

## A Novel Method for Mathematical Modeling of the Skeletal System of the Human Body: Incorporating the Kinematic Characteristics of Biological Joints and the Effects of Complex Kinematic Chains of the Skeletal System

H. Ehsani<sup>1</sup>, M. Rostami<sup>2\*</sup>, M. Parnianpour<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Ph.D Candidates, Biomechanic Department, Biomedical Engineering Faculty, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

<sup>2</sup>Associate Professor, Biomechanic Department, Biomedical Engineering Faculty, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

<sup>3</sup>Adjunct Professor, Mechanical Engineering Department, Sharif University of Technology

Receipt in the online submission system 6 January 2016, received in revised form 7 February 2016, accepted 21 April 2016

### Abstract

In the current study, a novel method for deriving the governing equations of the skeletal system of the human body has been presented. In this method, a novel approach for incorporating the kinematic characteristics of biological joints and also the effects of complex kinematic chains of the skeletal system has been proposed. The suggested method while utilizing the calculus of matrix-valued functions, derives the governing equations of the skeletal system in the form of ordinary differential equations. Moreover, since the formulations were presented in a recursive fashion, this paper suggests a computationally efficient algorithm to derive the differential equations of motion for the skeletal system. In order to examine the validity of the proposed formulations, a benchmark mechanism with three closed-loop kinematic constraints were considered. We compared the results obtained from our formulations with the outcomes presented in other studies and validated the proposed formulations. Besides, in order to investigate the application of the suggested method in simulation of the skeletal system of the human body, dynamical modeling of the shoulder rhythm was taken into consideration. Two models were employed for describing the shoulder rhythm: Original model and simplified model. The discrepancies observed between the outcomes of these two models delineate the necessity of using the original data for the shoulder rhythm. While the limitations of the available formulations have compelled the researchers to employ the simplified model for the shoulder rhythm, with the method we propose in this study this problem is obviated.

**Key words:** *skeletal system, mathematical modeling, shoulder rhythm*

---

#### Corresponding author

Address: Biomechanic Department, Biomedical Engineering Faculty, Amirkabir university of Technology, P.O. Box: 11365-9567, Tehran, Iran  
Tel: +98-21-64542361  
Fax: +98-21-66468186  
E-mail: rostami@aut.ac.ir

## روشی نوین برای مدل‌سازی ریاضی سیستم اسکلتی بدن انسان: لحاظ نمودن ویژگی‌های سینماتیکی مفاصل زیستی و اثر زنجیره‌های سینماتیکی پیچیده‌ی سیستم اسکلتی

حسین احسانی<sup>۱</sup>، مصطفی رستمی<sup>۲\*</sup>، محمد پرنیان‌پور<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی پزشکی، گروه بیومکانیک، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

<sup>۲</sup> دانشیار، گروه بیومکانیک، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

<sup>۳</sup> استاد مدعو، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

تاریخ ثبت در سامانه: ۱۳۹۴/۱۰/۱۶، بازنگری: ۱۳۹۴/۱۱/۱۸، پذیرش قطعی: ۱۳۹۵/۲/۲

### چکیده

در مطالعه‌ی حاضر، روشی نوین برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر سیستم اسکلتی بدن انسان ارائه شده‌است. در این روش، رویکردی نوین برای وارد کردن ویژگی‌های سینماتیکی مفاصل زیستی و همچنین اثر زنجیره‌های پیچیده‌ی سینماتیکی سیستم اسکلتی در معادلات حرکت ارائه شده‌است. روش پیشنهادی در این مقاله با استفاده از حساب دیفرانسیل توابع ماتریسی، معادلات حاکم بر سیستم اسکلتی را به‌صورت معادلات دیفرانسیل معمولی تحصیل می‌کند. علاوه بر این، از آنجا که معادلات حاصل به‌صورت بازگشتی ارائه شده‌اند، این روش برای به‌دست آوردن معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم اسکلتی بدن انسان، رویکردی کارا از نظر محاسباتی پیشنهاد می‌کند. به‌منظور بررسی صحت روابط پیشنهادشده در این مقاله، مکانیزمی استاندارد شامل سه حلقه‌ی سینماتیکی بسته موردتوجه قرار گرفت. نتایج حاصل از حل دینامیک مستقیم این مکانیزم با استفاده از روش پیشنهادی، با نتایج ارائه‌شده در سایر مراجع معتبر مقایسه شدند و روش پیشنهادی صحت‌سنجی شد. به‌علاوه، به‌منظور بررسی کاربرد روش پیشنهادی در شبیه‌سازی سیستم اسکلتی بدن انسان، مدل‌سازی دینامیکی کمربند شانه‌ای در حضور ریتم شانه در دستور کار قرار گرفت. برای توصیف ریاضی ریتم شانه از دو مدل ریاضی استفاده شد: مدل اصلی و مدل ساده‌شده. تفاوت میان نتایج شبیه‌سازی این دو مدل بر ضرورت استفاده از داده‌های آزمایشگاهی اصلی برای مدل‌سازی ریتم شانه تأکید می‌کند. از آنجا که علت علاقه‌مندی محققان به استفاده از داده‌های ساده‌شده‌ی ریتم شانه ناشی از محدودیت در فرمول‌های موجود برای مدل‌سازی سیستم اسکلتی می‌شود، با استفاده از روش پیشنهادی در این مقاله این مشکل مرتفع می‌گردد.

کلیدواژه‌ها: سیستم اسکلتی، مدل‌سازی ریاضی، ریتم شانه

\* نویسنده مسئول

نشانی: آزمایشگاه آنالیز حرکت، گروه بیومکانیک، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران، کد پستی: ۹۵۶۷-۱۱۳۶۵

تلفن: +۹۸(۲۱)۶۴۵۴۲۳۶۱

دورنگار: +۹۸(۲۱) ۶۶۴۶۸۱۸۶

پست الکترونیکی: rostami@aut.ac.ir

## ۱- مقدمه

به دو مختصه‌ی تعمیم‌یافته (صفحه‌ی الیوشن<sup>۸</sup> و زاویه‌ی الیوشن<sup>۹</sup>)، که تحت عنوان ریتم کمربند شانه‌ای شناخته می‌شود، در مطالعات گذشته بحث شده‌است [۸-۱۱]. این وابستگی، ناشی از دوران گلهوهمرال<sup>۱۰</sup> و نیز حلقه‌ی سینماتیکی بسته میان قفسه‌سینه، ترقوه و کتف می‌شود [۱۰]. علاوه بر ریتم کمربند شانه‌ای، حرکت جفت‌شده‌ی میان ستون فقرات و استخوان لگن در صفحه‌ی سهمی<sup>۱۱</sup> (که تحت عنوان ریتم کمر-لگن شناخته می‌شود) به‌صورت آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار گرفته‌است. در همین راستا، می‌توان به وابستگی دوران ساکرال<sup>۱۲</sup> به دوران تنه<sup>۱۳</sup> و نیز زاویه‌ی خم و راست کردن زانو اشاره نمود [۱۲].

به‌منظور ایجاد مدل‌های ریاضی از سیستم اسکلتی بدن انسان که به حالت یا شرایط واقعی این سیستم نزدیک باشند، در نظر گرفتن اطلاعات آزمایشگاهی ذکر شده در معادلات حاکم بر این سیستم امری ضروری است. در این راستا، می‌توان مطالعات پیشین را به سه گروه تقسیم کرد. در گروه اول، تنها شرایط استاتیکی و یا شبه-استاتیکی مورد توجه قرار می‌گیرد. برای مثال، یاماگوچی و زیجک [۲] با وارد کردن اطلاعات آزمایشگاهی مربوط به مفاصل درشت‌نی-ران و کشکک-ران در مدل ریاضی مفصل زانو، بازوی گشتاور ماهیچه‌های عضلات چهارسررانی را تخمین زدند. علاوه بر این، می‌توان به پژوهش انجام‌شده توسط کارلسون و پیترسون [۱۳] اشاره کرد. آن‌ها با استفاده از داده‌های سینماتیکی ارائه‌شده توسط هوگفوس و همکارانش در [۸] برای ریتم شانه، مدلی ریاضی برای تخمین نیروهای عضلانی در مفصل شانه در موقعیت‌های استاتیکی ارائه کردند.

در گروه دوم، محققان با در نظر گرفتن فرضیات ساده‌کننده به معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم اسکلتی دست یافتند. می‌توان به مطالعه‌ی اندرسون و پندی [۱۴] اشاره کرد. در این پژوهش، مفصل زانو به‌صورت یک مفصل لولایی ساده با یک درجه‌ی آزادی در نظر گرفته شده و از لغزش‌های موجود در

سیستم اسکلتی بدن انسان را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از اجسام صلب متصل به هم در نظر گرفت، که در آن اعضای این سیستم (یعنی استخوان‌ها) از طریق مفاصل زیستی به یکدیگر متصل شده‌اند و زنجیره‌های پیچیده‌ی سینماتیکی را ایجاد می‌کنند. مدل‌سازی مفاصل زیستی با استفاده از مفاصل ایده‌آل مکانیکی (مانند مفصل لولا برای زانو، مفصل یونیورسال<sup>۱</sup> برای آرنج و مفصل گوی و کاسه برای لگن) و همچنین صرف‌نظر کردن از زنجیره‌های سینماتیکی پیچیده (مانند ریتم کمربند شانه‌ای) به روش‌های ریاضی ساده و سراسر برای مدل‌سازی سیستم اسکلتی بدن انسان منجر می‌شود؛ اما صحت نتایج حاصل از این مدل‌ها همواره با سؤال و تردید روبه‌رو است.

ویژگی‌های سینماتیکی مفاصل زیستی با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی قابل‌استخراج است. برای مثال، لغزش میان انتهای پروکسیمال<sup>۲</sup> استخوان درشت‌نی<sup>۳</sup> و انتهای دیستال<sup>۴</sup> استخوان ران<sup>۵</sup> در مفصل درشت‌نی-ران<sup>۶</sup> برحسب زاویه‌ی خم و راست شدن زانو به شکل ریاضی توصیف شده‌است [۱-۳]. علاوه بر این، جهت‌گیری و موقعیت مفصل کشکک-ران<sup>۷</sup> به‌صورت توابعی هموار از زاویه‌ی زانو بیان می‌شوند [۴]. همچنین، محققان با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی موفق شده‌اند حرکت مرکز آنی دوران در مفصل آرنج را به‌صورت کمی بیان کنند [۵]. تحقیقات گذشته نیز نشان داده شده‌است که مجموعه‌ی مفصل قوزک دارای یک درجه‌ی آزادی در راستای یک مسیر مشخص است [۶، ۷].

روش‌های آزمایشگاهی همچنین برای شناسایی روابط سینماتیکی میان اعضای از بدن، که یک زنجیره‌ی سینماتیکی پیچیده را تشکیل می‌دهند، مورد استفاده قرار گرفته‌اند. به‌عنوان مثال، وابستگی جهت‌گیری فضایی استخوان‌های ترقوه و کتف

<sup>۸</sup> Plane of elevation<sup>۹</sup> Elevation Angle<sup>۱۰</sup> Glenohumeral<sup>۱۱</sup> Sagittal plane<sup>۱۲</sup> Sacral<sup>۱۳</sup> Torso<sup>۱</sup> Universal joint<sup>۲</sup> Proximal<sup>۳</sup> Tibia<sup>۴</sup> Distal<sup>۵</sup> Femur<sup>۶</sup> Tibiofemoral<sup>۷</sup> Patellofemoral

مشکل، روش‌های پایدار کننده برای حل عددی این معادلات پیشنهاد شده‌است [۲۴، ۲۵]. اگرچه این موضوع قابل اجرا است، اما یافتن ضرایب مناسب برای معادلات پایدار کننده امری دشوار و بسیار اساسی است [۲۳]. علاوه بر این، این روش به لحاظ محاسباتی بسیار پرهزینه است؛ به‌خصوص اگر تعقیب مسیر و یا بهینه‌سازی دینامیک مطلوب موضوع یک مسئله اسکلتی-عضلانی باشد [۲۶].

با توجه به ساختار ویژه سیستم اسکلتی بدن انسان (مفاصل زیستی و وجود زنجیره‌های سینماتیکی پیچیده) و در نظر گرفتن مطالعات موجود، واضح است که ارائه‌ی روش‌های نوین برای استخراج معادلات توصیف کننده‌ی سیستم اسکلتی بدن انسان برای متخصصان فعال در حیطه‌ی حرکت‌شناسی امری مفید و ضروری است.

در این مطالعه، روشی نوین و کارآمد از نظر محاسباتی برای استخراج معادلات توصیف کننده‌ی سیستم اسکلتی بدن انسان ارائه می‌شود. در این روش، خواص و ویژگی‌های سینماتیکی مفاصل زیستی و نیز زنجیره‌های سینماتیکی پیچیده‌ی بدن انسان در به‌دست آوردن معادلات حرکت دخیل هستند. برخلاف مطالعات ذکر شده در گروه سوم بند قبل، در روش ارائه شده در این مطالعه معادلات حرکت سیستم اسکلتی تنها به‌صورت معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل می‌شوند. در نتیجه، مشکلات ذکر شده در رابطه با معادلات دیفرانسیلی-جبری ایجاد نمی‌شوند. کاربرد این روش پیشنهادی در مدل‌سازی سیستم اسکلتی بدن انسان با مدل‌سازی ریتم حرکتی مفصل شانه در این مقاله مورد نظر قرار دارد.

در این تحقیق، به‌منظور به‌دست آوردن معادلات حرکت از حساب دیفرانسیل توابع ماتریسی استفاده می‌شود. تعاریف و خواص مربوط به این موضوع، پیش از این توسط نویسندگان این مقاله در مطالعه‌ی دیگر [۲۷] بنیان‌گذاری شده‌است؛ اما با توجه به میزان وابستگی مطالب مقاله‌ی حاضر به این خواص، در پیوست به اجمال به بررسی این موضوع پرداخته شده‌است. در ادامه‌ی این مقاله، ابتدا در بخش ۲ فرمول‌های ریاضی اساسی بنیان‌گذاری می‌شوند. در ادامه و در همین بخش با استفاده از یک مسئله‌ی استاندارد، صحت

احسانی، روشی نوین برای مدل‌سازی ریاضی سیستم اسکلتی بدن انسان مفصل درشت‌نی-ران و نیز مفصل کشکک-ران به‌طورکلی صرف‌نظر شده‌است. می‌توان به مطالعه‌ی هولزبار و همکاران [۱۵] در این گروه نیز اشاره نمود، که در آن یک مدل ۳-بعدی اسکلتی-عضلانی از بالاتنه انسان ارائه شده‌است. در این مقاله، به‌منظور مدل‌سازی ریتم کمربند شانه‌ای، اطلاعات آزمایشگاهی ارائه شده توسط دی‌گروت و برند [۱۰] برای این زنجیره‌ی سینماتیکی به‌صورت ساده شده مورد استفاده قرار گرفته‌است. همان‌طور که پیش از این نیز اشاره شد، جهت‌گیری فضایی استخوان‌های ترقوه و کتف تابعی از دو مختصه‌ی تعمیم‌یافته هستند. در حالی که در مطالعه‌ی هولزبار و همکاران، به دلیل محدودیت‌های موجود در نرم‌افزار سیم<sup>۱</sup> [۱۶] وابستگی میان جهت‌گیری این دو استخوان به صفحه‌ی الویشن نادیده گرفته شد و این جهت‌گیری‌ها تنها به صورت تابعی از زاویه‌ی الویشن لحاظ گردید. به‌عنوان مثالی دیگر از مطالعاتی که در این گروه جای می‌گیرند، لازم است که مطالعه‌ی چادویک و همکاران [۱۷] از نظر گذراننده شود. این مطالعه نیز به مدل‌سازی اندام فوقانی اختصاص داشت و برای رهایی از مشکلات ناشی از مدل‌سازی ریتم کمربند شانه‌ای، محققان استخوان کتف را ثابت فرض نمودند.

در گروه سوم، مشاهدات آزمایشگاهی به شکل قیود جبری لحاظ شده و در نهایت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی-جبری برای توصیف ریاضی سیستم اسکلتی در-نظر گرفته می‌شود. مطالعات موسنت و همکاران [۱۸]، دوماس و همکاران [۱۹] و بیبرو و همکاران [۲۰] برای مدل‌سازی اندام تحتانی، گارنر و پندی [۲۱]، کوانتال و همکاران [۲۲] و دی‌سایو و همکاران [۱۶] برای مدل‌سازی اندام فوقانی، نمونه‌هایی از مطالعات این گروه هستند. اگرچه با استفاده از این روش می‌توان مشاهدات آزمایشگاهی را در توصیف ریاضی سیستم اسکلتی در نظر گرفت، اما حل عددی معادلات دیفرانسیلی-جبری حاصل با مشکلات عدیده‌ای همراه است. معادلات جبری باید در طول زمان شبیه‌سازی برآورده شوند و با گذشت هر چه بیشتر از زمان شبیه‌سازی بیشتر، به دلیل انتشار و تجمع خطای عددی تخطی از قیود به مشکلی بسیار بزرگ تبدیل می‌شود [۲۳]. به همین دلیل برای رفع این

<sup>۱</sup> SIMM (MusculoGraphics, Evanston, IL, USA)

همچنین  $Anc(\cdot)$  عملگری است که با استفاده از آن، عدد شناسه‌ی کلیه‌ی اجداد یک جسم متحرک تحصیل می‌شود. در ادامه‌ی این بخش، ابتدا روابط سینماتیکی اساسی بنیان‌گذاری می‌شوند و سپس با استفاده از اصل کار مجازی معادلات دیفرانسیل حرکت تحصیل می‌شوند.

### ۲-۱- سینماتیک

یک دستگاه مختصات متعامد راست‌گرد به هر یک از اجسام تخصیص داده می‌شود. هر دستگاه مختصات محلی نسبت به دستگاه مختصات عضو والد خود، با استفاده از دو بردار یکه و دو پارامتر نظیر با هر یک از این بردارها تعریف می‌شود. موقعیت دستگاه مختصات  $i$  ام نسبت به دستگاه والد خود، با یک انتقال به اندازه‌ی  $d_i$  در راستای بردار یکه‌ی  $\mathbf{V}_{d_i}$  حاصل می‌شود. جهت‌گیری این دستگاه نیز با یک دوران به اندازه‌ی  $\theta_i$  در جهت بردار یکه‌ی  $\mathbf{V}_{\theta_i}$  به دست می‌آید. اگر مفصل میان جسم  $i$  ام و والد آن از نوع لولایی باشد،  $\theta_i$  متغیر مفصلی است و  $d_i$  یک ثابت است. این در حالی است که اگر این مفصل از نوع لغزشی باشد، آنگاه عکس این موضوع برقرار است. موقعیت و جهت‌گیری دستگاه مختصات  $i$  ام نسبت به والد آن با استفاده از یک ماتریس انتقال همگن  $4 \times 4$  که با  ${}^{pr(i)}\mathbf{A}_4$  نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$${}^{pr(i)}\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} {}^{pr(i)}\mathbf{A} & d_i \mathbf{V}_{d_i} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

در این رابطه  ${}^{pr(i)}\mathbf{A}$  ماتریس دوران دو دستگاه نظیر است و با استفاده از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$${}^{pr(i)}\mathbf{A} = \mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{V}}_{\theta_i} \sin \theta_i + 2(\tilde{\mathbf{V}}_{\theta_i})^2 \sin^2 \frac{\theta_i}{2} \quad (2)$$

در این رابطه  $\tilde{\mathbf{V}}_{\theta_i}$  ماتریس پادمتقارن نظیر با بردار  $\mathbf{V}_{\theta_i}$  است. برای تعیین ماتریس تبدیل یک دستگاه مختصات محلی مانند  $i$ ، نسبت به دستگاه مختصات اینرسی نیز داریم:

$${}^0\mathbf{A}_4 = \prod_{j \in Anc(i) \cup \{i\}} {}^{pr(j)}\mathbf{A}_4 \quad (3)$$

فرمول‌ها و روابط پیشنهادی در این مقاله را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در انتهای بخش ۲، کاربرد روابط حاصل را در مدل‌سازی کمربند شانه‌ای نشان می‌دهیم. در بخش سوم نیز ارائه، بحث و بررسی نتایج در دستور کار قرار دارد.

### ۲- مواد و روش‌ها

در این مطالعه، سیستم مورد بررسی متشکل از  $n_b$  جسم صلب متحرک فرض می‌شود؛ این اجسام توسط مفاصل تک درجه‌ی آزادی (لولایی و لغزشی) به یکدیگر و همچنین به زمین (به عنوان محل قرارگیری دستگاه اینرسی) مفصل شده‌اند. به عبارت دیگر، هر یک از مفاصل دارای یک متغیر مفصلی است، که با  $f_i$  برای  $i=1,2,\dots,n_j$  نمایش داده می‌شوند.  $n_j$  بیان‌کننده‌ی تعداد مفاصل موجود در سیستم است. به دلیل وجود قیود سینماتیکی، حداقل تعداد مختصات تعمیم یافته‌ی موردنیاز برای مشخص کردن وضعیت سینماتیکی سیستم، که با  $n_q$  نمایش داده می‌شود، از تعداد متغیرهای مفصلی کمتر است. فرض کنید  $\mathbf{q} = \{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{n_q}\}^T$  شامل کلیه‌ی مختصات تعمیم یافته‌ی موردنیاز برای توصیف مسئله باشد؛ با فرض آنکه کلیه‌ی قیود حاکم بر مسئله هولونومیک هستند، می‌توان متغیرهای مفصلی را به صورت توابعی هموار از بردار مختصات تعمیم یافته به صورت  $f_i = f_i(\mathbf{q})$  برای  $i=1,2,\dots,n_j$  بیان کرد. برای یک مفصل نمونه مانند  $i$ ، بردار گرادیان و ماتریس هشین متغیرهای مفصلی نسبت به بردار مختصات تعمیم یافته به ترتیب به صورت  $\nabla f_i$  و  $\mathbf{H}_i$  نمایش داده می‌شوند. این توابع مفصلی با استفاده از نتایج و مشاهدات آزمایشگاهی از سیستم اسکلتی حاصل می‌شوند و در نتیجه یافتن بردار گرادیان و ماتریس هشین نظیر آن‌ها میسر است. نحوه‌ی شماره‌گذاری اجسام موجود در سیستم با توجه به قراردادهای ذکر شده در [۲۸] صورت پذیرفته است. بنابراین زمین با شماره‌ی "0" شناخته می‌شود و به هر یک از اعضای متحرک سیستم از مجموعه‌ی  $\{1,2,\dots,n_b\}$ ، مطابق با قواعد نام‌گذاری توصیف شده توسط فدرستون [۲۸]، یک شناسه‌ی عددی تعلق می‌گیرد. به منظور به دست آوردن عدد شناسه‌ی مربوط به والد یک جسم از عملگر  $pr(\cdot)$  استفاده می‌شود.

که در آن:

$$\mathbf{D}'_i = \frac{\partial^2 \mathbf{B}_i}{\partial \mathbf{q}^2} \quad (11)$$

و

$$\dot{\mathbf{q}}^{[2]} = \dot{\mathbf{q}} \otimes \dot{\mathbf{q}} \quad (12)$$

همان‌طور که در روابط (۷) و (۱۰) مشخص است، برای به-دست آوردن سرعت و شتاب یک نقطه‌ی دلخواه از سیستم، لازم است که مشتق جزئی اول و مشتق جزئی دوم ماتریس  $\mathbf{B}_i$  نسبت به بردار مختصات تعمیم‌یافته محاسبه شود. برای این منظور روابط بازگشتی را استخراج می‌کنیم.

با توجه به این‌که  $\mathbf{B}_i = {}^0_i \mathbf{A}_4^T = {}^{pr(i)}_i \mathbf{A}_4^T {}^{pr(i)}_i \mathbf{A}_4^T$  و با استفاده از خاصیت ۱ و خاصیت ۲ در پیوست، پیش از این در [۲۷] نشان داده‌ایم:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \mathbf{q}} = \left( {}^i \hat{\mathbf{A}}_4^T {}^0_i \mathbf{A}_4^T \right) \otimes \nabla f_i + \left( {}^{pr(i)}_i \mathbf{A}_4^T \otimes \mathbf{I}_{n_q} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{B}_{pr(i)}}{\partial \mathbf{q}} \right) \quad (13)$$

که در آن  ${}^i \hat{\mathbf{A}}_4^T$  ماتریس مفصل نام است. اگر این مفصل لولایی باشد، داریم:

$${}^i \hat{\mathbf{A}}_4 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_{\theta_i} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

و برای یک مفصل لغزشی خواهیم داشت:

$${}^i \hat{\mathbf{A}}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & {}^{pr(i)}_i \mathbf{A} \mathbf{V}_{d_i} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

با مشتق‌گیری از دو سمت رابطه‌ی (۱۳) نسبت به بردار مختصات تعمیم‌یافته، می‌توان به رابطه‌ی بازگشتی برای  $\mathbf{D}'_i$  دست‌یافت. برای این منظور لازم است که از خاصیت ۳ و ۱ مشتق‌گیری ماتریسی در پیوست استفاده کنیم. واضح است که در این رابطه علاوه بر بردار گرادیان مفصل، ماتریس هشین آن، یعنی  $\mathbf{H}_i$ ، نیز نقش مهمی را ایفا می‌کند.

## ۲-۲- دینامیک

ذره‌ای به جرم  $dm_i$  را واقع در نقطه‌ی دلخواه  $p$  از جسم  $i$  ام در نظر می‌گیریم. به‌سادگی می‌توان کار مجازی متناظر با نیروی اینرسی را برای این ذره محاسبه کرد. با انتگرال‌گیری از این

موقعیت یک نقطه‌ی دلخواه مانند  $p$  که بر روی جسم  $i$  ام قرار دارد، نسبت به دستگاه مختصات اینرسی (یعنی  ${}^0 \mathbf{r}_p^i$ ) عبارت است از:

$${}^0 \mathbf{r}_p^i = {}^0_i \mathbf{A}_4 {}^i \mathbf{r}_p \quad (4)$$

که در آن  ${}^i \mathbf{r}_p$  موقعیت نقطه‌ی  $p$  نسبت به دستگاه مختصات محلی است. با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۴) نسبت به زمان خواهیم داشت:

$${}^0 \mathbf{v}_p^i = \frac{d {}^0_i \mathbf{A}_4}{dt} {}^i \mathbf{r}_p \quad (5)$$

از آنجاکه  ${}^0_i \mathbf{A}_4$  یک تابع ماتریسی برحسب بردار مختصات تعمیم‌یافته است، برای محاسبه‌ی مشتق آن نسبت به زمان از خاصیت ۴ حساب دیفرانسیل توابع ماتریسی (پیوست) را ببینید) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d {}^0_i \mathbf{A}_4}{dt} = \left( \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T (\mathbf{I}_4 \otimes \dot{\mathbf{q}}) \quad (6)$$

در این رابطه، به‌منظور اختصار در علائم  $\mathbf{B}_i = \left( {}^0_i \mathbf{A}_4 \right)^T$  فرض شده‌است. با جای‌گذاری رابطه‌ی (۶) در معادله‌ی (۵) و به‌کارگیری ویژگی ضرب-مخلوط<sup>۱</sup> برای حاصل‌ضرب کرونکر خواهیم داشت:

$${}^0 \mathbf{v}_p^i = \mathbf{D}'_i \left( {}^i \mathbf{r}_p \otimes \dot{\mathbf{q}} \right) \quad (7)$$

که در آن،  $\mathbf{D}_i = \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \mathbf{q}}$  است. با در نظر گرفتن خاصیت ۴، می‌توان رابطه‌ای مشابه را برای تغییر شکل مجازی نقطه‌ی  $p$  یعنی  $\delta {}^0 \mathbf{r}_p^i$ ، به‌دست آورد. به عبارت دیگر داریم:

$$\delta {}^0 \mathbf{r}_p^i = \mathbf{D}'_i \left( {}^i \mathbf{r}_p \otimes \mathbf{I}_n \right) \delta \mathbf{q} \quad (8)$$

لازم به ذکر است که در به‌دست آوردن این رابطه از ویژگی ضرب-مخلوط حاصل‌ضرب کرونکر نیز استفاده کرده‌ایم. با مشتق‌گیری از دو سمت رابطه‌ی (۷) نسبت به زمان خواهیم داشت:

$${}^0 \mathbf{a}_p^i = \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \left( {}^i \mathbf{r}_p \otimes \dot{\mathbf{q}} \right) \right) \quad (9)$$

با ساده‌سازی سمت راست این معادله خواهیم داشت:

$${}^0 \mathbf{a}_p^i = \left( \mathbf{D}'_i \right)^T \left( {}^i \mathbf{r}_p \otimes \dot{\mathbf{q}}^{[2]} \right) + \mathbf{D}'_i \left( {}^i \mathbf{r}_p \otimes \ddot{\mathbf{q}} \right) \quad (10)$$

<sup>۱</sup> Mixed-product property



بسته و صریح این تانسور در [۲۹] ذکر شده است. با توجه به این نکته، خواهیم داشت:

$$\int_{R_i} (1^{st} \text{ part}) dm_i = \mathbf{D}_i^T \left[ \mathbf{J}_i \otimes (\ddot{\mathbf{q}} \delta \mathbf{q}^T) \right] \mathbf{D}_i \quad (21)$$

که در آن  $\mathbf{J}_i$  تانسور اینرسی تغییر یافته متناظر با جسم  $I$  است. با توجه به معادله (۲۱) و این نکته که  $\ddot{\mathbf{q}} \delta \mathbf{q}^T = \delta \mathbf{q} \ddot{\mathbf{q}}^T$  داریم:

$$\int_{R_i} \text{trace} [1^{st} \text{ part}] dm_i = \text{trace} \left[ \mathbf{D}_i^T \left( \mathbf{J}_i \otimes (\delta \mathbf{q} \ddot{\mathbf{q}}^T) \right) \mathbf{D}_i \right] \quad (22)$$

حال با استفاده از عملگر  $\text{vec}(\cdot)$ ، سمت راست معادله (۲۲) را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{trace} \left[ \mathbf{D}_i^T \left[ \mathbf{J}_i \otimes (\delta \mathbf{q} \ddot{\mathbf{q}}^T) \right] \mathbf{D}_i \right] = (\text{vec}(\mathbf{D}_i))^T \left( \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{J}_i \otimes (\delta \mathbf{q} \ddot{\mathbf{q}}^T) \right) \text{vec}(\mathbf{D}_i) \quad (23)$$

با به‌کارگیری ویژگی ضرب-مخلوط و شرکت‌پذیری حاصل ضرب کرونگر، سمت راست رابطه (۲۳) را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(\text{vec}(\mathbf{D}_i))^T \left( \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{J}_i \otimes (\delta \mathbf{q} \ddot{\mathbf{q}}^T) \right) \text{vec}(\mathbf{D}_i) = \xi_i \zeta_i \quad (24)$$

$$\xi_i = (\text{vec}(\mathbf{D}_i))^T \left( \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{J}_i \otimes \delta \mathbf{q} \right) \quad (25)$$

$$\zeta_i = (\mathbf{I}_{16} \otimes \ddot{\mathbf{q}}^T) \text{vec}(\mathbf{D}_i) \quad (26)$$

در ادامه با انجام عملیات لازم، روش جدا کردن  $\delta \mathbf{q}$  و  $\ddot{\mathbf{q}}$  را از سایر متغیرهای عبارت‌های (۲۵) و (۲۶) نشان می‌دهیم.

برای  $\xi_i$  داریم:

$$\xi_i = \left( \mathbf{I}_4 \otimes \left[ \mathbf{I}_4 \otimes \ddot{\mathbf{q}}^T \right] \right) \text{vec}(\mathbf{D}_i) \quad (27)$$

بنابراین:

$$\xi_i = \text{vec} \left( \left[ \mathbf{I}_4 \otimes \ddot{\mathbf{q}}^T \right] \mathbf{D}_i \right) \quad (28)$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\xi_i = \text{vec} \left( \left[ \mathbf{I}_4 \otimes \ddot{\mathbf{q}}^T \right] \mathbf{D}_i \right) \quad (29)$$

در نتیجه این عبارت به صورت زیر قابل بیان است:

کار مجازی بر روی کل جسم صلب، می‌توان رابطه‌ی زیر را برای کار مجازی متناظر با نیروی اینرسی جسم  $I$ ، یعنی  $\delta W_i^*$ ، به دست آورد:

$$\delta W_i^* = \int_{R_i} -\text{trace} \left[ {}^0 \mathbf{a}_p^i \left( \delta {}^0 \mathbf{r}_p^i \right)^T \right] dm_i \quad (16)$$

که در آن  $\text{trace}[\cdot]$  نمایش دهنده‌ی عملگر اثر یک ماتریس است. پیش از آنکه به محاسبه‌ی این انتگرال بپردازیم، ابتدا لازم است به این نکته توجه کنیم که با توجه به روابط (۸) و (۱۰) داریم:

$${}^0 \mathbf{a}_p^i \left( \delta {}^0 \mathbf{r}_p^i \right)^T = \underbrace{\mathbf{D}_i^T \left( {}^i \mathbf{r}_p \otimes \dot{\mathbf{q}} \right) \left( {}^i \mathbf{r}_p^T \otimes \delta \mathbf{q}^T \right) \mathbf{D}_i}_{1^{st} \text{ part}} + \underbrace{\left( \mathbf{D}_i^T \right)^T \left( {}^i \mathbf{r}_p \otimes \dot{\mathbf{q}}^{[2]} \right) \left( {}^i \mathbf{r}_p^T \otimes \delta \mathbf{q}^T \right) \mathbf{D}_i}_{2^{nd} \text{ part}} \quad (17)$$

با استفاده از ویژگی ضرب-مخلوط داریم:

$${}^0 \mathbf{a}_p^i \left( \delta {}^0 \mathbf{r}_p^i \right)^T = \underbrace{\mathbf{D}_i^T \left[ \left( {}^i \mathbf{r}_p \ {}^i \mathbf{r}_p^T \right) \otimes \left( \dot{\mathbf{q}} \delta \mathbf{q}^T \right) \right] \mathbf{D}_i}_{1^{st} \text{ part}} + \underbrace{\left( \mathbf{D}_i^T \right)^T \left[ \left( {}^i \mathbf{r}_p \ {}^i \mathbf{r}_p^T \right) \otimes \left( \dot{\mathbf{q}}^{[2]} \delta \mathbf{q}^T \right) \right] \mathbf{D}_i}_{2^{nd} \text{ part}} \quad (18)$$

با توجه به رابطه (۱۸)، می‌توان رابطه (۱۶) را به روش زیر بازنویسی کرد:

$$\delta W_i^* = - \int_{R_i} \text{trace} [1^{st} \text{ part}] dm_i - \int_{R_i} \text{trace} [2^{nd} \text{ part}] dm_i \quad (19)$$

عملیات ساده‌سازی را با محاسبه‌ی انتگرال بخش اول آغاز می‌کنیم. با توجه به خطی بودن عملگرهای انتگرال و اثر ماتریس، می‌توان گفت:

$$\int_{R_i} \text{trace} [1^{st} \text{ part}] dm_i = \text{trace} \left[ \int_{R_i} (1^{st} \text{ part}) dm_i \right] \quad (20)$$

با توجه به عبارت (۱۸)، مشخص است که تنها بخشی که لازم است انتگرال آن محاسبه شود، عبارت  ${}^i \mathbf{r}_p \ {}^i \mathbf{r}_p^T$  است. انتگرال این عبارت نسبت به متغیر جرم یک ماتریس  $4 \times 4$  متقارن است، که حاوی اطلاعات مربوط به توزیع جرم جسم  $I$  است و تانسور اینرسی تغییر یافته نامیده می‌شود. شکل

وزن، یعنی  $\delta W_i^{mg}$ ، برای جسم  $i$ ام عبارت است از:

$$\delta W_i^{mg} = \delta \mathbf{q}^T m_i \left( {}^i \mathbf{r}_{cm} \otimes \mathbf{I}_{n_q} \right) \mathbf{D}_i \mathbf{g} \quad (38)$$

که در آن  $\mathbf{g}$  بیانگر بردار شتاب گرانش نسبت به دستگاه مختصات اینرسی است و  $m_i$  جرم جسم  $i$ ام را نشان می‌دهد.

در رابطه با کار مجازی نیروهای عضلانی، یعنی  $\delta W_i^{mt}$ ، نیز داریم:

$$\delta W_i^{mt} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{R} \mathbf{F}_{mt} \quad (39)$$

که در آن  $\mathbf{R}$  ماتریس بازوی گشتاور نظیر نیروهای عضلانی است. پیش از این، در [۲۷] توسط نویسندگان مقاله‌ی حاضر، یک شکل بسته برای این ماتریس استخراج گردید. بنابراین این موضوع مجدداً مورد بررسی قرار نمی‌گیرد. در فرمول بالا،  $\mathbf{F}_{mt}$  نیز برداری است که شامل کلیه‌ی نیروهای ماهیچه‌ی تاندون حاضر در سیستم می‌شود.

در نهایت کل کار مجازی جسم  $i$ ام به قرار زیر حاصل می‌شود:

$$\delta W_i = \delta W_i^* + \delta W_i^{mg} + \delta W_i^{mt} \quad (40)$$

با در نظر گرفتن کل سیستم و به‌کارگیری اصل کار مجازی، معادلات دیفرانسیل سیستم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{F}_{mt} \quad (41)$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n_b} \mathbf{M}_i \quad (42)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n_b} \mathbf{N}_i \quad (43)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n_b} \mathbf{G}_i \quad (44)$$

### ۳-۲- صحت‌سنجی روابط

به‌منظور بررسی صحت روابط استخراج‌شده در بخش قبل، مکانیزم حلقه‌ی بسته با تک درجه‌ی آزادی ارائه‌شده در شکل ۱ موردنظر قرار گرفت. حل این مکانیزم در حالت دینامیک مستقیم، به‌عنوان یک مسئله‌ی استاندارد برای مقایسه‌ی روش‌های مختلف در به‌دست آوردن معادلات حرکت حاکم بر یک سیستم اجسام صلب در میان متخصصان این زمینه

$$\zeta_i = \left( \mathbf{D}_i^T \otimes \mathbf{I}_4 \right) \text{vec} \left( \mathbf{I}_4 \otimes \dot{\mathbf{q}}^T \right) \quad (30)$$

حال با اثر دادن عملگر  $\text{vec}(\cdot)$  بر روی حاصل ضرب کرونگر ماتریس همانی و ترانهاده‌ی بردار شتاب تعمیم‌یافته، خواهیم داشت:

$$\zeta_i = \left( \mathbf{D}_i^T \otimes \mathbf{I}_4 \right) \left( \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{U}_{n_q,4} \right) \mathbf{C}_1 \ddot{\mathbf{q}} \quad (31)$$

که

$$\mathbf{C}_1 = \text{vec}(\mathbf{I}_4) \otimes \mathbf{I}_{n_q} \quad (32)$$

در رابطه‌ی (۳۱)،  $\mathbf{U}_{n_q,4} \in \mathbb{R}^{4n_q \times 4n_q}$  یک ماتریس جایگشت است. برای تعریف این ماتریس به [۳۰] مراجعه شود.

مراحل ساده‌سازی برای  $\zeta_i$  کاملاً مشابه است. در این مورد نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\xi_i = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{C}_1^T \left( \mathbf{J}_i \otimes \mathbf{U}_{n_q,4}^T \right) \left( \mathbf{D}_i \otimes \mathbf{I}_4 \right) \quad (33)$$

در نهایت با جای‌گذاری روابط (۳۲) و (۳۳) در معادله‌ی (۲۴) و انجام پاره‌ای ساده‌سازی‌ها، به نتیجه بسیار مهم زیر دست می‌یابیم:

$$\int_{R_i} \text{trace} \left[ 1^{\text{st}} \text{ part} \right] dm_i = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}} \quad (34)$$

که

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{C}_1^T \left( \mathbf{J}_i \otimes \mathbf{U}_{n_q,4}^T \right) \left( \mathbf{D}_i \mathbf{D}_i^T \otimes \mathbf{I}_4 \right) \left( \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{U}_{n_q,4} \right) \mathbf{C}_1 \quad (35)$$

عبارت بالا سهم جسم  $i$ ام را در ماتریس جرم کل سیستم نمایش می‌دهد. در ادامه به توضیح بهتر این موضوع می‌پردازیم.

محاسبه‌ی انتگرال بخش دوم رابطه‌ی (۱۹) در اساس کاملاً مشابه بخش اول است. در رابطه با این انتگرال، با انجام عملیاتی مشابه به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\int_{R_i} \text{trace} \left[ 2^{\text{nd}} \text{ part} \right] dm_i = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}_i \dot{\mathbf{q}} \quad (36)$$

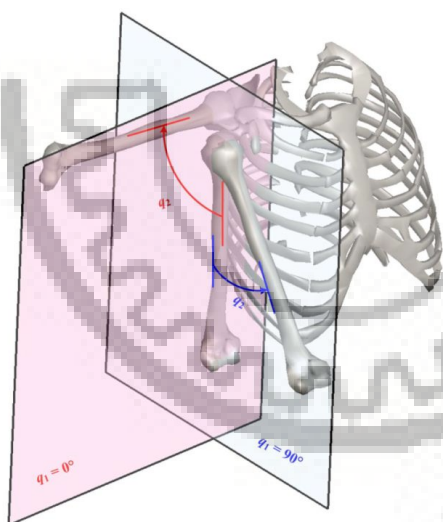
که در آن  $\mathbf{N}_i$  بردار حاوی اثرات کوریولیس و جانب مرکز است. در نتیجه، کار مجازی نیروی اینرسی برای جسم  $i$ ام به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\delta W_i^* = -\delta \mathbf{q}^T \left( \mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}_i \dot{\mathbf{q}} \right) \quad (37)$$

نیروهای خارجی وارد بر سیستم متشکل از نیروی وزن و نیروهای مجموعه ماهیچه-تاندون است. کار مجازی نیروی



اصلی» نام‌گذاری شده‌است، بر مبنای مدل رگرسیونی ارائه شده توسط دی‌گروت و برنرند [۱۰] است. مدل دوم، که به نام «مدل ساده‌شده» خوانده می‌شود، از پژوهش هولزبار و همکاران [۱۵] به اقتباس شده‌است. به دلیل محدودیت‌های موجود در نرم‌افزار سیم [۱۶]، هولزبار و همکارانش نتایج آزمایشگاهی ارائه شده توسط دی‌گروت و برنرند را ساده کرده و در این نرم‌افزار به مدل‌سازی ریاضی کمربند شانه‌ای مبادرت ورزیدند. نرم‌افزار سیم قادر است که هر مفصل را تنها به یک مختصه‌ی تعمیم‌یافته وابسته کند. در نتیجه، در این نرم‌افزار نمی‌توان جهت‌گیری فضایی استخوان‌های ترقوه و کتف را به دو مختصه‌ی تعمیم‌یافته‌ی موردنظر وابسته کرد. بنابراین در مدل ساده‌شده، جهت‌گیری فضایی این دو استخوان تنها به صورت توابعی از زاویه‌ی الویشن لحاظ شده‌اند.



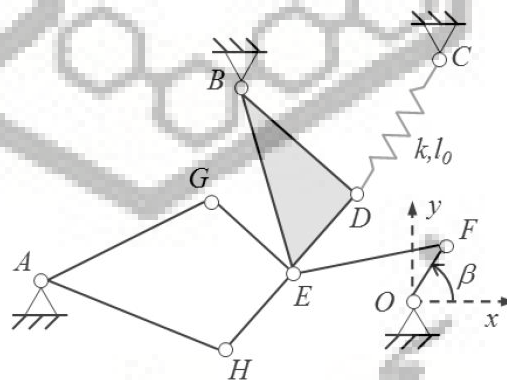
شکل (۲) - تعریف صفحه‌ی الویشن و زاویه‌ی الویشن به عنوان مختصات تعمیم‌یافته برای مکانیزم شانه. در این شکل صفحه‌ی الویشن در دو زاویه‌ی ۰ و ۹۰ درجه ترسیم شده است. در هر یک از این دو حالت، زاویه‌ی الویشن نظیر مشخص شده‌است. لازم به ذکر است که به جز استخوان بازو، باقی استخوان‌ها در حالت صفر بودن این دو مختصه ترسیم شده‌اند.

در مقاله‌ی حاضر برای هر دو مدل، محورهای مورد نیاز مفاصل (یعنی  $V_d$  و  $V_\theta$ ) از [۳۲] استخراج شدند و پارامترهای آنتروپومتریک (جرم اعضا، محل قرارگیری مرکز جرم و تانسور اینرسی اعضا) از [۲۲] اتخاذ گردید. دو حالت برای حرکت کمربند شانه‌ای در نظر می‌گیریم.

رواج دارد. تمامی اطلاعات سینماتیکی و ساختاری مکانیزم از [۳۱] اقتباس گردید. نتایج حل عددی این مکانیزم در بخش ۳ ارائه شده‌است.

#### ۴-۲- مدل‌سازی دینامیکی کمربند شانه‌ای

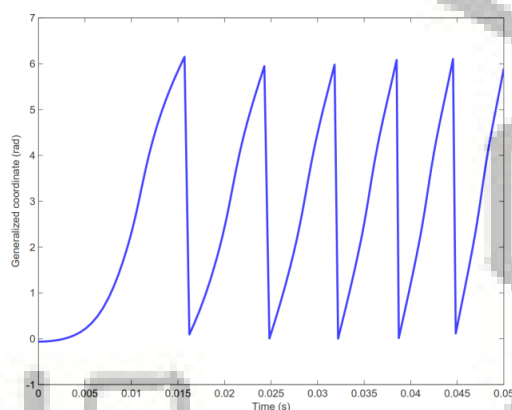
اتصال میان قفسه‌سینه (در نواحی قدامی و خلفی)، استخوان ترقوه و استخوان کتف یک زنجیره‌ی سینماتیکی پیچیده را ایجاد می‌کند، که تحت عنوان کمربند شانه‌ای شناخته می‌شود. مطالعات متعددی نشان داده‌اند که میان اعضای استخوانی این مکانیزم، آهنگ حرکتی مشخصی وجود دارد. با در نظر گرفتن این آهنگ، دو مختصه‌ی تعمیم‌یافته برای معرفی سینماتیک این مکانیزم پیشنهاد شده است. مختصه‌ی تعمیم‌یافته‌ی اول ( $q_1$ )، یعنی صفحه‌ی الویشن، و مختصه‌ی تعمیم‌یافته‌ی دوم ( $q_2$ )، یعنی زاویه‌ی الویشن، در شکل ۲ به تصویر کشیده شده‌اند. در مدلی که در اینجا برای این مکانیزم ارائه می‌شود، علاوه بر این دو مختصه‌ی تعمیم‌یافته، یک مختصه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سوم ( $q_3$ ) نیز برای لحاظ کردن دوران محوری استخوان بازو در نظر گرفته‌ایم.



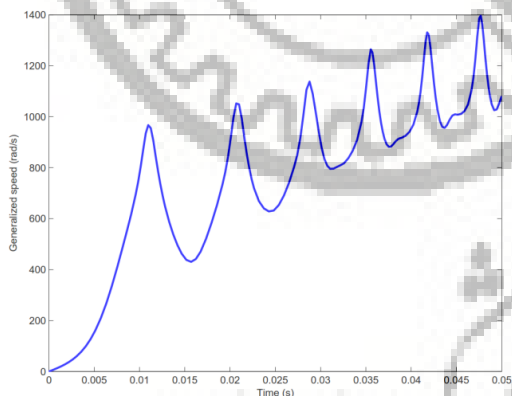
شکل (۱) - تصویر شماتیک مکانیزم استاندارد برای صحت‌سنجی روش توسعه داده‌شده در مقاله‌ی حاضر. این مکانیزم تنها دارای یک درجه‌ی آزادی است، که در اینجا زاویه‌ی عضو  $OF$  با خط افقی به عنوان مختصه‌ی تعمیم‌یافته مورد نیاز تعریف شده‌است. طول اتصالات، محل قرارگیری مرکز جرم، ممان اینرسی، ثابت و طول اولیه فنر و محل قرارگیری مفاصل با زمین، منطبق بر مسئله‌ی استاندارد در [۳۱] انتخاب شده‌اند.

در این مقاله، برای مدل ریاضی ریتم شانه از دو مدل ارائه شده در مقالات پیشین استفاده می‌کنیم. مدل اول، که به نام «مدل

برای بررسی صحت فرمول‌های ارائه‌شده در بخش ۲-۳، یک مسئله‌ی استاندارد در دینامیک مجموعه اجسام صلب حل می‌شود. نتایج حاصل از حل عددی این مکانیزم در شکل‌های ۴ و ۵ به تصویر کشیده شده‌است. این نتایج با آنچه در [۳۱] ارائه گردید، مقایسه شدند. خطای جذر متوسط مربع نتایج مقاله‌ی حاضر با موارد ارائه‌شده در این مرجع، برای مختصه-ی تعمیم‌یافته و سرعت تعمیم‌یافته به ترتیب برابر با  $10^{-6}$  و  $10^{-4}$  به دست آمدند.



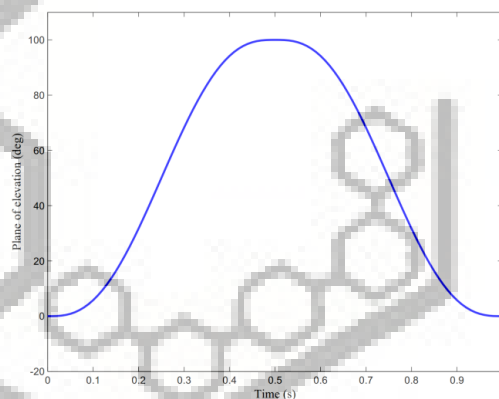
شکل (۴) - نمودار مختصه‌ی تعمیم‌یافته مکانیزم شکل (۱) در طول ۵ میلی‌ثانیه شبیه‌سازی دینامیک مستقیم



شکل (۵) - نمودار سرعت تعمیم‌یافته مکانیزم شکل (۱) در طول ۵ میلی‌ثانیه شبیه‌سازی دینامیک مستقیم

در بخش ۲-۴، به کاربرد روش پیشنهادی در این مقاله در مدل‌سازی مکانیزم کمر بند شانه‌ای بدن انسان پرداخته شد. گشتاور متناظر با هر یک از دو مختصه‌ی تعمیم‌یافته مربوط به ریتم شانه در هر یک از دو حالت در نظر گرفته‌شده برای حرکت، برای هر دو مدل مورد ارزیابی (مدل اصلی و مدل ساده‌شده) در شکل‌های (۶) و (۷) نمایش داده شده‌است.

احسانی، روشی نوین برای مدل‌سازی ریاضی سیستم اسکلتی بدن انسان همان‌طور که در شکل ۳ نمایش داده شده‌است، یک مسیر مطلوب برای صفحه‌ی الویشن در نظر گرفته شده‌است. به علاوه، یک مقدار ثابت ۳۰- درجه برای دوران محوری بازو فرض شده‌است. در حالت اول، یک مقدار ثابت ۱۰ درجه را برای زاویه‌ی الویشن فرض می‌کنیم. در حالت دوم نیز، مقدار این مختصه‌ی تعمیم‌یافته را برابر با ۹۰ درجه در نظر می‌گیریم. برای آنکه مکانیزم شانه بتواند این مسیرهای مطلوب را با کمینه خطای ممکن تعقیب کند، از الگوریتم کنترل گشتاور استفاده شد [۳۳]. با استفاده از روابط به دست آمده در بخش ۲-۲ و این روش کنترلی، گشتاور مورد نیاز برای به انجام رسیدن این حرکات در هر یک از دو مدل (مدل اصلی و مدل ساده‌شده) محاسبه شد. نتایج این محاسبات در بخش بعد ارائه شده‌است.



شکل (۳) - مسیر مطلوب برای صفحه‌ی الویشن در هر دو حالت در نظر گرفته‌شده برای حرکت کمر بند شانه‌ای

### ۳- یافته‌ها و بحث

در مطالعه‌ی حاضر با استفاده از روشی نوین، ویژگی‌های سینماتیکی مفصل زیستی و همچنین اثر زنجیره‌های پیچیده‌ی سینماتیکی سیستم اسکلتی در به دست آوردن معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم اسکلتی بدن انسان ارائه شد. روش پیشنهادی در این مقاله، معادلات حاکم بر سیستم اسکلتی را به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی تحصیل می‌کند. علاوه بر این، از آنجا معادلات حاصل به صورت بازگشتی ارائه شده‌اند، این روش رویکردی کارآمد از نظر محاسباتی برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل حرکتی سیستم اسکلتی بدن انسان پیشنهاد می‌کند.

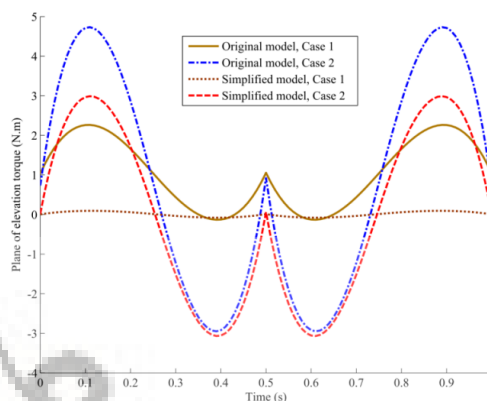
سیم استفاده شد؛ اما به دلیل محدودیت‌های موجود در این نرم‌افزار، مجبور به ساده‌سازی نتایج آزمایشگاهی ارائه‌شده توسط دی‌گروت و برند شدند. نکته قابل‌توجه در اینجا، بررسی اثر این ساده‌سازی بر روی خروجی‌های مدل دینامیکی کمربند شانه‌ای است؛ که این موضوع توسط هولزبار و همکارانش مورد توجه قرار نگرفت.

جدول (۱) - خطای RMS نرمال‌شده (NRMSE) و ضریب همبستگی میان گشتاور متناظر با صفحه‌ی الویشن و زاویه‌ی الویشن حاصل از مدل اصلی و مدل ساده‌شده. این دو کمیت برای نتایج این دو مدل در هر دو حرکت مطلوب در نظر گرفته‌شده در این مطالعه (حالت ۱ و حالت ۲) گزارش شده‌است.

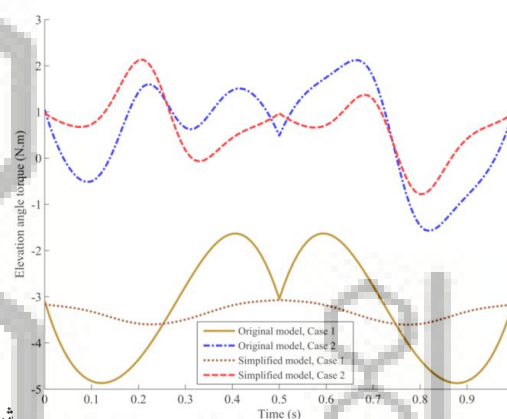
$r$		NRMSE		
		حالت ۲	حالت ۱	
0.9991	0.9985	0.1328	0.5488	گشتاور صفحه‌ی الویشن
		0.2184	0.3357	گشتاور زاویه‌ی الویشن
0.6246	0.4712			

روش ارائه‌شده در این مقاله، محدودیت ذکرشده در نرم‌افزار سیم را ندارد. بنابراین، در مدل اصلی ارائه‌شده برای کمربند شانه‌ای از اطلاعات آزمایشگاهی کامل ارائه‌شده توسط دی‌گروت و برند استفاده شده‌است. به‌منظور بررسی فرض ساده‌کننده‌ی هولزبار و همکارانش، مدل آزمایشگاهی استفاده‌شده توسط آن‌ها نیز، تحت عنوان مدل ساده‌شده، در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج ارائه‌شده در شکل‌های (۶) و (۷) و جدول (۱)، واضح است که در صورت غالب بودن اثر صفحه‌ی الویشن بر زاویه‌ی الویشن، نتایج مدل ساده‌شده از نتایج مدل اصلی فاصله می‌گیرد و در نتیجه اعتبار ساده‌سازی انجام‌شده در کار هولزبار و همکاران با خدشه روبه‌رو می‌شود.

همان‌طور که در مطالعه‌ی دی‌سایپو و همکاران [۱۶] نشان داده شده‌است، امکان وارد کردن روابط آزمایشگاهی ریتم شانه به‌صورت قید جبری در کنار معادلات حاکم بر سیستم اسکلتی نیز وجود دارد؛ اما هدف اصلی این مقاله ارائه‌ی روشی بود که در نهایت معادلات حرکت را به‌صورت



شکل (۶) - گشتاور متناظر با صفحه‌ی الویشن برای هر دو حالت حرکت با در نظر گرفتن مدل اصلی و مدل ساده‌شده



شکل

(۷) - گشتاور متناظر با زاویه‌ی الویشن برای هر دو حالت حرکت با در نظر گرفتن مدل اصلی و مدل ساده‌شده

به‌منظور آنکه تفاوت نتایج حاصل از دو مدل اصلی و ساده‌شده محسوس نباشد، در جدول (۱) خطای جذر متوسط مربع نرمال (NRMSE) و ضریب همبستگی ( $r$ ) میان نتایج نمایش داده شده‌است.

همان‌طور که در بخش ۲-۴ اشاره شد، داده‌های آزمایشگاهی مربوط به آهنگ حرکت شانه از نتایج تحقیقات آزمایشگاهی دی‌گروت و برند [۱۰] به‌دست آمده‌است. البته در این مطالعه، دی‌گروت و برند تنها روابط میان جهت‌گیری استخوان‌های ترقوه و کتف را با صفحه‌ی الویشن و زاویه‌ی الویشن به شکل تجربی به‌دست آوردند ولیکن هیچ‌گونه مدل‌سازی ریاضی برای بررسی دینامیکی کمربند شانه‌ای انجام داده نشد. در ادامه، هولزبار و همکارانش [۱۵] سعی کردند تا با استفاده از این نتایج آزمایشگاهی، مدلی دینامیکی از کمربند شانه‌ای ارائه کنند. برای ارائه‌ی این مدل از نرم‌افزار

$$\frac{\partial(\mathbf{AB})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{B} + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_r) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}$$

خاصیت ۲: برای تابع اسکالر  $a$

$$\frac{\partial(a\mathbf{A})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{A} \otimes \frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}} + a \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}}$$

خاصیت ۳: برای ماتریس دلخواه  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{s \times p}$

$$\frac{\partial(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{U}_{s,r}) \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \otimes \mathbf{C} \right) + \mathbf{A} \otimes \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}}$$

خاصیت ۴:

$$d\mathbf{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T (\mathbf{I}_n \otimes d\mathbf{q})$$

تبصره: با استفاده از این خاصیت می‌توان  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  و  $\delta \mathbf{A}$  را نیز  
با روابطی کاملاً مشابه تعیین کرد.

## ۶- مراجع

- [1] R. Nisell, G. Nemeth, and H. Ohlson, "Joint forces in extension of the knee. Analysis of a mechanical model," Acta Orthop Scand, vol. 57, pp. 41-6, Feb 1986.
- [2] G. T. Yamaguchi and F. E. Zajac, "A planar model of the knee joint to characterize the knee extensor mechanism," J Biomech, vol. 22, pp. 1-10, 1989.
- [3] S. L. Delp, J. P. Loan, M. G. Hoy, F. E. Zajac, E. L. Topp, and J. M. Rosen, "An interactive graphics-based model of the lower extremity to study orthopaedic surgical procedures," IEEE Trans Biomed Eng, vol. 37, pp. 757-67, Aug 1990.
- [4] T. M. van Eijden, W. de Boer, and W. A. Weijs, "The orientation of the distal part of the quadriceps femoris muscle as a function of the knee flexion-extension angle," J Biomech, vol. 18, pp. 803-9, 1985.
- [5] E. Y. Chao and B. F. Morrey, "Three-dimensional rotation of the elbow," J Biomech, vol. 11, pp. 57-73, 1978.
- [6] Y. Wong, W. Kim, and N. Ying, "Passive motion characteristics of the talocrural and the subtalar joint by dual Euler angles," J Biomech, vol. 38, pp. 2480-5, Dec 2005.
- [7] W. T. Dempster, "Space requirements of the seated operator: geometrical, kinematic, and mechanical aspects of the body, with special reference to the limbs," Technical Report WADC-TR-55-159, Wright-Patterson Air Force Base, OH: Aerospace Medical Research Laboratory, 1955.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی نوین برای به‌دست آوردن معادلات حرکت سیستم اسکلتی بدن انسان ارائه شد. این روش به دلیل الگوریتم بازگشتی خود، از نظر محاسباتی، بسیار کارآمد است. همچنین، قادر است ویژگی‌های سینماتیکی پیچیده‌ی سیستم اسکلتی را در معادلات بیان کند. برخلاف روش‌های مرسوم برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی مقید که معادلات حاکم بر سیستم را به شکل دیفرانسیلی-جبری ارائه می‌دهند، روش حاضر سیستم اسکلتی را با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی مدل می‌کند.

در این مقاله، کاربرد روش پیشنهادی در مدل‌سازی ساختار پیچیده‌ی کمربند شانه‌ای ارائه شد. می‌توان این روش را برای مدل‌سازی مفصل پیچیده‌ی زانو به‌کار برد و از ساده‌سازی‌های نابجا برای مدل‌سازی این مفصل اجتناب کرد.

## ۵- پیوست

ماتریس دلخواه  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  را با استفاده از ماتریس‌های  
مقدماتی ( $\mathbf{e}_{ik}^{m \times n}$ ) می‌توان به شکل زیر توصیف کرد:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n A_{ik} \mathbf{e}_{ik}^{m \times n} \quad (\text{پ ۱})$$

که در آن  $A_{ik}$  درایه‌ی سطر  $i$ ام و ستون  $k$ ام ماتریس  $\mathbf{A}$  است.

مشق جزئی ماتریس  $\mathbf{A}$  نسبت به بردار دلخواه  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^r$  را  
به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \mathbf{e}_{ik}^{m \times n} \otimes \frac{\partial A_{ik}}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{پ ۲})$$

آنچه در ادامه مطرح می‌شود، خواص اساسی این تعریف را  
مشخص می‌کند. پیش از این در [۲۷] این خواص توسط  
نویسندگان این مقاله اثبات گردید و در اینجا تنها به ذکر  
صورت خواص بسنده می‌کنیم.

خاصیت ۱: برای ماتریس دلخواه  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times t}$

- [20] A. Ribeiro, J. Rasmussen, P. Flores, and L. Silva, "Modeling of the condyle elements within a biomechanical knee model," *Multibody Syst Dyn*, vol. 28, pp. 181-197, 2012/08/01 2012.
- [21] B. A. Garner and M. G. Pandy, "A Kinematic Model of the Upper Limb Based on the Visible Human Project (VHP) Image Dataset," *Comput Methods Biomech Biomed Engin*, vol. 2, pp. 107-124, 1999.
- [22] C. Quental, J. Folgado, J. Ambrósio, and J. Monteiro, "A multibody biomechanical model of the upper limb including the shoulder girdle," *Multibody Syst Dyn*, vol. 28, pp. 83-108, 2012.
- [23] M. Koul, S. Shah, S. K. Saha, and M. Manivannan, "Reduced-order forward dynamics of multiclosed-loop systems," *Multibody Syst Dyn*, vol. 31, pp. 451-476, 2014/04/01 2014.
- [24] J. Baumgarte, "Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems," *Comput Methods Appl Mech Eng*, vol. 1, pp. 1-16, 1972.
- [25] W. Blajer, "Elimination of Constraint Violation and Accuracy Aspects in Numerical Simulation of Multibody Systems," *Multibody Syst Dyn*, vol. 7, pp. 265-284, 2002/04/01 2002.
- [26] A. Seth, M. Sherman, P. Eastman, and S. Delp, "Minimal formulation of joint motion for biomechanisms," *Nonlinear Dynamics*, vol. 62, pp. 291-303, 2010/10/01 2010.
- [27] H. Ehsani, M. Rostami, and M. Parnianpour, "A closed-form formula for the moment arm matrix of a general musculoskeletal model with considering joint constraint and motion rhythm," *Multibody Syst Dyn*, pp. 1-27, 2015/08/07 2015.
- [28] R. Featherstone, *Rigid body dynamics algorithms*. New York: Springer, 2008.
- [29] J. J. Uicker, P. N. Sheth, and B. Ravani, *Matrix Methods in the Design Analysis of Mechanisms and Multibody Systems*, 2013.
- [30] J. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory," *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 25, 1978, pp. 781-772.
- [31] W. Schiehlen, *Multibody Systems Handbook*: Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [32] K. R. S. Holzbaaur, "Upper limb biomechanics: Musculoskeletal modeling, surgical simulation, and scaling of muscle size and strength," Ph.D. dissertation, Stanford University, United States -- California, 2005.
- [33] F. L. Lewis, C. T. Abdallah, and D. M. Dawson, *Robot manipulator control : theory and practice*, 2nd ed. New York: Marcel Dekker, 2004.
- [8] C. Hogfors, B. Peterson, G. Sigholm, and P. Herberts, "Biomechanical model of the human shoulder joint--II. The shoulder rhythm," *J Biomech*, vol. 24, pp. 699-709, 1991.
- [9] C. Hogfors, G. Sigholm, and P. Herberts, "Biomechanical model of the human shoulder--I. Elements," *J Biomech*, vol. 20, pp. 157-66, 1987.
- [10] J. H. de Groot and R. Brand, "A three-dimensional regression model of the shoulder rhythm," *Clin Biomech (Bristol, Avon)*, vol. 16, pp. 735-43, Nov 2001.
- [11] J. H. de Groot, "The variability of shoulder motions recorded by means of palpation," *Clin Biomech (Bristol, Avon)*, vol. 12, pp. 461-472, Oct 1997.
- [12] C. K. Anderson, D. B. Chaffin, G. D. Herrin, and L. S. Matthews, "A biomechanical model of the lumbosacral joint during lifting activities," *J Biomech*, vol. 18, pp. 571-84, 1985.
- [13] D. Karlsson and B. Peterson, "Towards a model for force predictions in the human shoulder," *J Biomech*, vol. 25, pp. 189-99, Feb 1992.
- [14] F. C. Anderson and M. G. Pandy, "A Dynamic Optimization Solution for Vertical Jumping in Three Dimensions," *Comput Methods Biomech Biomed Engin*, vol. 2, pp. 201-231, 1999.
- [15] K. R. Holzbaaur, W. M. Murray, and S. L. Delp, "A model of the upper extremity for simulating musculoskeletal surgery and analyzing neuromuscular control," *Ann Biomed Eng*, vol. 33, pp. 829-40, Jun 2005.
- [16] V. De Sapia, K. Holzbaaur, and O. Khatib, "The control of kinematically constrained shoulder complexes: physiological and humanoid examples," in *Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on*, 2006, pp. 2952-2959.
- [17] E. K. Chadwick, D. Blana, A. J. van den Bogert, and R. F. Kirsch, "A real-time, 3-D musculoskeletal model for dynamic simulation of arm movements," *IEEE Trans Biomed Eng*, vol. 56, pp. 941-8, Apr 2009.
- [18] F. Moissenet, L. Chèze, and R. Dumas, "Anatomical kinematic constraints: consequences on musculo-tendon forces and joint reactions," *Multibody Syst Dyn*, vol. 28, pp. 125-141, 2012.
- [19] R. Dumas, F. Moissenet, X. Gasparutto, and L. Cheze, "Influence of joint models on lower-limb musculo-tendon forces and three-dimensional joint reaction forces during gait," *Proc Inst Mech Eng H*, vol. 226, pp. 146-60, Feb 2012.