

## بررسی تأثیر تدریس بر میزان درک دانش‌آموزان دختر سال سوم ریاضی از مفهوم حد و رشد توانایی فضایی آنها با تأکید بر فعالیت‌های مبتنی بر تجسم

**هدف:** بخش مهمی از درک و تفکر دانش‌آموزان از ریاضیات از طریق تجسم شکل می‌گیرد. مفهوم "حد" در ریاضی از جایگاهی خاص برخوردار است. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در درک این مفهوم با مشکلات و چالش‌های فراوانی روبرو هستند. به نظر می‌رسد تکیه بر آموزش رویه‌ای می‌تواند یکی از عوامل مؤثر بر این امر باشد. تحقیق حاضر در پی آن است که تأثیر آموزش مفهوم "حد" به کمک رویکرد تجسم محور بر درک دانش‌آموزان و نیز توانایی فضایی آنها را بررسی کند. روش: جامعه مورد مطالعه در این تحقیق، دانش‌آموزان دختر سال سوم دبیرستان در رشته ریاضی - فیزیک دو شهرستان استان کردستان و نمونه آن 34 دانش‌آموز سال سوم ریاضی هستند.

از آنجا که دانش‌آموزان قبلاً در دو کلاس گنجانده شده بودند و پژوهشگران این مطالعه امکان انتخاب تصادفی آنها را برای دو گروه کنترل و آزمون نداشتند، از طرح نیمه‌آزمایشی پیش‌آزمون - پس‌آزمون با گروه کنترل استفاده شد؛ بدین صورت یکی از کلاس‌ها به صورت تصادفی گروه آزمون و دیگری گروه کنترل در نظر گرفته شد. در این مطالعه، روش تدریس به عنوان متغیر مستقل و توانایی فضایی و درک مفهوم حد نیز متغیرهای وابسته در نظر گرفته شدند. پیش‌آزمون نشان داد که دو گروه قبل از اعمال متغیر مستقل، از نظر متغیرهای وابسته تفاوت معناداری نداشتند. در طول سه هفته آموزشی، مفهوم حد را یکی از مؤلفان مقاله به هر دو گروه آموزش داد. شیوه تدریس به گروه کنترل روش معمول و برای گروه آزمون با رویکرد تجسم محور، با ارائه فعالیت‌های تصویری/دیداری بود. این فعالیت‌ها به گونه‌ای طراحی شده بودند که بازتابی‌های مختلف مفهوم حد در آنها ارائه شده بود. در تحلیل داده‌ها از روش "تحلیل واریانس چند متغیره" استفاده شد. نتیجه‌گیری: یافته‌های تحقیق نشان داد که تدریس از طریق ارائه فعالیت‌های مبتنی بر تجسم از حد، بر درک دانش‌آموزان از مفهوم حد تأثیرگذار و تفاوت بین دو گروه در این مورد معنادار است. اما ارائه فعالیت‌های مبتنی بر تجسم در تدریس حد، تأثیری بر افزایش توانایی فضایی دانش‌آموزان ندارد و از این نظر تفاوت دو گروه معنادار نیست.

**واژه‌های کلیدی:** مفهوم حد، بازتابی‌های چندگانه، تفکر تجسم - محور، توانایی فضایی

ابراهیم ریحانی  
استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی  
شهرناز بخشعلی زاده \*  
کارشناس پژوهشی پژوهشگاه مطالعات وزارت آموزش و پرورش  
کامل نظری  
دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

\*نشانی تماس: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، پژوهشگاه مطالعات ریاضی  
ایمانه: sbakhshalizadeh@yahoo.com

## The Effect of Visualization-Based Teaching Approach on Understanding the Concept of Limit and the Spatial Ability Amongst High School Students

**Objective:** An important part of students' understanding and thinking of mathematics is shaped through visualization. The concept of "limit" has a special place in mathematics. Researches have shown that students face problems and challenges in understanding this concept. It seems that relying on the procedural approach in teaching could be one of the factors affecting it, considering that in this approach, algorithmic thinking is mostly advanced. This study examines the effects of teaching based on visualization on students' understanding of the concept of "limit" and their spatial ability. **Method:** This study enrolled 32 female high school students (11th grade) majoring in mathematics - physics from two cities in Kordestan. Since students were already assigned in 2 classes, random sampling was not administered. We considered semi-experimental pre-test-post-test control group for this study. Randomly one of the classes was selected as the control group and other one as the experimental group. The teaching method was the independent variable and understanding the concept of 'limit' and spatial ability were dependent variables. The Pre-test indicated that there was no significant difference between two groups with regard to the dependent variables before intervening with the independent variable. During the three weeks of instruction, concept of 'limit' was taught to both groups. The control group was taught with a traditional approach whereas the test group was treated by visual-based approach accompanied with visualization activities. MANOVA was used to analyze the data. **Conclusion:** Our findings revealed that using visual activities in teaching the concept of 'limit', improves students' understanding of it and the difference between groups was statistically significant. This intervention however did not enhance the spatial ability of the students.

**Keywords:** concept of limit, multiple-representations, visual-based approach, spatial ability

**Ebrahim Reyhani**

Assistant professor, Department of Mathematics, Shahid Ragaee Teacher Training University  
**Shahnaz Bakhshalizadeh\***  
Research officer, Research Institute for Education, Ministry of Education

**Kamel Nazari**

Masters degree student in Mathematics Education, Shahid Ragaee Teacher Training University

\*Corresponding Author:

Email: sbakhshalizadeh@yahoo.com

## مقدمه

تصویرسازی ذهنی است (فلیپس<sup>۱</sup>، نوریس<sup>۱۱</sup> و مک ناب<sup>۱۲</sup>، ۲۰۱۰). فرآیند تجسم کردن در ریاضیات که به بررسی، کشف و درک مفاهیم منجر می‌شود، مستلزم فرآیند تشکیل و دست‌کاری تصاویر با قلم و کاغذ، فن‌آوری و یا فرآیندی ذهنی است (جونز، ۲۰۰۱).

البته کاربست روش‌های مبتنی بر تجسم در آموزش مفاهیم ریاضی، به سادگی روش‌های دیگر (مثلاً سخنرانی) نیست، زیرا پیدا کردن نمونه‌های شهودی و مجسم از مفاهیم انتزاعی ریاضی، همواره آسان نیست. از این گذشته، به نظر می‌رسد بیشتر معلمان با به کارگیری این روش در آموزش مفاهیم ریاضی آشنا نیستند. اما مانکوسو<sup>۱۳</sup> (۲۰۰۵) از عصر بازگشت به تفکر مبتنی بر تجسم یا رنسانس تفکر تجسم‌محور<sup>۱۴</sup> در ریاضیات در طول دهه‌های اخیر سخن می‌گوید. به نظر وی این علاقه به تجسم در منطق و ریاضیات، یکی از نتایج تحولاتی است که در زمینه‌های مختلف، از جمله علوم کامپیوتر، ریاضیات، آموزش ریاضی، روان‌شناسی شناختی و فلسفه روی داده است. به عقیده مانکوسو (۲۰۰۵)، برای پرورش تفکر بصری و تجسمی، دانش‌آموزان باید از دانش لازم برای درک نمودارها آگاه شوند تا بتوانند آنها را تفسیر و در حل مسایل ریاضی به کار برند. به نظر تال (۱۹۹۱)، در حالت کلی، دانش‌آموزان برای تجسم مفاهیم ریاضی از مهارت‌های بسیار ضعیفی برخوردارند و استفاده از نمودارها، تصاویر، اشکال هندسی و مدل‌ها نیز می‌تواند راهی برای تصور مفاهیم انتزاعی در ریاضیات باشد. دانش‌آموزانی که با رویکرد مبتنی

امروزه رشد و کاربست مهارت‌های تفکر و حل مسئله در محیط کار و جهان واقعی، از نیازهای مهم جامعه است. در چنین جهانی، درک ریاضی فرصت‌هایی برای مواجهه با مسایل و حل آنها در اختیار افراد قرار می‌دهد. مطالعات تجربی مختلف در مورد نقش بازنمایی‌های بصری<sup>۱</sup> در ریاضیات نشان می‌دهند که تجارب بصری افراد مدت طولانی‌تری در حافظه آنها می‌ماند و توانایی یادآوری آنها نیز راحت‌تر از بازنمایی‌های نمادین و یا کلامی است (ریورا<sup>۲</sup>، ۲۰۱۱). در این ارتباط، هادامار<sup>۳</sup> (نقل از: جونز<sup>۴</sup>، ۲۰۰۱) بیان کرده که بسیاری از شیوه‌های تفکر، که در ریاضیات سطح بالا مورد نیاز است، از فضای طبیعت الهام گرفته می‌شوند، لذا به نظر می‌رسد تفکر بصری و فضایی<sup>۵</sup> با مشاهده طبیعت و تجسم<sup>۶</sup> اشیای هندسی و فضایی برگرفته از طبیعت رشد می‌کند. به عقیده برخی محققان آموزش ریاضی، ریاضیات پشت صحنه در مقایسه با ریاضیات پیش‌رو، بیشتر با ایده‌های بصری شکل گرفته است، به طوری که کار اغلب ریاضیدانان با تجربه، خالی از تفکر مبتنی بر تجسم و استدلال‌های بصری<sup>۷</sup> نیست (تال<sup>۸</sup>، ۱۹۹۱).

به عقیده گینزبرگ<sup>۹</sup> و همکاران (۲۰۰۳)، نقل از: ریورا، (۲۰۱۱)، ریاضیاتی که کودکان در محیط‌های فیزیکی و اجتماعی اطراف خود با آن مواجه‌اند، ممکن است صوری و نمادین یا شهودی و یا اساس آن تجارب اجتماعی و فرهنگی و یا تا میزان بسیار کم، حتی ممکن است رسمی شده باشد. (بنابراین حتی ریاضیاتی که کودکان در بازی‌ها و روابط با یکدیگر یاد می‌گیرند می‌تواند در استدلال‌های آتی آنها به کار گرفته شود. کودکی را در نظر بگیرید که به بازی با برخی اشیای نامرئی و خیالی مشغول است و در ذهن خود و با تجسم کردن، آنها را می‌شمارد. این فعالیت در حقیقت زمینه‌ساز تشکیل مفهوم عدد در ذهن او خواهد بود. عمل تجسم در واقع ترجمه یک رویداد خارجی به ذهنی است. تجسم، یک بازنمایی تصویری و تجسم کردن، فرایند ایجاد یک نمایش تصویری در ذهن و معمولاً مترادف

- 1- Visual Representations
- 2- Rivera
- 3- Hadamard
- 4- Jones
- 5- Visual and spatial thinking
- 6- Visualization
- 7- Visual reasonings
- 8- Tall
- 9- Ginsburg
- 10- Phillips
- 11- Norris
- 12- Macnab
- 13- Mancosu

۱۴- در این مقاله "تفکر مبتنی بر تجسم" و "تفکر تجسم‌محور" مترادف در نظر گرفته شده‌اند.

ارتباطی ندارند؛ از این رو ملموس و قابل درک نیستند و فقط عده خاصی توانایی درک آنها را دارند. به نظر پیشاپ<sup>۲</sup> (۱۹۸۳؛ نقل از: ریحانی و همکاران، ۲۰۱۱)، دانش‌آموزان به بازنمایی‌های تجسمی علاقه‌مندند، اما متأسفانه معلمان و متون درسی، آنها را در این مسیر هدایت نمی‌کنند. از دیدگاه او ریاضیات مدرسه‌ای به انجام دادن محاسبات تبدیل شده است. برخی معلمان از همان ابتدای کار و بدون هیچ مقدمه‌ای، با هدایت دانش‌آموزان به سمت استفاده از نمادها و رویه‌های پیدا کردن مقدار حد، آنها را از درک درست مفهوم حد دور می‌کنند. دانش‌آموزان نیز معمولاً توانایی محاسبه‌ها را با به کارگیری الگوریتمی فرمول‌ها و رویه‌ها، بدون آنکه قادر به تفسیر نتایج کار خود باشند. لذا شاید بیشتر دانش‌آموزان با تمرکز بر روش جبری و الگوریتمی برای محاسبه، بتوانند مسایل معمولی را حل کنند ولی برای حل مسایل غیر معمول و غیر روتین، نیازمند درک ویژگی‌های خاصی از مفهوم حد هستند (جوتر<sup>۳</sup>، ۲۰۰۶). همچنین معلمی که قبل از مفهوم‌سازی به بیان رویه‌ها و قواعد می‌پردازد، ممکن است مانع ساخت طرح‌واره‌های درستی از مفهوم حد شود. مثلاً معلم از همان ابتدای کار بیان کند که:

"... برای درک مفهوم حد تابع و مشاهده حالات مختلف حد یک تابع، کافی است با توابع گویا کار کنیم، که نتیجه می‌تواند یکی از اشکال زیر باشد:

الف) یک عدد صحیح  
 ب) یک عدد گویا  
 ج)  $\frac{0}{c}$  که  $c$  یک عدد صحیح غیر صفر است و سپس نتیجه برابر صفر است.

د)  $\frac{c}{0}$  که  $c$  یک عدد صحیح غیر صفر و در نتیجه مقدار آن نامعلوم است.

و) همچنین، حد تابع می‌تواند مانند  $\frac{0}{0}$  باشد که باز هم

بر تجسم آموزش می‌بینند، می‌توانند یک مسئله را از دیدگاه‌های متفاوت بررسی کنند که این موضوع ایجاد راه‌حل‌های گوناگون را در پی خواهد داشت (ریحانی<sup>۱</sup>، حاجی‌بابایی<sup>۲</sup> و عرب‌زاده<sup>۳</sup>، ۲۰۱۱). بنابراین دانش‌آموزان باید تجارب لازم برای انتخاب، به کارگیری و ترجمه بازنمایی‌های مختلف برای حل مسایل ریاضی را به دست آورده و قادر به ترجمه ارائه‌های مختلف یک مفهوم به یکدیگر باشند (NCTM ۲۰۰۰)<sup>۴</sup>. از این رو به نظر می‌رسد، زمانی آموزش معنادار مفاهیم ریاضی رخ می‌دهد که با تلفیقی از مدل‌های ریاضی و ساختارهای هندسی و فیزیکی همراه باشد.

حد یکی از مفاهیم مهم و کاربردی در ریاضیات است که پایه بسیاری از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال را تشکیل می‌دهد و به بسیاری از مفاهیم دیگر نظیر بی‌نهایت بزرگ، بی‌نهایت کوچک، همگرایی و غیره مرتبط می‌شود. در ریاضیات مدرسه‌ای ایران، دانش‌آموزان حتی قبل از برخورد با مفهوم حد، در مبحث دنباله‌ها (ریاضیات سال دوم دبیرستان، ۲۰۰۹)، با مفهوم میل کردن آشنا می‌شوند. همچنین در سال سوم متوسطه و پیش‌دانشگاهی و به دنبال آن در ریاضیات دوره دانشگاهی نیز با این مفهوم به طور مستمر سروکار دارند. در ریاضیات دبیرستان، معمولاً از مفهوم حد برای بیان رفتار یک تابع، یک سری یا دنباله‌ای از اعداد استفاده و به بررسی این رفتار در نقاط روی صفحه و یا در بی‌نهایت پرداخته می‌شود. حد در حساب دیفرانسیل و انتگرال و نیز در آنالیز ریاضی، همچنین برای تعریف مشتق، انتگرال و نیز مفهوم پیوستگی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

کارنوه<sup>۵</sup> (۱۹۹۱، نقل از: بوردان<sup>۶</sup>، ۲۰۰۵) معتقد است که مفهوم حد دارای یک نقش محوری است که در آنالیز ریاضی کاملاً ریشه دارد. به نظر می‌رسد بسیاری از دانش‌آموزان با مفهوم حد مشکل دارند و اساس جهان‌بینی ریاضی بیشتر آنها این است که ریاضیات مجموعه‌ای از فرمول‌ها و محاسبات پیچیده روی آنهاست که با دنیای واقعی و فعالیت‌های روزمره

1- Reyhani  
 2- Hajibabai  
 3- Arab zade  
 4- National Council of Teachers of Mathematics

5- Cornu  
 6- Jordaan  
 7- Bishop  
 8- Jutter

مقدار آن نامعلوم است.... " (هیت<sup>۱</sup>، چاوز<sup>۲</sup>، ۱۹۹۹).

در این حالت دانش آموز ممکن است با استفاده از قواعد به حل تمرین‌ها و مسایل روتین پرداخته و نیاز به درک مفهومی را حس نکند و در نتیجه در حل مسایلی که با سطوح بالاتر تفکر و پیچیدگی سر و کار دارند و یا درک مفاهیم مرتبط با حد دچار مشکل شود. اما واقعیت این است که یادگیری ریاضیات فقط به محاسبات رویه‌ای با فرمول‌ها محدود نمی‌شود، بلکه یکی از اهداف اصلی، درک مفاهیم ریاضی است که بخشی از این درک، از طریق تجسم صورت می‌گیرد. مطالعه حاضر قصد دارد با تأکید بر جنبه‌های بصری و تجسمی از مفهوم حد، به کاهش برخی مشکلات دانش‌آموزان در درک این مفهوم کمک کند.

### چارچوب نظری تحقیق

نظریه پردازان مدل‌های شناختی توسعه یافته‌ای دارند که چگونگی فرآیندهای ذهنی انسان برای ساخت معنا را توضیح می‌دهند. رویکرد مجسم ساختن برای یادگیری مفاهیم ریاضی نیز همواره مورد توجه این نظریه پردازان بوده است. ریورا (۲۰۱۱) معتقد است تفکر ریاضی، با ویژگی حرکت آزادانه میان حالت‌های تجسمی، شهودی، نمادین، رسمی، غیررسمی، تحلیلی، ادراکی و کلامی مشخص می‌شود. لذا تجسم کردن و تفکر مبتنی بر تجسم همواره جزء اصلی فرآیند فهم ریاضی است. میجا راموس<sup>۳</sup> و تال (۲۰۰۴) مطرح کرده‌اند که حساب دیفرانسیل و انتگرال، مانند هر تلاش انسانی دیگری، بر تجارب و باورهای انسان استوار است و تمرکز ما بر درک اشیای دنیای واقعی باعث می‌شود که ما از طریق به‌کارگیری "تجارب متصور شده"<sup>۴</sup> به طبقه بندی این اشیاء، در نظر گرفتن خواص آنها و ساختن مفاهیم پیچیده‌تر بپردازیم. میجا راموس و تال معتقدند این امر تحول در شروع حسابان را موجب شده و در این وضعیت، حد به عنوان یک "مفهوم مجسم ضمنی"<sup>۵</sup> و نه یک تعریف مستقیم صوری و رسمی معرفی می‌شود.

با وجود اینکه در جامعه آموزشگران ریاضی بر به کارگیری روش‌های مبتنی بر تجسم تأکید زیاد شده

است، به نظر می‌رسد یک روش منحصر به فرد که بتواند به تنهایی تمام نیازهای آموزشی را برآورده کند وجود ندارد و روش‌های تجسمی، منطقی/کلامی و نمادین، مکمل هم بوده و در یک موقعیت مسئله و بسته به شرایط آن، ممکن است یکی یا ترکیبی از آنها راه‌گشا باشد. ریورا (۲۰۱۱) بین دو روش نمادین و بصری در آموزش ریاضیات مقایسه‌ای کرده که در جدول ۱ آمده است. با توجه به ویژگی‌های این دو روش (جدول ۱)، به نظر می‌رسد که هیچ‌یک به تنهایی برای فهم و درک ریاضی کافی نیستند، بلکه مکمل یکدیگرند؛ فقط نکته این است که در چه مرحله‌ای و چگونه هر یک از این روش‌ها باید به کار گرفته شوند.

جدول ۱- مقایسه دو روش نمادین و بصری در آموزش ریاضی از دیدگاه ریورا (۲۰۱۱)

بصری	نمادین
غیررسمی و آزمایشی	رسمی و اثبات محور
شهودی	منطقی و تحلیلی
شهودی	غیرشهودی
تجربی	الگوریتمی
ابزار و مسیر	هدف
تشکیل و استفاده از تصاویر	اکتشاف و توسعه درک
هندسی	نمادین
فضایی و پویا <sup>۶</sup>	کلامی، محاسباتی و جبری
مبتنی بر نمودار <sup>۷</sup>	نمادین و جمله‌ای
تصویری	زبانی
نیاز شناختی بالا	نیاز شناختی پایین
روشنگر	تعمیم پذیر
مولد و وابسته به قوه حافظه	اثباتی
مسیرهای چندگانه	خطی ترتیبی

1- Hitt

2- Chavez

3- Ramos

4- Thought experiments

5- Implicit Embodied Concept

6- Spatial & Dynamic

7- Diagrammatic

عمل در دنیای واقعی شروع (مانند شمارش) و سپس نمادین شده و به عنوان یک مفهوم به حساب می‌آید (مانند مفهوم عدد). این جهان شامل دست‌ورزی‌های عددی و نمادین بوده و مستلزم شکل‌گیری مفهوم است و بازنمایی‌های بصری را به صورت مفاهیم قابل تجسم و در قالب تعامل فرآیند - مفهوم فشرده می‌کند. تال (۲۰۰۳) این مرحله را برای بسیاری از دانش‌آموزان مرحله‌ای پیچیده و بغرنج می‌داند و اعتقاد دارد که در این مرحله دانش‌آموزان در درک مفاهیم با مشکل مواجه می‌شوند.

مرحله نهایی (جهان صوری) که از تجارب دو مرحله قبل شکل می‌گیرد، دارای ماهیت استقرایی یا قیاسی بوده و مبتنی بر ارائه‌ای منطقی و کلامی است. این جهان بر ساختن دستگاه‌های اصول موضوعه‌ای، تعاریف و اثبات‌های رسمی و صوری تمرکز می‌کند (تال، ۲۰۰۴). به طور خلاصه می‌توان گفت، جهان مجسم ساختن شامل ادراک، تجارب واقعی و تجارب متصور شده‌ای است که به وسیله تجسم شکل می‌گیرد. جهان فروعی به ما این امکان را می‌دهد که به تدوین، فرموله کردن و حل مسایل با دقت بسیار زیاد پردازیم (همان منبع). جهان صوری نیز وقتی شکل می‌گیرد که شخص بتواند برای تعریف مفاهیم و خواص ریاضی از عبارات نمادین استفاده کند و توانایی دیدن مفاهیم را به اشکال دیگر داشته باشد (شکل ۱). شکل ۱- الف، سه جهان ریاضی مدل تال و شکل ۱- ب به کمک این مدل ساختار درک مفاهیم حسابان از جمله مفهوم حد را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل می‌توان دید که برای درک مفاهیم، در مرحله اول باید از بازنمایی‌های تجسمی استفاده کرد. تال (۲۰۰۷) با ذکر مثالی ساده ارتباط بین این سه جهان متفاوت را روشن می‌کند. در جهان تجسمی  $2+3$  همان  $2+3$  است، زیرا می‌توان آن را در قالب اشیا تجسم کرد. در جهان نمادین  $3+2$  همان  $2+3$  است، زیرا قابل محاسبه است. در جهان صوری و با یک ساختار خاص

- 1- Hsu
- 2- Subject-oriented
- 3- Object-oriented

برای مثال، تال (۲۰۰۳) توصیه کرده است برای اینکه دانش‌آموزان بتوانند به طور معنادار نماد بسازند، باید از دست‌ورزی‌های عددی و نمادین با هم استفاده کنند. به نظر او این امر می‌تواند از طریق بازنمایی‌های تجسمی/ تصویری از نمودارها، دست‌کاری آنها در ذهن و مشاهده تغییر رفتار آنها انجام شود. برای مثال، دانش‌آموزان قبل از آنکه با تعریف مشتق کار کنند، می‌توانند مفهوم "خطی‌سازی" توابع مشتق‌پذیر را با بزرگ‌نمایی بخشی از نمودار تابع حول یک نقطه از آن تجربه کنند (تال، ۲۰۰۴).

در مورد نحوه شکل‌گیری و درک یک مفهوم در ذهن یادگیرندگان نظریه‌های مختلفی وجود دارد که همه بر توانایی و انعطاف‌پذیری یادگیرنده در ترجمه بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم از جمله بازنمایی هندسی به یک دیگر اشاره دارند. بیشتر این مدل‌ها حرکت از درک اولیه یک مفهوم ریاضی به مرحله‌ای را نشان می‌دهند که در آن مفهوم می‌تواند به عنوان شیء ریاضی دیده شود (و به عکس). از جمله این نظریه‌ها می‌توان به نظریه تال اشاره کرد. مدل سه جهانی تال شامل جهان مجسم ساختن، جهان فروعی و جهان صوری - اصول موضوعه است.

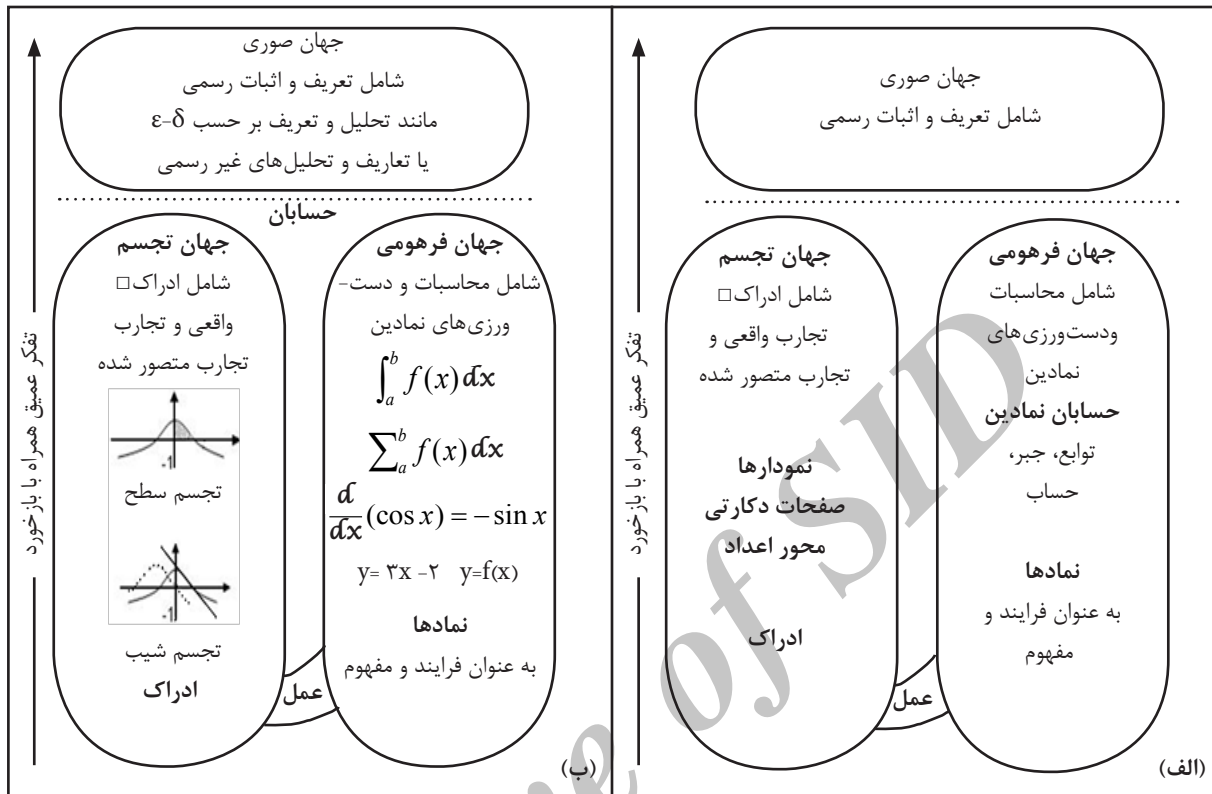
جهان اول، یعنی جهان مجسم ساختن، با درک پدیده‌ها و اشیا از طریق تفکر در اعمال شکل گرفته و بدون داشتن حس روشنی از نتیجه عمل شروع می‌شود. این جهان شامل برداشت‌های فیزیکی است که از طریق تفکر عمیق همراه با بازخورد، به تصوراتی ذهنی (شیء‌نگاری) تبدیل می‌شود. جهان اول، همچنین، عمل بر اساس ترکیبی از ادراک، تجربه و آزمایش است و شامل حالت‌های بصری و فضایی از استدلال می‌شود. این جهان که دانش‌آموزان را با تجارب معنادار ریاضی آماده می‌کند، ابتدایی‌ترین مرحله برای درک مفهوم و چارچوبی برای ارائه مطالب است.

در جهان فروعی، اعمال رویه‌ای و مرحله به مرحله روی تصورات ذهنی از جهان اول انجام می‌شود. این جهان با نمادها شکل می‌گیرد. جهان فروعی از یک



ریاضی داریم:  $x + y = y + x$ ، زیرا یک اصل موضوعه است.

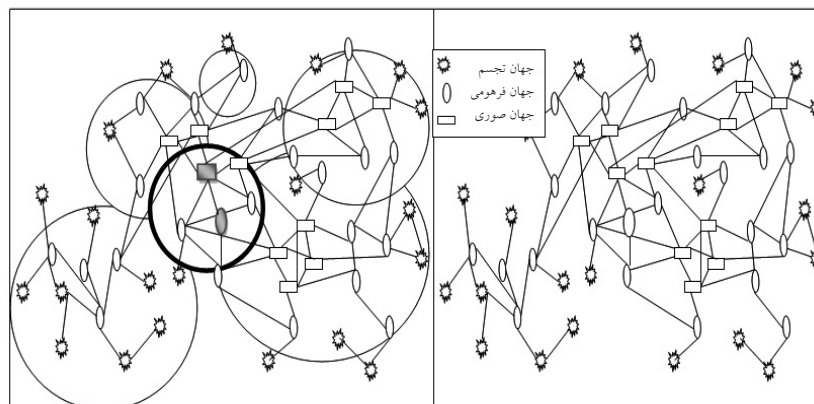
شکل ۱-: (الف) - سه جهان ریاضی تال (ب) - ساختار مفهومی حسابان (تال، ۲۰۰۴b)



آنها مفید باشند (سگنجوک، ۱۹۹۷). می‌توان گفت زمانی که شخص بتواند روابط نادیدنی بین مجموعه‌گره‌ها یا حوزه‌های منفرد از دانش خود را کشف و درک کند، دانشی منسجم و یک‌پارچه خواهد داشت (شکل ۲).

اگر دانش یک فرد را به صورت شبکه‌ای از گره‌ها و روابط (یال‌ها) در نظر بگیریم، آن گاه گره‌ها حوزه‌های مختلف دانش و یال‌ها (در صورت وجود) بازنمایی‌هایی هستند که می‌توانند به عنوان یک میانجی برای پل زدن به شکاف بین حوزه‌های دانش و برقراری ارتباط میان

شکل ۲- نقشه مفهومی مدل تال



(الف) هر گره نشان‌دهنده بازنمایی مفهوم در یکی از مراحل مختلف از سه جهان تال است.  
(ب) مجموعه‌هایی از گره‌ها و روابط که مفاهیم را شکل می‌دهند (جوئر، ۲۰۰۶).

حد بر پرورش توانایی فضایی دانش‌آموزان سال سوم متوسطه چیست؟

### روش

مطالعه حاضر با استفاده از طرح نیمه تجربی پیش‌آزمون - پس‌آزمون با گروه کنترل اجرا. و از طریق یک رویکرد کمی‌اثر فعالیت‌های آموزشی تجسم محور مرتبط با مفهوم حد بر توانایی فضایی و تجسمی دانش‌آموزان و عملکرد آنها در درک مفهوم حد، اندازه‌گیری شد. برای این مطالعه دو مدرسه از دو شهرستان استان کردستان، انتخاب شدند که هر یک شامل یک کلاس سوم ریاضی بودند. از آنجا که این دو کلاس، تنها کلاس‌های سوم ریاضی دخترانه این دو شهرستان بودند، نمونه ما همان جامعه مورد مطالعه بود؛ یعنی در واقع سرشماری کرده‌ایم. برای بررسی همسانی دو گروه، از دو گروه پیش‌آزمون گرفته شد. دانش‌آموزان دو گروه از دو شهرستان متفاوت بودند و از این رو با یکدیگر هیچ ارتباطی نداشتند. ۳۴ دانش‌آموز هر دو کلاس (۱۷ نفر در هر کلاس) مشغول به تحصیل بودند و منبع مورد استفاده هر دو کلاس، کتاب درسی حسابان (چاپ ۲۰۱۰) بود. یکی از کلاس‌ها به صورت تصادفی به عنوان گروه آزمون و دیگری به عنوان گروه کنترل انتخاب شد. تدریس در هر دو گروه به عهده یک معلم (یکی از مؤلفان مقاله) بود.

### روش اجرا

در این مطالعه، روش تدریس به عنوان متغیر مستقل و توانایی فضایی و درک مفهوم حد نیز به عنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته شدند. قبل از شروع آزمایش، برای تعیین همسانی و هم‌سطح بودن دانش‌آموزان دو گروه در ارتباط با متغیرهای وابسته، یک پیش‌آزمون اجرا شد. مقایسه دو گروه از طریق پیش‌آزمون نشان داد که دو گروه همسان‌اند. سپس دانش‌آموزان هر دو گروه آزمون و کنترل، در موضوعی مشابه، یعنی حد تحت آموزش قرار گرفتند اما روش آموزش دو گروه متفاوت بود (جدول ۲).

بر اساس مدل تال، شیء‌انگاری مفاهیم در مراحل اولیه و سطح تفکر انتزاعی در مرکز شبکه شکل‌گیری مفهوم است. این مدل از این نظر بسیار شبیه نظریه سطوح تفکر هندسی ون هیلی<sup>۱</sup> است که تأکید دارد با آموزش مناسب می‌توان دانش‌آموز را به سطح تفکر انتزاعی رساند.

با توجه به آنچه ذکر شد، دانش جدید و درست‌هنگامی حاصل می‌شود که یک ایده خوب را بتوان به یک شبکه متصل غنی و یک پارچه پیوند داد. با توجه به این چارچوب، نوع دانش یک دانش‌آموز در مورد یک مفهوم می‌تواند به صورت دانش پراکنده و یا منسجم باشد که هر کدام از این دو نوع خود می‌تواند درست یا نادرست باشد. تجربه نشان می‌دهد که اغلب دانش‌آموزان دارای دانشی پراکنده (درست یا نادرست) هستند که خود این دانش شامل شهود و بینشی بی‌ارتباط با هم است. در این مورد گره‌ها در شبکه وجود دارند اما به حوزه‌های دیگر دانش و یا گره‌های دیگر شبکه متصل نیستند (سگنجوک، ۱۹۹۷). مفاهیم جدید زمانی به طور معنادار در شبکه جای داده می‌شوند که روابط بین گره‌های جدید و گره‌های موجود در داخل شبکه درست ایجاد شده باشند. تجسم این روابط گامی برای شناخت و برقراری این روابط است. همچنین مطابق مدل تال، مفاهیم ریاضی ابتدا در جهان به طور مجسم شکل گرفته و سپس به شکل نمادی و انتزاعی درآمده‌اند. بنابراین، در آموزش مفاهیم انتزاعی ریاضی (مثلاً مفهوم حد) هم می‌توان از این مدل بهره لازم را برد. برای مثال اگر برای معنا دادن به مفهوم حد، ابتدا از بازنمایی‌های هندسی آن استفاده کنیم، شاید بتوانیم نتایج بهتری در آموزش این مفهوم بگیریم. به این صورت که با بیانی مجسم و غیرانتزاعی مبحث را آغاز و پس از شکل‌گیری مفهوم آن را با نمادها به دانش‌آموز معرفی کنیم.

### سئوال‌های تحقیق

۱- اثر ارائه فعالیت‌های تجسم محور مرتبط با مفهوم حد بر افزایش درک مفهومی دانش‌آموزان دبیرستانی از حد در درس حسابان چیست؟

۲- اثر ارائه فعالیت‌های تجسم محور مرتبط با مفهوم

جدول ۲- طرح تحقیق

پس آزمون	متغیر مستقل	پیش آزمون	انتخاب تصادفی گروه‌ها
$T_p$	فعالیت‌های آموزشی تجسم محور	$T_1$	گروه آزمون ( $R_1$ )
$T_p$	فعالیت‌های آموزشی معمول (مطابق روال کتاب درسی)	$T_1$	گروه کنترل ( $R_p$ )

مساحت ثابت است چون طول ارتفاع و قاعده آن تغییر نمی‌کند.

(c) اگر رأس  $v$  روی خط  $L$  حرکت کند، توضیح دهید محیط مثلث یعنی  $P$ ، چه تغییری خواهد کرد؟ محیط نیز به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

(d) اگر مساحت مثلث در ابتدا ۱۸ سانتی متر مربع و محیط آن ۲۱ سانتی متر بوده و رأس  $v$  با سرعتی ثابت (نسبت به زمان  $t$ ) و در جهت مثبت روی خط  $L$  حرکت کند، در این صورت حاصل حدهای زیر را بنویسید:

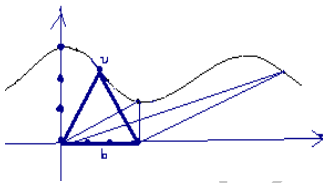
بینهایت  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) =$

$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 21$

$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 18$

$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 18$

۲- حال تصور کنید که قاعده مثلث فعالیت قبل روی محور طول‌ها و برابر ۳ واحد، و رأس آن روی نمودار تابع  $f(x) = 3 + \sin x$  باشد. (a) شکلی برای این مسئله رسم کنید.



$F(x) = \epsilon$   $F(x) = 2$   
max min

(b) اگر رأس  $v$  روی نمودار تابع  $f$  حرکت کند، در این صورت حاصل حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید:

موجود نیست  $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) =$

$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \infty$

(c) نمودار تابع  $f$  چگونه باید باشد که داشته باشیم:

$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \infty$ ?

۱- آموزش فصل حد به دو گروه در طول سه هفته آموزشی (نیمه دوم اسفند ۸۹ و هفته سوم فروردین ۹۰) به پایان رسید.

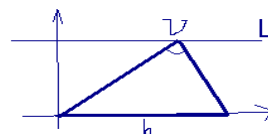
برای تسهیل آموزش مبحث حد تابع، در کلاس گروه آزمایش ( $R_1$ ) از نمودارها و فعالیت‌های بصری مناسب و برای گروه کنترل ( $R_p$ ) از روش معمول، با توضیحات و مثال‌هایی از کتاب درسی حسابان استفاده شد. در هر دو گروه نیز تکالیفی از کتاب درسی در نظر گرفته شده بود. بعد از پایان تدریس مبحث حد به دو گروه، برای بررسی تأثیر متغیر مستقل بر هر یک از متغیرهای وابسته، پس‌آزمونی شامل دو زیرآزمون روی دو گروه اجرا شد. سپس داده‌های این آزمون‌ها جمع‌آوری و تحلیل شد. نمونه‌ای از فعالیت‌های انجام شده در گروه آزمون و نیز پاسخ‌های دو نفر از دانش‌آموزان آمده است. مشکل دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به فعالیت داده شده، بیشتر در پرسش دوم نمایان است، زیرا به تجسمی قوی از وضعیت مسئله نیازمند است. توجه به بخش (ب) نشان می‌دهد که دانش‌آموز قادر به رسم نمودار درست نبوده است که ممکن است دلیلی برای عدم موفقیت در پاسخ‌گویی به یکی از حدهای داده شده باشد.

فعالیت ۵ (مثلث در حال تغییر): (الف) پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه آزمون به فعالیت. (ب) بخشی از پاسخ یکی دیگر از دانش‌آموزان به فعالیت.

(الف)

۱- مثلث دلخواهی را در نظر بگیرید که قاعده آن ثابت و برابر  $b$  باشد. اگر رأس مقابل قاعده را  $v$  نامیده شده و روی خطی موازی قاعده مانند  $L$  باشد:

(a) شکلی برای این مسئله رسم کرده و قاعده  $b$ ، رأس  $v$  و خط  $L$  را معلوم کنید.



(b) اگر رأس  $v$  روی خط  $L$  حرکت کند، توضیح دهید مساحت مثلث یعنی  $A$ ، چه تغییری خواهد کرد؟



تست ورق تاشو آزمونی استاندارد و بین‌المللی است که سئوال‌های آن به سال ۱۹۷۶ برمی‌گردد، اما محققان علوم‌شناختی همچنان از آنها برای اندازه‌گیری توانایی فضایی، در طیف گسترده‌ای از گروه‌های سنی (مقاطع راهنمایی تا دانشگاه) استفاده می‌کنند (هیگرتی، ۲۰۰۴). بخش دیگر پیش‌آزمون که در حل آنها می‌توان تجسم را به کار گرفت، آزمون محقق ساخته‌ای است که به مباحثی از ریاضیات کسب شده در سال‌های قبل مربوط است. این آزمون به منظور مقایسه مهارت و توانایی دانش‌آموزان دو گروه در تجسم کردن (از متغیرهای مورد مطالعه در پس‌آزمون) اجرا شد. بخش دوم پس‌آزمون نیز که درک مفهومی دانش‌آموزان دو گروه را از مفهوم حد نشان می‌دهد، به ارزیابی درک مفهوم حد مربوط است. سئوال‌های این آزمون را نیز پژوهشگران جمع‌آوری و تهیه کردند.

پیش‌آزمون و پس‌آزمون هر کدام ۲۰ نمره داشت که از این ۲۰ نمره پنج نمره به آزمون تست ورق تاشو و ۱۵ نمره به هر یک از دو آزمون دیگر اختصاص داده شده بود. بیشتر سئوال‌ها از آزمون تیمز و پایان‌نامه‌ها و مقاله‌های معتبر و مرتبط انتخاب شده بودند. اگرچه روایی و پایایی آزمون‌ها قبلاً سنجیده شده بود، برای سنجش روایی مجدد آنها در این پژوهش، با پنج نفر از اساتید ریاضی و آموزش ریاضی دانشگاه مشورت شد. پایایی آزمون‌ها نیز با استفاده از ضریب آلفای کرونباخ تعیین شد. ضریب آلفای محاسبه شده برای هر یک از آزمون‌های "تست ورق تاشو (a)" و "پیشینه ریاضی" در پیش‌آزمون، به ترتیب ۰/۸۸۶ و ۰/۷۰۶ و برای آزمون‌های "تست ورق تاشو (b)" و "ارزیابی درک مفهوم حد" در پس‌آزمون، به ترتیب ۰/۸۳۹ و ۰/۷۵۵ بود. این مقادیر نشان دادند که این ابزارها برای سنجش توانایی فضایی و درک دانش‌آموزان از مفهوم حد از دقت مناسبی برخوردارند.

- 1- Paper folding test
- 2- Limit Assisment
- 3- Hegarty

مثلاً رأس مثلث روی نمودار  $Y=X$  باشد.

۳- اگر مختصات دو سر قاعده مثلث فعالیت قبل به صورت  $A(0,0)$  و  $B(6,0)$  بوده و رأس  $V$  روی خط  $y=8-x$  باشد، در این صورت حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 8} A = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} A = 24$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} P = 0$$

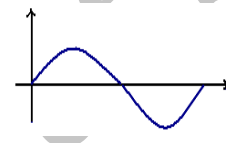
$$\lim_{x \rightarrow 0} P = 24$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P = +\infty$$

(ب)

۱- حال تصور کنید که قاعده مثلث فعالیت قبل روی محور طول‌ها و برابر ۳ واحد و رأس آن روی نمودار تابع  $f(x) = 3 + \sin x$  باشد.



(a) شکلی برای این مسئله رسم کنید.

(b) اگر رأس  $v$  روی نمودار تابع  $f$  حرکت کند، در این صورت حاصل حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \text{وجود ندارد}$$

ابزارهای پژوهش

ابزار این پژوهش از سه بخش تشکیل شده است: "آزمون پیشینه ریاضی" از موضوعاتی که در مورد آنها می‌توان از تجسم استفاده کرد، "آزمون تست ورق تاشو" و "آزمون ارزیابی درک مفهوم حد" (جدول ۳). پیش‌آزمون و پس‌آزمون خود هر یک شامل دو بخش هستند. بخشی از هر یک از آزمون‌های پیش‌آزمون و پس‌آزمون، به سنجش توانایی فضایی، یعنی تست ورق تاشو مربوط است.

جدول ۳- آزمون‌ها

پس‌آزمون	پیش‌آزمون
ارزیابی درک مفهوم حد	پیشینه ریاضی مبتنی بر تجسم
تست ورق تاشو (b)	تست ورق تاشو (a)

روش آماری

از آزمون تحلیل واریانس چندمتغیره<sup>۱</sup> استفاده شد که نتایج آن در ادامه خواهد آمد.

یافته‌ها

تحلیل نتایج پیش آزمون

در جدول ۴، نتایج آزمون T، که تفاوت میانگین‌هاست، و نتیجه تست لوین<sup>۲</sup> برای برابری واریانس‌ها نشان داده شده است.

برای تجزیه و تحلیل داده‌های این تحقیق، از روش‌های آمار توصیفی و استنباطی استفاده شده است. در سطح توصیفی، شاخص‌هایی از قبیل میانگین، انحراف معیار، تهیه جداول توزیع فراوانی و درصدها و رسم نمودار و در سطح استنباطی نیز، برای بررسی و مقایسه میانگین‌های دو گروه آزمایش و کنترل در پیش آزمون و پس آزمون،

جدول ۴ - آزمون‌های لوین و T برای نمونه‌های مستقل

آزمون لوین برای برابری واریانس‌ها		آزمون T برای تساوی میانگین‌ها							
مقدار F	مقدار T	مقدار T	درجه آزادی	Sig. (2-tailed)	تفاوت میانگین	فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای تفاوت‌ها			
						پایین‌ترین	بالا‌ترین		
فرض برابری واریانس‌ها	۰/۲۰۳	۰/۶۵۵	-۰/۷۳۲	۳۱	۰/۴۷۰	-۰/۶۶۳۶۰	۰/۹۰۶۸۴	-۲/۵۱۳۱۱	۱/۱۸۵۹۰
فرض نابرابری واریانس‌ها			-۰/۷۳۴	۳۰/۹۷۸	۰/۴۶۹	-۰/۶۶۳۶۰	۰/۹۰۴۳۲	-۲/۵۰۸۰۲	۱/۱۸۰۸۲

سپس مقدار T، درجه آزادی، احتمال انحراف استاندارد T برای تفاوت‌ها و فاصله اطمینان در سطح ۹۵ درصد محاسبه شده است. با توجه به جدول ۴، مقدار تست لوین ۰/۶۵۵ (بزرگ‌تر از ۰/۰۵) است، یعنی واریانس‌های دو گروه برابر است و لذا باید از آزمون‌های واریانس‌های برابر MANOVA استفاده شود. حال فرضیه‌های زیر را می‌آزماییم:

جدول ۵ - نتایج آزمون تحلیل واریانس چند متغیره

نام آزمون	مقدار	F	درجه آزادی اثر مورد بررسی	درجه آزادی خطا	سطح معناداری F
اثر پیلایی	۰/۰۳۰	۰/۴۶۵ <sup>a</sup>	۲/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۰/۶۳۲
لامبدای وبلکس	۰/۹۷۰	۰/۴۶۵ <sup>a</sup>	۲/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۰/۶۳۲
اثر هتلینگ	۱۶۰	۰/۴۶۵ <sup>a</sup>	۲/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۰/۶۳۲
بزرگترین ریشه روی	۱۶۰	۰/۴۶۵ <sup>a</sup>	۲/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۰/۶۳۲

فرض صفر: بین میانگین نمرات دو گروه مورد بررسی تفاوت معناداری وجود ندارد.  
فرض یک: بین میانگین نمرات دو گروه مورد بررسی تفاوت معناداری وجود دارد.

می‌توان گفت که گروه‌های کنترل و آزمون قبل از اجرای آزمایش، یعنی استفاده از روش‌های تدریس متفاوت، تفاوتی با هم نداشتند.

جدول ۵ خروجی آزمون MANOVA برای دو گروه را، که دارای واریانس‌های برابرند، نشان می‌دهد. با توجه به سطح معناداری F (Sign = ۰/۶۳۲) که از ۰/۰۵ بیشتر است، فرض صفر تأیید و فرض یک یا مقابل رد می‌شود، یعنی میانگین نمرات دانش‌آموزان در پیشینه ریاضی و توانایی فضایی برابر است. به نوعی

1- Multivariate Analysis Of Variance (MANOVA)  
2- Levenes Test

جدول ۶- نتایج آزمون تحلیل واریانس برای هر یک از متغیرها

متغیر وابسته	مجموع مجزورات	درجه آزادی	میانگین مجزورات	F	سطح معناداری F
پیشینه ریاضی	Contrast	۱	۱/۰۰۵	۰/۲۲۷	۰/۶۳۷
	Error	۳۱	۱۳۷/۱۸۰	۴/۴۲۵	
توانایی فضایی	Contrast	۱	۰/۸۱۴	۰/۹۴۹	۰/۳۳۷
	Error	۳۱	۲۶/۵۹۵	۰/۸۵۸	

تحلیل نتایج پس آزمون با توجه به جدول ۷، مقدار تست لوین ۰/۱۶۲ (بزرگ‌تر از ۰/۰۵) است، یعنی واریانس‌های دو گروه برابرند و بنابراین باید از آزمون‌های واریانس‌های برابر MANOVA استفاده شود. در این مرحله فرضیه‌های زیر آزمون می‌شوند:

در جدول ۶ هر یک از ابعاد "پیشینه ریاضی" و "توانایی فضایی" جداگانه بررسی شد. با توجه به جدول ۶، چون سطح معناداری F در آزمون پیشینه ریاضی ۰/۶۳۷ و سطح معناداری F در آزمون توانایی فضایی نیز ۰/۳۳۷ و هر دو از ۰/۰۵ بیشتر است، از این رو دانش‌آموزان در هر دو بعد حد و توانایی فضایی، تفاوت معناداری با هم ندارند.

جدول ۷- آزمون‌های لوین و T برای نمونه‌های مستقل

آزمون لوین برای برابری واریانس‌ها	آزمون T برای تساوی میانگین‌ها								
	مقدار F	مقدار T	درجه آزادی	Sig. (2-tailed)	تفاوت میانگین	احتمال انحراف استاندارد	فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای تفاوت‌ها		
							پایین‌ترین	بالا‌ترین	
فرض برابری واریانس‌ها	۲/۰۴۸	۰/۱۶۲	۴/۷۲۶	۰/۰۰۰	۳/۹۶۶۹۱	۰/۸۳۹۴۳	۲/۲۵۴۸۸	۵/۶۷۸۹۴	
فرض نابرابری واریانس‌ها			۴/۶۹۹	۲۹/۳۰۴	۰/۰۰۰	۳/۹۶۶۹۱	۰/۸۴۴۱۵	۰/۲۴۱۲۲	۵/۶۹۲۶۱

جدول ۸- نتایج آزمون تحلیل واریانس چند متغیره

نام آزمون	مقدار F	درجه آزادی	خطا	درجه آزادی	سطح معناداری F
اثر پیلایی	۰/۴۱۹	۱۰/۸۰۶ <sup>a</sup>	۲/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
لامبدای ویلکس	۰/۵۸۱	۱۰/۸۰۶ <sup>a</sup>	۲/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
اثر هتلینگ- لالی	۰/۷۲۰	۱۰/۸۰۶ <sup>a</sup>	۲/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
بزرگترین ریشه روی	۰/۷۲۰	۱۰/۸۰۶ <sup>a</sup>	۲/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

گفت روش‌های تدریس بر درک دانش‌آموزان از مفهوم حد و توانایی فضایی آنها تأثیر می‌گذارد. البته جدول ۸ نشان نمی‌دهد که روش تدریس بر کدام یک از ابعاد "درک مفهوم حد" و "میزان توانایی فضایی" دانش‌آموزان تأثیر گذاشته است. این مسئله در جدول ۹، که تک تک

جدول ۸ خروجی آزمون MANOVA برای دو گروه را که دارای واریانس‌های برابر هستند نشان می‌دهد. با توجه به میزان سطح معناداری F (Sign = ۰/۰۰۰) که از ۰/۰۵ کمتر است، می‌توان نتیجه گرفت که فرض صفر رد و فرض یک یا مقابل تأیید می‌شود، یعنی می‌توان

حد داشته و اعمال متغیر مستقل بر درک افراد از مفهوم حد تأثیرگذار بوده است. در واقع می توان نتیجه گرفت که ارائه فعالیت های مبتنی بر تجسم در رابطه با مفهوم حد، بر افزایش توانایی فضایی دانش آموزان تأثیر چندانی نداشته است و تفاوت گروه ها در این مورد معنادار نیست. در مورد دلایل این امر در بخش بعدی بحث و بررسی می شود.

ابعاد بررسی شده اند، مشخص است. جدول ۹، نتایج تحلیل واریانس برای هر یک از متغیرها را به طور جداگانه نشان می دهد. با توجه به این جدول، سطح معناداری F در آزمون حد از ۰/۰۵ کمتر، و سطح معناداری F در آزمون توانایی فضایی نیز از ۰/۰۵ بیشتر است که نشان دهنده این مسئله است که روش های تدریس متفاوت، بیشترین تأثیر را بر درک افراد از مفهوم

جدول ۹- نتایج آزمون های تحلیل واریانس برای هر یک از متغیرها

متغیر وابسته	مجموع مجزورات	درجه آزادی	میانگین مجزورات	F	سطح معناداری F	
حد	Contrast	۱۰۸/۲۰۱	۱	۱۰۸/۲۰۱	۲۱/۱۳۳	۰/۰۰۰
	Error	۱۵۸/۷۲۰	۳۱	۵/۱۲۰		
توانایی فضایی	Contrast	۰/۹۷۴	۱	۰/۹۷۴	۳/۰۶۲	۰/۰۹۰
	Error	۹/۸۵۹	۳۱	۰/۳۱۸		

می دهد، با اینکه متوسط عملکرد فضایی دانش آموزانی که به روش تجسم محور آموزش دیده اند بیشتر از متوسط عملکرد فضایی دانش آموزانی است که بدون محوریت تجسم آموزش دیده اند، اما این تفاوت با توجه به درجه اطمینان ۹۵ درصد مورد نظر در این تحقیق و نیز بیشتر از ۰/۰۵ بودن سطح معناداری F در پس آزمون سنجش توانایی فضایی است و، معنادار نبوده و توانایی فضایی دانش آموزان گروه آزمون نسبت به دانش آموزان گروه کنترل رشد نکرده است. این نتیجه با نتایج تحقیقات عرب زاده (۲۰۰۹) و لاجینیان (۲۰۰۸) هماهنگ، اما با نتیجه تحقیقات دیگری از جمله قربانی سی سخت<sup>۹</sup> (۲۰۰۹) متناقض است.

با توجه به آنچه در بخش های قبلی گفته شد، می توان نتیجه گرفت که با آموزش مناسب می توانیم برای کمک به درک بهتر مفاهیم ریاضی، مهارت های مرتبط با تجسم دانش آموزان را ارتقا دهیم؛ چرا که دانش آموزان گروه آزمون در پاسخ گویی به سئوال های حد موفق تر از دانش آموزان گروه کنترل بودند. نمونه ای از پاسخ های

- 1- Joong
- 2- Elia
- 3- Gagatsis
- 4- Panaoura
- 5- Zachariades
- 6- Zoulinaki
- 7- Lajinian
- 8- Büyükköroğlu
- 9- Ghorbani sisakht

### نتیجه گیری

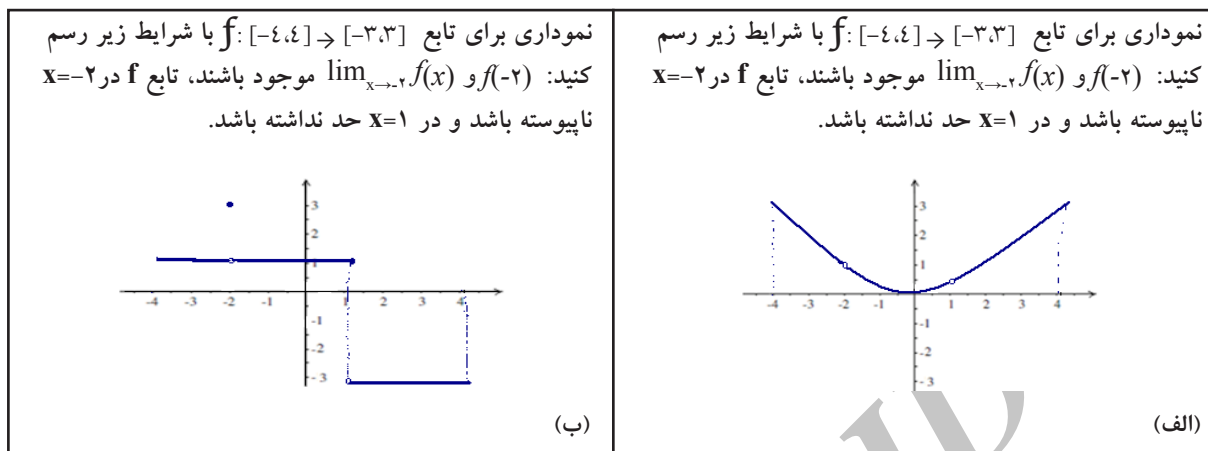
با توجه به آنچه ذکر شد، متوسط عملکرد فضایی دانش آموزان دو گروه کنترل و آزمون در پیش آزمون سنجش توانایی فضایی تقریباً برابر بوده و تفاوت دو گروه معنادار نبوده است که این هم سطح بودن دو گروه آزمایش و کنترل را در پیش آزمون نشان می دهد.

در پاسخ به سئوال اول تحقیق، مشاهده می شود که متوسط عملکرد دانش آموزان گروه آزمون در ارزیابی درک مفهوم حد بیش از متوسط عملکرد دانش آموزان گروه کنترل است. سطح معناداری F در آزمون حد کمتر از ۰/۰۵ نشان دهنده آن است که روش های متفاوت تدریس بر درک افراد از مفهوم حد تأثیر داشته و عملکرد دانش آموزان گروه آزمون در درک مفهوم حد بهتر از دانش آموزان گروه کنترل بوده، است. نتیجه اینکه فعالیت های تجسم محور بر درک دانش آموزان گروه آزمون از مفهوم حد اثر مثبت داشته است. این نتیجه با نتایج تحقیقاتی مانند جونگ<sup>۱</sup> (۲۰۰۹)، ایلیا<sup>۲</sup>، گاگاتسیس<sup>۳</sup>، پانورا<sup>۴</sup>، زاخاریا<sup>۵</sup> و زولیناکی<sup>۶</sup> (۲۰۰۹)، لاجینیان<sup>۷</sup> (۲۰۰۸) و بیوک کروگلو<sup>۸</sup> و همکاران (۲۰۰۵) هماهنگ است.

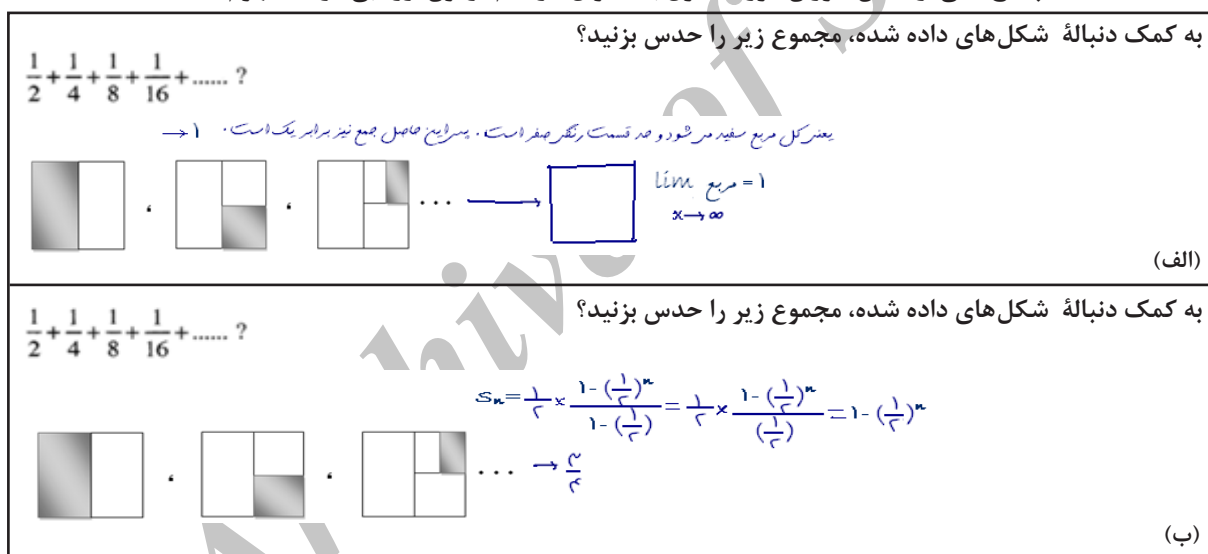
در پاسخ به سئوال دوم تحقیق نیز نتایج جدول ۹ نشان

دانش‌آموزان دو گروه به سؤال‌های ارزیابی درک مفهوم حد در شکل‌های ۳ و ۴ آمده است.

شکل ۳- (الف) نمونه پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه آزمون به سؤال هفتم آزمون ارزیابی درک مفهوم حد. (ب) نمونه پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه کنترل به سؤال هفتم آزمون ارزیابی درک مفهوم حد.



شکل ۴- (الف) نمونه پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه آزمون به سؤال یازدهم آزمون ارزیابی درک مفهوم حد. (ب) نمونه پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه کنترل به سؤال یازدهم آزمون ارزیابی درک مفهوم حد.



دانش‌آموز گروه کنترل (شکل ب) در این مرحله موفق عمل نکرده است. نسبت دانش‌آموزانی که از این سؤال نمرهٔ بیشتر از یک کسب کرده‌اند، در گروه آزمون نسبت به گروه کنترل، ۱۲ به ۱ است. بنابراین دانش‌آموزان گروه آزمون در پاسخ‌گویی به این سؤال، به مراتب بهتر عمل کرده‌اند. با توجه به شکل ۴، رویکرد دانش‌آموز گروه آزمون در پاسخ‌گویی به این سؤال نیز همانند بیشتر سؤال‌ها، استفاده از تجسم و بازنمایی‌های بصری مورد تأکید مسئله است؛ در حالی که دانش‌آموز گروه کنترل برای تعیین مجموع سری داده شده به روش‌های جبری

سؤال هفتم (شکل ۳) یک سؤال بازپاسخ است که می‌تواند دانش‌آموزان را در زمینهٔ مفاهیم مختلف، از جمله حدهای چپ و راست، حد در بی‌نهایت، دامنه و برد تابع، پیوستگی و انواع ناپیوستگی‌ها و بالاخره توانایی‌های مربوط به ترسیم نمودار به خوبی به چالش بکشد و به خصوص درک دانش‌آموزان از مفهوم حد را (که از اهداف این تحقیق است) نمایان سازد. در پاسخ‌گویی به سؤال هفتم دانش‌آموز گروه آزمون (شکل الف) بسیار بهتر توانسته است شرایط مسئله را در نموداری ساده نمایش دهد، در حالی که



شکل های ۵ و ۶، پاسخ های دو نفر از دانش آموزان به یکی دیگر از سئوال های آزمون حد آمده است. داده ها نشان می دهند که تمامی دانش آموزان گروه آزمون گزینه صحیح (ب) را انتخاب کردند، در حالی که ۲۵ درصد از دانش آموزان گروه کنترل گزینه دیگری را انتخاب کرده اند.

متوسل شده و به وضوح در این کار ناکام مانده است. در پاسخ گویی به این سئوال، ۱۰ نفر از دانش آموزان گروه آزمون توانستند نمره کامل بگیرند، در حالی که فقط سه نفر از گروه کنترل موفق به انجام این کار شده و البته بیشتر دانش آموزانی که نمره کامل سئوال را گرفته اند، برای حل مسئله از روش های بصری استفاده کرده اند. در

شکل ۵- نمونه پاسخ یکی از دانش آموزان گروه آزمون به سئوال چهارم ارزیابی درک مفهوم حد

رابطه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  در مورد کدام نمودار زیر درست است؟ فقط برای B درست در می آید؛ چون فقط گزینه B پیوسته است.

A فقط A (الف) فقط B (ب) فقط C (ج) فقط D (د) فقط A,B,C (ه)

شکل ۶- نمونه پاسخ یکی از دانش آموزان گروه آزمون به سئوال چهارم ارزیابی درک مفهوم حد

رابطه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  در مورد کدام نمودار زیر درست است؟ گزینه (ه) درست است، زیرا سه نمودار اول در نقطه ۱ توپر هستند.

A فقط A (الف) فقط B (ب) فقط C (ج) فقط D (د) فقط A,B,C (ه)

قربانی سی سخت (۲۰۰۹) که دانش آموزان ابتدایی بودند و جامعه مورد مطالعه در تحقیقات عرب زاده (۲۰۰۹)، لاجینیان (۲۰۰۸) و همچنین تحقیق حاضر که از میان دانش آموزان مقاطع راهنمایی و دبیرستان انتخاب شده بودند قابل توجه است؛ زیرا به نظر می رسد آموزش توانایی های فضایی در سنین پایین مؤثرتر است و نتایج بهتری در پی دارد. نمرات دانش آموزان گروه آزمون در درک مفهوم حد

نتایج تحلیل های آماری نیز حاکی از آن است که آموزش تجسم محور مفهوم حد به دانش آموزان می تواند به درک یادگیرندگان از این مفهوم کمک شایانی بکند. اما این روش ظاهراً در افزایش توانایی های فضایی دانش آموزان تأثیر قابل توجهی نداشته است که دلیل آن می تواند به گروه های سنی مورد مطالعه مربوط باشد. کیسی<sup>۱</sup>، نوتال<sup>۲</sup> و پزاریس<sup>۳</sup> (۲۰۰۱) معتقدند اگر دانش آموزان موقع ورود به دبیرستان توانایی های فضایی را کسب نکرده باشند، توسعه مهارت های فضایی آنها سخت خواهد بود. بنابراین این تفاوت با توجه به جامعه مورد مطالعه در تحقیق

1- Casey  
2- Nuttall  
3- Pezaris

فضایی از طریق آموزش قابل توسعه است؛ لذا برای اینکه طرح‌واره‌های مناسب و درستی در ذهن دانش‌آموزان شکل گیرد، کتاب‌های درسی و تدریس در کلاس باید مبتنی بر فعالیت‌هایی باشند که این جنبه از نمایش مفهوم حد را تقویت می‌کنند. این تحقیق روی یک موضوع درسی خاص، در یک مقطع خاص و روی جنسیتی خاص صورت گرفته است که این عوامل تعمیم‌پذیری نتایج آن را ناممکن می‌کند. با توجه به گستردگی موضوع، در برخی مطالعات آتی می‌توان تأثیر تدریس مبتنی بر تجسم بر دیگر مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال؛ تأثیر تدریس مبتنی بر تجسم بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان دوره‌های ابتدایی و راهنمایی؛ میزان آشنایی و اعتقاد معلمان به تدریس به روش تجسمی؛ تفاوت‌های احتمالی بین دختران و پسران از نظر توانایی فضایی و مانند آن را مورد بررسی قرار داد.

دریافت مقاله: ۹۱/۱/۲۲؛ پذیرش مقاله: ۹۱/۱۱/۱۷

درحالی افزایش یافته بود که این دانش‌آموزان زمان بیشتری را صرف یادگیری در کلاس نمی‌کردند و مقدار و ساعت آموزشی آنان با گروه کنترل یکسان بود. بنابراین نتایج نشان می‌دهد که با بهره‌گیری از روش تجسمی در آموزش می‌توان به دانش‌آموزان کمک کرد تا در یادگیری ریاضی فعال‌تر باشند و به درک بیشتر نایل آیند. علاوه بر این، آگاهی دانش‌آموزان از رویکردهای گوناگون نه تنها ضروری است، بلکه آنها باید بدانند کجا و چگونه از یک راهبرد و رویکرد استفاده کنند. گرچه در عمل به کار بردن روش تجسمی در تدریس مفاهیم ریاضی به سادگی روش‌های محاسباتی و جبری نیست، زیرا در مقایسه با روش تجسمی، با آموزش برخی رویه‌ها و مهارت‌های محاسباتی مربوط به حد، دانش‌آموزان به سادگی می‌توانند نمرات و نتایج خوبی از سؤال‌های رویه‌ای کسب کنند، اما با این کار فرصت کشف و درک درونی مفهوم حد از آنها گرفته می‌شود. نگاه تک بعدی و بی‌توجهی به نمادها و علائم نیز می‌تواند به همان اندازه ناکام‌کننده باشد، چون ممکن است دانش‌آموزان طرح‌واره‌های بی‌ربط و نادرست ایجاد کنند.

به نظر ریورا (۲۰۱۱)، چالش‌های آموزشی در مواردی به وجود می‌آیند که به نظر می‌رسد بین اشیاء، مفاهیم و یا فرآیندهای ریاضی و بازنمایی‌های بصری، هیچ رابطه‌ی روشنی وجود ندارد؛ یعنی تعریف و ارائه صریح و بدون واسطه مفاهیم به دانش‌آموزان باعث عدم درک مفهوم و یادگیری طوطی‌وار آنها خواهد شد. یافته‌های این پژوهش اشاره به این دارد که در شرایط مناسب و با کمک فعالیت‌های مبتنی بر تجسم می‌توان امیدوار بود که دانش‌آموزان به جای حفظ فرمول‌ها، از مفهوم مورد نظر آموزش درک عمیق‌تری پیدا کنند. همچنین تقویت توانایی فضایی در یک محیط یادگیری با نشاط و متناسب با دنیای واقعی و توانایی‌های طبیعی دانش‌آموزان، سبب درک بهتر مفاهیم انتزاعی ریاضی می‌شود.

بیشاب (۱۹۸۳)، نقل شده در ریحانی، (۲۰۰۶) معتقد است با اینکه عده‌ای توانایی فضایی را یک موهبت ذاتی می‌دانند، اما مطالعات زیادی نشان داده‌اند که توانایی

## منابع

- Arabzadeh, R. (2009). Effect of visualization-based teaching approach on attitude of 8th grade students toward mathematics [dissertation]. Tehran: Shahid Rajaei Teacher Training University.
- Broojerdian, N., & Reyhani, E., & Taaheri Tanjaani, M. T., & Alamian, V. (2010). *11th grade text book: Calculus*. Tehran: Ministry of Education.
- Büyükköroğlu, T., & Çetin, N., & Deniz, A., & Düzce, S. A., & Mahir, N., & Üreyen, M. (2006). The effect of computers on teaching the limit concept. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.
- Casey, M. B., & Nuttall, R. L., & Pezaris, E. (2001). Spatial-mechanical reasoning skills versus mathematics self-confidence as mediators of gender differences on mathematics subtests using cross-national gender-based items. *Research in Mathematics Education*, 32, 28-57.
- Elia, I., & Gagatsis, A., & Panaoura, A., & Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and Algebraic approaches in the concept of Limit and the impact of the Didactic contract. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 765-79.
- Ghorbani-Sisakht, z. (2009). Effect of visual representation of fractions on 4th grade students' understanding of fractions [dissertation]. Tehran: Shahid Rajaei Teacher Training University.
- Hegarty, M. (2004). *Diagrams in the mind and in the world: Relations between internal and external visualizations*. Cambridge: Springer.
- Hitt, F., & Lara-Chavez, H. (1999). Limits, continuity and discontinuity of functions from two points of view: that of the teacher and that of the student. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 19, 49-54.
- Jones, K. (2001). Spatial thinking and visualization: *Teaching and learning geometry*, 19, 55-56.
- Joong, K. D. (2009). Comparison of native-English and native-Korean speaking university students' discourse on infinity and limit [dissertation]: Michigan State University.
- Jordaan, T. (2005). Misconception of the limit concept in a mathematics course for engineering students. [dissertation]. University of South Africa.
- Juter, K. (2006). Limits of Functions University Students' Concept Development [dissertation]. Sweden: Lulea University of Technology.
- Lajinian, A. (2008). The effect of visually enhanced instructional units on high school calculus students' visualization ability and their understanding of the limit concept [dissertation]. New Jersey: Montclair State university.
- Mancosu, P. (2005). *Visualization in logic and mathematics: Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Meija-Ramos, J. P., & Tall, D. O. (2004). Reflecting on Post-Calculus-Reform. *Opening Plenary for Topic Group 12: Calculus, 10th International Congress of Mathematics Education*. Copenhagen, Denmark.
- Principles and Standards for School Mathematics. (2000). The National Council of Teachers of Mathematics Inc.
- Phillips, L. M., & Norris, S. P., & Macnab, J. S. (2010). *Visualization in Mathematics, Reading and Science Education*. The University of Reading: UK: Springer.
- Reyhani, E. (2006). Nature of spatial ability. *Roshd Journal of Mathematics Education*, 85, 27-35.
- Reyhani, E., & Haji Babaei, J., & Arabzadeh, R. (2011). Effect of visualization-based teaching approach on problem solving ability of 8th grade students. *Journal of Educational Innovation*, 38.
- Rivera, F.D. (2011). *Toward a Visually-Oriented School Mathematics Curriculum*. London: Springer.
- Segenchuk, S. (2011). The Role of Visualization in Education. Retrieved from <http://web.cs.wpi.edu/~matt/courses/cs563/talks/education/IEindex.html>.
- Tall, D. O., Editor. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. O. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. Rio de Janeiro, Brasil: *First Coloquio no História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, 1, 1-28.
- Tall, D. O. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23, 29-33.
- Tall, D. O. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings from the 28th Conference of PME*, 281-288; Bergen, Norway.
- Tall, D. O. (2007). Embodiment, Symbolism and Formalism in undergraduate Mathematics Education. *Research in Undergraduate Mathematics Education*, Feb: 22-27.