشت‌شده در بردار $\mathbf{d}^{obs}\in\mathbb{R}^{m}$ در نظر گرفته می‌شوند. مسئلهٔ وارون خطی گرانی به شکل رابطه (۱) است:

$$\mathrm{G}\mathbf{m}=\mathbf{d}^{obs} \qquad (۱)$$

در این رابطه ماتریس $\mathrm{G}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ عملگر پیشرو است که به‌عنوان کرنل نیز شناخته می‌شود (بولانگر و چوتو، ۲۰۰۱). در وارون‌سازی گرانی هدف آن است که با استفاده از $\mathbf{d}^{obs}$ و G معلوم، جوابی تقریبی برای $\mathbf{m}$ محاسبه شود. این جواب علاوه بر برآوردن شرایط معادلهٔ ۱ همزمان باید از لحاظ زمین شناسی نیز پذیرفتنی باشد. مسئلهٔ وارون گرانی سنجی از نوع مسائل بدوضع و کم تعیین شده (Under-determined) است؛ بنابراین جواب می‌تواند غیریکتا و ناپایدار باشد. روش مرسوم برای حل چنین مسائلی کمینه‌کردن تابع هدفی به شکل رابطه (۲) است (پورتنیاگوین و زادانف، ۱۹۹۹):

$$\mathrm{P}^{\alpha}(\mathbf{m})=\Phi(\mathbf{d})+\alpha^{2}\mathrm{S}(\mathbf{m}) \qquad (۲)$$

عبارت $\Phi(\mathbf{d})$ در رابطهٔ (۲) عدم انطباق داده نامیده می‌شود و در واقع کیفیت برازش دادهٔ مشاهده‌ای توسط جواب مسئلهٔ وارون را اندازه می‌گیرد. در غالب موارد فرض بر آن است که نوفهٔ موجود در داده‌های گرانی از توزیع گوسی پیروی می‌کند؛ بنابراین، $\Phi(\mathbf{d})=\|\mathrm{W}_{d}(\mathrm{G}\mathbf{m}-\mathbf{d}_{obs})\|_{2}^{2}$ انتخاب می‌شود (نرم p بردار $\mathbf{x}$ به‌صورت $\|\mathbf{x}\|_{p}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_{i}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می‌شود). در این عبارت $\mathrm{G}\mathbf{m}$ دادهٔ تولیدشده توسط جواب مسئلهٔ وارون است. ماتریس W_{d} ماتریس وزن‌دهی داده است که با فرض مستقل‌بودن نوفه در داده‌ها به‌صورت ماتریسی قطری شامل وارون انحراف معیارهای نوفهٔ موجود در داده است، یعنی $\mathrm{W}_{d}=\mathrm{diag}(1/\eta_{1},\dots,1/\eta_{m})$ که η_{i} انحراف معیار نوفه در دادهٔ iاُم است. در رابطهٔ (۲) پارامتر α تعادل بین دو عبارت تابع هدف را برقرار می‌سازد و به نام پارامتر منظم‌سازی شناخته می‌شود. در بارهٔ نحوهٔ تعیین این پارامتر در ادامه توضیح داده خواهد شد.

عبارت تنظیم $\mathrm{S}(\mathbf{m})$ برای پایدارسازی جواب استفاده می‌شود. علاوه بر آن ویژگی‌های مورد انتظار برای مدل مورد جست‌وجو را می‌توان در این عبارت وارد کرد. یکی از پرکاربردترین پایدارکننده‌های مورداستفاده، تابع $\mathrm{S}(\mathbf{m})=\|\mathrm{D}(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{apr})\|_{2}^{2}$ است. در این رابطه $\mathbf{m}_{apr}$ برداری شامل تباین چگالی‌های اولیه است که براساس اطلاعات زمین‌شناسی و حفاری موجود انتخاب می‌شوند. در صورتی که چنین اطلاعاتی در دسترس نباشد، $\mathbf{m}_{apr}=\mathbf{0}$ در نظر گرفته می‌شود. ماتریس D ماتریس منظم‌سازی است که انتخاب آن در انحراف جواب مسئلهٔ وارون به سوی دستهٔ خاصی از جواب‌ها تأثیر مستقیمی دارد. یکی از انتخاب‌های پرکاربرد استفاده از شکل گسستهٔ مشتقات اول و دوم است (لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۸). در این حالت جواب حاصل از حل مسئلهٔ وارون به سوی جواب‌های اصطلاحاً هموار(Smooth) سوق داده می‌شود. در نواحی‌ای که تغییرات شدید بین ساختارهای زمین‌شناسی وجود ندارد، کاربرد این قید جواب‌هایی مفید حاصل می‌کند. برای بازسازی ساختارهایی با مرزهای تیز و گسسته، لاست و کوبیک (۱۹۸۳) و پورتنیاگوین و زادانف (۱۹۹۹) ماتریس $\mathrm{D}=\mathrm{W}_{\varepsilon}=\mathrm{diag}(1/((\mathbf{m}-\mathbf{m}_{apr})^{2}+\varepsilon^{2})^{1/2})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ را در عبارت تنظیم به‌کار بردند. این قید به نام فشردگی و

یا MS (Minimum Support) معروف است. پارامتر بسیار کوچک $\varepsilon > 0$ برای آن استفاده می‌شود که پایداری را در حالت $\mathbf{m} \to \mathbf{m}_{apr}$ فراهم آورد. وطن‌خواه و همکاران (۲۰۱۴a) از حاصل‌ضرب سه ماتریس به شکل $D = W_\varepsilon W_{depth} W_{hard}$ در عبارت تنظیم استفاده کردند. در این رابطه $W_{depth} = \mathrm{diag}\left(1/(z_j)^\beta\right)$ ماتریس وزن‌دهی عمقی (Depth Weighting) است که توسط لی و اولدنبرگ (۱۹۹۶) معرفی شد. استفاده از این تابع سبب می‌شود که کاهش حساسیت کرنل با عمق، خنثی شده و تمامی مکعب‌ها در فرایند وارون‌سازی با وزن مناسبی شرکت داشته باشند. پارامتر z_j عمق متوسط سلول j اُم و β وزن مناسب برای ماتریس وزن‌دهی عمقی را فراهم می‌کند. طبق بررسی‌های بولانگر و چوتو (۲۰۰۱) پارامتر β در بازهٔ [۰/۵ , ۱] می‌تواند انتخاب شود. ماتریس قطری W_{hard} ماتریس قیود سخت (Hard Constraint) است. معمولاً از این ماتریس زمانی استفاده می‌شود که چگالی برخی از بلوک‌ها بر اساس اطلاعات پیشین معلوم باشد. در این حالت چگالی‌های معلوم در بردار $\mathbf{m}_{apr}$ قرار می‌گیرند و ماتریس W_{hard} طوری انتخاب می‌شود که درایهٔ قطری مربوط به آن مکعب‌ها، عددی بزرگ و بقیهٔ عناصر روی قطر، یک در نظر گرفته می‌شوند. این سبب خواهد شد که در طول وارون‌سازی، چگالی برای بلوک‌های انتخابی ثابت بماند و وارون‌سازی به دنبال یافتن چگالی دیگر سلول‌ها باشد. مشخص است که قید MS به پارامترهای مدل وابسته است؛ بنابراین عبارت تنظیم در رابطهٔ ۲ شامل تابعی غیرخطی(Non-linear) از پارامترهای مدل است؛ بنابراین، الگوریتم IRLS (Iteratively Reweighted Least Square) برای حل مسئلهٔ وارون به کار می‌رود. در هر تکرار ماتریس MS با استفاده از مقادیر پارامترهای مدل در تکرار قبل، محاسبه شده و به کار می‌رود. نکتهٔ مهم آن است که در این حالت کمینه‌کردن تابع هدف ۲ همانند کمینه‌کردن تابع تیخونف معمولی است؛ هر دو عبارت تابع هدف دارای نرم دو و بنابراین مشتق‌پذیر هستند.

انتخاب دیگر برای عبارت تنظیم، استفاده از نرم یک پارامترهای مدل یا مشتقات آن‌هاست. در حالتی‌که نرم یک مشتقات پارامترهای مدل به کار رود، مسئلهٔ وارون به نام تغییرات کلی (Total Variation) شناخته می‌شود. برخلاف نرم دو، نرم یک مدل‌هایی را نتیجه می‌دهد که تعدادی از پارامترهای آن بسیار بزرگ و غالب عناصر دیگر کوچک هستند؛ بنابراین جواب‌هایی که با استفاده از پایدارکنندهٔ نرم یک به دست می‌آیند، اصطلاحاً تُنُک بوده و برای مدل سازی ساختارهایی با مرزهای گسسته مناسب هستند (فارکوهارسن و اولدنبرگ، ۱۹۹۸). مشکلات استفاده از نرم یک اجرای عددی آن در مسئلهٔ کمینه‌سازی است، به علت آنکه مشتق برای حالت $m = 0$ وجود ندارد؛ باید راهکارهایی برای کمینه‌سازی تابع هدف استفاده شوند که بر این مشکل غلبه کنند. در ادامه وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی بر اساس استفاده از منظم‌کنندهٔ نرم یک، معرفی و بررسی خواهد شد.

به منظور واردکردن مدل اولیه، رابطهٔ (۱) به شکل رابطه (۳) بازنویسی می‌شود:

$$G\mathbf{m} - G\mathbf{m}_{apr} = \mathbf{d}^{obs} - G\mathbf{m}_{apr} \qquad (۳)$$

با در نظر گرفتن $\mathbf{r} = \mathbf{d}^{obs} - G\mathbf{m}_{apr}$ و $\mathbf{y} = (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{apr})$، رابطهٔ (۳) به شکل رابطه (۴) تبدیل خواهد شد:

$$G\mathbf{y} = \mathbf{r} \qquad (۴)$$

اکنون برای تابع هدف رابطهٔ (۲) می‌توان نوشت:

$$P^\alpha(\mathbf{y}) = \|W_d(G\,\mathbf{y} - \mathbf{r})\|_2^2 + \alpha^2\|\mathbf{y}\|_1 \qquad (۵)$$

در این رابطه از نرم یک عبارت تنظیم استفاده شده است. از کمینه‌کردن رابطهٔ (۵) جواب $\mathbf{y}(\alpha)$ محاسبه می‌شود، سپس:

$$\mathbf{m}(\alpha) = \mathbf{m}_{apr} + \mathbf{y}(\alpha) \qquad (۶)$$

باید توجه داشت که کمینه‌کردن رابطهٔ (۵) به علت آنکه مشتق آن در $y = 0$ وجود ندارد، با مشکل روبه‌روست. برای غلبه بر این مشکل از تعریف نرم یک بردار $\mathbf{y}$،

$\|\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ و رابطهٔ (۷)

$$|y_i| = \frac{|y_i|}{|y_i|}|y_i| = \frac{y_i^2}{\sqrt{y_i^2}} \simeq \frac{y_i^2}{\sqrt{y_i^2+\varepsilon^2}} \quad (۷)$$

که در آن پارامتر ε یک مقدار مثبت بسیار کوچک است، می‌توان نوشت:

$$\|\mathbf{y}\|_1 \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\sqrt{y_i^2+\varepsilon^2}} \quad (۸)$$

فرض کنید $W_{L1} = \mathrm{diag}(1/(\mathbf{y}^2+\varepsilon^2)^{1/4}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$؛ بنابراین، $\|\mathbf{y}\|_1 \simeq \sum_{i=1}^{n} W_{L1}^2 y_i^2 = \|W_{L1}\mathbf{y}\|_2^2$ و می‌توان رابطهٔ (۵) را به شکل رابطه (۹) بازنویسی کرد:

$$P^{\alpha}(\mathbf{y}) = \|W_d(G\,\mathbf{y}-\mathbf{r})\|_2^2 + \alpha^2\,\|W_{L1}\mathbf{y}\|_2^2 \quad (۹)$$

بنابراین رابطهٔ (۵) با معرفی ماتریس وزنی‌دهی W_{L1} به شکل مشتق‌پذیر ۹ تبدیل شد. به شباهت ماتریس‌های W_{L1} و W_{ε} توجه شود، تنها تفاوت در توان موجود در مخرج این ماتریس هاست. همانند استفاده از قید فشردگی در این حالت نیز باید از الگوریتم IRLS برای حل مسئلهٔ وارون استفاده کرد؛ با این تفاوت که برای این حالت ماتریس W_{L1} در هر تکرار بهنگام (Update) می‌شود. اکنون ماتریس W_{depth} در رابطهٔ (۹) وارد می‌شود (لی و اولدنبرگ، ۱۹۹۸،۱۹۹۶) بنابراین:

$$P^{\alpha}(\mathbf{y}) = \|W_d(G\,\mathbf{y}-\mathbf{r})\|_2^2 + \alpha^2\,\|W_{L1}W_{depth}\mathbf{y}\|_2^2 \quad (۱۰)$$

با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۱۰) و برابر صفر قراردادن آن، جواب مسئلهٔ وارون به شکل رابطه (۱۱) است:

$$\mathbf{y}(\alpha) = (\tilde{G}^T\tilde{G} + \alpha^2 W^T W)^{-1}\tilde{G}^T\tilde{\mathbf{r}} \quad (۱۱)$$

در این رابطه $\tilde{G} = W_d G$، $W = W_{L1}W_{depth}$ و $\tilde{\mathbf{r}} = W_d\mathbf{r}$ است. حل عددی رابطهٔ (۱۱) با استفاده از تجزیهٔ مقادیر تکین تعمیم‌یافته (GSVD) زوج ماتریس $[\tilde{G}, W]$ امکان‌پذیر است (وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۴a).

برای زوج ماتریس $[\tilde{G}, W]$ تجزیهٔ مقادیر تکین تعمیم‌یافته، تجزیه‌ای به شکل رابطه (۱۲) است:

$$\tilde{G} = U\tilde{\Upsilon}X^T, \qquad W = V\tilde{M}X^T \quad (۱۲)$$

در این رابطه ماتریس‌های $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ متعامد هستند، $U^T U = I_m$ و $V^T V = I_n$ و ماتریس $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وارون‌پذیر است. دو ماتریس $\tilde{\Upsilon} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به صورت رابطه (۱۳) است:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Upsilon} = [0_{m\times q} \quad \Upsilon], \quad \Upsilon = \mathrm{diag}(\nu_{q+1},\dots,\nu_n) \in \mathbb{R}^{m\times m} \quad (۱۳)\\
&\tilde{M} = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\mu_{q+1},\dots,\mu_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ \mu_i = 1, \text{ for } i = 1:q\\
&0 < \nu_{q+1} \le \dots \le \nu_n < 1,\\
&1 \ge \mu_{q+1} \ge \dots \ge \mu_n > 0,\\
&\nu_i^2 + \mu_i^2 = 1
\end{aligned}$$

در این روابط $q = n - m$ است؛ بنابراین مقادیر تکین تعمیم‌یافته و ترتیب آن‌ها به صورت رابطه (۱۴) است:

$$\begin{aligned}
&\gamma_i = \frac{\nu_i}{\mu_i}, \ i = 1:n, \quad (۱۴)\\
&\gamma_1 = \dots\gamma_q = 0 < \gamma_{q+1} \le \dots \le \gamma_n
\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که از بین مقادیر تکین تعمیم‌یافته، به تعداد q برابر صفر و به تعداد m غیرصفر است. با استفاده از تجزیهٔ مقادیر تکین رابطهٔ (۱۱) به شکل زیر نوشته می‌شود (وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۴a):

$$\mathbf{y}(\alpha) = \sum_{i=q+1}^{n} \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2+\alpha^2}\frac{\mathbf{u}_{i-q}^T\tilde{\mathbf{r}}}{\nu_i}(X^T)_i^{-1} \quad (۱۵)$$

در این رابطه $\mathbf{u}_{i-q}$ و $(X)_i$ ستون‌های ماتریس‌های U و X هستند.

بیان شد که الگوریتم نیاز به تکرار دارد؛ بنابراین باید معیاری برای توقف این تکرارها تعیین شود. معیار اول آن است که شرط برازش داده، $\chi^2_{computed} = \left\|\frac{d_i^{obs}-d_i^{pre}}{\eta_i}\right\|_2^2 \le m + \sqrt{2m}$، برآورده شود (بولانگر و چوتو، ۲۰۰۱). در صورتی که این شرط برآورده نشود، بیشینهٔ تعداد تکرارها که توسط کاربر تعیین شده است، معیار توقف خواهد بود. نکتهٔ مهم دیگری که باید در وارون‌سازی گرانی رعایت شود، استفاده از کران بالا و پایین برای چگالی، $[m_{min} \quad m_{max}]$، است. استفاده از این کران‌ها موجب کاهش شدید عدم یکتایی مسئله و بهبود جواب‌های حاصل خواهد شد. از سوی دیگر این کران‌ها تأثیر مستقیمی در فشردگی مدل دارند؛ به‌طوری که اگر کران بزرگ‌تری از مقدار واقعی انتخاب شود، مدل حاصل فشردگی بیشتری در مقایسه با حالت واقعی دارد (پورتنیاگوین و زادانف، ۱۹۹۹). بنابراین در استفاده از کران بالا و پایین باید تمامی

اطلاعات زمین‌شناسی و حفاری موجود را به کار گرفت تا به مدلی پذیرفتنی دست یافت. در این مقاله از روشی ساده برای اجرای کران‌های چگالی استفاده شده است. در هر تکرار پس از محاسبهٔ جواب، مقادیر چگالی‌های به‌دست‌آمده بررسی می‌شوند. اگر برخی از این چگالی‌ها خارج از کران‌ها باشند، مقدار آن چگالی‌ها برابر با نزدیک‌ترین کران در نظر گرفته می‌شود. مراحل وارون‌سازی در جدول ۱ خلاصه شده است.

تعیین پارامتر تنظیم α یکی از مراحل حساس در وارون‌سازی است. هر روشی که برای تعیین این پارامتر به کار رود باید خطای بین جواب $\mathbf{y}(\alpha)$ و جواب دقیق $\mathbf{y}_{exact}$ را کمینه کند (هانسن، ۲۰۱۰). تاکنون روش‌های بسیاری مانند MDP، LC، GCV، χ^2 Principle و UPRE برای محاسبهٔ پارامتر تنظیم در وارون گرانی‌سنجی به کار رفته‌اند. تمامی این روش‌ها براساس سرعت اجرا، دقت در برآورد پارامتر تنظیم و عملکرد برای سطوح نوفه‌ای مختلف در وارون‌سازی گرانی با استفاده از قید MS مطالعه و بررسی شده‌اند (وطن‌خواه و همکاران، ۱۳۹۳). در این مقاله هدف بررسی روش‌های تعیین پارامتر نیست، بلکه نیاز است که از روشی مناسب برای محاسبهٔ α استفاده شود؛ بنابراین روش UPRE که توسط ووگل (۲۰۰۲) معرفی شد، به کار برده می‌رود. این روش توانایی خوبی در برآورد پارامتر تنظیم بهینه، حتی برای سطوح نوفه‌ای بالا دارد. به علت آنکه $\mathbf{y}_{exact}$ معلوم نیست، در روش UPRE از یک نشانگر خطای جایگزین به نام خطای پیش‌بینی (Predictive Error) استفاده می‌شود:

$$\mathbf{P}(\mathbf{y}(\alpha)) = \tilde{G}\mathbf{y}(\alpha) - \tilde{\mathbf{r}}_{exact} \tag{۱۶}$$

خطای پیش‌بینی نیازمند دانستن $\tilde{\mathbf{r}}_{exact}$ است؛ بنابراین مستقیم قابل محاسبه نیست، اما باقی‌مانده قابل اندازه‌گیری است:

$$\mathbf{R}(\mathbf{y}(\alpha)) = \tilde{G}\mathbf{y}(\alpha) - \tilde{\mathbf{r}} \tag{۱۷}$$

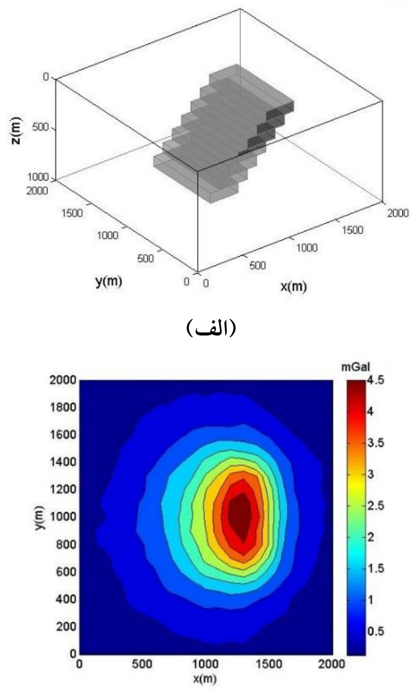
بنابراین تخمینی از میانگین مربع نرم خطای پیش‌بینی، $\frac{1}{m}\|\mathbf{P}(\mathbf{y}(\alpha))\|_2^2$، با استفاده از میانگین مربع نرم باقی‌مانده و مقداری محاسبات جبری قابل اندازه‌گیری است (ووگل، ۲۰۰۲). پارامتر تنظیم بهینهٔ آن است که تابع $U(\alpha)$ را کمینه کند:

$$\arg\min_{\alpha}\left\{\frac{1}{m}\|\mathbf{P}(\mathbf{y}(\alpha))\|_2^2\right\} = \arg\min_{\alpha}\{U(\alpha)\} = \arg\min_{\alpha}\left\{\|\tilde{G}\mathbf{y}(\alpha)-\tilde{\mathbf{r}}\|_2^2 + 2\,\mathrm{trace}(H(\alpha)) - m\right\} \tag{۱۸}$$

در این رابطه $H(\alpha) = \tilde{G}(\tilde{G}^T\tilde{G}+\alpha^2W^TW)^{-1}\tilde{G}^T$ و عملگر trace به اثر ماتریس دلالت دارد. تابع $U(\alpha)$ با استفاده از تجزیهٔ مقادیر تکین تعمیم‌یافته به شکل رابطه (۱۹) نوشته می‌شود:

$$U(\alpha) = \sum_{i=q+1}^{n}\left(\frac{1}{\gamma_i^2\alpha^{-2}+1}\right)^2(\mathbf{u}_{i-q}^T\tilde{\mathbf{r}})^2 + 2\left(\sum_{i=q+1}^{n}\frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2+\alpha^2}\right) - m \tag{۱۹}$$

عملاً برای کمینه کردن تابع $U(\alpha)$ محدودهٔ بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقادیر تکین به تعداد زیادی α تقسیم می‌شود، پارامتری که به ازای آن تابع $U(\alpha)$ کمینه باشد، به‌عنوان پارامتر بهینه انتخاب خواهد شد.



(ب)

شکل ۱. (الف) دایک شیب‌دار دارای تباین چگالی $1\ gr/cm^3$ با محیط دربرگیرنده‌اش و (ب) دادهٔ تولیدشده توسط مدل و آمیخته به نوفه

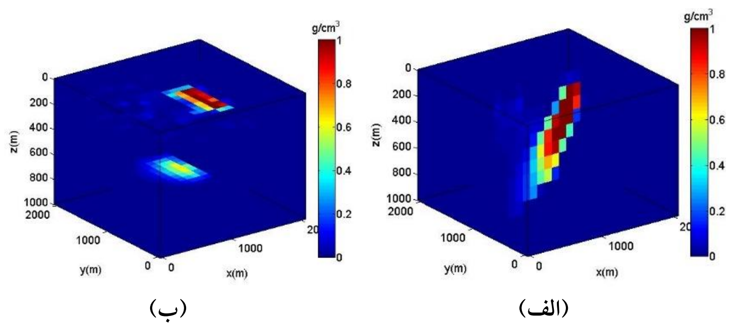
جدول ۱. مراحل وارون‌سازی

ورودی‌ها: $\mathbf{d}^{obs}$، G، $\mathbf{m}_{prior}$، W_d، $\beta=0.8$، $\varepsilon^2=1\times10^{(-9)}$، m_{min}، m_{max}
مرحلهٔ ۱. محاسبهٔ W_{depth}، $\tilde{G}=W_dG$
مرحلهٔ ۲. قراردادن $\mathbf{m}^{(0)}=\mathbf{m}_{prior}$، $W_{L1}^{(1)}=I_n$، $W^{(1)}=W_{depth}$
مرحلهٔ ۳. قراردادن $k=1$، **محاسبه** $\tilde{\mathbf{r}}^{(1)}=W_d(\mathbf{d}^{obs}-G\mathbf{m}^{(0)})$
مرحلهٔ ۴. محاسبهٔ تجزیهٔ مقادیر تکین تعمیم‌یافته: $W^{(k)}=V\tilde{M}X^T$, $\tilde{G}^{(k)}=U\tilde{\Upsilon}X^T$
مرحلهٔ ۵. محاسبهٔ پارامتر تنظیم $\alpha^{(k)}$
مرحلهٔ ۶. محاسبهٔ $\mathbf{y}^{(k)}=\sum_{i=q+1}^{n}\frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2+(\alpha^{(k)})^2}\frac{\mathbf{u}_{i-q}^T\tilde{\mathbf{r}}^{(k)}}{\nu_i}(X^T)_i^{-1}$
مرحلهٔ ۷. محاسبهٔ $\mathbf{m}^{(k)}=\mathbf{m}^{(k-1)}+\mathbf{y}^{(k)}$
مرحلهٔ ۸. اعمال کران‌های چگالی، به‌طوری که $m_{min}\le\mathbf{m}^{(k)}\le m_{max}$
مرحلهٔ ۹. محاسبهٔ $\tilde{\mathbf{r}}^{(k+1)}=W_d(\mathbf{d}^{obs}-G\mathbf{m}^{(k)})$، $W_{L1}^{(k+1)}=\mathrm{diag}(\frac{1}{((\mathbf{m}^{(k)}-\mathbf{m}^{(k-1)})^2+\varepsilon^2)^{1/4}})$، $W^{(k+1)}=W_{L1}^{(k+1)}W_{depth}$
مرحلهٔ ۱۰. قراردادن $k=k+1$
مرحلهٔ ۱۱. معیار توقف بررسی شود؛ در صورت برآورده‌شدن فرایند، متوقف شود و در غیر این‌صورت برو به مرحلهٔ ۴
خروجی: $\mathbf{m}^{(k)}$

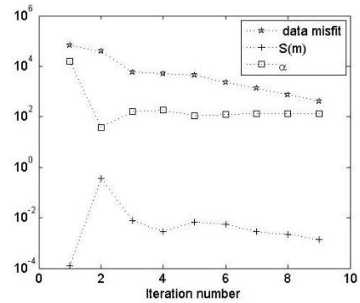
۳. مدل مصنوعی

برای بررسی الگوریتم پیشنهادی مدلی به صورت دایک شیب‌دار طراحی شده است (شکل ۱-الف). تباین چگالی دایک نسبت به محیط پیرامونی‌اش $1\ gr/cm^3$ است. مدل از عمق ۱۰۰ m شروع می‌شود و تا ۸۰۰ m ادامه دارد. دادهٔ حاصل از این مدل، $\mathbf{d}^{exact}$، در ۴۴۱=۲۱×۲۱ ایستگاه در سطح تولید می‌شود. فواصل ایستگاه‌ها در جهات $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ برابر ۱۰۰m است. نوفهٔ گوسی با انحراف معیار $(0.02(d^{exact})_i+0.001\|\mathbf{d}^{exact}\|_2)$ به هر داده اضافه شده است. در این رابطه ضرایب ۰/۰۲ و ۰/۰۰۱ سطح نوفه را مشخص می‌کنند. این نوع تولید نوفه از کامل‌ترین انواع تولید نوفهٔ گوسی است؛ به آن علت که انحراف معیار از دو قسمت تشکیل یافته است. برای بررسی اثر سطوح مختلف نوفه در وارون گرانی‌سنجی به وطن‌خواه و همکاران (۱۳۹۳) مراجعه شود. شکل ۱-ب دادهٔ تولیدشده توسط این مدل و آمیخته به نوفه را نشان می‌دهد.

برای وارون‌سازی سطح زیرین به ۴۴۱۰=۱۰×۲۱×۲۱ مکعب با ابعاد ۱۰۰m تقسیم می‌شود. تکرارها با $\mathbf{m}^{(0)}=\mathbf{0}$ شروع می‌شوند. ضریب ε^2 برابر 10^{-9} و کران‌های چگالی $\left[m_{min}=0\frac{gr}{cm^3},\ m_{max}=1\frac{gr}{cm^3}\right]$ انتخاب شده‌اند. در وارون سازی داده‌های میدان پتانسیل معمولاً در تکرار اول پارامتر تنظیم برابر مقدار بزرگی انتخاب می‌شود که سبب بهبود نتایج است (فارکوهارسن و اولدنبرگ، ۲۰۰۴)؛ بنابراین در تکرار اول نیازی به استفاده از روش‌های تعیین پارامتر تنظیم نیست و در تکرارهای بعدی این روش‌ها استفاده می‌شوند. در این مقاله برای تکرار اول مقدار پارامتر تنظیم با استفاده از $\alpha^{(1)}=(n/m)^2(\max(\gamma_i)/\mathrm{mean}(\gamma_i))$ انتخاب می گردد (وطن‌خواه و همکاران، ۲۰۱۵) و برنامه بعد از ۹ تکرار متوقف می‌شود. نتایج وارون‌سازی در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. نتایج وارون‌سازی؛ (الف) سطح مقطع در y=۱۰۰۰ m و (ب)سطح مقطع در z=۱۵۰m و z=۶۵۰m



شکل ۳. عدم انطباق داده، عبارت تنظیم و پارامتر منظم‌سازی در تکرارهای متوالی برای مدل بازسازی‌شدهٔ شکل ۲ (محور عمود دارای مقیاس لگاریتمی)

شیب و مرزهای دایک به خوبی بازسازی شده‌اند. همچنین تباین چگالی های به‌دست‌آمده نزدیک به مدل اصلی هستند. نتایج به‌روشنی قابلیت زیاد این الگوریتم را در بازسازی مرزهای گسسته نشان می‌دهد. در عمق تفکیک‌پذیری کاهش یافته، اما پذیرفتنی است. عبارت عدم انطباق داده، عبارت تنظیم و پارامتر α برای تکرارهای متوالی در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. پارامتر تنظیم در تکرارهای آخر به سمت مقدار ثابتی همگرا می‌شود، $\alpha^{(9)} = 131.2$. تابع $U(\alpha)$ برای تکرارهای چهارم و نهم در شکل ۴ دیده می شود. همان‌طور که دیده می شود، $U(\alpha)$ در ابتدا شروع به کاهش می‌کند و سپس افزایش می‌یابد؛ بنابراین مشخص است که این تابع یک کمینهٔ واضح دارد. پارامتر تنظیم مربوط به این کمینه به‌عنوان پارامتر بهینه، انتخاب و در وارون‌سازی استفاده می‌شود.

۴. داده‌های واقعی

داده‌های گرانی برداشت‌شده روی ناحیهٔ سد گتوند برای وارون‌سازی استفاده می‌شوند. عملیات برداشت، پردازش و تفسیر این داده‌ها توسط بخش گرانی‌سنجی مؤسسهٔ ژئوفیزیک انجام پذیرفته است. به علت وجود حفره‌های زیرسطحی در این ناحیه، کاربرد پایدارکنندهٔ نرم یک مناسب است.

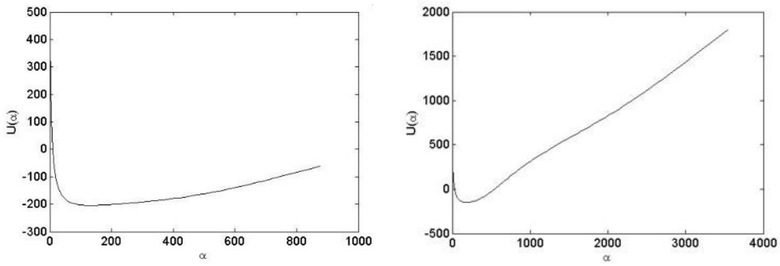
۴. ۱. زمین‌شناسی منطقه

ناحیهٔ موردمطالعه در جنوب غربی ایران و در مجاورت محل ساخت سد گتوند روی رودخانهٔ کارون قرار دارد. رسوبات سازند گچساران ساختار زمین شناسی غالب در منطقه است. این سازند عمدتاً از مارل(Marl)، ژیپس (Gypsum)، انیدریت (Anhydrite) و هالیت (Halite) تشکیل شده است. شکل ۵ نقشهٔ زمین‌شناسی منطقه را نشان می‌دهد. حفره‌های زیرسطحی موجود در برخی از نقاط این سازند توسط فروچال‌هایی (sinkholes) در سطح نمود پیدا کرده‌اند. یکی از بزرگ‌ترین این فروچال‌ها در جنوب شرقی ناحیه قرار دارد و به نام بوستانی (Boostani) شناخته می‌شود. گودال‌های کوچک دیگری نیز در ناحیه وجود دارند. تمامی این فروچال‌ها به علت انحلال رسوبات نمکی سازند گچساران پدیدار شده‌اند. احتمال آنکه فروچال بوستانی و حفره‌های نزدیک آن به طرف غرب و شمال، به سمت رودخانهٔ کارون، با حفره‌های دیگری در ارتباط باشند، مسئلهٔ اصلی و مورد مطالعه است. اگر چنین ارتباطی وجود داشته باشد، مقدار زیادی از آبی که باید در پشت سد ذخیره شود، هدر می‌رود و کمبود جدی آب اتفاق خواهد افتاد.

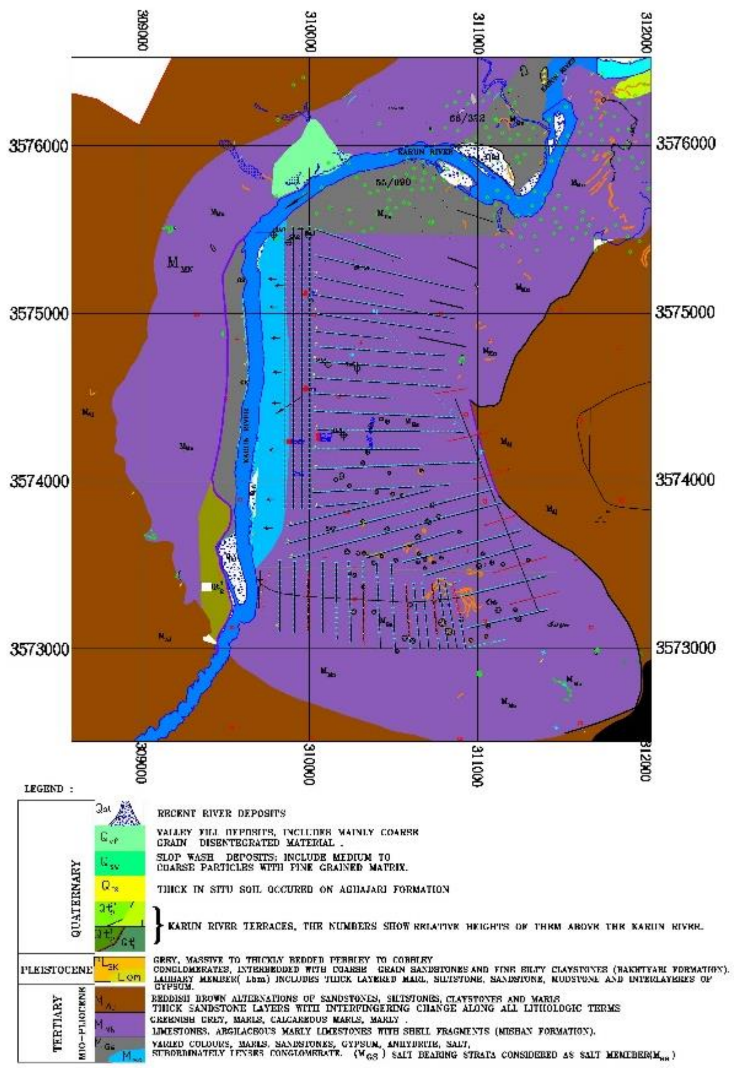
۴. ۲. پردازش و آماده‌سازی داده‌ها

تعداد ۱۶۰۰ ایستگاه گرانی سنجی در ناحیه برداشت شده

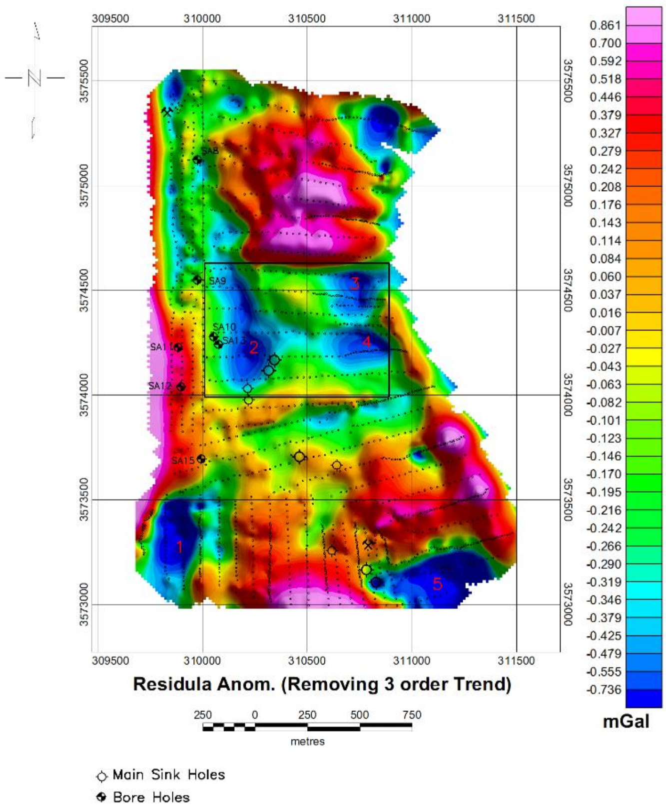
است. فاصلهٔ بین ایستگاه‌ها در طول پروفیل‌ها برابر ۱۰ m و فاصلهٔ بین پروفیل‌ها بین ۳۰m تا ۵۰m است. این ایستگاه‌ها روی نقشهٔ شکل ۵ نشان داده شده‌اند. تصحیحات و پردازش‌های مورد نظر روی داده‌ها انجام پذیرفته و بی‌هنجاری باقیماندهٔ گرانی به دست آمده است (اردستانی، ۲۰۱۳). حضور ۶ آنومالی منفی در نقشهٔ بی‌هنجاری باقیمانده مشخص است (شکل ۶). آنومالی ۵ بر روی فروچال بوستانی قرار دارد. برای کاربرد الگوریتم ناحیهٔ شامل آنومالی‌های ۲، ۳ و ۴ انتخاب می‌شود. دادهٔ گرانی برای این ناحیه به شبکه‌ای منظم با فواصل ۳۰m، شامل ۶۴۰=۲۰×۳۲ داده تبدیل می‌شود.



شکل ۴. منحنی U(α)؛ (الف) تکرار چهارم و (ب) تکرار نهم



شکل ۵. نقشهٔ زمین‌شناسی ناحیهٔ مورد مطالعه



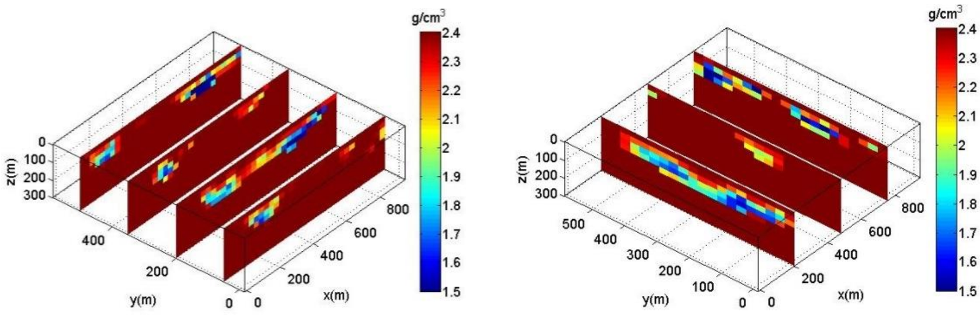
شکل ۶. نقشهٔ آنومالی باقیمانده؛ مستطیل مشکی ناحیهٔ منتخب برای وارون‌سازی را نشان می‌دهد.

۴. ۳. وارون‌سازی داده‌ها

در وارون‌سازی داده های این ناحیه برای اجتناب از انحراف در لبه‌ها، دو مکعب از هر طرف به مدل طراحی‌شده اضافه شده است. بنابراین سطح زیرین با ۸۶۴۰ = ۱۰×۲۴×۳۶ مکعب با ابعاد ۳۰ m مدل می‌شود. برای خطای در داده، فرض می‌شود که هر داده دارای خطای گوسی است که انحراف معیار آن برابر $(0.02(\mathbf{d}^{obs})_i + 0.005\|\mathbf{d}^{obs}\|_2)$ است. با توجه به آنکه در این ناحیه حفره های نمکی متخلخل مورد انتظار است؛ بنابراین چگالی زمینه برابر $2/4\ gr/cm^3$ و کران های چگالی $[m_{min} = 1.5\,gr/cm^3 \quad m_{max} = 2.4\,gr/cm^3]$ انتخاب می شوند. شکل ۷ نتایج وارون سازی داده‌های این ناحیه را نشان می‌دهد. عمق به‌دست‌آمده برای آنومالی‌های ۲، ۳ و ۴ در جدول ۲ جمع‌آوری شده است. در شکل ۶ وجود دو گمانه در مجاورت آنومالی ۲ مشخص است. نتایج این حفاری‌ها نیز در جدول آورده شده‌اند (اردستانی، ۲۰۱۳). نتایج حاصل از مدل‌سازی با نتایج حفاری تطابق خوبی دارند. عدم انطباق داده، عبارت تنظیم و پارامتر α برای تکرارهای متوالی در شکل ۸ دیده می‌شود. همچنین تابع $U(\alpha)$ برای تکرارهای پنجم و سیزدهم در شکل ۹ آورده شده است.

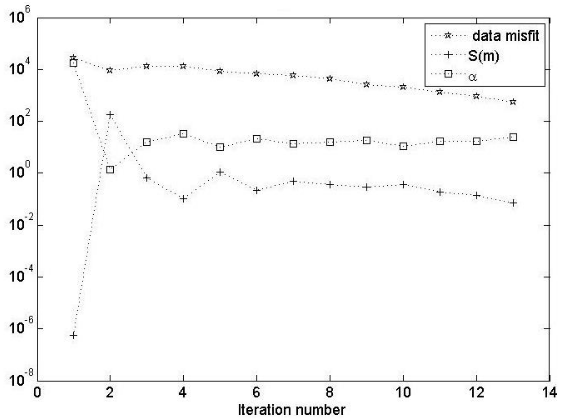
جدول ۲. عمق‌های به‌دست‌آمده با استفاده از مدل‌سازی و حفاری

آنومالی	مدل‌سازی		حفاری	
	کمینه (متر)	بیشینه (متر)	کمینه (متر)	بیشینه (متر)
۲	۹۰–۶۰	۱۵۰	۱۵۰–۱۱۵	۱۶۰–۱۵۰
۳	۳۰	۱۲۰–۹۰	–	–
۴	۳۰	۹۰	–	–

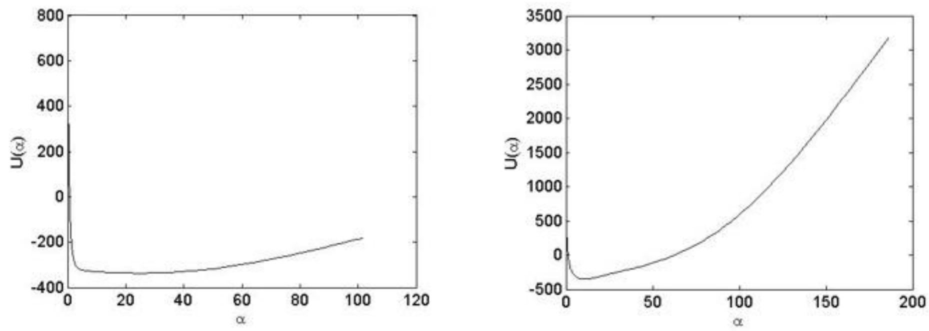


(ب) (الف)

شکل ۷. نتایج وارون‌سازی برای ناحیهٔ انتخاب‌شدهٔ شکل ۶؛ (الف) سطح مقطع در x=۲۰۰ , ۴۷۵ , ۷۵۰m و (ب) سطح مقطع در y=۵۰, ۲۰۰, ۳۵۰, ۵۰۰ m



شکل ۸. عدم انطباق داده، عبارت تنظیم و پارامتر منظم‌سازی در تکرارهای متوالی برای مدل بازسازی‌شدهٔ شکل ۷ (محور عمود دارای مقیاس لگاریتمی)



(ب) (الف)

شکل ۹. منحنی $U(\alpha)$ ؛ (الف) تکرار پنجم و (ب) تکرارسیزدهم.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله وارون‌سازی داده‌های گرانی‌سنجی با استفاده از پایدارکنندهٔ نرم یک معرفی شد. عبارت تنظیم نرم یک با استفاده از روابطی به‌صورت نرم دو حاصل‌ضرب پارامترهای مدل در یک تابع وزن‌دهی تبدیل می‌شود. این تابع وزن‌دهی به پارامترهای مدل وابسته بوده و بنابراین نیاز است که مسئلهٔ وارون به صورت تکرار حل شود. در هر تکرار تابع وزن‌دهی با استفاده از مقادیر پارامترهای مدل در تکرار قبل محاسبه می‌شود. با این شیوه کمینه‌کردن تابع هدف کلی همانند تابع تیخونف معمولی و با مشتق‌گیری انجام گرفت. مدلی که از کمینه‌کردن چنین تابع هدفی حاصل شود، دارای این قابلیت است که ساختارهایی با مرزهای تیز و گسسته را بازسازی کند. مدل‌سازی داده‌های مصنوعی

این توانایی را نشان داد؛ شیب و مرز های دایک بازسازی شده به مدل اصلی نزدیک بود. نشان داده شد که پایدارکنندۀ نرم یک و قید فشردگی از لحاظ نوع اجرا و نتایج شباهت زیادی دارند. هر دو از توابع وزنی استفاده می‌کنند و بنابراین مسئلۀ وارون باید به‌صورت تکرار حل شود. در این مقاله پارامتر تنظیم با استفاده از روش UPRE و برای هر تکرار به دست آمد. این روش نشان داد که توانایی خوبی برای تخمین پارامتر تنظیم در وارون گرانی دارد. کمینۀ آن به‌خوبی مشخص است و پارامتر برای تکرارهای آخر به سمت عدد ثابتی همگرا می‌شود. با استفاده از تجزیۀ مقادیر تکین تعمیم‌یافته، روابط کاربردی برای جواب عددی مسئلۀ وارون و همچنین روش تعیین پارامتر تنظیم ارائه شد که کاربرد روش را برای خواننده ساده می‌کند. در پایان الگوریتم برای وارون سازی داده‌های برداشت شده در ناحیۀ سد گتوند به کار رفت. نتایج مدل‌سازی برای بی‌هنجاری شمارۀ ۲، گسترش عمقی بین ۹۰–۶۰ تا ۱۵۰ متر را نشان داد که با نتایج حفاری تطابق نسبتاً خوبی دارد. همچنین برای بی‌هنجاری‌های ۲ و ۳ گسترش عمقی از ۳۰ تا ۹۰ متر حاصل شد. نتایج نشان داد که در این منطقه احتمال آنکه حفره‌های زیرسطحی در ارتباط با یکدیگر باشند، وجود دارد. کدهای استفاده شده در این مقاله با نرم‌افزار مت‌لب نوشته شده و نزد نویسندۀ رابط موجود است.

مراجع

وطن‌خواه، س.، ۱۳۹۳، استفاده از اطلاعات اولیه برای تخمین پارامتر منظم‌سازی تیخونف و کاربرد آن در وارون‌سازی خطی داده‌های گرانی، رساله دکتری، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، تهران، ایران.

Ardestani, V. E., 2013, Detecting, delineating and modeling the connected solution cavities in a dam site via microgravity data, Acta Geod. Geophys., 48, 123-138.

Boulanger, O. and Chouteau, M., 2001, Constraint in 3D gravity inversion, Geophysical Prospecting, 49, 265-280.

Farquharson, C. G., 2008, Constructing piecewise-constant models in multidimensional minimum-structure inversion, Geophysics, 73(1), K1-K9.

Farquharson, C. G. and Oldenburg, D. W., 1998, Nonlinear inversion using general measure of data misfit and model structure, Geophys. J. Int., 134, 265-277.

Farquharson, C. G. and Oldenburg, D. W., 2004, A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non-linear inverse problems, Geophys. J. Int., 156, 411-425.

Hansen, P. C., 2010, Discrete inverse problems: insight and algorithms, SIAM fundamentals of algorithms, Philadelphia.

Last, B. J. and Kubik, K., 1983, Compact gravity inversion, Geophysics, 48, 713-721.

Li, Y. and Oldenburg, D. W., 1996, 3D inversion of magnetic data, Geophysics, 61, 394-408.

Li, Y. and Oldenburg, D. W., 1998, 3D inversion of gravity data, Geophysics, 63, 109-119.

Li, Y. and Oldenburg, D. W., 1999, 3D Inversion of DC resistivity data using an L-curve criterion, 69th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys. Expanded Abstracts, 251-254.

Loke, M., Acworth, I. and Dahlin, T., 2003, A comparison of smooth and blocky inversion methods in 2D electrical imaging survey, Explor. Geophys., 34, 182-187.

Portniaguine, O. and Zhdanov, M. S. 1999, Focusing geophysical inversion images, Geophysics, 64, 874-887.

Vatankhah, S., Ardestani, V. E. and Renaut, R. A., 2014a, Automatic estimation of the regularization parameter in 2-D focusing gravity inversion: application of the method to the Safo manganese mine in northwest of Iran, Journal of Geophysics and Engineering, 11, 045001.

Vatankhah, S., Renaut, R. A. and Ardestani, V. E., 2014b, Regularization parameter estimation for underdetermined problems by the χ^2 principle with application to 2D focusing gravity inversion, Inverse Problems, 30,085002.

Vatankhah, S., Ardestani, V. E. and Renaut R. A., 2015, Application of the χ^2 principle and unbiased predictive risk estimator for determining the regularization parameter in 3-D focusing gravity inversion, Geophys. J. Int., 200, 265-277.

Vogel, C. R., 2002, Computational methods for inverse problems, SIAM frontiers in applied mathematics, SIAM, Philadelphia, U.S.A.

Zhdanov, M. S., 2002, Geophysical inverse theory and regularization problems, Elsevier, Amsterdam.