

تعیین میدان لغزش گسل‌های امتدادلغز به کمک روش‌های حل وارون

سیدرضا میراشرفی^۱ و ناصر خاجی^{۲*}

۱. کارشناس ارشد، گروه مهندسی زلزله، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

۲. استاد گروه مهندسی زلزله، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

(دریافت: ۹۳/۱۱/۲۰، پذیرش نهایی: ۹۴/۱۱/۱۱)

چکیده

در تحقیق حاضر، روشی نظری پیشنهاد می‌شود که در آن، با استفاده از روش گره مشترک که مبتنی بر روش عددی المان محدود است، مدل دوبعدی و سه‌بعدی از دو نوع گسل برای در نظر گرفتن ناپیوستگی و پیدا کردن میدان لغزش گسل‌ها عرضه شده است. روند حل مسئله تا رسیدن به میدان لغزش گسل، شامل دو بخش حل مستقیم و حل وارون است. در حل مستقیم، با اعمال لغزش‌های یکنواخت معلوم در گسل، جابه‌جایی‌های سطح زمین به دست آمده و صحت آنها با نتایج تحلیلی مقایسه شده است. در بخش حل وارون، با استفاده از روش گره مشترک، ماتریس‌های عملگر گرین به دست آمده است. برای منظور کردن ناپیوستگی‌ها با این روش، فقط بردار بارگذاری اصلاح می‌شود و هیچ افزایشی در تعداد درجه‌های آزادی اعمال نمی‌شود، و بنابراین ماتریس سختی کل سامانه بدون تغییر می‌ماند. در نهایت، برای پیدا کردن رژیم لغزش گسل و تعیین ناحیه قفل شده، بعد از رفع تکینگی ماتریس‌های عملگر گرین، حل وارون به دست می‌آید. صحت‌سنجی مدل‌های حل وارون نیز نتایج قابل قبولی را نشان می‌دهد، که حاکی از تعیین ناحیه قفل شده برای مدل نهایی با دقت قابل قبول هستند.

واژه‌های کلیدی: گسل، ناپیوستگی، روش المان محدود، گره مشترک، تابع گرین، ناحیه قفل شده.

۱. مقدمه

مدیریت بحران زلزله عرضه کرد. برای مثال می‌توان از ساخت ساختمان‌های حساس در حوالی ناحیه‌هایی با خطرپذیری لرزه‌ای بسیار زیاد احتراز کرد؛ و ستادهای مدیریت بحران زلزله را براساس این سناریوهای پیشنهادی، رهبری کرد.

برای تعیین این ناحیه قفل شده، از حل وارون مسئله استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن فرضیه‌هایی از جمله همگن و همسان‌گرد بودن مصالح، تحلیل وارون به صورت زیر صورت می‌گیرد: با اندازه‌گیری جابه‌جایی‌های سطح زمین (مثلاً از راه نصب GPS) در نقطه‌های گوناگون سطح زمین و ثبت داده‌ها، می‌توان به لغزش‌های رخ داده در گسل رسید. ابزاری که برای ارتباط بین جابه‌جایی‌های سطح زمین و جابه‌جایی‌های رخ داده در گسل استفاده می‌شود، ماتریس عملگرهای گرین است (بحرانی و خاجی، ۱۳۸۹). این ماتریس در واقع پاسخ تحریک‌های واحد در نقطه‌های گوناگون

زمین لرزه‌ها پدیده‌های تکرارپذیر پوسته زمین هستند که هر چند وقت یک‌بار باعث خسارت‌های چشمگیری به منابع و حیات بشری می‌شوند. لذا شناسایی محل‌های احتمالی زلزله‌های بعدی از موضوع‌های موردعلاقه زلزله‌شناسان است. گسل‌ها مهم‌ترین عامل و منشأ اصلی وقوع زلزله‌ها هستند که به دو نوع کلی درون‌صفحه‌ای و بین‌صفحه‌ای تقسیم‌بندی می‌شوند. با تعیین حرکت‌های لغزشی گسل در نواحی گسلش، می‌توان به قسمت‌هایی از گسل که در آن جابه‌جایی رخ داده است و قسمت‌هایی که جابه‌جایی نداشته‌اند، پی برد. با این کار، ناحیه‌هایی از گسل که جابه‌جایی در آن رخ نداده است (و به اصطلاح به آن، ناحیه قفل شده گفته می‌شود)، مشخص خواهد شد (خاجی و هیگاشیهارا، ۱۳۸۴). این ناحیه بیان‌گر قسمتی خواهد بود که امکان وقوع زلزله در آن پیش‌بینی می‌شود. بنابراین با مشخص شدن نواحی قفل شده، می‌توان سناریوهای مناسبی برای کاهش خطرپذیری لرزه‌ای و

کرد. در این تحقیق، روشی ساده برای در نظر گرفتن تغییرشکل‌های ناپیوستگی‌های موجود در محیط پیوسته، بر مبنای روش المان محدود عرضه می‌شود (خاجی، ۱۳۸۳). این روش که به روش گره مشترک (Split Node) موسوم است، می‌تواند رابطه‌ای مستقیم بین تغییرشکل‌های ناپیوستگی (مانند لغزش گسل) و تغییرشکل‌های حاصل از آن در کل قلمرو سامانه مورد نظر برقرار کند. در حالت‌های ساده‌شده‌ای که گسل‌ها خطوطی مستقیم (در تحلیل‌های دو بُعدی) یا صفحه‌هایی مسطح (در تحلیل‌های سه بُعدی) در یک نیم‌فضای همگن، همسانگرد و کشسان هستند، جواب‌های تحلیلی در دست است (فراند و بارنت، ۱۹۷۶؛ تومار و دیمان، ۲۰۰۳؛ رانی و بالا، ۲۰۰۶ و ۲۰۱۳). رابطه‌های تحلیلی حالت سه بُعدی همانند رابطه‌های تحلیلی حالت دو بُعدی براساس اصول مبتنی بر نظریه کشسانی و با استفاده از تابع‌های مختلط به دست می‌آیند (چینری، ۱۹۶۱). از سوی دیگر، گسل‌های واقعی موجود در طبیعت از نظر هندسی پیچیده‌تر از حالت‌های ایدئال ساده‌شده هستند، و برای چنین گسل‌هایی حل تحلیلی موجود نیست. بنابراین ضروری است که برای تحلیل آنها از ابزارهای عددی (مثل روش المان محدود) استفاده شود. همان‌گونه که اشاره شد، در این مقاله از روش گره مشترک برای منظور کردن ناپیوستگی‌ها در محیط پیوسته استفاده شده است. در روش گره مشترک، فرض بر این است که مقدارهای بردار لغزش، از پیش تعیین شده است. البته در حالت کلی این بردارها ممکن است مجهول نیز باشند، اما فرض معلوم بودن آنها خللی در روش ایجاد نمی‌کند. هر بردار لغزش در نقطه گرهی معینی که بین دو المان مشترک است، یک ناپیوستگی تغییر مکانی ایجاد می‌کند. در این روش، برای منظور کردن ناپیوستگی یادشده، فقط بردار بارگذاری اصلاح می‌شود، و بدین ترتیب ماتریس سختی کل سامانه تغییر نمی‌کند. بنابراین، با این روش، تغییری در ویژگی‌های مکانیکی سامانه ایجاد نمی‌شود. از دیگر مزایای این روش می‌توان به افزایش نیافتن تعداد درجه‌های آزادی کل و اعمال

گسل است که با استفاده از روش عددی المان محدود، تعیین می‌شود. بنابراین با اجرای یک تحلیل وارون، میدان لغزش گسل به دست می‌آید. با داشتن این میدان، ناحیه قفل شده (یا به عبارتی، ناحیه‌ای که امکان وقوع زلزله در آن می‌رود) نیز قابل تعیین است. تحقیق حاضر بر آن است که با بررسی حرکت‌هایی که در گسل‌های امتداد لغز درون صفحه‌ای رخ می‌دهد، بتواند میدان لغزش آنها را تعیین کند. برای این منظور، روشی نظری در این مقاله گسترش داده می‌شود، که بر مبنای روش المان محدود استوار است. همان‌گونه که در بخش ۲ مقاله آمده است، روش گره مشترک به منزله روشی ساده و دقیق برای مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها در روش المان محدود مورد استفاده تحقیق حاضر قرار می‌گیرد. بخش ۳ مقاله به پیشنهاد جدیدی برای محاسبه لغزش می‌پردازد که مبتنی بر ماتریس‌های عملگر تابع گرین است. ماتریس‌های یادشده به صورت عددی و به کمک روش المان محدود مبتنی بر روش گره مشترک محاسبه می‌شوند. در ادامه، مسئله وارون پیشنهادی عرضه می‌شود که به علت بدخیمی ماتریس‌هایش، از روش تفکیک مقادیر تکین برای حل آن استفاده می‌شود. در بخش ۴، نمونه‌هایی از گسل‌ها بررسی می‌شود تا توانایی روش پیشنهادی در برآورد ناحیه قفل شده تعیین شود. در ادامه به جزئیات این ایده پرداخته می‌شود.

۲. روش گره مشترک

در مهندسی زلزله، یکی از مهم‌ترین پدیده‌ها، شبیه‌سازی تغییرشکل گسل‌ها و پیدا کردن میدان لغزش آنها است. تاکنون روش‌های گوناگونی برای در نظر گرفتن ناپیوستگی عرضه شده که این روش‌ها عمدتاً بر پایه روش المان محدود است و در دو گروه روش‌های نیازمند روند تکرار و بدون روند تکرار دسته‌بندی می‌شود، که از جمله آنها می‌توان به المان درز (گودمن و همکاران، ۱۹۶۸؛ ونگ و همکاران، ۲۰۱۳؛ ژائو، ۲۰۱۵)، مسئله‌های تماس (هرمن، ۱۹۷۸؛ اتروویچ و بته، ۱۹۹۱؛ پولیوس و رنارد، ۲۰۱۵) و روش ماده نرم (بحرانی و خاجی، ۱۳۸۹) اشاره

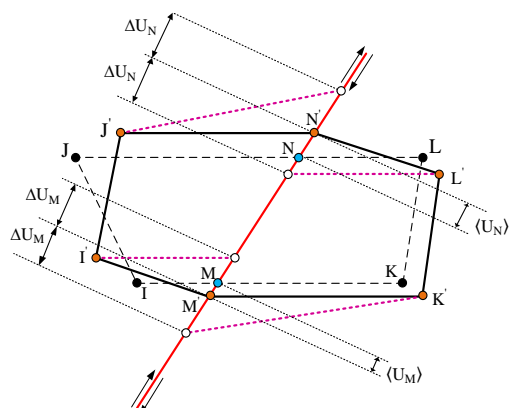
گرهی ناشی از لغزش فرضی خط گسل نشان داده شده است.

همان‌گونه که اشاره شد مقدار تغییر مکان در گره‌های مشترک (در دو وجه ناپیوستگی) یکسان نیست. می‌توان متوسط تغییر مکان ناپیوستگی دو طرف (یعنی $\frac{1}{2}(u^+ + u^-)$) را به منزله معیاری از تغییر شکل در نظر گرفت و تغییر مکان‌های u^+ و u^- را نسبت به این مقدار متوسط محاسبه کرد.

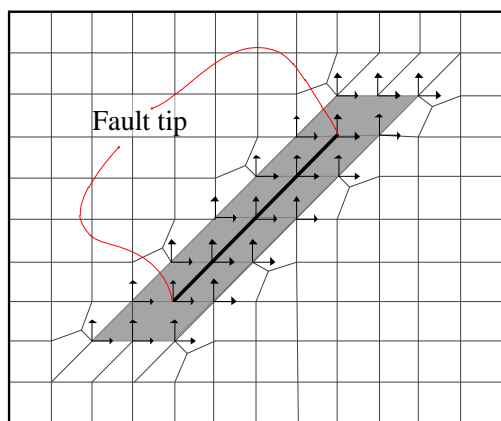
نیروی مجازی‌ای که باید محاسبه و به بردار بارگذاری محلی افزوده شود از رابطه (۱) به دست می‌آید:

$$\{\Delta f_i^e\} = [-k_{ij}^e] \{\Delta a_j^e\} \quad (1)$$

که در آن، Δf_i^e مقدار نیروی مجازی در المان حاوی گره مشترک در راستای مؤلفه i ، k_{ij}^e سختی المان حاوی گره مشترک در راستای مؤلفه j در اثر لغزش در راستای مؤلفه j ، و Δa_j^e بیانگر میزان شکافت است.



شکل ۱. تغییر شکل المان‌ها در دو طرف خط گسل



شکل ۲. نمایش طرحوار نیروهای گرهی ناشی از لغزش فرضی خط گسل

نشدن هیچ‌نوع نیرو یا ممان اضافی به شبکه، اشاره کرد. این روش به طور کامل در سطح محلی المان، و قبل از سرهم کردن ماتریس سختی کل به کار می‌رود. بنابراین برای محاسبه نیروهای اصلاحی در گره‌ها به ماتریس سختی المان‌ها در سطح محلی نیاز داریم. قبل از ایجاد هر نوع ناپیوستگی، تغییر شکل‌ها در گره‌های مشترک بین المان‌های مجاور، مساوی هستند. گره‌های مشترک گره‌هایی هستند که در نقطه‌های لغزشی مورد نظر بین المان‌های دو طرف مشترک‌اند و شکاف در آنها ایجاد می‌شود. در این گره‌ها، مقدار تغییر مکان، به المان مورد نظر بستگی دارد. چرا که مقدار نیروی اصلاحی، ناشی از سختی المان پیش گفته به دست می‌آید. به بیان دیگر، وقتی گرهی در حکم گره برای المانی در یک وجه ناپیوستگی در نظر گرفته می‌شود، دارای تغییر مکان خاصی (مثلاً u^+) است که متفاوت است از تغییر مکان گره (مثلاً u^-) وقتی در حکم گرهی متعلق به المانی در وجه دیگر ناپیوستگی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین رشته‌ای پشت سرهم از این گره‌های مشترک، بیانگر ناپیوستگی سامانه خواهد بود.

برای درک روش گره مشترک در ساده‌ترین حالت، یک المان در هر طرف از خط گسل در شکل ۱ نشان داده شده است. قبل از اینکه گسل رخ دهد، دو المان دو طرف خط گسل در وضعیت IMNJ و MKLN قرار دارند. بعد از اینکه گسل رخ دهد دو نقطه M و N به ترتیب به نقطه‌های M' و N' جابه‌جا می‌شوند. اما گوشه‌های المان‌های تغییر شکل یافته روی خط گسل هر کدام دارای یک نابجایی خواهند بود که به ترتیب ΔU_M و ΔU_N نام‌گذاری شده‌اند. بنابراین اگر سختی المان‌های گسل معلوم باشد، نیروهای اعمالی در گره‌ها که ناشی از این نابجایی‌ها هستند قابل محاسبه خواهد بود (فراهانی و همکاران، ۲۰۰۶).

در واقع در روش گره مشترک، نابجایی گسل با مجموعه نیروهایی جایگزین می‌شوند که این نیروها وقتی به گسل اعمال شوند دقیقاً همان جابه‌جایی‌ها را در گسل به وجود می‌آورند. در شکل ۲ به صورت طرحوار نیروهای

۳. پیشنهاد جدید برای محاسبه لغزش

لغزش صفحه‌های گسل پدیده‌ای است که در طول دوره میان‌لرزه‌ای پیوسته در حال وقوع است. یک دوره میان‌لرزه‌ای، فاصله زمانی بین دو زلزله بزرگ است که در طول آن انرژی گرنشی در پوسته زمین به تدریج در حال افزایش است. در طی یک دوره زمانی میان‌لرزه‌ای، ناحیه‌ای از گسل درون صفحه‌ای به صورت قفل شده باقی می‌ماند، در حالی که نواحی دیگر به صورت قفل نشده رفتار می‌کنند و در آنها لغزش‌های دائمی در حال وقوع است. این نوع لغزش‌های غیرلرزه‌ای با ریزلرزه‌های ثبت شده در نواحی لرزه‌ای فعال قابل شناسایی هستند.

با این حال چگونه می‌توان میزان لغزش‌های یک گسل را اندازه‌گیری کرد؟ داده‌های ژئودزی، ابزاری مناسب برای ردیابی و شناسایی برهمکنش‌های زیرسطحی فراهم می‌آورند. در این بخش، روش جدیدی برای برآورد میدان لغزش گسل‌ها در حکم پارامتر اصلی برهمکنش صفحه‌های گسل، عرضه می‌شود. این روش، نرخ تغییر شکل‌های گسل (حمیدی و خاجی، ۲۰۱۱) را در حکم یکی از علت‌های اصلی تغییر شکل‌های سطح آزاد زمین در نظر می‌گیرد. روش پیشنهادی براساس داده‌های از پیش تعیین شده، رژیم لغزش گسل را محاسبه می‌کند. در این مقاله، داده‌های یادشده براساس ماتریس‌های عملگر تابع گرین هستند. ماتریس‌های مورد نظر به صورت عددی و به کمک روش المان محدود مبتنی بر روش گره مشترک محاسبه می‌شوند. برای رسیدن به جواب مطلوب، مانده‌های مسئله کمینه می‌شوند (خاجی و هیگاشیهارا، ۱۳۸۴). منظور از مانده‌های یادشده، تفاوت بین تغییر مکان‌های سطحی مشاهده شده و محاسبه شده است.

۳.۱. ماتریس‌های عملگر تابع گرین

در این بخش می‌خواهیم به مفهوم و نحوه تعیین ماتریس عملگرهای تابع گرین برای مدل‌های ساخته شده اشاره کنیم. در این روش، معادلات شناسایی برای m داده را می‌توان به صورت رابطه (۲) بیان کرد:

$$\{B_i\} = \sum_j [A_{ij}] \{X_j\} + \{E_i\} \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (2)$$

که در آن، B_i تغییر شکل‌های سطحی ثبت شده، X_j مؤلفه‌های بردار لغزش در طول گسل، E_i خطاهای تصادفی و A_{ij} عملگرهای تابع گرین برای بردارهای لغزش هستند (که به کمک روش المان محدود تعیین می‌شوند). عملگرهای یادشده، پاسخ کشان در یک نقطه i به یک تحریک واحد در یک نقطه j از ناحیه چشمه مدل هستند. معادله فوق را می‌توان به صورت ماتریسی رابطه (۳) نیز نوشت:

$$\{B\} = [A]\{X\} + \{E\} \quad (3)$$

که در آن، $[A]$ ماتریس ضریب‌های $m \times n$ است.

در عمل می‌خواهیم دستگاه معادلات بالا را صرف نظر از مقدارهای خطای موجود در داده‌ها حل کنیم، چرا که مقدارهای خطاها نامعلوم هستند. این کار به کمک کمینه سازی مانده‌ها (یعنی اختلاف بین $[A]\{X\}$ و $\{B\}$) صورت می‌گیرد، و این دقیقاً وظیفه‌ای است که بر عهده روش تفکیک مقدارهای تکین (تمت) (Singular Value Decomposition) قرار دارد. این روش در ادامه به طور کامل شرح داده خواهد شد. پس از اجرای مقادری عملیات جبری، معادله‌های وارون استاندارد براساس روش کمترین مربعات، به صورت رابطه (۴) به دست می‌آید که بالانویس‌های T و -1 به ترتیب نشان‌دهنده ترانهاد و وارون یک ماتریس هستند.

$$\{X\} = ([A^T A])^{-1} [A^T] \{B\} \quad (4)$$

رابطه اخیر، مسیری مستقیم برای استخراج بردار مجهولات $\{X\}$ عرضه می‌کند. یکی از ویژگی‌های این روش، محاسبه ماتریس عملگرهای تابع گرین $[A]$ به کمک روش المان محدود است. ویژگی فوق همه محدودیت‌های روش‌های رایج تحلیلی مسئله‌های وارون را رفع می‌سازد.

حال سؤال این است که چگونه می‌توان عملگرهای تابع گرین را به کمک روش المان محدود محاسبه کرد؟ با اعمال بردار تحریک واحد در هر یک از درجه‌های آزادی، پاسخ گره‌های متناظر در سطح آزاد زمین بیانگر درایه‌های ماتریس ضریب‌های $[A]$ هستند.

کمترین مربعات که از آن برای به دست آوردن معادله (۴) بهره بردیم، این است که معادله‌ها کم قید هستند. علت اصلی ناپایداری مسئله‌های وارون، بدخیمی ماتریس ضرایب است. قابلیت معادلات خطی برای حصول نتایج قابل اطمینان، به کمک عدد شرط (Condition Number) قابل اندازه‌گیری است (حسن و ویلا، ۱۹۹۷؛ خان‌میرزا و همکاران ۲۰۱۱). برای شناسایی این بدخیمی (III- Conditioning) و رفع تکنیکی (Singularity)، روش تفکیک مقدار تکین (تمت) را می‌توان به کار برد که در قسمت بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳.۲. تفکیک مقدار تکین (تمت)

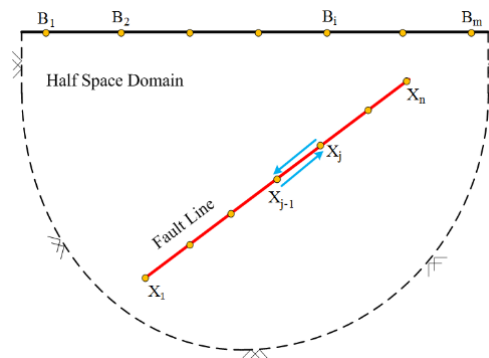
روش‌هایی قدرتمند برای کار با دستگاه معادلات یا ماتریس‌هایی که تکین هستند (یا از نظر عددی بسیار نزدیک به تکین هستند) وجود دارد (پرس و همکاران، ۱۹۹۲). بسیاری از موارد که روش‌های رایج نظیر روش حذفی گاوس و تفکیک بالا پایین در حصول نتایج رضایت‌بخش به بن‌بست می‌رسند، روش تمت به صورت مناسبی، بدخیمی مسئله را تشخیص می‌دهد. در بسیاری از موارد، روش تمت علاوه بر تشخیص، مسئله را نیز حل می‌کند. در اینجا حل مسئله به معنای حصول یک جواب عددی مناسب است، نه لزوماً آن جوابی که از دیدگاه ما باید به دست آید.

روش تمت به ما اجازه می‌دهد که هر ماتریسی را به صورت حاصل ضرب سه ماتریس بنویسیم که مقدارهای تکین این ماتریس مجذور ریشه‌های مقدارهای ویژه ماتریس $[A]^T[A]$ خواهد بود. بنابراین هر ماتریس $[A]$ به ابعاد $m \times n$ (که در آن $n \leq m$ است) را می‌توان به صورت حاصل ضرب سه ماتریس مطابق رابطه (۶) نوشت:

$$[A] = [U][S][V]^T \quad (6)$$

که در آن، $[U]_{m \times n}$ یک ماتریس متعامد ستونی، $[S]_{n \times n}$ یک ماتریس قطری با درایه‌های مثبت یا صفر، و $[V]_{n \times n}$ یک ماتریس متعامد است. پس ماتریس قطری $[S]$ را می‌توان به صورت رابطه (۷) نوشت:

$$[S] = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n) \quad (7)$$



شکل ۳. بیان طرحوار مفهوم ماتریس عملگرهای تابع گرین

برای درک ماتریس عملگر گرین یک گسل درون صفحه‌ای با شکل هندسی و جهت‌گیری دلخواه را در عمق زمین فرض می‌کنیم (شکل ۳). این گسل را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و نقطه‌های تقسیم را X_j می‌نامیم. روی سطح زمین نیز m نقطه B_i را در نظر می‌گیریم. یکی از قسمت‌های $X_{j-1} X_j$ را روی گسل در نظر می‌گیریم و این قسمت را به میزان واحد می‌لغزانیم. به بیان دیگر، نقطه‌های روی این بخش گسل در یک سمت را به اندازه واحد در امتداد گسل (در یک جهت مثبت اختیاری) و نقطه‌های سمت دیگر را در همان امتداد و در جهت عکس جهت مثبت اختیاری جابه‌جا می‌کنیم. اعمال این جابه‌جایی نیز با روش گره مشترک قابل اجرا است. برای این کار، جابه‌جایی‌ها با مجموعه‌ای از نیروهای مجازی در گره‌های حاوی المان مشترک جایگزین می‌شوند. اعمال این لغزش باعث ایجاد جابه‌جایی‌هایی در نقطه‌های B_i روی سطح زمین می‌شود، و این جابه‌جایی‌ها را با A_{ij} نشان می‌دهیم. در نهایت، با اعمال جابه‌جایی در $n-1$ قسمت از گسل به صورت مجزا، ماتریس گرین را به صورت ماتریسی مطابق رابطه (۵) خواهیم داشت.

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1i} & A_{1n} \\ A_{21} & & & & \\ \vdots & & & A_{ji} & \\ A_{m1} & \dots & & & A_{mn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

که هر یک از ستون‌های این ماتریس، پاسخ تحریک واحد به یک قسمت متناظر روی گسل است. مشکل روش

صفر یا نزدیک به صفر باشد) تمت با روش تقریبی رابطه (۱۲) وارون ماتریس را محاسبه می کند

$$[A^*]^{-1} = ([U][S][V]^T)^{-1} \approx [V][S_0]^{-1}[U]^T \quad (12)$$

$$S_0^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{w_1} & ; \quad \lambda_1 > t \\ 0 & ; \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (13)$$

حال ببینیم روش تمت به چه کار می آید. دستگاه معادلات (۱۴) را در نظر می گیریم:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (14)$$

در این معادله، اگر تغییر کوچکی در $\{B\}$ منجر به یک تغییر بزرگ در $\{X\}$ شود، ماتریس $[A]$ بدخیم است. برای این منظور معیاری به نام عدد شرط تعریف می شود که میزان بدخیمی ماتریس را مشخص می کند. بنابراین قبل از محاسبه وارون ماتریس $[A]$ لازم است عدد شرط را طبق رابطه زیر محاسبه کنیم. چنانچه ماتریس بدخیم باشد باید آستانه‌ای (Thresholds) مناسب را انتخاب کرد، مقدارهای ویژه کوچک را برابر صفر قرار داد و سپس وارون ماتریس را با استفاده از روش تمت محاسبه کرد.

$$CN = \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \quad (15)$$

از نظر ریاضی، روش جدید بیانگر نوعی نگاهت بین دو فضا است: فضای چشمه و فضای پاسخ. فضای چشمه همان رژیم لغزش گسل، و فضای پاسخ تغییرشکل‌های سطح زمین است (که توسط داده‌های ژئودزی اندازه گیری می شود). در حالت کلی این نوع نگاهت‌ها، دارای ماتریس‌های تکین یا بدخیم هستند. بنابراین روش تمت برای تشخیص مشکل فوق و حل آن (در حالت‌هایی که بدخیمی وجود دارد)، ماتریس ضریب‌های $[A]$ را بررسی، و با صفر کردن مقدارهای بسیار کوچک w_j (با بررسی آستانه‌های گوناگون)، بهترین جواب را براساس کمترین مانده عرضه می کند.

۴. شبیه‌سازی عددی گسل‌ها

در ادامه، محاسبات المان محدود را برای یک گسل قائم دُو بُعدی و دو گسل صفحه‌ای، برای تغییرشکل‌های

که در آن، w_j ها مقدارهای تکین هستند. دو ماتریس دیگر به صورت ستونی متعامد هستند، یعنی:

$$[U]^T[U] = [V][V]^T = [I] \quad (8)$$

با توجه به مربع بودن ماتریس $[V]$ ، این ماتریس متعامد سطری نیز هست یعنی:

$$[V][V]^T = [I] \quad (9)$$

تاکنون صورت ماتریسی ماتریس $[A]$ بیان شد. صورت جبری این ماتریس نیز به شکل رابطه (۱۰) خواهد بود:

$$[A] = \sum_{i=1}^n s_i u_i v_i^T \quad (10)$$

که در آن، $[U] = (u_1 u_2 \dots u_n)$ و $[V] = (v_1 v_2 \dots v_n)$ هستند. روش تمت را می توان برای حالت $m < n$ نیز به کار برد. در این حالت، مقدارهای تکین w_j برای $j = m+1, \dots, n$ همگی برابر صفرند، و ستون‌های متناظر در $[U]$ نیز صفر هستند.

۳.۲.۱. روش تمت برای ماتریس مربعی

اگر ماتریس $[A]$ مربعی باشد، آن‌گاه $[U]$ ، $[V]$ و $[S]$ نیز همگی مربعی و با اندازه مشابه هستند، و بنابراین محاسبه وارون این ماتریس‌ها به سهولت صورت می پذیرد. ماتریس‌های $[U]$ و $[V]$ متعامد هستند، پس وارون آنها برابر ترانواده آنها است. ماتریس $[S]$ نیز چون قطری است، در نتیجه وارون آن نیز ماتریسی قطری است که درایه‌های آن $1/w_j$ هستند. ماتریس مربعی $[A]$ وقتی وارون پذیر است که غیر تکین باشد. به عبارت ریاضی و مطابق رابطه (۱۱)، این امر وقتی میسر است که هیچ کدام از مقدارهای ویژه برابر صفر نباشد.

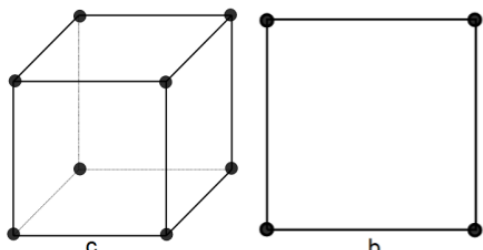
$$[A]^{-1} = [V] \left[\text{diag} \left(\frac{1}{w_j} \right) \right] [U]^T \quad (11)$$

تنها مشکل فرمول‌بندی فوق، به مقدارهایی از w_j مربوط می شود که برابر صفر یا آنقدر کوچک هستند که مشکلات عددی پدید می آورند. لذا قبل از هر چیز، روش تمت موقعیت‌هایی نظیر فوق را آشکار می سازد. لذا اگر ماتریس مربعی $[A]$ تکین یا بدخیم باشد (مقدارهای ویژه

میدان لغزش گسل‌های پیش‌گفته با داشتن جابه‌جایی‌های سطح زمین محاسبه شده است. در این مدل‌ها، مدول کشسانی برابر با $10^{10} \times 1/24$ کیلوگرم نیرو بر مترمکعب و ضریب پواسون برابر با $0/333$ در نظر گرفته شده است. همچنین گسل‌ها دارای بُعدهای مشخص و محدودی هستند و در ساخت همه مدل‌ها از مش‌بندی یکنواخت استفاده شده است.

۴.۱. مدل قائم عمقی

در این مدل دو بُعدی، یک گسل قائم فرضی با پهنای ۳ متر، در عمق ۳ متری سطح زمین در نظر گرفته شده است، و میزان جابه‌جایی یکسان برابر با $0/1$ متر در امتداد گسل فرض شده است. جهت مش‌بندی، در کل مدل به‌طور یکنواخت از المان‌های ۴ گرهی در شرایط کرنش مسطح استفاده شده است. جهت احتراز از آثار شدید شرایط مرزی، مرزهای جانبی محیط با تکیه‌گاه‌های غلطکی در جهت عمود بر مرز بسته شده است. مرز بالایی مدل شرایط بدون تنش دارد (شکل ۵). با اعمال لغزش در امتداد گسل (در راستای محور y) جابه‌جایی‌های سطح زمین در شکل ۶ نشان داده شده است. نتایج عددی حاصل در هر دو امتداد در مقایسه با نتایج تحلیلی دارای تفاوت قابل‌قبولی است که علت آن شرایط مرزی است. البته اثر این تفاوت را می‌توان مشابه اثر خطای موجود در اندازه‌گیری‌های سطحی در نظر گرفت، و بنابراین می‌توان این داده‌ها را به داده‌های واقعی، نزدیک‌تر فرض کرد. با استفاده از مفهوم تابع گرین، ماتریس عملگرهای گرین به‌طور مستقل برای هر راستا به‌دست آمد است. نتایج این ماتریس‌ها در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است.

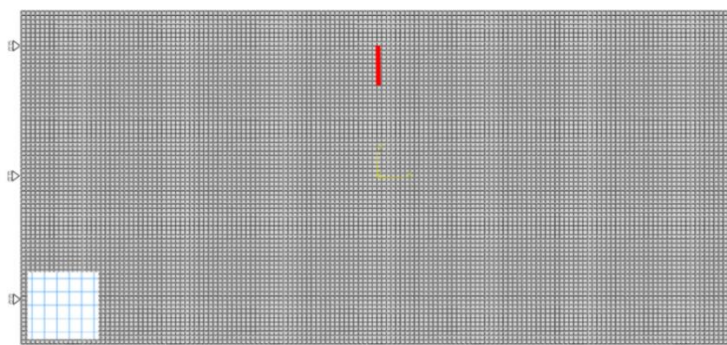


شکل ۴. المان‌های استفاده شده در مدل‌سازی

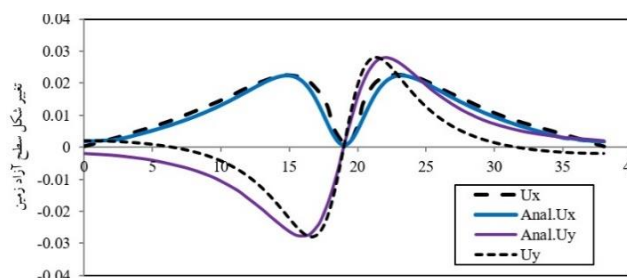
کشسان حوالی گسل‌های پیش‌گفته در یک شبکه المان محدود در حالت کرنش مسطح و تنش کلی عملی می‌سازیم. در مدل‌سازی صورت گرفته از المان‌های ۴ گرهی (در حالت دو بُعدی) و از المان‌های ۸ گرهی (در حالت سه بُعدی) با مش‌بندی یکنواخت در کل قلمرو استفاده شده است. المان‌های دو بُعدی دارای دو درجه آزادی جابه‌جایی در هر گره، و المان‌های سه بُعدی دارای سه درجه آزادی جابه‌جایی در هر گره هستند. در شکل ۴ المان‌های به‌کار رفته، نشان داده شده است.

در این تحقیق، یک مدل در حالت دو بُعدی و یک مدل در حالت سه بُعدی مورد تحلیل قرار گرفته است. این مدل‌ها به‌صورت کشسان خطی در محیط نیم‌فضای همگن و همسان‌گرد در نظر گرفته شده‌اند. مدل دو بُعدی در حالت کرنش صفحه‌ای و مدل سه بُعدی در حالت کلی تنش هستند. برای هر دو مدل از ضریب پواسون و مدول کشسانی مشابهی که برای یک منطقه واقعی ثبت شده بود، استفاده شده است.

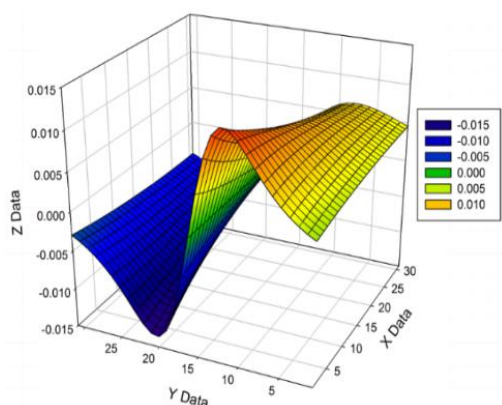
ابتدا تحلیل مستقیم روی این مدل‌ها صورت گرفته است، و سپس در مرحله بعد با حفظ شرایط مرزی موجود، حل وارون انجام پذیرفته است. در حل مستقیم با استفاده از روش گره مشترک، در نقطه‌های مشترک که روی گسل قرار دارند، لغزش‌های معینی اعمال شده است. این لغزش‌ها به‌صورت نیروهای معادل جابه‌جایی استخراج شده و در گره‌های مشترک و گره‌های همسایگی این گره‌ها، در درجه‌های آزادی تعریف شده، اعمال شده است. بعد از اعمال این نیروها به مدل و اعمال شرایط مرزی مناسب در هر مدل، نتیجه تحلیل به‌صورت جابه‌جایی‌های افقی و قائم سطح زمین برداشت شده است. مدل‌های عددی ساخته شده با نتایج تحلیلی موجود صحت‌سنجی شده است. در مرحله بعد برای حل وارون، ابتدا با استفاده از روش گره مشترک و اعمال جابه‌جایی‌های واحد به‌طور مجزا در نقطه‌های مشترک و در امتداد خط (یا صفحه) گسل، ماتریس‌های عملگر گرین به‌طور مستقل برای جهت‌های x ، y و z برای همه مدل‌ها به‌دست آمده است. سپس با استفاده از روش تمت،



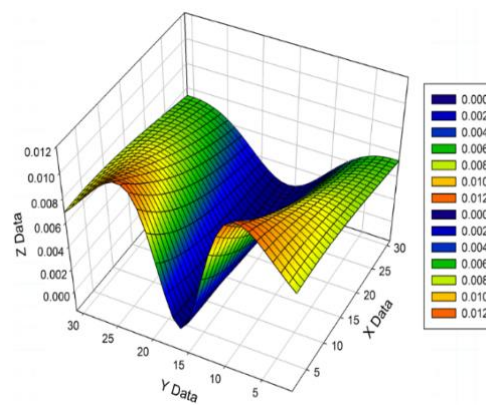
شکل ۵. شبکه المان محدود (گرنش مسطح). خط ضخیم سرخ‌رنگ بیانگر گسل قائم است. المان‌های مورد استفاده در گوشه پایین سمت چپ با بزرگنمایی نشان داده شده است.



شکل ۶. تغییر شکل‌های افقی و قائم سطح آزاد زمین در حوالی گسل.



شکل ۷. ماتریس عملگرهای تابع گرین در راستای y



شکل ۸. ماتریس عملگرهای تابع گرین در راستای x

به‌رغم بدخیمی بسیار زیاد این مسئله، روش تمت توانسته است میزان لغزش گسل در دو راستای گوناگون را به‌صورت مناسبی برآورد کند. در توضیح این عملکرد مناسب، لازم به ذکر است که انتظار می‌رود میزان جابه‌جایی یکسان برابر با ۰/۱ متر در امتداد گسل، به روش تمت محاسبه شود. همان‌گونه که شکل ۹ نشان می‌دهد، لغزش گسل در راستای x با استفاده از حل وارون برابر صفر است. همچنین شکل ۱۰ لغزش گسل در راستای y (که در امتداد گسل است) را با دقت مناسبی در حوالی ۰/۱ به‌دست آورده است.

میزان بدخیمی ماتریس‌های عملگر گرین در این مدل با استفاده از معیار عدد شرط به‌صورت روابط ۱۶ و ۱۷ تعیین می‌شود:

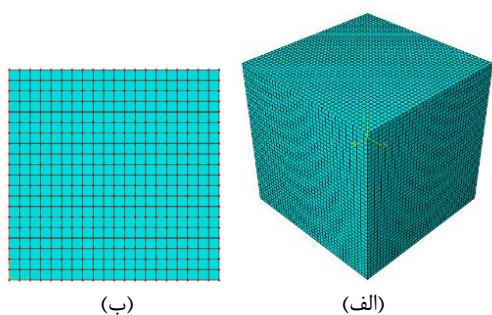
$$CN_x = \frac{18039760}{1.83E-18} = 9.846E+24 \quad (16)$$

$$CN_y = \frac{21302636}{1.23E-17} = 1.725E+24 \quad (17)$$

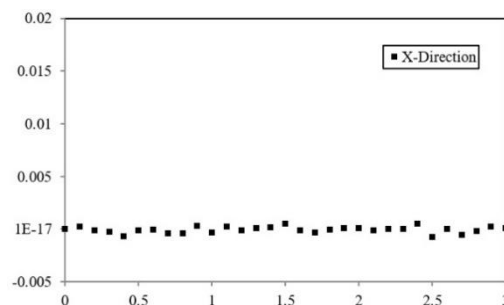
که نشان‌دهنده بدخیمی بسیار زیاد این مسئله است. نتایج حاصل از حل وارون این مدل برای راستای x و y در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است.

نتایج شکل‌های ۹ و ۱۰ بیانگر این واقعیت است که

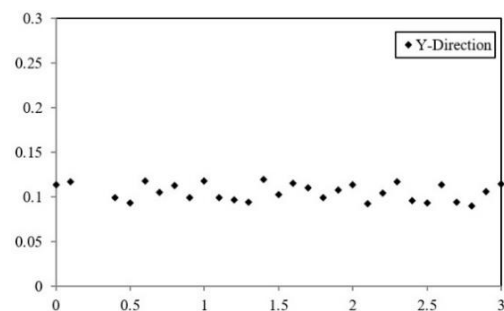
غیریکنواختی قرار گرفته است. لغزش قسمت داخلی ناچیز است و این میزان لغزش برای نشان دادن ناحیه قفل شده، با استفاده از حل وارون، انتخاب شده است. نتایج عددی این مدل برای هر سه راستای x، y و z به ترتیب در شکل‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ آورده شده است.



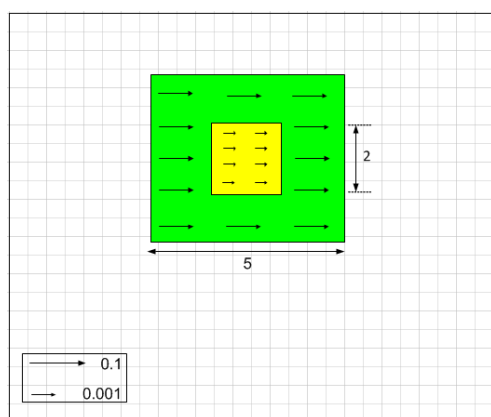
شکل ۱۱. (الف) مدل المان محدود (در حالت تنش کلی) با المان‌های مکعبی ۸ گرهی و (ب) صفحه شامل گره‌های گسل عمقی.



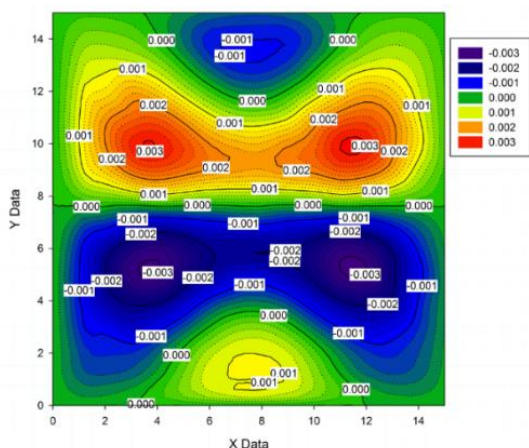
شکل ۹. لغزش گسل در راستای X با استفاده از حل وارون



شکل ۱۰. لغزش گسل در راستای Y با استفاده از حل وارون



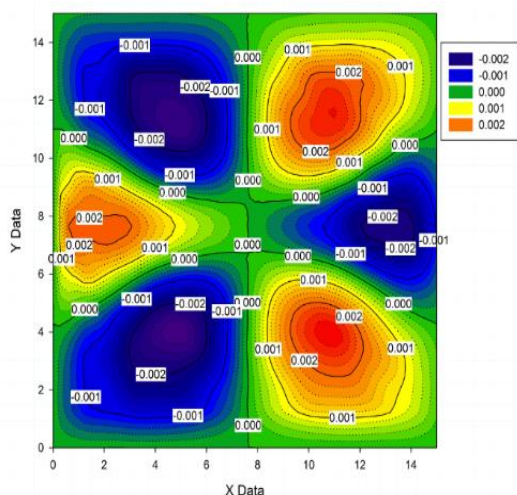
شکل ۱۲. نمایش طرحوار صفحه گسل: صفحه گسل از دو بخش سبزرنگ و زردرنگ تشکیل شده است که هر بخش تحت لغزش نشان داده شده در شکل قرار گرفته است.



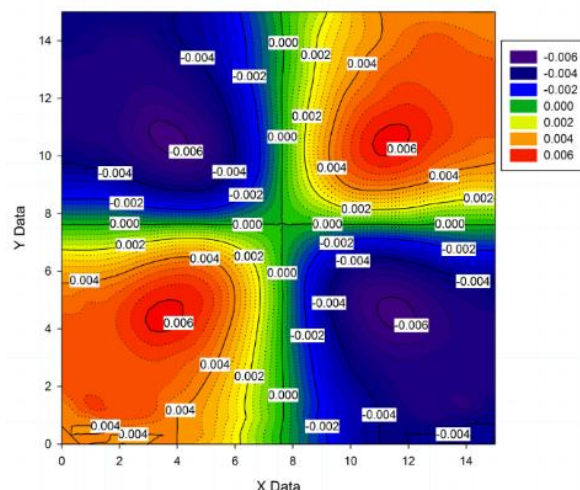
شکل ۱۳. حل عددی گسل عمقی صفحه‌ای در راستای X

۲.۴. مدل قائم صفحه‌ای عمقی

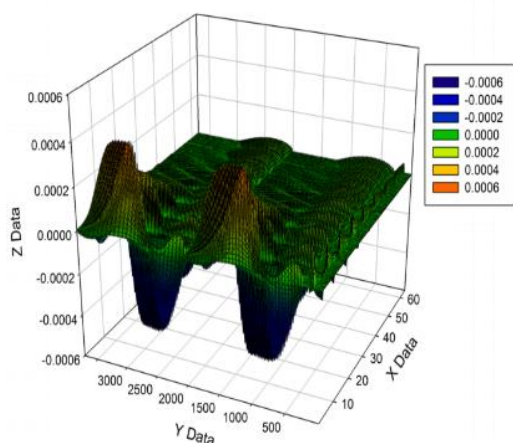
این مدل به صورت یک محیط مکعبی همگن و به ابعاد ۱۵ در ۱۵ در ۱۵ واحد در نظر گرفته شده است. در این مدل، گسل به صورت صفحه‌ای به ابعاد ۵ در ۵ متر در راستای محور x در نظر گرفته شده است. برای مش بندی، در کل مدل به طور یکنواخت از المان‌های ۸ گرهی استفاده شده است. مرزهای جانبی محیط با تکیه گاه‌های غلطکی در جهت عمود بر مرز بسته شده است. مرز بالایی مدل شرایط بدون تنش دارد. صفحه گسل دارای دو میدان لغزش متفاوت در راستای محور x است. بنابراین صفحه گسل از دو بخش تشکیل شده است. قسمت اول مستطیلی به ابعاد ۲ در ۲ به مرکز صفحه گسل و قسمت دوم، مستطیل بیرونی که محیط بر قسمت اول است. گره‌های مشترک مستطیل درونی به اندازه ۰/۰۰۱ متر و به صورت یکنواخت، و گره‌های مشترک مستطیل بیرونی نیز به صورت یکنواخت و به اندازه ۰/۱ متر لغزانده شده است. مدل المان محدود این گسل در شکل ۱۱ نشان داده شده است. در شکل ۱۲ جزئیات صفحه گسل نشان داده شده است. همان گونه که ملاحظه می‌شود، صفحه گسل از دو بخش تشکیل شده که در مجموع تحت لغزش



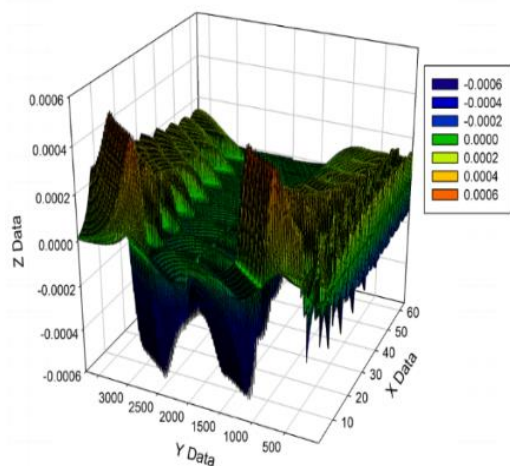
شکل ۱۵. حل عددی گسل عمقی صفحه‌ای در راستای Z



شکل ۱۴. حل عددی گسل عمقی صفحه‌ای در راستای Y



شکل ۱۷. ماتریس عملگرهای تابع گرین راستای Y



شکل ۱۸. ماتریس عملگرهای تابع گرین راستای Z

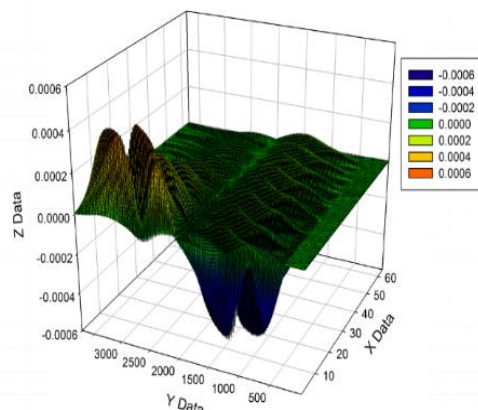
در این مدل نیز با استفاده از مفهوم تابع گرین، ماتریس عملگرهای گرین را به‌طور مستقل برای هر راستا به‌دست آوردیم. نتایج این ماتریس‌ها به‌ترتیب در شکل‌های ۱۶، ۱۷ و ۱۸ نشان داده شده است.

با استفاده از روش تمت، میزان بدخیمی ماتریس‌های گرین بالا برای هر یک از راستاها در شکل‌های ۱۹، ۲۰ و ۲۱ نشان داده شده است. نمودارها حاکی از میزان بدخیمی بسیار زیاد این ماتریس‌ها است. عددهای شرط برای هر راستا در رابطه‌های (۱۸) تا (۲۰) نیز این مطلب را تأیید می‌کند.

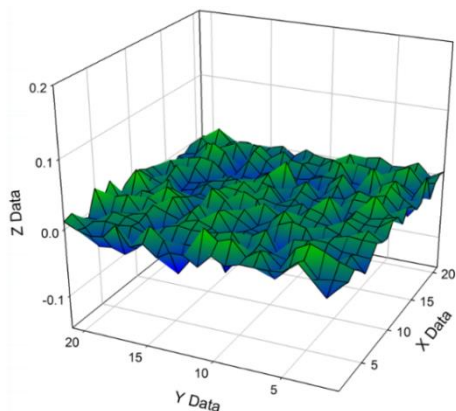
$$CN_x = \frac{4732443}{7.84E-18} = 6.039E+23 \quad (18)$$

$$CN_y = \frac{8760784}{7.02E-18} = 3.825E+24 \quad (19)$$

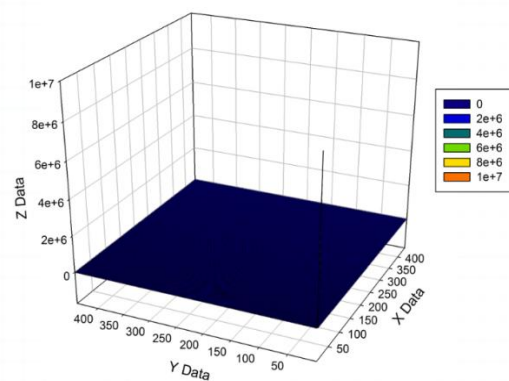
$$CN_z = \frac{4247698}{9.41E-18} = 4.515E+23 \quad (20)$$



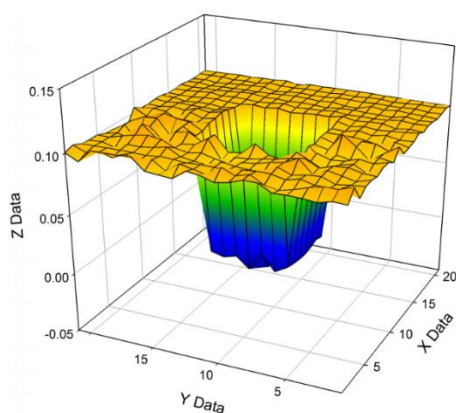
شکل ۱۶. ماتریس عملگرهای تابع گرین راستای X



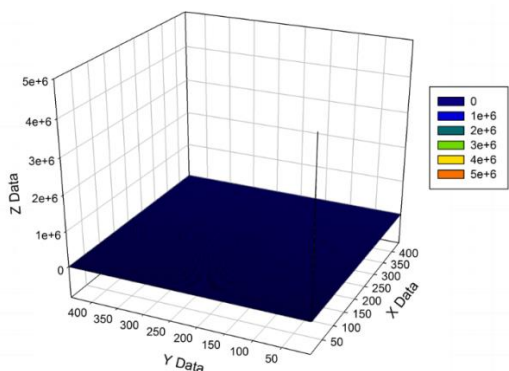
شکل ۲۲. لغزش گسل در راستای X با استفاده از حل وارون



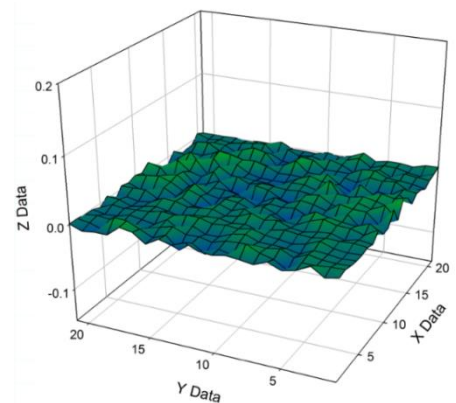
شکل ۱۹. مقدارهای تکین ماتریس عملگر گرین راستای X



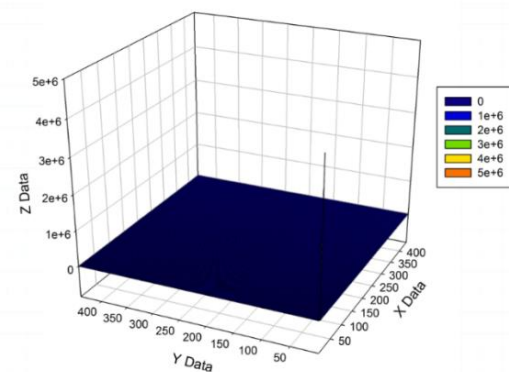
شکل ۲۳. لغزش گسل در راستای Y با استفاده از حل وارون



شکل ۲۰. مقدارهای تکین ماتریس عملگر گرین راستای Y



شکل ۲۴. لغزش گسل در راستای Z با استفاده از حل وارون



شکل ۲۱. مقدارهای تکین ماتریس عملگر گرین راستای Z

لازم به ذکر است که موجی شدن شکل‌های اخیر به علت حذف برخی از مقدارهای تکین در ماتریس عملگر گرین هریک از آنها است. نتایج شکل‌های بالا نشان‌دهنده آن است که روش تمت توانسته است میزان لغزش گسل در سه راستای متفاوت را به صورت مناسبی برآورد کند. در توضیح این عملکرد مناسب، لازم به ذکر است که انتظار می‌رود روش تمت قادر باشد میزان

حل وارون این مسئله با روش تمت (با خوش‌خیم کردن ماتریس گرین) از راه حذف مقدارهای تکین از آستانه‌ای به بعد، در شکل ۲۲ برای راستای لغزش، و در شکل‌های ۲۳ و ۲۴ برای راستای Y و Z نشان داده شده است.

جابه‌جایی صفحه گسل را که دارای دو میدان لغزش متفاوت در راستای محور x است، به‌نحو مناسبی محاسبه کند. همان‌گونه که شکل‌های ۲۲ و ۲۴ نشان می‌دهند، لغزش گسل در راستاهای x و z با استفاده از حل وارون تقریباً برابر صفر به‌دست آمده است. همچنین همان‌گونه که در ابتدای این بخش ذکر شد، صفحه گسل از دو بخش تشکیل شده است. قسمت اول مستطیلی به ابعاد ۲ در ۲ به مرکز صفحه گسل و قسمت دوم، مستطیل بیرونی که محیط بر قسمت اول است. گره‌های مشترک مستطیل درونی به اندازه ۰/۰۰۱ متر و به‌صورت یکنواخت، و گره‌های مشترک مستطیل بیرونی نیز به‌صورت یکنواخت و به اندازه ۰/۱ متر لغزانده شده است. همان‌گونه که شکل ۲۳ نشان می‌دهد، جواب حاصل از روش تمت نیز دارای دو قسمت کاملاً مشخص است که در آن، لغزش گسل در راستای y (که در امتداد گسل است) با دقت مناسبی به‌دست آمده است. به‌بیان‌دیگر، جواب مربوط به گره‌های مشترک مستطیل درونی به اندازه تقریباً ناچیزی (حدود ۰/۰۰۱) و به‌صورت کم‌ویش یکنواخت، و گره‌های مشترک مستطیل بیرونی نیز به‌صورت یکنواخت و به اندازه‌ای برابر ۰/۱ متر لغزیده‌اند.

۵. نتیجه‌گیری

هدف از این تحقیق، تعیین ماتریس‌های عملگر گرین، و در ادامه آن تعیین ناحیه قفل‌شده در گسل‌های امتدادلغز بوده است. نکته قابل توجه آن است که در پژوهش حاضر فقط جابه‌جایی‌های گسل مدنظر قرار دارد و رفتار غیرخطی آن (برای منظور کردن تنش‌ها و نیروهای تماسی) موردنظر نیست. به‌بیان‌دیگر، دیدگاه حاکم بر این نوع مسئله‌ها یک دیدگاه سینماتیکی (Kinematics) و نه دیدگاه سینتیکی (Kinetics) است. ناگفته نماند که این نوع دیدگاه بسیار موردتوجه محققان قبلی نیز بوده است که در متن مقاله به برخی از آنها نمونه‌وار اشاره شده است. با توجه به دیدگاه سینماتیکی یادشده، یک نیم‌فضای همگن، همسانگرد و کشسان برای منطقه مورد بررسی که از نظر زمین‌شناسی پیچیده و عملاً

غیرهمسانگرد است، منظور می‌شود. لازم به ذکر است نگرش یادشده بیش از چهار دهه است که در حوزه مسئله‌های لرزه‌زمین‌ساخت دنیا مورد استفاده قرار می‌گیرد که مرور جامع پیشینه پژوهشی (Literature Review) آن خارج از حوصله این مقاله است. در بسیاری از کارهای پژوهشی موجود در این پیشینه پژوهشی، استفاده از مدل‌های دو بُعدی و سه بُعدی با هندسه مشخصات مصالح، شرایط مرزی و شرایط تماسی ساده‌شده که با شرایط واقعی همخوانی دارد و کمترین تقریب را در حل مسئله وارد می‌کند، روشی کاملاً رایج است. در نتیجه تحقیق حاضر نیز از همان روش‌شناسی رایج در پیشینه پژوهشی موجود بهره‌برده است. برای این کار، از روش المان‌های محدود و فن گره مشترک استفاده شده است. ابزار دیگر که برای حل وارون و تعیین ناحیه قفل‌شده مورد استفاده قرار گرفت، روش تفکیک مقادیرهای تکین بود. مهم‌ترین قسمت این تحقیق به‌دست آوردن ماتریس‌های عملگر گرین و استفاده از آن در حل وارون (با رفع تکینگی و یا خوش‌خیم کردن این ماتریس‌ها) برای رسیدن به یک جواب منطقی است. این ماتریس‌ها در واقع رابطه بین لغزش‌های گسل و جابه‌جایی‌های سطح زمین به حساب می‌آیند. اساساً علت بدخیمی ماتریس‌های عملگر گرین، وجود یک رابطه تقریباً خطی بین هر یک از ستون‌های متوالی در این ماتریس‌ها، به‌علت نزدیک بودن نقطه‌های روی سطح زمین به یکدیگر، است. با داشتن این ماتریس‌ها می‌توان هر میدان لغزشی در گسل را به جابه‌جایی‌های سطح زمین مرتبط کرد. به این صورت که لغزش به میزان دلخواه (که در نقطه‌های دلخواهی از گسل رخ می‌دهد) را به‌صورت ترکیبی خطی از لغزش‌های واحد معلوم در آورد، و با توجه به خطی بودن تحلیل و همگن بودن مصالح مورد استفاده، با استفاده از اصل برهم‌نهی، میزان جابه‌جایی نقطه‌های گوناگون سطح زمین را به‌دست آورد. عکس این کار که در واقع حل وارون مسئله است، کاربردی‌ترین ویژگی این ماتریس‌ها است، که در این تحقیق در مدل‌سازی‌های صورت گرفته، به کار رفته است.

رسیدن تحقیقات یادشده، نتایج آن منتشر خواهد شد.

مراجع

بحرانی، ا. ح. و خاجی، ن.، ۱۳۸۹، ماتریس عملگرهای تابع گرین گسل‌های درون صفحه‌ای، م. فیزیک زمین و فضا، ۳۶(۱)، ۵۹-۶۹.

خاجی، ن.، ۱۳۸۳، کاربرد روش گره مشترک برای مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها در محیط پیوسته، م. فنی و مهندسی مدرس، دوره ۱۵، بهار، ۳۷-۴۹.

خاجی، ن. و هیگاشیهارا، ه.، ۱۳۸۴، دیدگاهی نوین در مدل‌سازی عددی تغییر شکل‌های پوسته زمین، قسمت اول: نظریه، م. فنی و مهندسی مدرس، ۱۹، بهار، ۱۳-۳۰.

Chinnery, M. A., 1961, The deformation of the ground around surface faults, Bulletin of the Seismological Society of America, 51, 355-372.

Eterovic, A. L. and Bathe, K. J., 1991, On the treatment of inequality constraints arising from contact condition in finite element analysis, Computers and Structures, 40, 203-209.

Farahani, A., Wijeyewickrema, A. C. and Ohmachi, T., 2006, Effects of soft soil deformations on buried structures due to fault dislocation, Center for Urban Earthquake Engineering (CUEE), Tokyo, 1-6.

Freund, L. B. and Barnett, D. M., 1976, A two dimensional analysis of surface deformation due to dip-slip faulting, Bulletin of the Seismological Society of America, 66, 667-675.

Goodman, R. E., Taylor, R. L. and Brekke, T. L., 1968, A model for the mechanics of jointed rock, Journal of Soil Mechanics and Foundations Division ASCE, 99, 637-659.

Hamidi, M. and Khaji, N., 2011, Accurate boundary conditions for finite element modeling of movement field within Iran tectonic plate, Proceedings of the 6th International Conference on Seismology and Earthquake Engineering, SEE6, Tehran, Iran.

Hasan, W. M. and Voila, E., 1997, Use of the singular value decomposition method to detect ill-conditioning of structural identification problems, Computers and Structures, 63, 267-275.

Hermann, L. R., 1978, Finite element analysis of contact problems, Journal of Engineering

به بیان دیگر، میدان لغزش گسل‌های پیش گفته، با داشتن جابه‌جایی‌های سطح زمین به دست آمد. در عمل، این جابه‌جایی‌های سطح زمین با ابزار دقیق و به طور مستمر قابل اندازه‌گیری هستند. بنابراین، با تعیین مشخصات مکانیکی گسل‌های واقعی و تعیین شرایط مرزی آنها می‌توان با حل وارون، نواحی قفل نشده (دائماً در حال لغزش) و همچنین قفل شده را به دست آورد. تعیین این نواحی قفل شده، امکان تعیین مکان وقوع زلزله آینده را فراهم می‌آورد. لازم به ذکر است که روش پیشنهادی این تحقیق را همکاران دیگر نگارنده اصلی این مقاله پی گرفته‌اند، و ضمن آن به مشخصات گسل‌های واقعی نیز برای بررسی و پردازش توجه داشته‌اند. پس از به انجام

Mechanics Division ASCE., 104, 1043-1059.

Khanmirza, E., Khaji, N. and Majd, V. J., 2011, Model updating of multistory shear buildings for simultaneous identification of mass, stiffness and damping matrices using two different soft-computing methods, Expert Systems with Applications, 38, 5320-5329.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., 1992, Numerical recipe in Fortran 77, The Art of Scientific Computing, 2nd Edition, Cambridge University Press.

Tomar, S. K. and Dhiman, N. K., 2003, 2-D Deformation analysis of a half space due to a long dip-slip fault at finite depth, Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Earth and Planetary Sciences, 112, 587-596.

Rani, S. and Bala, N., 2006, 2-D deformation of two welded half-spaces due to a blind dip-slip fault, Journal of Earth System Science, 115, 277-287.

Rani, S. and Bala, N., 2013, Deformation of a two-phase medium due to a long buried strike-slip fault, Natural Science, 5, 1078-1083.

Poulios, K., and Renard, Y., 2015, An unconstrained integral approximation of large sliding frictional contact between deformable solids, Computers and Structures, 153, 75-90.

Zhao, G.-F., 2015, Modelling 3D jointed rock masses using a lattice spring model, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 78, 79-90.

Wang, D. Y., Zhang, Z. N., Zheng, H. and Ge, X. R., 2013, Propagation of interactive parallel flat elliptical cracks inclined to shear stress, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 63-64, 18-31.