

حل عددی معادلات آب کم عمق با روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم

رسول میرزائی شیری^۱، سرمد قادر^{۲*}، مجید مزرعه فراهانی^۱ و عباسعلی علی اکبری بیدختی^۳

۱. دانشجوی دکتری هواشناسی، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

۲. دانشیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

۳. استاد، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۴/۱۱/۱۳، پذیرش نهایی: ۹۵/۷/۲۷)

چکیده

کار حاضر، به اعمال روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم برای حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم عمق می پردازد. گسسته سازی مکانی روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با دو طرحواره به نام های $4/2$ و $4/4$ و پیمایش زمانی این روش نیز، با روش های اصلی و رونغ-کوتا معرفی می شوند. یک معادله ساده خطی، یعنی، معادله فرارفت یک بعدی که دارای حل تحلیلی است، با استفاده از روش های مک کورمک مرتبه دوم و مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با طرحواره های $4/2$ و $4/4$ ، با پیمایش های زمانی اصلی و رونغ-کوتا حل شده و مقادیر خطای کلی آن ها، با استفاده از نرم های قدرمطلق، مربع و بی نهایت، با یکدیگر مقایسه می شود. این مقایسه، برتری روش های فشرده مرتبه چهارم را، از نظر دقت عددی، به روش مرتبه دوم نشان می دهد. در ادامه شکل پایستار معادلات آب کم عمق در حالت دوبعدی و غیرخطی، با استفاده از این روش ها، حل شده و نتایج آن نیز برای دو آزمون موردی که توسط محققان دیگر، با روش های دیگر و به طور عددی حل شده اند، مقایسه می شود. مقایسه کمی و کیفی نتایج به دست آمده نشان از عملکرد مناسب روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم دارد. همچنین نتایج نشان می دهند که پیمایش زمانی رونغ-کوتای مرتبه چهارم در طرحواره $4/4$ روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، در مقایسه با بقیه روش های اعمال شده در این کار، پاسخ های مناسب تری دارد.

واژه های کلیدی: روش مک کورمک فشرده، دقت عددی، رونغ-کوتا، معادلات آب کم عمق.

۱. مقدمه

حل عددی شکل پایستار این معادلات، روش های مختلف عددی به کار گرفته شده است (به عنوان مثال گوستافسون، ۱۹۷۱؛ هوگتون و همکاران، ۱۹۶۶؛ ناون و ریفاگن، ۱۹۷۹؛ قادر و اصفهانیان، ۱۳۸۵).

معادلات آب کم عمق و به ویژه شکل پایستار آن ها توسط محققان بسیاری به روش های مختلف عددی حل شده است. مثلا هوگتون و همکاران (۱۹۶۶) با روش لکس-وندروف این معادلات را حل کرده اند. گوستافسون (۱۹۷۱) با روش (Alternating Direction) ADI، این معادلات را حل نمود و ناون و ریفاگن (۱۹۷۹)، این معادلات را حل نمود و ناون و ریفاگن (۱۹۷۹) با استفاده از روش مرتبه چهارم فشرده ضمنی، شکل پایستار این معادلات را حل کرده اند. در سطح ملی

معادلات آب کم عمق بیان کننده حرکت یک شاره یک لایه ای با چگالی ثابت است که ترازمندی هیدروستاتیک با تقریب خوبی در آن برقرار است. این معادلات در مباحث هواشناسی و اقیانوس شناسی کاربرد دارند. معادلات آب کم عمق در مورد جو خشک و بدون اصطکاک، با چگالی ثابت، معادلات تکانه و معادله پیوستگی را شامل می شوند که با استفاده از آن ها می توان سرعت باد، ارتفاع ژئوپتانسیلی و کمیت هایی مانند تاوایی و تابع جریان را در زمان های بعد پیش بینی کرد. یکی از کاربردهای این معادلات برای حل عددی و توسعه و مقایسه الگوریتم های جدید می باشد؛ البته در کار حاضر از شکل پایستار این معادلات برای حل عددی استفاده می شود. برای

سه قطری (یا با تعداد قطرهای بیشتر) نیست.

۲. معادلات آب کم عمق

شکل بسیط معادلات آب کم عمق دوبعدی به صورت رابطه

(۱) نوشته می شود (به عنوان مثال ویس، ۲۰۰۶):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

شکل پایستار معادلات آب کم عمق دوبعدی را می توان به صورت برداری (رابطه ۲) نوشت (هگنون و همکاران، ۱۹۶۶):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} &= \mathbf{fW}; \quad \mathbf{Q} = (h, hu, hv)^T; \\ \mathbf{R} &= \left(hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh^2, huv \right)^T; \\ \mathbf{S} &= \left(hv, hvu, hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)^T; \quad \mathbf{W} = (0, hv, -hu)^T \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن g ، شتاب گرانی است و بالانویس T ، نشانگر ترانزپوز است. h ، بیانگر ارتفاع است و u و v ، به ترتیب نشان دهنده سرعت های مداری و نصف النهاری می باشند. همچنین، f ، پارامتر کوریولیس را نشان می دهد. شکل پایستار معادلات آب کم عمق یک بعدی را نیز می توان به شکل برداری (رابطه ۳) نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} &= 0; \quad \mathbf{Q} = (h, hu)^T; \\ \mathbf{R} &= \left(hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)^T \end{aligned} \quad (3)$$

۳. روش مک کورمک

۳.۱. پیمایش زمانی روش مک کورمک

معادله موج یک بعدی زیر را در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F(\phi)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

برای گسسته سازی این معادله، با استفاده از پیمایش زمانی اصلی روش مک کورمک در دو مرحله پیشگو و

نیز قادر و اصفهانیان (۱۳۸۵) این معادلات را با استفاده از

روش ابرفشرده مرتبه ششم روی صفحه β حل کرده اند.

در سال های اخیر گرایش به سمت افزایش دقت در شبیه سازی عددی شارش های جوی و اقیانوسی با توجه به پیچیدگی های فراوانی که در این شارش ها وجود دارد، افزایش یافته است. روش های فشرده با توجه به کارایی مناسبی که در شبیه سازی عددی حرکت شاره ها در سایر شاخه های دینامیک شاره ها از خود نشان داده اند، در تحقیقات سال های اخیر مورد توجه قرار گرفته اند (از جمله اصفهانیان و همکاران، ۲۰۰۵؛ محب الحجه و دریچل، ۲۰۰۷؛ قادر و همکاران، ۲۰۰۹؛ قادر و نوردشتروم، ۲۰۱۵). البته اغلب روش های فشرده از نوع روش های مرکزی هستند.

روش مک کورمک نیز برای اولین بار توسط شخصی به همین نام در سال ۱۹۶۹ ابداع شد (به عنوان مثال هافمن، ۲۰۰۱). هیکسون و ترکل (۲۰۰۰) روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم را معرفی کردند و عملکرد آن را برای چند مسئله مدل نشان دادند. فلاحت (۱۳۸۷)، با این روش شکل پایستار معادلات غیرهیدروستاتیک و تراکم پذیر جو بی دررو را حل کرده است. مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایای دوبعدی نیز توسط قادر و همکاران (۱۳۸۹) با استفاده از این روش حل شده است. جوان نژاد و همکاران (۱۳۹۵) نیز شکل پایستار معادلات تراکم پذیر دوبعدی و ناآب ایستایی جو را با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، حل کرده اند.

هدف کار حاضر، به کارگیری روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم برای حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم عمق دوبعدی است. فرمول بندی روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم به صورت دونقطه ای است که همزمان با افزایش دقت روش می تواند در کاهش حجم محاسبات نیز مؤثر باشد؛ چراکه مانند روش های فشرده مرکزی نیازی به وارون کردن یک دستگاه معادلات

$$H^{(4)} = -\Delta t D^B \left[F(\phi^n + \alpha_4 H^{(3)}) \right] \quad (10)$$

$$H^{(5)} = -\Delta t D^F \left[F(\phi^n + \alpha_5 H^{(4)}) \right] \quad (11)$$

$$H^{(6)} = -\Delta t D^B \left[F(\phi^n + \alpha_6 H^{(5)}) \right] \quad (12)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \beta_1 H^{(1)} + \beta_2 H^{(2)} + \beta_3 H^{(3)} + \beta_4 H^{(4)} + \beta_5 H^{(5)} + \beta_6 H^{(6)} \quad (13)$$

مقادیر ضرایب این معادلات در جدول ۱ ارائه شده است. در رابطه‌های ۷ تا ۱۳ نمادها مشابه با قبل هستند. در روش LDDRK4-6 از یک چرخه دو مرحله‌ای با کمک ضرایب این روش در جدول ۱ استفاده می‌شود؛ به این صورت که در یک گام زمانی، مرحله اول این پیمایش زمانی و در گام زمانی بعدی، مرحله دوم آن به کار گرفته می‌شود.

شکل پایستار معادلات دوبعدی را می‌توان به صورت

رابطه (۱۴) نمایش داد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F(\phi)}{\partial x} + \frac{\partial E(\phi)}{\partial y} = G(\phi) \quad (14)$$

برای گسسته‌سازی این معادله، با استفاده از پیمایش زمانی اصلی روش‌های مک کورمک در دو مرحله پیشگو و اصلاحگر، از رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) استفاده می‌شود:

اصلاحگر، به ترتیب از رابطه‌های (۵) و (۶) استفاده می‌شود:

$$\phi_j^* = \phi_j^n - \Delta t D^F \left[F(\phi_j^n) \right] \quad (5)$$

$$\phi_j^{n+1} = \frac{1}{4} \left[\phi_j^n + \phi_j^* - \Delta t D^B \left[F(\phi_j^*) \right] \right] \quad (6)$$

در این رابطه‌ها نماد D نشان‌دهنده شکل گسسته مشتق اول مکانی است و بالانویس F پیش‌سوی بودن روش و بالانویس B پس‌سوی بودن آن را نشان می‌دهد. همچنین، بالانویس n تراز زمانی و زیرنویس j اندیس نقاط روی شبکه را مشخص می‌کند. بالانویس * مقدار موقتی کمیت ϕ در تراز زمانی $n+1$ حاصل از مرحله پیشگو است که در مرحله اصلاحگر، تصحیح می‌شود.

برای حل عددی معادله ۴ با استفاده از روش مک کورمک و با استفاده از پیمایش زمانی رونگ-کوتا از معادلات (۷ تا ۱۳) استفاده می‌شود (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰).

$$H^{(1)} = -\Delta t D^F \left[F(\phi^n) \right] \quad (7)$$

$$H^{(2)} = -\Delta t D^B \left[F(\phi^n + \alpha_2 H^{(1)}) \right] \quad (8)$$

$$H^{(3)} = -\Delta t D^F \left[F(\phi^n + \alpha_3 H^{(2)}) \right] \quad (9)$$

جدول ۱. ضرایب پیمایش زمانی رونگ-کوتا مربوط به روش‌های مک کورمک (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰).

	RK2	RK4	LDDRK4-6 مرحله اول	LDDRK4-6 مرحله دوم
α_2	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰/۳۵۳۳۲۳
α_3	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰/۹۹۹۵۹۷
α_4	۰	۱	۱	۰/۱۵۲۱۸۸
α_5	۰	۰	۰	۰/۵۳۴۲۱۶
α_6	۰	۰	۰	۰/۶۰۳۹۰۷
β_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	۰/۰۴۶۷۶۲۱
β_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۰/۱۳۷۲۸۶
β_3	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۰/۱۷۰۹۷۵
β_4	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	۰/۱۹۷۵۷۲
β_5	۰	۰	۰	۰/۲۸۲۲۶۳
β_6	۰	۰	۰	۰/۱۶۵۱۴۲

پیش سو و پس سوز مرتبه اول هستند و به صورت رابطه‌های (۲۴) و (۲۵) بیان می‌شوند:

$$D^F(\phi) = \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta x} \quad (24)$$

$$D^B(\phi) = \frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{\Delta x} \quad (25)$$

شکل گسسته مشتق اول مکانی یک سو به پیش سو و پس سو، در روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، در طر حواره ۴/۲، که توسط هیکسون و ترکل (۲۰۰۰) معرفی شده است، به صورت رابطه‌های (۲۶) و (۲۷) بیان می‌شود:

$$(1-a)D_j^F + aD_{j+1}^F = \frac{1}{\Delta x}(F_{j+1} - F_j) \quad (26)$$

$$(1-a)D_j^B + aD_{j-1}^B = \frac{1}{\Delta x}(F_j - F_{j-1}) \quad (27)$$

در این رابطه‌ها، نماد a برابر مقدار ثابتی است و از رابطه (۲۸) به دست می‌آید:

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (28)$$

اگر در مسئله‌ای، شرایط مرزی غیردوره‌ای حاکم باشد، شرایط مرزی برای مرزهای راست و چپ مربوط به عملگرهای D^B و D^F مطابق روابط (۲۹ تا ۳۲) خواهد بود:

$$D_1^F = \frac{1}{\Delta x} \left[-\left(\frac{25}{12} - \frac{17\sqrt{3}}{36}\right) F_1 + \left(\frac{4}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{18}\right) F_2 - \right. \quad (29)$$

$$\left. \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) F_3 + \left(\frac{4}{3} + \frac{13\sqrt{3}}{18}\right) F_4 - \left(\frac{1}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{36}\right) F_5 \right]$$

$$D_m^F = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{25}{12} + \frac{17\sqrt{3}}{36}\right) F_m - \left(\frac{4}{3} + \frac{25\sqrt{3}}{18}\right) F_{m-1} + \right. \quad (30)$$

$$\left. \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) F_{m-2} - \left(\frac{4}{3} + \frac{13\sqrt{3}}{18}\right) F_{m-3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{36}\right) F_{m-4} \right]$$

$$D_1^B = \frac{1}{\Delta x} \left[-\left(\frac{25}{12} + \frac{17\sqrt{3}}{36}\right) F_1 + \left(\frac{4}{3} + \frac{25\sqrt{3}}{18}\right) F_2 - \right. \quad (31)$$

$$\left. \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) F_3 + \left(\frac{4}{3} + \frac{13\sqrt{3}}{18}\right) F_4 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{36}\right) F \right]$$

$$D_m^B = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{25}{12} - \frac{17\sqrt{3}}{36}\right) F_m - \left(\frac{4}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{18}\right) F_{m-1} + \right. \quad (32)$$

$$\left. \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) F_{m-2} - \left(\frac{4}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{18}\right) F_{m-3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{36}\right) F_{m-4} \right]$$

در این رابطه‌ها، زیرنویس ۱، نقطه روی مرز سمت چپ

$$\phi_{i,j}^* = \phi_{i,j}^n - \Delta t D_x^F [F(\phi_{i,j}^n)] - \Delta t D_y^B [E(\phi_{i,j}^n)] + \Delta t G(\phi_{i,j}^n) \quad (15)$$

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\tau} \left\{ \phi_{i,j}^n + \phi_{i,j}^* - \Delta t D_x^B [F(\phi_{i,j}^*)] - \Delta t D_y^F [E(\phi_{i,j}^*)] + \Delta t G(\phi_{i,j}^*) \right\} \quad (16)$$

در این رابطه‌ها، نمادها مشابه با قبل هستند و زیرنویس‌های i و j اندیس نقاط شبکه در راستای محورهای x و y را مشخص می‌کنند.

برای حل عددی معادله (۱۴) با استفاده از روش مک کورمک با پیمایش زمانی رونگ-کوتا از معادلات (۱۷ تا ۲۳) استفاده می‌شود:

$$H^{(1)} = -\Delta t \left\{ D_x^F [F(\phi^n)] + D_y^B [E(\phi^n)] \right\} + \Delta t G(\phi^n) \quad (17)$$

$$H^{(2)} = -\Delta t \left\{ D_x^B [F(\phi^n + \alpha_2 H^{(1)})] + \right. \quad (18)$$

$$D_y^F [E(\phi^n + \alpha_2 H^{(1)})] \left. \right\} + \Delta t G(\phi^n + \alpha_2 H^{(1)})$$

$$H^{(3)} = -\Delta t \left\{ D_x^F [F(\phi^n + \alpha_3 H^{(2)})] + \right. \quad (19)$$

$$D_y^B [E(\phi^n + \alpha_3 H^{(2)})] \left. \right\} + \Delta t G(\phi^n + \alpha_3 H^{(2)})$$

$$H^{(4)} = -\Delta t \left\{ D_x^B [F(\phi^n + \alpha_4 H^{(3)})] + \right. \quad (20)$$

$$D_y^F [E(\phi^n + \alpha_4 H^{(3)})] \left. \right\} + \Delta t G(\phi^n + \alpha_4 H^{(3)})$$

$$H^{(5)} = -\Delta t \left\{ D_x^F [F(\phi^n + \alpha_5 H^{(4)})] + \right. \quad (21)$$

$$D_y^B [E(\phi^n + \alpha_5 H^{(4)})] \left. \right\} + \Delta t G(\phi^n + \alpha_5 H^{(4)})$$

$$H^{(6)} = -\Delta t \left\{ D_x^B [F(\phi^n + \alpha_6 H^{(5)})] + \right. \quad (22)$$

$$D_y^F [E(\phi^n + \alpha_6 H^{(5)})] \left. \right\} + \Delta t G(\phi^n + \alpha_6 H^{(5)})$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \beta_1 H^{(1)} + \beta_2 H^{(2)} + \beta_3 H^{(3)} + \beta_4 H^{(4)} + \beta_5 H^{(5)} + \beta_6 H^{(6)} \quad (23)$$

در رابطه‌های (۱۷ تا ۲۳) نیز نمادها مشابه با قبل هستند. همچنین، زیرنویس‌های x و y محورهای را که مشتق مکانی در آن راستاست، مشخص می‌کنند.

۳. عملگرهای مشتق پیش سو و پس سو، در روش مک کورمک

در روش مک کورمک مرتبه دوم، مشتقات اول مکانی

در اینجا خودداری می شود. فقط برخی از نتایج حل معادله فرارفت یک بعدی در پیوست الف آورده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده، در ادامه کار، شکل پایستار معادلات آب کم عمق دوبعدی با استفاده از چهار روش عددی مک کورمک مرتبه دوم با پیمایش زمانی اصلی، مک کورمک فشرده مرتبه چهارم طرحواره ۴/۲ با پیمایش زمانی اصلی، مک کورمک فشرده مرتبه چهارم طرحواره ۴/۲ با پیمایش زمانی RK4 و مک کورمک فشرده مرتبه چهارم طرحواره ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 حل می شوند و نتایج آن‌ها با نتایج به دست آمده از کار سایر محققان، مقایسه می شوند.

در ادامه مقاله حاضر، روش مک کورمک مرتبه دوم با پیمایش زمانی اصلی با نماد MC2، و روش های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم طرحواره ۴/۲ با پیمایش های زمانی اصلی و رونگ- کوتای RK4 و روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم طرحواره ۴/۴ با پیمایش زمانی رونگ- کوتای RK4 به ترتیب با نمادهای CMC4/2- original، CMC4/2-RK4 و CMC4/4-RK4 نمایش داده شده اند. جزئیات حل عددی معادلات آب کم عمق یک بعدی با استفاده از روش های مذکور توسط میرزائی شیری (۱۳۹۳) ارائه شده است. بنابراین در ادامه ارائه نتایج حل عددی به معادلات آب کم عمق دوبعدی اختصاص داده شده است.

۴.۱. حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی (آزمون موردی اول)

در این آزمون که توسط ناون و ریفاگن (۱۹۷۹) معرفی شده است، شرایط اولیه برای میدان ارتفاع، به صورت رابطه (۳۹) بیان می شود:

$$h(x, y) = H_0 + H_1 \tanh\left(\frac{9\left(\frac{D}{2} - y\right)}{2D}\right) + H_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{9\left(\frac{D}{2} - y\right)}{D}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \quad (39)$$

شبهه و زیر نویس m ، نقطه روی مرز سمت راست شبکه را نشان می دهند.

شکل گسسته مشتق اول مکانی یک سوئی پیش سو و پس سو، در روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، در طرحواره ۴/۴ (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰) نیز در رابطه های (۳۳) و (۳۴) آمده است:

$$\frac{2}{3}D_j^F + \frac{1}{3}D_{j+1}^F = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{5}{6}F_{j+1} - \frac{2}{3}F_j - \frac{1}{6}F_{j-1} \right) \quad (33)$$

$$\frac{2}{3}D_j^B + \frac{1}{3}D_{j-1}^B = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{6}F_{j+1} + \frac{2}{3}F_j - \frac{5}{6}F_{j-1} \right) \quad (34)$$

اگر در مسئله ای، شرایط مرزی غیر دوره ای حاکم باشد، شرایط مرزی برای مرزهای راست و چپ مربوط به عملگرهای D^F و D^B مطابق روابط (۳۵ تا ۳۸) خواهد بود:

$$D_1^F = \frac{1}{\Delta x} \left[-\left(\frac{19}{9}\right)F_1 + \left(\frac{37}{9}\right)F_2 - \left(\frac{19}{6}\right)F_3 + \left(\frac{13}{9}\right)F_4 - \left(\frac{5}{18}\right)F_5 \right] \quad (35)$$

$$D_m^F = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{37}{18}\right)F_m - \left(\frac{35}{9}\right)F_{m-1} + \left(\frac{17}{6}\right)F_{m-2} - \left(\frac{11}{9}\right)F_{m-3} + \left(\frac{2}{9}\right)F_{m-4} \right] \quad (36)$$

$$D_1^B = \frac{1}{\Delta x} \left[-\left(\frac{37}{18}\right)F_1 + \left(\frac{35}{9}\right)F_2 - \left(\frac{17}{6}\right)F_3 + \left(\frac{11}{9}\right)F_4 - \left(\frac{2}{9}\right)F_5 \right] \quad (37)$$

$$D_m^B = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{19}{9}\right)F_m - \left(\frac{37}{9}\right)F_{m-1} + \left(\frac{19}{6}\right)F_{m-2} - \left(\frac{13}{9}\right)F_{m-3} + \left(\frac{5}{18}\right)F_{m-4} \right] \quad (38)$$

۴. نتایج و بحث

برای آنکه بتوانیم دقت روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، در حل عددی معادلات خطی و غیرخطی را بررسی کنیم، ابتدا از این روش ها برای حل عددی معادلات فرارفت یک بعدی و برگرز یک بعدی استفاده کردیم که این معادلات دارای حل تحلیلی هستند. با توجه به اینکه موضوع این مقاله، حل عددی معادلات آب کم عمق است از آوردن نتایج حل معادلات دیگر مانند فرارفت و برگرز،

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = fW + v\nabla^2 Q \quad (45)$$

برای گسسته‌سازی این جمله پخش عددی در هر روش، باید از مشتق دوم مکانی تعریف شده برای آن روش یا یک روش هم‌مرتب با آن روش استفاده شود. ضریب v مقدار ثابتی است که با آزمایش عددی به دست می‌آید. همچنین در گسسته‌سازی این جمله، برای مقدار تابع برداری Q در هر مرحله، مقدار آن در تراز زمانی قبلی جاگذاری شده است.

نتایج حاصل از حل عددی معادلات آب کم‌عمق دوبعدی، با استفاده از شرایط اولیه و مرزی ذکر شده و با فاصله شبکه‌ای ۱۰۰ کیلومتر و گام زمانی ۳۰ ثانیه و با ضریب v برابر $1/5 \times 10^5$ در جمله پخش عددی، با استفاده از روش‌های مک کورمک مرتبه دوم با پیمایش زمانی اصلی، مک کورمک فشرده مرتبه چهارم $4/2$ با پیمایش‌های زمانی اصلی و $RK4$ و مک کورمک فشرده مرتبه چهارم $4/4$ با پیمایش زمانی $RK4$ و نتایج حاصل از حل عددی این معادلات، با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم ضمنی، توسط ناون و ریفاگن (۱۹۷۹) برای میدان ارتفاع، در زمان‌های $t = 48h$ و $t = 72h$ به ترتیب، در شکل‌های ۱ و ۲ آمده است. همچنین، شرایط اولیه، برای میدان ارتفاع، در شکل ۱-الف نشان داده شده است.

این شکل‌ها به خوبی توانایی روش‌های مختلف مک کورمک، در حل معادلات آب کم‌عمق دوبعدی را نشان می‌دهند. در این شکل‌ها، پرندهای میدان ارتفاع بین ۱۸۰۰ تا ۲۲۰۰ متر، با فاصله بین پرندهای ۵۰ متر نشان داده شده است. از مقایسه این شکل‌ها با هم‌دیگر مشخص می‌شود که روش‌های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، جزئیات متفاوتی از میزان انحنا پرندها را، در مقایسه با روش مک کورمک مرتبه دوم در زمان‌های پیش‌بینی ذکر شده، نمایش داده است. در هر حال، با این مقایسه نمی‌توان قضاوتی از برتری یک روش به روش دیگر داشت.

یکی از راه‌های بررسی دقت یک روش عددی، در گسسته‌سازی و حل معادلات مختلف، محاسبه و بررسی مقدار

که در آن ثابت‌های H_0 ، H_1 و H_2 به صورت رابطه (۴۰) تعریف شده‌اند:

$$H_0 = 2000m, \quad H_1 = 220m, \quad H_2 = 1333m \quad (40)$$

مؤلفه‌های مداری و نصف‌النهاری میدان سرعت، از تقریب زمینگرد، به صورت رابطه (۴۱) به دست می‌آیند:

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v = \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (41)$$

این معادلات در یک ناحیه مستطیل شکل، به طول $L = 600km$ و عرض $D = 440km$ حل می‌شوند که شتاب گرانی برابر $g = 10 \frac{m}{s^2}$ است و برای پارامتر کوریولیس، از تقریب صفحه β به صورت رابطه (۴۲) استفاده می‌شود:

$$f = f_0 + \beta \left(y - \frac{D}{2} \right) \quad (42)$$

که مقادیر مربوط به ثابت‌های f_0 و β به صورت رابطه (۴۳) است:

$$f_0 = 10^{-4} s^{-1}, \quad \beta = 1/5 \times 10^{-11} m^{-1} s^{-1} \quad (43)$$

همچنین مؤلفه نصف‌النهاری سرعت در مرزهای شمالی و جنوبی مطابق رابطه زیر، همواره برابر صفر فرض شده است.

$$v(x, 0, t) = v(x, D, t) = 0 \quad (44)$$

در حل عددی این معادلات، شرایط مرزی حاکم بر مرزهای شرقی و غربی، شرایط مرزی دوره‌ای است و شرایط مرزی در مرزهای شمالی و جنوبی غیردوره‌ای می‌باشد. برای مؤلفه مداری سرعت و ارتفاع، در این مرزها از یک میان‌یابی خطی از یک تراز زمانی پیشین استفاده می‌شود. در حل این معادلات، از فواصل شبکه‌ای مداری و نصف‌النهاری مساوی، برابر با ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ کیلومتر استفاده شده است. همچنین هر گام زمانی برای هر کدام از این فواصل، برای حفظ پایداری همه روش‌ها به ترتیب برابر ۱۵، ۳۰ و ۶۰ ثانیه در نظر گرفته شده است. برای غلبه بر خطای دگرنامیدن حاصل از جملات غیرخطی در این مثال، یک جمله پخش عددی مطابق رابطه زیر، به سمت راست معادلات آب کم‌عمق داده شده در رابطه (۲) اضافه می‌کنیم:

برای آنکه مقدار تغییرات این کمیت‌های پایستار مشخص شود، در هر مرحله از انتگرال گیری مقدار این کمیت‌ها را محاسبه می‌کنیم و درصد تغییرات هر کمیت را با استفاده از رابطه (۴۹) به دست می‌آوریم:

$$\eta = \frac{c(t) - c(0)}{c(0)} \times 100 \quad (49)$$

در این رابطه $c(t)$ بیانگر مقدار کمیت پایستار، در زمان t و $c(0)$ بیانگر مقدار آن در زمان صفر است. نمودارهای مربوط به تغییرات درصد تغییرات انرژی و انستروپی بر حسب زمان، در حل عددی این آزمون، با استفاده از روش‌های عددی گفته شده در شکل ۳ آمده است.

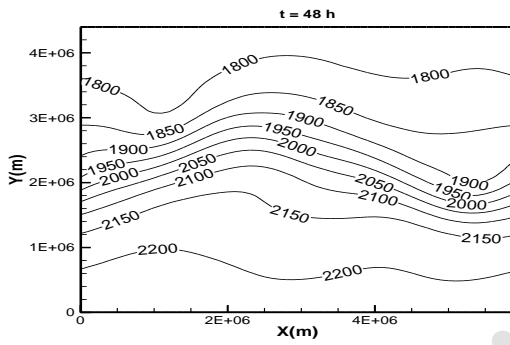
تغییرات کمیت‌های پایستار مانند انرژی، انستروپی، جرم و ... است. در این آزمون نیز، این بررسی در مورد انرژی کل و انستروپی صورت گرفته است. انرژی کل و انستروپی به ترتیب از رابطه‌های (۴۶) و (۴۷) به دست می‌آیند:

$$E = \frac{1}{\rho} \int \int (u^2 + v^2 + gh) h dy dx \quad (46)$$

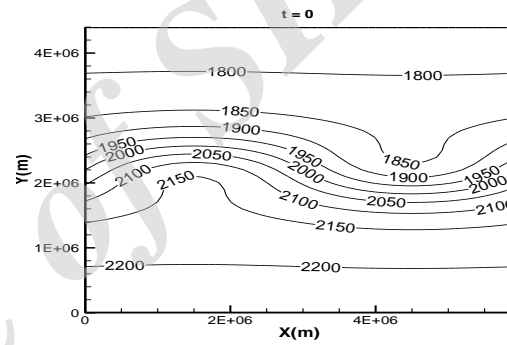
$$Z = \int \int \left(\frac{\zeta_a^2}{h} \right) dy dx \quad (47)$$

در این رابطه ζ_a بیانگر تاوایی مطلق است که به صورت رابطه (۴۸) به دست می‌آید:

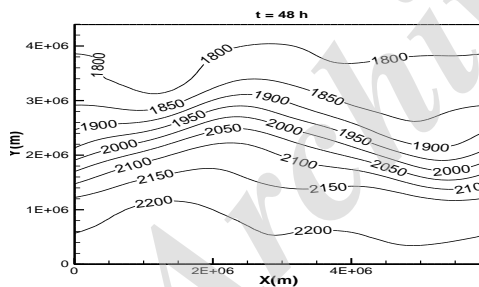
$$\zeta_a = \zeta + f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f \quad (48)$$



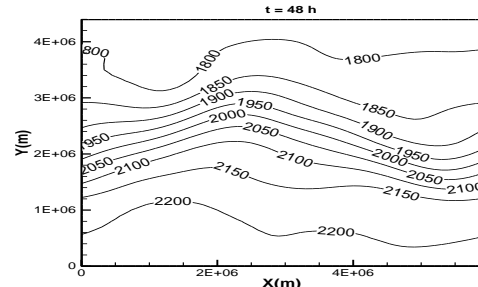
MC2 (ب)



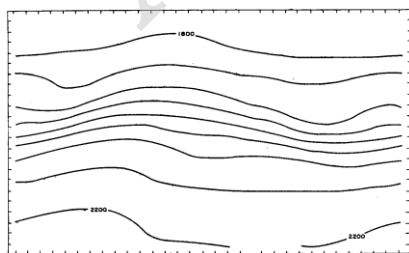
الف) شرایط اولیه



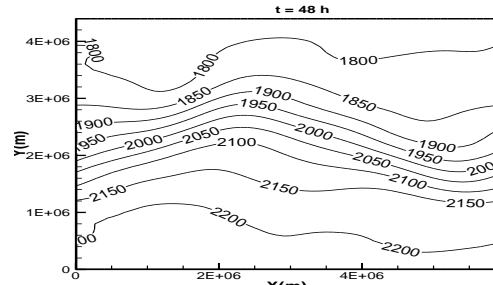
CMC4/2-RK4 (ت)



CMC4/2-original (پ)

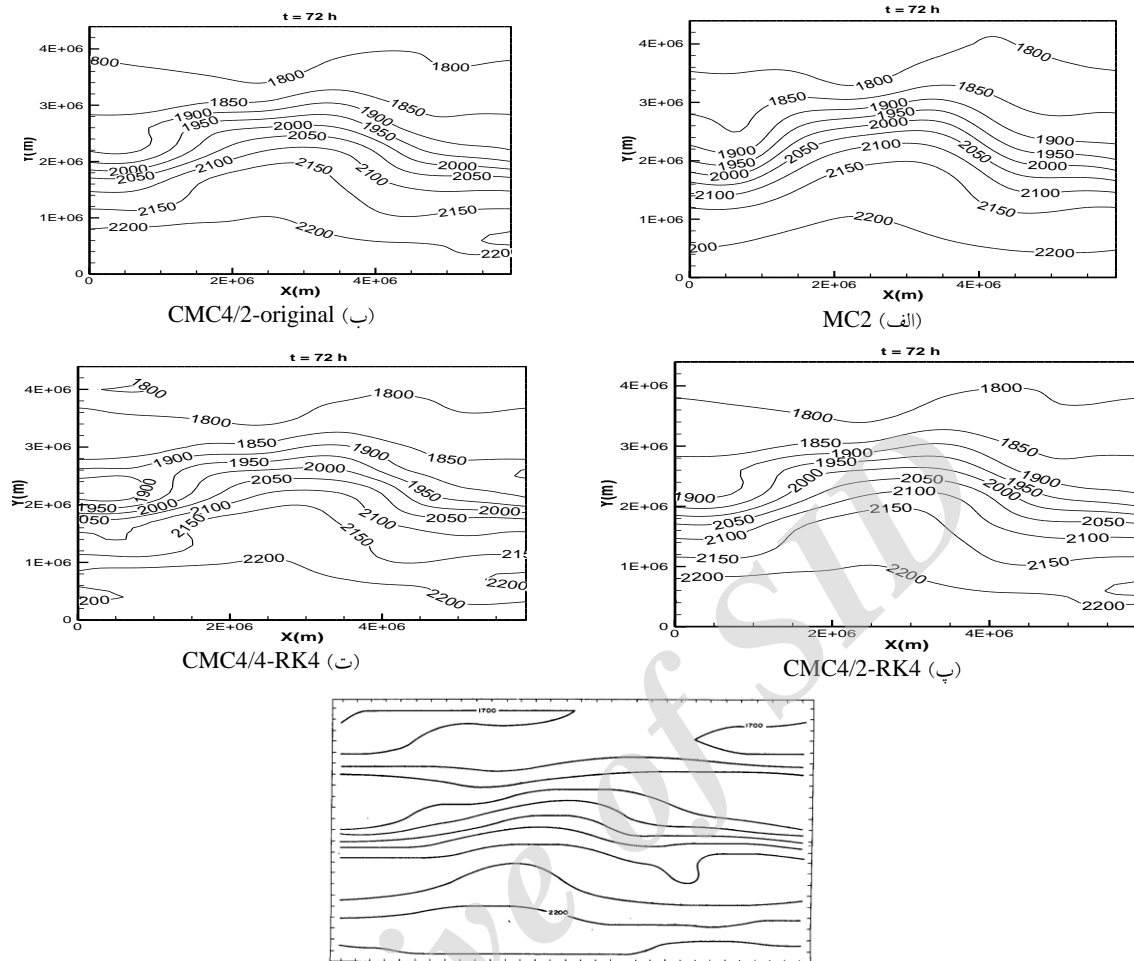


ج) روش فشرده مرتبه چهارم ضمنی (ناون و ریفاگان، ۱۹۷۹)



CMC4/4-RK4 (ث)

شکل ۱. الف) شرایط اولیه میدان ارتفاع، ب) تا ث) پاسخ حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی برای میدان ارتفاع با استفاده از روش‌های عددی مختلف مک کورمک و ج) روش فشرده مرتبه چهارم ضمنی (ناون و ریفاگان، ۱۹۷۹) پس از ۴۸ ساعت.



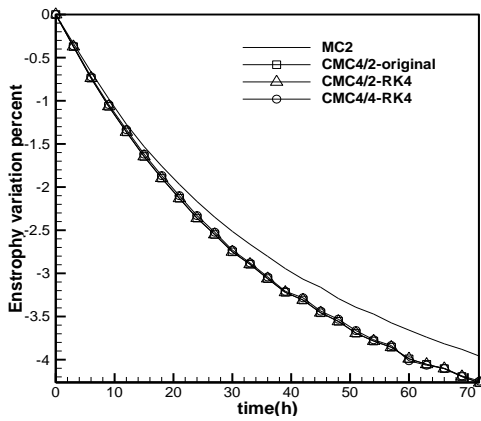
(ث) روش فشرده مرتبه چهارم ضمنی (ناون و ریفاگن، ۱۹۷۹)

شکل ۲. (الف) تا (ت) پاسخ حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی برای میدان ارتفاع با استفاده از روش های عددی مختلف مک کورمک و (ث) روش فشرده مرتبه چهارم ضمنی (ناون و ریفاگن، ۱۹۷۹) پس از ۷۲ ساعت.

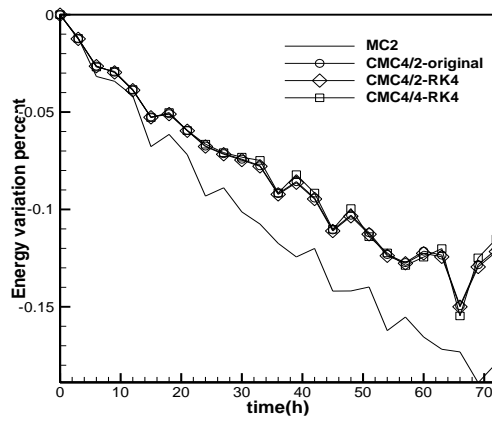
۲.۴. حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی (آزمون موردی دوم)

به عنوان آزمون موردی دوم از آزمون ارائه شده توسط دریچل و همکاران (۱۹۹۹) استفاده می کنیم. جزئیات مربوط به شرایط اولیه این آزمون توسط دریچل و همکاران (۱۹۹۹) تشریح شده است. در این آزمون موردی معادلات آب کم عمق دوبعدی در یک ناحیه مربع شکل در مختصات دکارتی با ابعاد $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ که شرایط مرزی دوره ای در هر دو راستای مداری و نصف النهاری آن حاکم است، حل می شوند.

در شکل ۳- الف به وضوح برتری روش های فشرده مرتبه چهارم در حفظ پایستاری انرژی کل، در مقایسه با روش مرتبه دوم دیده می شود، اما در قسمت ب مربوط به این شکل، پایستاری انستروپی در روش مرتبه دوم بهتر از روش های مرتبه چهارم است. دلیل این امر این است که مقادیر ضریب پخش عددی به کاررفته در روش های مختلف باهم متفاوت است. برای نشان دادن این موضوع، مقادیر ضریب پخش عددی به کاررفته در روش های مختلف را باهم یکسان می گیریم و دوباره نمودارها را رسم می کنیم که نتیجه در شکل ۴ نمایش داده شده است.

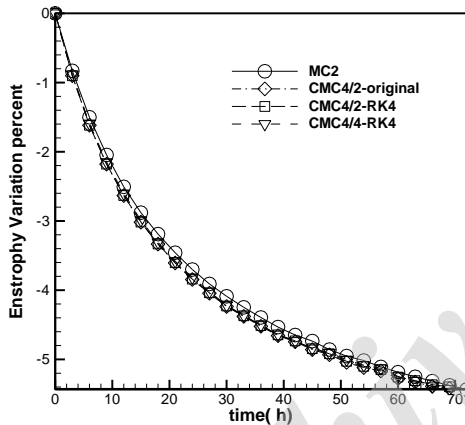


(ب) تغییرات درصد انستروپی

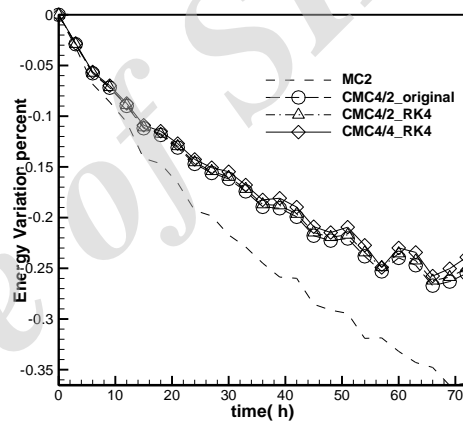


(الف) تغییرات درصد انرژی کل

شکل ۳. نمودارهای تحول زمانی؛ (الف) درصد تغییرات انرژی کل و (ب) انستروپی در حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی با استفاده از روش های مختلف مک کورمک و با ضرایب پخش عددی مناسب هر روش.



(ب) تغییرات درصد انستروپی



(الف) تغییرات درصد انرژی کل

شکل ۴. نمودارهای تحول زمانی؛ (الف) درصد تغییرات انرژی کل و (ب) انستروپی در حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی با استفاده از روش های مختلف مک کورمک و با ضرایب پخش عددی یکسان.

واحد و نیز ارتفاع می باشد. همچنین در ادامه باید از حل عددی دو معادله پواسون زیر تابع جریان و پتانسیل سرعت را به دست آوریم:

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \quad \delta = \nabla^2 \chi \quad (51)$$

در این رابطه، ζ ، δ ، ψ و χ به ترتیب نشان دهنده تاوایی نسبی، واگرایی، تابع جریان و پتانسیل سرعت هستند. پس از به دست آمدن تابع جریان و پتانسیل سرعت، می توانیم از حل عددی روابط (۵۲)، مقادیر سرعت های مداری و نصف النهاری را محاسبه کنیم:

با توجه به اینکه در آزمون فوق، داده های اولیه برای مقادیر مربوط به ارتفاع بی بعد شده، واگرایی و تاوایی در دسترس هستند، برای کار حاضر نیاز است تا داده ها را به ارتفاع، سرعت مداری و سرعت نصف النهاری تبدیل کنیم. ابتدا ارتفاع را از رابطه زیر برای هر یک از نقاط شبکه محاسبه می کنیم:

$$h = H(1+h') \quad (50)$$

در این رابطه، h' ارتفاع بی بعد شده تعریف شده در آزمون فوق، H ارتفاع حالت پایه دارای مقدار ثابت برابر یک

محورهای مختصات می‌باشد و مقدار H نیز برابر عدد یک است. ضریب ثابت C ، نیز یک مقدار ثابت است که با آزمایش عددی به دست می‌آید و در مورد روش‌های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، برابر $0/25$ برای همه فاصله‌های شبکه‌ای در نظر گرفته شده است. در مورد روش مک کورمک مرتبه دوم مقادیر این ضریب برای تعداد نقاط شبکه 64×64 برابر 20 ، برای تعداد نقاط شبکه 128×128 برابر 10 و برای تعداد نقاط شبکه 256×256 برابر 8 فرض شده است.

نتایج حاصل از حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی، با استفاده از شرایط اولیه و مرزی گفته شده در آزمون موردی دوم و با تعداد نقاط شبکه‌ای 256×256 ، با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم $4/4$ با پیمایش زمانی RK4 به عنوان نمونه، برای تحول زمانی میدان‌های ارتفاع بی‌بعد شده و تاوایی پتانسیلی، به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ آمده است. مقدار تاوایی پتانسیلی نیز از رابطه (۵۵) به دست می‌آید:

$$PV = \frac{\zeta + f}{h} \quad (55)$$

در این رابطه، PV تاوایی پتانسیلی را نشان می‌دهد. در شکل ۵، ابتدا خطوط ارتفاع با هم موازی هستند که با گذشت زمان، تا پایان روز دهم، ملاحظه می‌شود که دو تاوه از پربندهای مثبت و دو تاوه از پربندهای منفی در اثر ناپایداری فشارورد (با $\frac{\partial(PV)}{\partial y} = 0$) ایجاد می‌شود و به تدریج رشد می‌یابد که یکی از این تاوه‌های مثبت، به دو قسمت تقسیم می‌شود. شکل ۶ نیز نشان می‌دهد که در ابتدا، خطوط تاوایی پتانسیلی، با هم موازی هستند و رفته رفته سه تاوه در امتداد مداری در روز دوم تشکیل یافته است که دو تاوه سمت راست به هم نزدیک‌ترند. با گذشت زمان، تاوه سمت چپ با جابه‌جایی اندک در راستای محور x رشد کرده و دو تاوه سمت راستی نیز هم‌زمان با رشد، جابه‌جایی در راستای محور y نیز دارند.

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (52)$$

بنابراین، اطلاعات اولیه مورد نیاز برای حل عددی معادلات داده شده در رابطه ۲ را در اختیار داریم. همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، شرایط مرزی حاکم بر مرزهای غربی و شرقی و همین‌طور مرزهای شمالی و جنوبی، شرایط دوره‌ای است. مقادیر مربوط به پارامتر کوریولیس و شتاب گرانی نیز از روابط (۵۳) به دست می‌آیند (دریچل و همکاران، ۱۹۹۹):

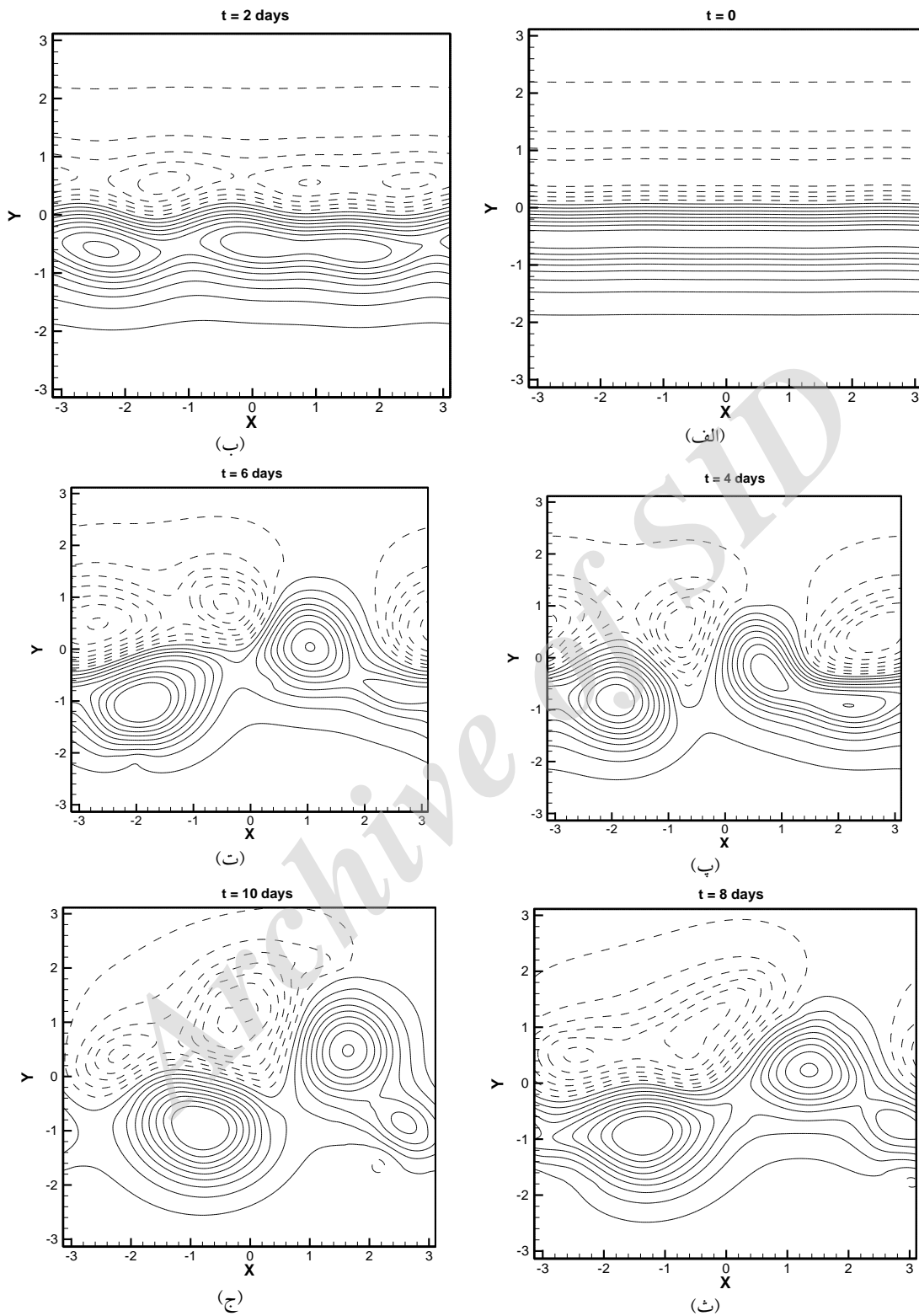
$$f = 4\pi, \quad g = 4\pi^2 \quad (53)$$

این معادلات با این شرایط اولیه و مرزی ذکر شده، با تعداد نقاط شبکه‌ای متفاوت 64×64 ، 128×128 و 256×256 به ترتیب با گام‌های زمانی $0/0025$ ، $0/0005$ و $0/0001$ روز حل شده است که در ادامه نتایج آن آمده است. علت انتخاب این گام‌های زمانی، حفظ پایداری همه روش‌هاست. یکی از روش‌هایی که برای مهار ناپایداری غیرخطی در روش‌های شبکه‌مبنا استفاده می‌شود، به کارگیری یک عبارت پخش یا فرایخش عددی است. این عبارت به صورت $-v(-\nabla^2 \mathbf{Q})^n$ به سمت راست رابطه ۲ اضافه می‌شود (به عنوان مثال دریچل و همکاران، ۱۹۹۹). این جمله به ازای مقادیر n برابر ۱، ۲ و ۳ به ترتیب Harmonic، Biharmonic و Triharmonic نامیده می‌شود که استفاده از پخش به صورت Harmonic برای مهار دگرنامی و آبشار به مقیاس‌های ریز برای بخش ناواگرای شارش، چندان متداول نیست و معمولاً از فرایخش با n برابر ۲ یا ۳ استفاده می‌شود. با توجه به نتایجی که به دست آمد در اینجا از فرایخش Triharmonic استفاده شده است. این معادلات به شکل برداری (رابطه ۵۴) نوشته می‌شوند:

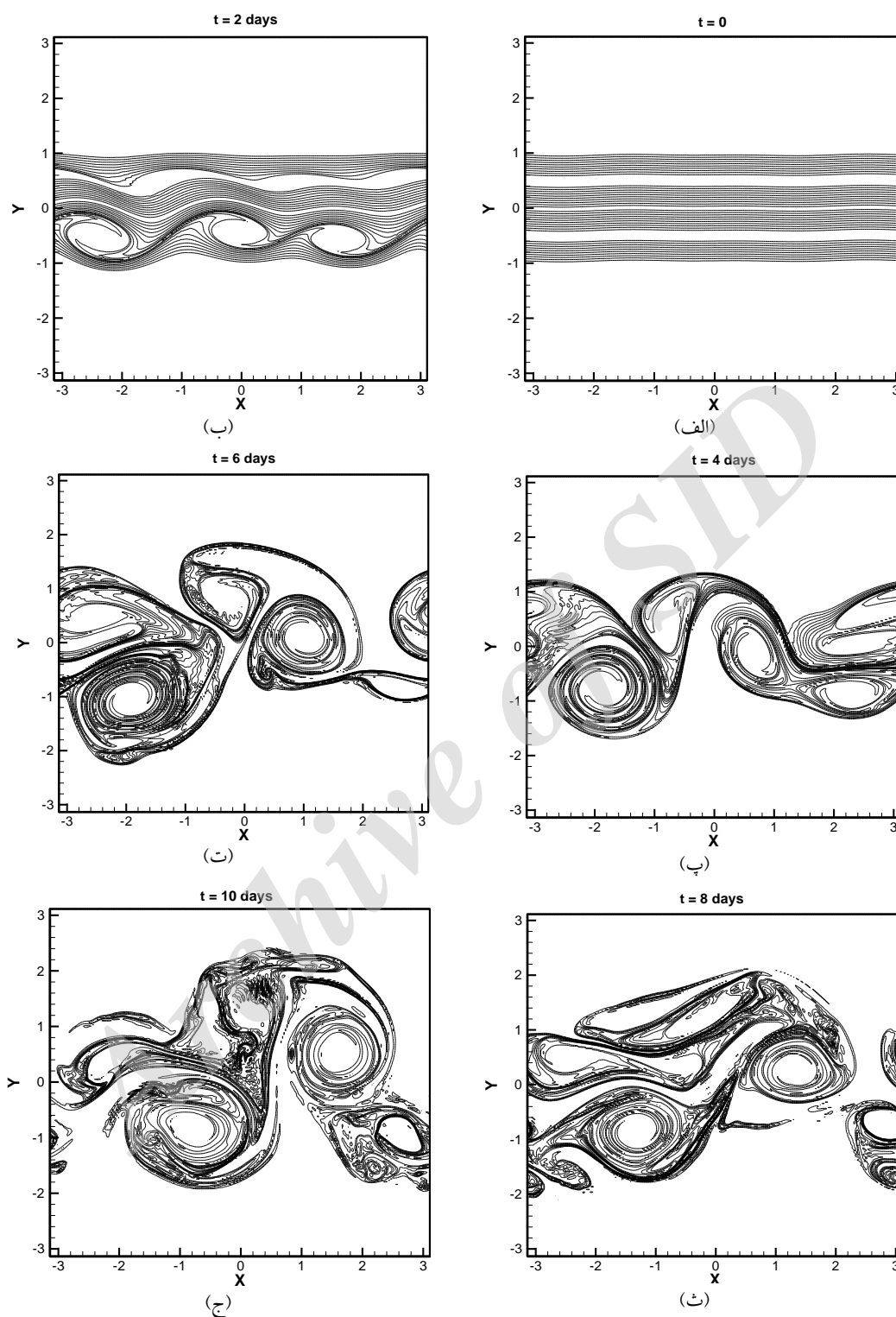
$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} = f\mathbf{W} + v\nabla^2 \mathbf{Q}; \quad (54)$$

$$v = \frac{CHZ}{k_{\max}}; \quad k_{\max} = \frac{n_g}{2}; \quad Z = \text{Max}_{x,y} \left| \frac{\zeta - fh'}{h} \right|$$

در رابطه بالا، n_g ، تعداد نقاط شبکه در راستای هر یک از



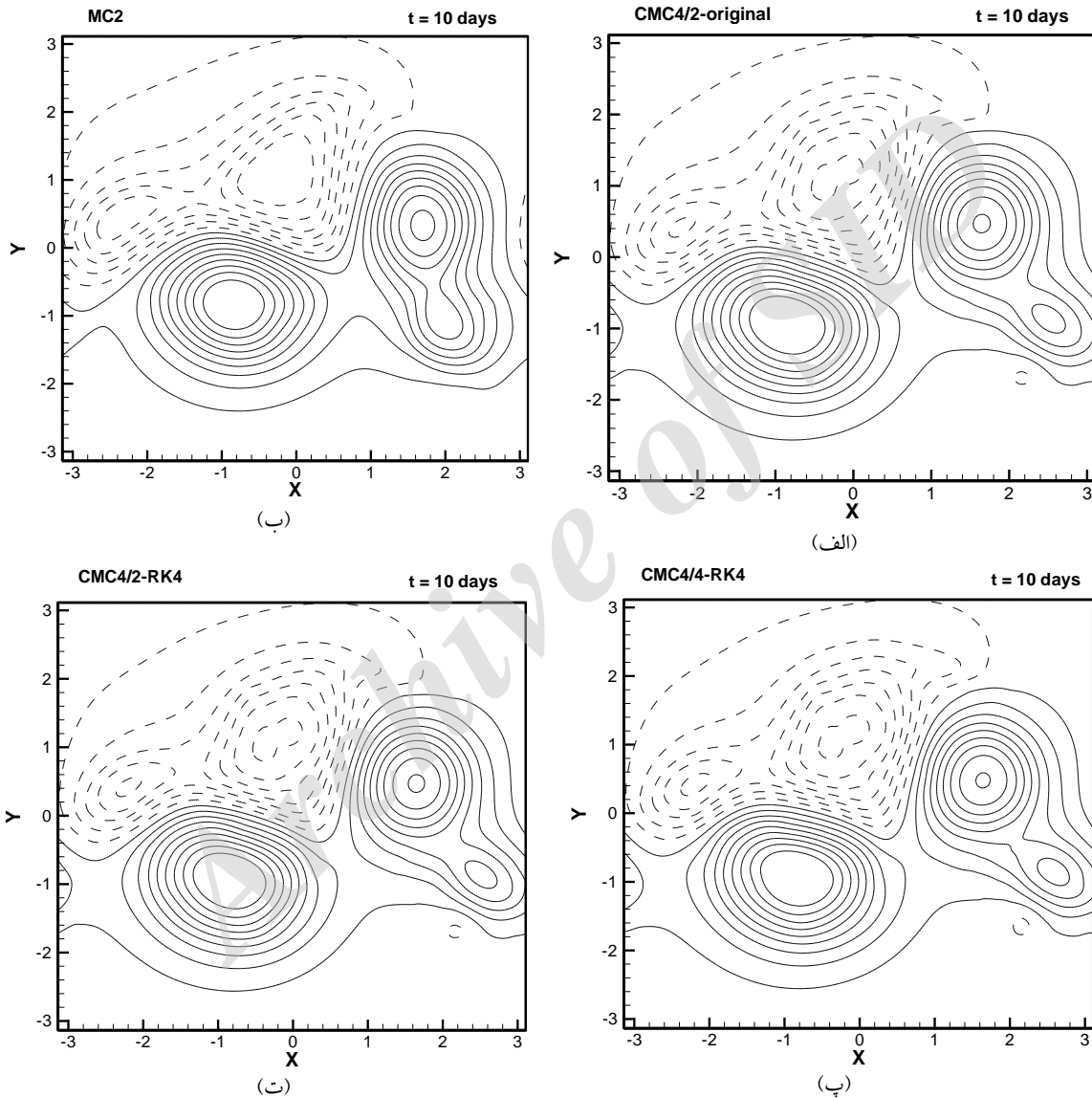
شکل ۵. حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی برای تحول زمانی ارتفاع بی بعد شده در زمان های (الف) صفر، (ب) ۰.۲، (پ) ۰.۴، (ت) ۰.۶، (ث) ۰.۸ و (ج) ۱.۰ روز پس از شروع انتگرال گیری با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، طر حواره ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 در شبکه ۲۵۶×۲۵۶. در این شکل پرندهای منفی با نقطه چین مشخص شده اند و فاصله بین پرندها ۰/۰۵ است.



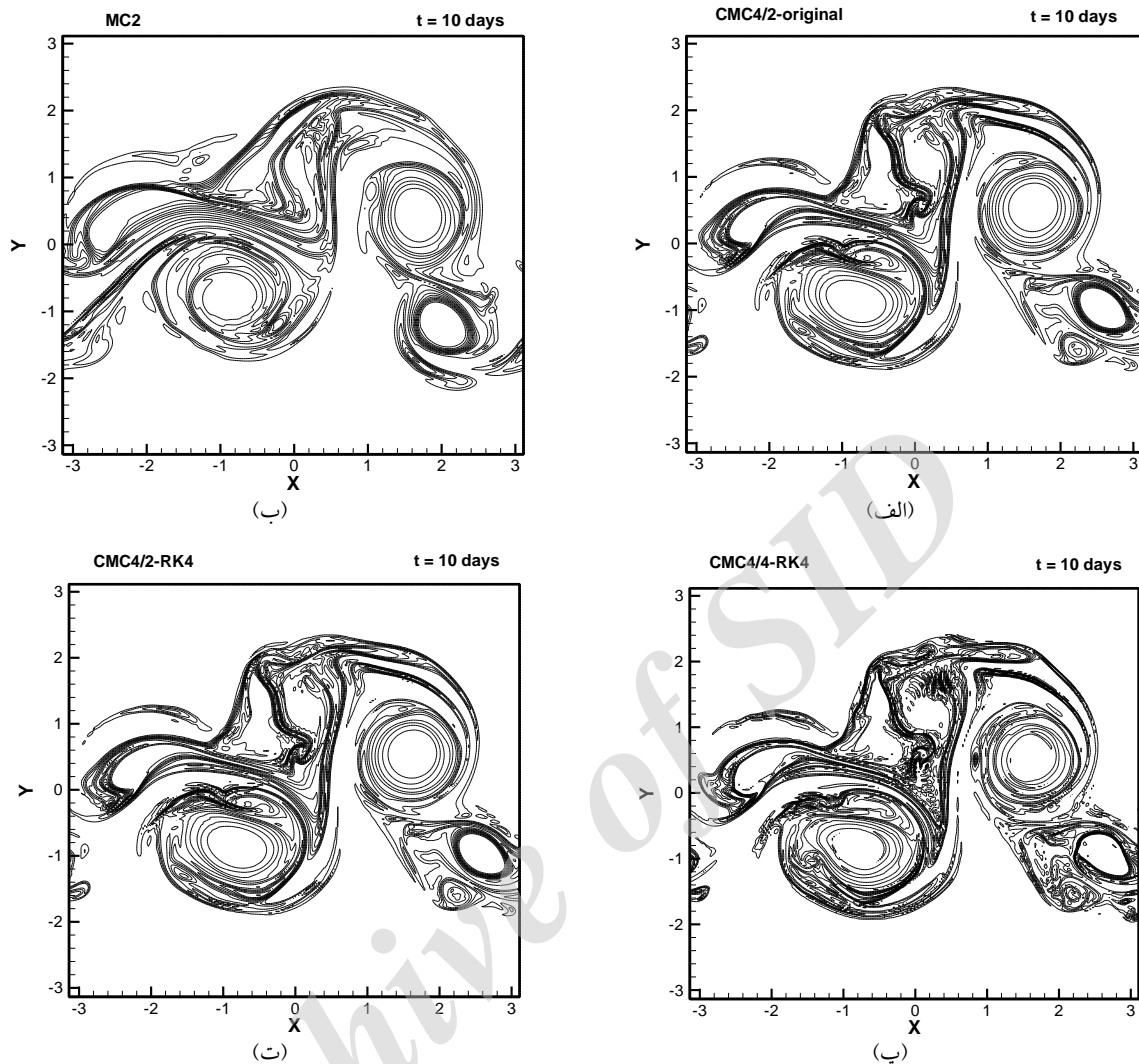
شکل ۶. حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی برای تحول زمانی تاوایی پتانسیلی در زمان‌های (الف) صفر، (ب) ۲، (پ) ۴، (ت) ۶، (ث) ۸ و (ج) ۱۰ روز پس از شروع انتگرال‌گیری با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، طرحواره ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 در شبکه ۲۵۶×۲۵۶.

با پیمایش‌های زمانی اصلی و RK4 و فشرده مرتبه چهارم ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 به طور مقایسه‌ای به ترتیب، در شکل‌های ۷ و ۸ آمده است. از مقایسه کیفی این نتایج نیز وجود تفاوت بین نتایج حاصل از روش‌های فشرده مرتبه چهارم و نتایج حاصل از روش مرتبه دوم دیده می‌شود.

نتایج مربوط به ارتفاع بی‌بعد شده و تاوایی پتانسیلی از حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی در این آزمون موردی، برای شبکه ۲۵۶×۲۵۶ نیز پس از ۱۰ روز از زمان انتگرال‌گیری با استفاده از روش‌های عددی مک کورمک مرتبه دوم با پیمایش زمانی اصلی و فشرده مرتبه چهارم ۴/۲



شکل ۷. حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی برای ارتفاع بی‌بعد شده، با استفاده از روش‌های (الف) CMC4/2-original، (ب) MC2، (پ) CMC4/4-RK4 و (ت) CMC4/2-RK4، پس از ۱۰ روز در شبکه ۲۵۶×۲۵۶. در این شکل پهندهای منفی با نقطه‌چین مشخص شده‌اند و فاصله بین پهندها ۰/۰۵ است.



شکل ۸. حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی برای تاوایی پتانسیلی، با استفاده از روش‌های (الف) CMC4/2-original، (ب) MC2، (پ) CMC4/4-RK4، (ت) CMC4/2-RK4 پس از ۱۰ روز در شبکه ۲۵۶×۲۵۶.

عنوان خطای جرم مشخص می‌کنند. این کمیت، توسط دریچل و همکاران (۱۹۹۹) تعریف شده است. در این آزمون، میدان تاوایی پتانسیلی در ناحیه R_j برای $(j = -N, \dots, N)$ داده شده است.

خطای جرم، در زمان t از مجموع مربع‌های تفاضل بین $m_j(0)$ و $m_j(t)$ برای همه نقاط j غیر از $j=0$ محاسبه می‌شود که در نهایت بر مساحت کل ناحیه و مقدار H تقسیم می‌شود و از رابطه (۵۷) به دست می‌آید:

برای تحلیل و بررسی بیشتر دقت روش‌های عددی استفاده شده در مورد این آزمون، از پایستاری کمیت جرم استفاده شده است. مقدار جرم در مورد معادلات آب کم عمق دوبعدی، با توجه به ثابت بودن چگالی، از رابطه (۵۶) به دست می‌آید:

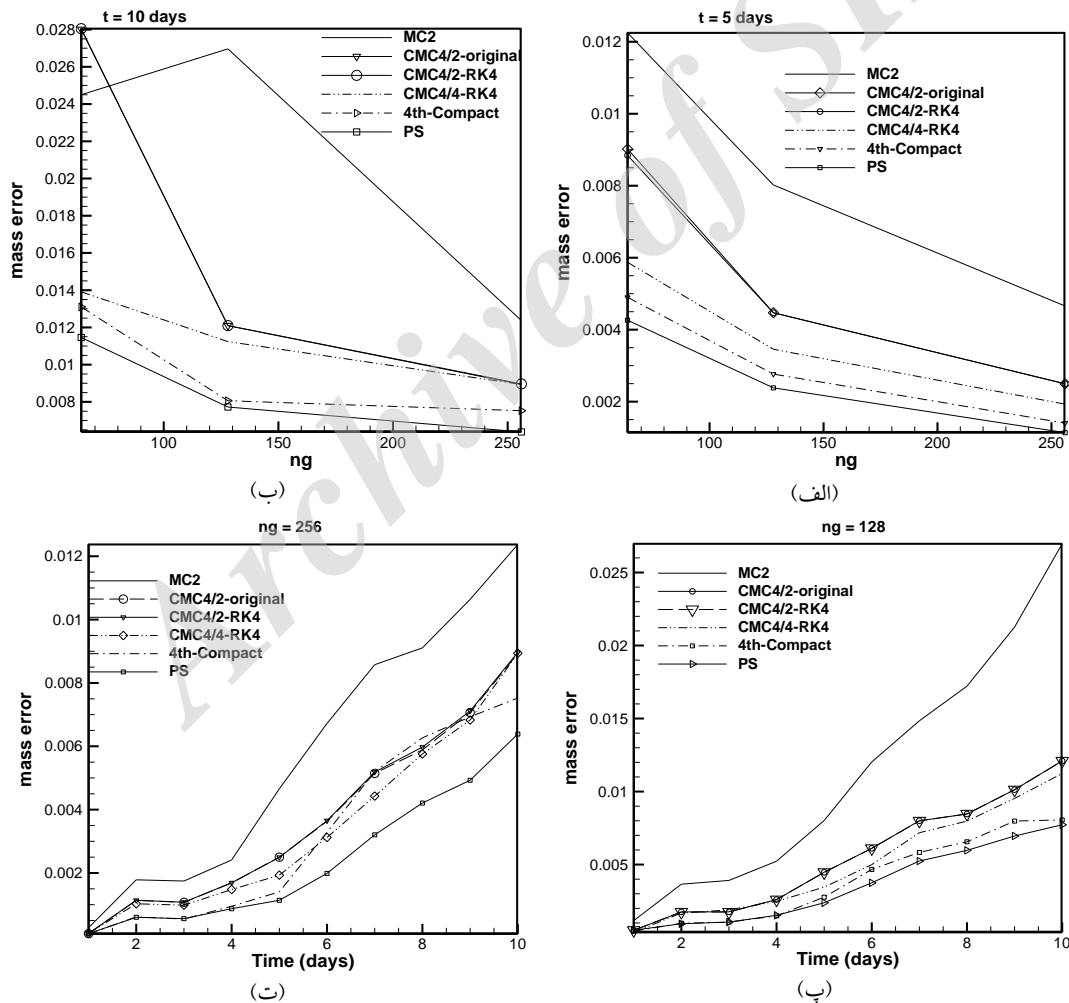
$$m = \iint_{LD} h dy dx \quad (56)$$

برای بررسی پایستاری جرم در روش‌های عددی، معمولاً مقدار خطا را با استفاده از محاسبه یک کمیت بی‌بعد شده با

است. بررسی شکل ۹ نشان می‌دهد که روش‌های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم به‌ویژه طر حواره ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 پایستاری جرم را در مقایسه با روش مرتبه دوم بیشتر حفظ کرده‌اند؛ البته شکل ۹ برتری نسبی روش فشرده مرتبه چهارم مرکزی را نیز در مقایسه با روش‌های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم در حفظ پایستاری جرم نشان می‌دهد. در حل عددی این آزمون موردی، اثر ضریب جمله فرایخش عددی، با افزایش آن در روش‌های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم ۴/۲ با پیمایش‌های زمانی اصلی و RK4 تا حدود صد برابر مقدار آن در شبکه ۲۵۶×۲۵۶ بررسی شد.

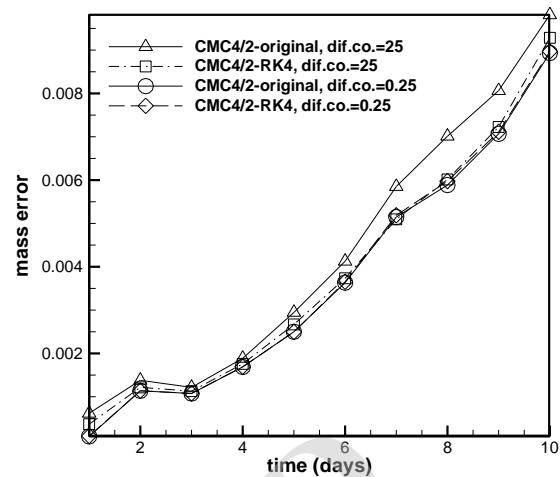
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \frac{1}{N} \sum_j [m_j(t) - m_j(0)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (57)$$

مقادیر خطای جرم در حل عددی این آزمون، برای روش‌های مختلف بر حسب تعداد نقاط شبکه، در زمان‌های $t = 5 \text{ days}$ و $t = 10 \text{ days}$ و مقادیر تحول زمانی ۱۰ روزه آن برای تفکیک‌های ۱۲۸ و ۲۵۶ در شکل ۹ آمده است؛ البته در این شکل‌ها، مقادیر خطای جرم مربوط به حل عددی این آزمون موردی، توسط قادر و همکاران (۲۰۰۹) با استفاده از دو روش عددی فشرده مرتبه چهارم مرکزی (4th-Compact) و طیفی وار (PS)، برای مقایسه، آمده



شکل ۹. نتایج مربوط به خطای جرم در روش‌های عددی مختلف، بر حسب تعداد نقاط شبکه برای (الف) $t = 5 \text{ days}$ و (ب) $t = 10 \text{ days}$ ؛ تحول زمانی ۱۰ روزه خطای جرم، برای روش‌های عددی مختلف در شبکه‌های (پ) ۱۲۸×۱۲۸ و (ت) ۲۵۶×۲۵۶

معینی می‌تواند مفید باشد. مدت زمان اجرای برنامه‌های روش‌های مختلف مک کورمک مورد بررسی، با شرایط یکسان، یک بار با گام زمانی یکسان (در این گام زمانی همه روش‌ها پایدارند و با آستانه پایداری محاسباتی روش CMC4/4-RK4 منطبق است) برای همه روش‌ها و یک بار دیگر با گام زمانی در آستانه پایداری محاسباتی هر روش، به دقت اندازه‌گیری شده‌اند و در هر دو حالت، مقدار بی‌بعد شده آن‌ها با استفاده از تقسیم آن‌ها بر مدت زمان اجرای برنامه روش مک کورمک مرتبه دوم با پیمایش زمانی اصلی و با گام زمانی در آستانه پایداری این روش، در جدول ۳ آمده است. این جدول نشان می‌دهد که زمان اجرای حل عددی با استفاده از روش‌های فشرده مرتبه چهارم چند برابر بیشتر از زمان لازم با استفاده از روش مرتبه دوم است که با وجود افزایش شایان توجه دقت این روش‌ها در مقایسه با روش مک کورمک مرتبه دوم، به نظر می‌رسد این زمان برای پیش‌بینی معقول باشد.



شکل ۱۰. تحول زمانی خطای جرم، برای روش‌های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم ۴/۲ با پیمایش‌های زمانی اصلی و RK4، با ضرایب پخش متفاوت.

نتایج خطای جرم محاسبه شده برای این روش‌ها نیز در زمان‌های ۵ و ۱۰ روز، در جدول ۲ و تحول زمانی خطای جرم برای این روش‌ها در شکل ۱۰ آورده شده است. در حل عددی، زمان اجرای برنامه‌های حل عددی، اهمیت زیادی دارد، زیرا نتایج حاصل از شبیه‌سازی، تا زمان

جدول ۲. نتایج مربوط به خطای جرم (E)، برای روش‌های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم ۴/۲ با پیمایش‌های زمانی اصلی و RK4 در شبکه ۲۵۶×۲۵۶ در زمان‌های ۵ و ۱۰ روز به‌ازای ضرایب پخش متفاوت.

روش	ضریب پخش عددی	$t = 5 \text{ days}$	$t = 10 \text{ days}$
CMC4/2-original	۲۵	2.946446×10^{-3}	9.813647×10^{-3}
CMC4/2-original	۰/۲۵	2.49955×10^{-3}	8.932618×10^{-3}
CMC4/2-RK4	۲۵	2.668483×10^{-3}	9.28319×10^{-3}
CMC4/2-RK4	۰/۲۵	2.495118×10^{-3}	8.968169×10^{-3}

جدول ۳. مدت زمان بی‌بعد شده اجرای برنامه حل عددی موردی دوم با شرایط یکسان، با استفاده از روش‌های مک کورمک اعمال شده.

مدت زمان اجرای برنامه		روش
گام زمانی آستانه پایداری	گام زمانی یکسان	
۱	۱/۹۹	MC2
۴/۱۱	۶/۵۸	CMC4/2-original
۴/۵۱	۹/۰۳	CMC4/2-RK4
۸/۵۵	۸/۵۵	CMC4/4-RK4

۵. نتیجه گیری

قرار گیرند. از دیگر نتایج به دست آمده، می توان به زمان اجرای برنامه های مربوط به روش های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم در رایانه اشاره کرد که با وجود افزایش قابل توجه دقت این روش ها در مقایسه با روش مک کورمک مرتبه دوم، اجرای این برنامه ها از زمان معقولی برای شبیه سازی برخوردارند.

پیوست الف. حل عددی معادله فرارفت یک بعدی

معادله فرارفت یک بعدی به صورت رابطه (الف-۱) را در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{الف-۱})$$

می دانیم حل تحلیلی این معادله، جواب زیر را در پی خواهد داشت:

$$u = Ae^{ik(x-ct)} \quad (\text{الف-۲})$$

اگر در لحظه $t=0$ مقدار u را با نماد u_0 نشان دهیم، یعنی:

$$u_0(x) = u(x, t=0) = Ae^{ikx} \quad (\text{الف-۳})$$

در این صورت کاملاً معلوم است که مقدار u در هر لحظه t ، برابر u_0 در مکان $x-ct$ خواهد بود. یعنی جواب تحلیلی معادله (الف-۱) به صورت زیر می باشد:

$$u(x, t) = u_0(x-ct) \quad (\text{الف-۴})$$

برای محاسبه مقدار خطا در روش های مختلف حل عددی انجام یافته روی معادله (الف-۱) از نرم های قدر مطلق، مربعی و بی نهایت که به صورت زیر تعریف می شوند، استفاده می کنیم:

$$l_1(u) = \frac{\sum_{i=1}^m (|\bar{u}_i - u_i|)}{\sum_{i=1}^m (|u_i|)} \quad (\text{الف-۵})$$

$$l_2(u) = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^m (|\bar{u}_i - u_i|^2) \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \sum_{i=1}^m (|u_i|^2) \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$l_\infty(u) = \frac{\text{Max}_{all} (|\bar{u}_i - u_i|)}{\text{Max}_{all} (|u_i|)}$$

که در آن m ، تعداد نقاط شبکه و u_i ، مقدار دقیق تابع (حاصل از روش حل تحلیلی) در هر نقطه i روی شبکه و

کار حاضر به حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم عمق با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم اختصاص داشت. پس از حل عددی معادلات فرارفت یک بعدی و آب کم عمق یک و دوبعدی با استفاده از روش های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم، با پیمایش های زمانی اصلی و رونگ-کوتا، پاسخ های به دست آمده بیانگر آن است که روش های مک کورمک مرتبه چهارم، جواب های دقیق تری از روش مک کورمک مرتبه دوم دارند. در مورد روش های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با پیمایش زمانی اصلی نیز طحواره ۴/۲ عملکرد بهتری در مقایسه با طحواره ۴/۴ دارد. اما در مورد همین روش ها با پیمایش زمانی رونگ-کوتا، طحواره ۴/۴ عملکرد بهتری از طحواره ۴/۲ دارد. در مقایسه همه روش ها، روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 پاسخ های دقیق تری از سایر روش های اعمال شده در کار حاضر می دهد. اما محدوده پایداری روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم ۴/۴ در مقایسه با بقیه روش ها کمتر است (هیگسون و ترکل، ۲۰۰۰). در این مقاله، برای حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی، از دو آزمون موردی استفاده شد. حل عددی آزمون موردی دوم این معادلات نشان می دهد که روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم ۴/۴ با پیمایش زمانی RK4 با تفکیک شبکه کمتر نیز پاسخ های قابل قبولی ارائه می کند و در مورد بقیه روش های مورد بررسی در این کار، دقت پاسخ ها در شبکه ای با تفکیک پایین تر، افت شایان توجهی نشان می دهد. از دیگر نتایج این است که ضریب جمله پخش عددی، اهمیت زیادی دارد و باید با دقت و با آزمایش عددی انتخاب شود تا جواب های دقیق تری حاصل شود. همچنین باید اشاره کرد که روش های مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، روش های توانمندی در حل عددی معادلات آب کم عمق هستند و با توجه به نتایج به دست آمده می توانند در حل عددی معادلات دیگر نیز مورد آزمایش

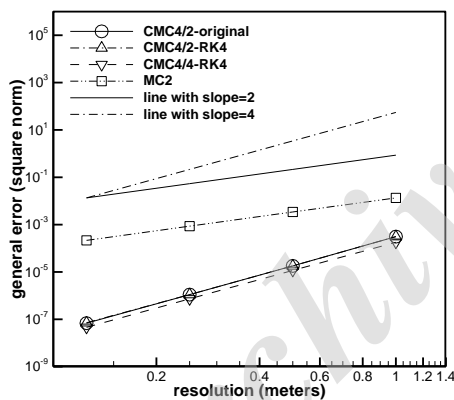
را، با روش‌های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم در یک ناحیه دوره‌ای $20 \leq x \leq 450$ با فرض

$c = 1 - \frac{m}{s}$ و با شرایط اولیه زیر در نظر می‌گیریم:

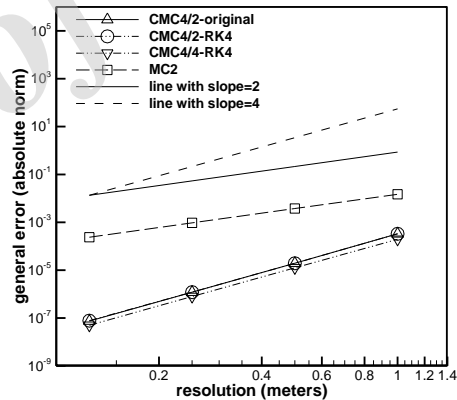
$$u_0(x) = \frac{1}{\gamma} \exp \left\{ -\ln(\gamma) \left(\frac{x}{\gamma} \right)^2 \right\} \quad (\text{الف-۶})$$

نمودار تغییرات خطای کل پس از یک ثانیه، با استفاده از نرم‌های قدرمطلق، مربع و بینهایت که در رابطه (الف-۵) معرفی شده‌اند، بر حسب تغییرات فاصله شبکه‌ای، به ترتیب در شکل الف-۱ (الف، ب و پ) نشان داده شده است. با نصف شدن فاصله شبکه‌ای، یا به عبارت دیگر دوبرابر شدن تفکیک شبکه در این سه شکل، مقدار خطای کل با هر سه نرم ذکر شده، موازی با خط لگاریتمی با شیب معادل دقت مکانی روش کاهش می‌یابد.

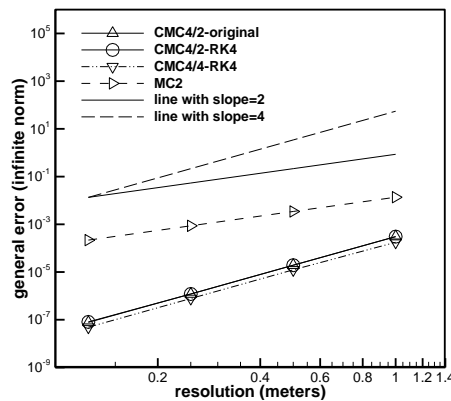
\tilde{u}_i ، مقدار به دست آمده از روش حل عددی مورد استفاده، در هر نقطه i می‌باشد. l_1 ، مقدار خطای کل به دست آمده با استفاده از نرم قدرمطلق، l_2 ، مقدار خطای کل به دست آمده با استفاده از نرم مربعی و l_∞ ، مقدار خطای کل به دست آمده با استفاده از نرم بی‌نهایت می‌باشد. هر یک از این نرم‌ها، معیاری برای مشخص کردن میزان انحراف پاسخ‌های عددی از جواب‌های تحلیلی هستند. نرم قدرمطلق، نسبت مجموع قدرمطلق خطاهای نسبی به مجموع قدرمطلق جواب‌های دقیق در تمام نقاط شبکه است. نرم مربعی، انحراف معیار پاسخ‌های عددی از جواب‌های دقیق را در نقاط شبکه و نرم بینهایت نیز نسبت بیشینه قدرمطلق خطای نسبی به بیشینه جواب دقیق در بین نقاط شبکه را نشان می‌دهند. حل عددی معادله (الف-۱)



(ب)



(الف)



(پ)

شکل (پ-۱). (الف) نمودار لگاریتمی تغییرات خطای کل الف: نرم قدرمطلق، (ب) نرم مربع و پ: نرم بینهایت بر حسب تغییرات فاصله شبکه‌ای در مقایسه با خطوط لگاریتمی با شیب ۲ و ۴.

گسسته می کنیم:

$$\begin{aligned}
 H_h^{(1)} &= -\Delta t D^F [q^n] \\
 H_q^{(1)} &= -\Delta t D^F [F(q^n, h^n)] \\
 H_h^{(2)} &= -\Delta t D^B [q^n + \alpha_2 H_q^{(1)}] \\
 H_q^{(2)} &= -\Delta t D^B [F(q^n + \alpha_2 H_q^{(1)}, h^n + \alpha_2 H_h^{(1)})] \\
 H_h^{(3)} &= -\Delta t D^F [q^n + \alpha_3 H_q^{(2)}] \\
 H_q^{(3)} &= -\Delta t D^F [F(q^n + \alpha_3 H_q^{(2)}, h^n + \alpha_3 H_h^{(2)})] \\
 H_h^{(4)} &= -\Delta t D^B [q^n + \alpha_4 H_q^{(3)}] \\
 H_q^{(4)} &= -\Delta t D^B [F(q^n + \alpha_4 H_q^{(3)}, h^n + \alpha_4 H_h^{(3)})] \\
 H_h^{(5)} &= -\Delta t D^F [q^n + \alpha_5 H_q^{(4)}] \\
 H_q^{(5)} &= -\Delta t D^F [F(q^n + \alpha_5 H_q^{(4)}, h^n + \alpha_5 H_h^{(4)})] \\
 H_h^{(6)} &= -\Delta t D^B [q^n + \alpha_6 H_q^{(5)}] \\
 H_q^{(6)} &= -\Delta t D^B [F(q^n + \alpha_6 H_q^{(5)}, h^n + \alpha_6 H_h^{(5)})] \quad (ب-۲) \\
 h^{n+1} &= h^n + \beta_1 H_h^{(1)} + \beta_2 H_h^{(2)} + \beta_3 H_h^{(3)} + \beta_4 H_h^{(4)} + \beta_5 H_h^{(5)} + \beta_6 H_h^{(6)} \\
 q^{n+1} &= q^n + \beta_1 H_q^{(1)} + \beta_2 H_q^{(2)} + \beta_3 H_q^{(3)} + \beta_4 H_q^{(4)} + \beta_5 H_q^{(5)} + \beta_6 H_q^{(6)} \\
 u_i^{n+1} &= \frac{q_i^{n+1}}{h_i^{n+1}}
 \end{aligned}$$

ضرایب α و β ، از جدول ۱ برای هر روش جاگذاری می شوند.

مراجع

جوان نژاد، ر.، مشکواتی، ا.ح.، قادر، س. و احمدی گیوی، ف.، ۱۳۹۵، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم پذیر دوبعدی و ناآب ایستایی جو با روش فشرده مک کورمک، م. ژئوفیزیک ایران، در حال چاپ.

فلاح، س.، ۱۳۸۷، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم پذیر دوبعدی و غیرهیدروستاتیک جو بی دررو با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم، پایان نامه کارشناسی ارشد هواشناسی، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.

قادر، س. و اصفهانیان، و.، ۱۳۸۵، حل عددی شکل پایستار معادلات آب کم عمق با استفاده از روش ابرفشرده مرتبه ششم، م. فیزیک زمین و فضا، ۳۲(۲)، ۳۱-۴۴.

قادر، س.، بیدختی، ع.ع. و فلاح، س.، ۱۳۸۹، حل عددی مسئله تنظیم راسی غیرخطی ناپایای دوبعدی با

خط لگاریتمی با شیب n ، در واقع نموداری است که رابطه آن با دوبرابر شدن تفکیک n ، به صورت $y = \frac{1}{y^n}$ می باشد که این نمودار در شکل لگاریتمی آن به صورت خط راست دیده می شود. این موازی بودن، به آن معنی است که کارکرد روش های عددی مورد بررسی در این تحقیق کاملاً درست و مطابق با دقت مکانی آن هاست. باید توجه داشت که در این مسئله، مقدار گام زمانی، بسیار کوچک انتخاب شده است تا شرط CFL برای همه تفکیک ها برقرار باشد. در ضمن، در هر سه شکل به طور واضح، دیده می شود که خطای کل روش های فشرده مرتبه چهارم، در هر تفکیکی از مقادیر معادل آن در روش مرتبه دوم با همان تفکیک کمتر است.

پیوست ب. گسسته سازی معادلات آب کم عمق یک بعدی در روش های مک کورمک

برای گسسته سازی معادلات آب کم عمق یک بعدی با استفاده از روش های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم، با پیمایش زمانی اصلی، روابط پیشگو و اصلاحگر، را برای معادله برداری ۳ به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_i^* &= \mathbf{Q}_i^n - \Delta t D^F (\mathbf{R}_i^n) \\
 \mathbf{Q}_i^{n+1} &= \frac{1}{\nu} [\mathbf{Q}_i^n + \mathbf{Q}_i^* - \Delta t D^B (\mathbf{R}_i^*)] \quad (ب-۱)
 \end{aligned}$$

در این رابطه ها نماد D ، نشان دهنده شکل گسسته مشتق اول مکانی است و بالانویس F ، پیش سو بودن روش و بالانویس B ، پس سو بودن آن را نشان می دهد. همچنین بالانویس n ، تراز زمانی و زیرنویس i ، اندیس نقاط روی شبکه را مشخص می کند. بالانویس $*$ ، مقدار موقتی کمیت Q ، در تراز زمانی $n+1$ ، حاصل از مرحله پیشگو است که در مرحله اصلاحگر، تصحیح می شود.

برای گسسته سازی این معادلات با استفاده از روش های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم، با پیمایش های زمانی رونگ-کوتا، رابطه (۳) را به ترتیب زیر

- معادلات آب کم عمق با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، پایان نامه کارشناسی ارشد هواشناسی، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.
- Dritschel, D. G., Polvani, L. M. and Mohebalhojeh, A. R., 1999, Contour-advective semi-Lagrangian algorithm for the shallow water equations, *Mon. Wea. Rev.*, 127, 1551-1565.
- Esfahanian, V., Ghader, S. and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the atmosphere, *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 131, 2109-2130.
- Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R. and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of supercompact finite-difference schemes for the f-plane shallow-water equations, *Mon. Wea. Rev.*, 137, 2393-2406.
- Ghader, S. and Nordström, J., 2015, High-order compact finite difference schemes for the vorticity-divergence representation of the spherical shallow water equations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 78, 709-738.
- Gustafsson, B., 1971, An ADI method for solving the shallow water equations, *J. Comput. Phys.*, 7, 239-253.
- استفاده از روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم، م. فیزیک زمین و فضا، ۳۶(۳)، ۱۷۳-۱۵۱.
- میرزائی شیری، ر.، ۱۳۹۳، حل عددی شکل پایستار Hixon, R. and Turkel, E., 2000, Compact implicit MacCormack-type scheme with high accuracy, *J. Comput. Phys.*, 158, 51-70.
- Hoffman, J., D., 2001, Numerical methods for engineer and scientist, Marcel Dekker, Second Edition, 823pp.
- Houghton, D., Kasahara, A. and Washington, W., 1966, Long-term integration of the barotropic equations by the Lax-Wendroff method, *Mon. Wea. Rev.*, 94, 141-150.
- Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow water flows. *Mon. Wea. Rev.*, 135, 3876-3894.
- Navon, I. M. and Riphagen, H. A., 1979, An implicit compact fourth-order algorithm for solving the shallow water equations in conservative-law form, *Mon. Wea. Rev.*, 107, 1107-1127.
- Vallis, G. K., 2006, Atmospheric and Oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation, Cambridge University Press.

Archive

Numerical solution of the shallow water equations using fourth-order compact MacCormack scheme

Mirzaei-Shiri, R.¹, Ghader, S.^{2*}, Mazraeh-Farahani, M.² and AliAkbari-Bidokhti, A.³

1. Ph.D. Student, Department of Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

2. Associate Professor, Department of Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

3. Professor, Department of Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 02 Feb 2016, Accepted: 18 Oct 2016)

Summary

Shallow water equations are for modelixy the behavior of a single-layer of fluid with constant density, that the hydrostatic approximation applies. These equations for the motion of a dry and inviscid atmosphere with constant density include the momentum and the continuity equations. In addition, the shallow water equations are often used as a testbed to assess the performance of new numerical algorithms. In recent years, the trend toward increasing the accuracy of the numerical simulations of the atmospheric and oceanic motions has increased due to the inherent complexity in these motions. In recent researches, the compact schemes have been notable because of their remarkable performance in the numerical simulation of fluid flows in other branches of fluid dynamics. This work is devoted to the application of the fourth-order compact MacCormack scheme to the numerical solution of the conservative form of the two dimensional shallow water equations. The compact MacCormack method is formulated in form of a two-point scheme. Two versions of the fourth-order compact MacCormack scheme have been introduced and called as 4/2 and 4/4. The first order spatial derivative operators have implicit forms in both schemes (4/2 and 4/4), for one-sided forward and backward operators. The MacCormack scheme uses two time-marching methods: The first is the original two-stage method and the other one is the Runge-Kutta-type (RK2, RK4 and LDDRK4-6) method. In the present work first, we solve a simple linear (advection) equation with an analytical solution, using the second-order and the fourth-order compact MacCormack-type schemes (with the original and the Runge-Kutta time-marching methods) and compare their global errors. The results show that when the fourth-order compact MacCormack schemes with the original time-marching are used, the 4/2 formulation has better results than the 4/4 formulation, but when these schemes use the Runge-Kutta time-marching, the results of the 4/4 formulation are better than those in the 4/2 formulation. According to these results and the magnitude of the global errors, we used four MacCormack-type methods to solve the shallow water equations. The methods are the second-order scheme with the original time-marching, the 4/2 type of fourth order compact scheme with both the original and the RK4 time-marching, and the 4/4 type of fourth order compact scheme with the RK4 time-marching. In the following, we solved the conservative form of the one-dimensional shallow water equations with those four mentioned schemes. The results were compared with a test case with known analytical solution. Finally, we solved the conservative form of the two-dimensional shallow water equations. To perform the simulations two well know test cases are used. To assess the numerical accuracy, we estimated conservative quantities such as energy, enstrophy and mass along the simulation process in all time steps. The estimated results indicate that the fourth-order compact MacCormack schemes retain the conservation of these quantities better than the second-order MacCormack scheme. In comparison with the other applied schemes in this work, while the 4/4 formulation with the RK4 time-marching shows more accurate results, the numerical stability condition of this scheme is less than the other schemes. In the second test case, we point out that the computational time of the code for each numerical solution, which utilizes the fourth-order compact schemes, is longer than the computational time of the solution using second-order scheme; but their implementation is reasonable because their numerical accuracy is higher than that of the second-order scheme.

Keywords: Shallow water equations, Compact MacCormack scheme, Numerical accuracy, Runge-Kutta.