

اثر خواص الاستیک یک سیال غیر نیوتنی بر ضخامت

فیلم مایع آن در عملیات روکش دهی آزاد

کیوان صادقی^۱، مهدی شریفی^۲

دانشگاه تهران - دانشکده فنی - گروه مهندسی مکانیک، تهران - ایران

در این مقاله، اثر خواص الاستیک یک سیال غیر نیوتنی بر ضخامت فیلم مایع آن در فرآیند روکشدهی از نوع آزاد بطور نظری مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، سیال ویسکوالاستیکی از خانواده Rivlin-Erickson برای مطالعه انتخاب شد و جریان آرام القا شده در این سیال در اثر حرکت یک ورق مسطح مورد بررسی قرار گرفت. برای ساده کردن معادلات حرکت، از تقریب لایه مرزی استفاده به عمل آمد و این معادلات نیز با استفاده از روش Falkner-Skan از فرم PDE به یک معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه ۴ از نوع ODE تبدیل شدند. بعلت کم بودن تعداد شرطهای مرزی مسئله، از ترکیبی از روش پرتابه‌ای و روش تفاضل محدود برای حل این معادله استفاده گردید. نتایج بدست آمده نشان میدهد که خواص الاستیک یک سیال موجب کاهش در ضخامت لایه مرزی آن میگردد که این پیش بینی بطور کیفی با مشاهدات تجربی مطابقت دارد.

واژه‌های راهنما: سیال ویسکوالاستیک، لایه مرزی، عدد دبورا، روش پرتابی، روش تفاضل محدود

۱- مقدمه

در بسیاری از صنایع، با جریان یک سیال غیر قابل تراکم در بالای یک صفحه متحرک مواجه هستیم. اگستروژن ورقها و مفتولهای پلاستیکی، خنک سازی صفحات بسیار بزرگ فلزی در حمام آب سرد، جریان در بالای تسمه نقاله ها و نیز انواع عملیات روکشدهی از نوع آزاد^۳ مثالهایی آشنا در این رابطه بشمار میروند. در این میان، عملیات روکشدهی از نوع آزاد بعلت کاربرد وسیعی که در تولید برخی محصولات مهم صنعتی همچون نوار چسب، کاغذ دیواری، فیلمهای عکاسی و ویدیویی، ورق گالوانیزه و ... دارند از اهمیتی ویژه برخوردار می باشند [۱]. در طی چنین فرآیندی، تسمه ای متحرک بطور پیوسته و با سرعتی ثابت از میان

^۱ استادیار گروه مهندسی مکانیک

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد

^۳ Free Coating Processes

سیالی نامتناهی بیرون کشیده میشود و به همراه خود مقداری از سیال را از ظرف خارج می‌سازد. سیالیکه بدین صورت از ظرف خارج میشود پس از خشک شدن بصورت روکشی هموار روی سطح مورد نظر را می‌پوشاند. بدیهی است در چنین عملیاتی ضخامت نهایی فیلم مایع و نیروی لازم برای به حرکت در آوردن ورق جزو مهمترین پارامترهای طراحی به شمار میروند. در مواردیکه سیال مورد نظر از نوع نیوتنی است امروزه میتوان این پارامترها را با دقت بسیار بالایی پیش بینی نمود [۲]، با اینوصف باید اذعان نمود که اغلب سیالات مهم صنعتی (بخصوص سیالاتی که برای روکشدهی بکار برده میشوند) دارای رفتاری غیر نیوتنی می‌باشند و متاسفانه در مورد این دسته از سیالات، پیش بینی پارامترهای مزبور بطرق نظری چندان موفقیت آمیز نبوده است [۳].

نکته ای که در مورد سیالات غیر نیوتنی جلب توجه می‌نماید این است که تا به امروز کلیه پیش بینیهای انجام شده در مورد ضخامت فیلم مایع این دسته از سیالات بطور تعجب آوری بیش از مقادیر تجربی بوده است [۳]. برای توجیه این امر، کلاً دو نظریه زیر پیشنهاد شده اند: در نظریه اول که بتوسط Spiers [۳] و Middleman [۴] مطرح شد کمتر بودن ضخامتهای تجربی از ضخامتهای تئوریک، به خواص الاستیک سیالات مورد آزمایش نسبت داده شد. بر طبق این نظریه، در اکثر عملیات روکش دهی از نوع آزاد، نرخ تغییر شکل بسیار بالاست و در نتیجه این احتمال قوی وجود دارد که حتی برای سیالاتی که ظاهراً غیر الاستیک می‌باشند تنشهای الاستیک به اندازه کافی بزرگ گردند بنحویکه موجب کاهش عملی در ضخامت فیلم مایع شوند. در نظریه دوم که بوسیله Dutta و Mashelkar پیشنهاد شد [۵] کمتر بودن مقادیر تجربی از مقادیر نظری به لغزش سیال در دیواره نسبت داده شد.

Middleman و Spiers برای اثبات نظریه خود از روشهای استدلالی استفاده نمودند. در این کار تحقیقاتی نشان خواهیم داد که نظریه آنان از روشهای تئوریک نیز قابل اثبات است. برای این منظور مطابق شکل (۱) جریان آرام ایجاد شده در یک سیال ویسکوالاستیک از نوع Rivlin-Erickson [۶] را در بالای یک صفحه تخت که با سرعت ثابت U_w در حرکت است در نظر میگیریم. در این کار تحقیقاتی، فرض شده است که صفحه مزبور از نوع غیر قابل اتساع بوده و تمامی نقاط واقع بر آن دارای سرعتی یکسان باشند. حالتی که صفحات از نوع قابل اتساع (Stretching Sheets) هستند، بیشتر مورد توجه محققین بوده است [۷-۹]. در حقیقت، بر طبق بررسیهای انجام شده، ظاهراً Hasanien تنها کسی است که جریان این سیال ویسکوالاستیک را در بالای یک صفحه غیر قابل اتساع مورد مطالعه قرار داده است [۱۰]. از طرف دیگر، هدف اصلی Hasanien از این مطالعات در واقع محاسبه ضریب اصطکاک پوسته ای برای این جریان خاص بوده است بطوریکه در مرجع [۱۰] هیچگونه اشاره ای به ضخامت لایه مرزی و تاثیر خواص الاستیک سیال بر آن نشده است. روش Hasanien برای ساده سازی معادلات حرکت، استفاده از فرضیات لایه مرزی بوده است که بعلت بالا بودن عدد رینولدز در اغلب فرآیندهای روکشدهی از نوع آزاد ایده قابل قبولی بنظر می‌رسد. با اینوصف بعلت بالا بودن درجه معادلات دیفرانسیل حاکمه و بعلت کم بودن تعداد شرطهای مرزی، Hasanien مجبور شده است که برای بدست آوردن پروفیل سرعت و در نهایت ضریب اصطکاک پوسته ای از تئوری Perturbation استفاده کند که کارآیی آن در مورد سیالات ویسکوالاستیک مورد شک و تردید جدی می‌باشد [۱۱]. از طرف دیگر، بعلت محدودیتهای ذاتی این تئوری، امکان بدست آوردن پروفیل سرعت در

اعداد الاستیکی بزرگتر از 0.2 برای Hasanien وجود نداشته است. در این کار تحقیقاتی نشان خواهیم داد که ترکیبی از روش پرتابه‌ای (Shooting Method) به همراه روش تفاضل محدود (Finite Difference) ما را قادر می‌سازد که معادلات لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک انتخابی را در بالای یک صفحه متحرک غیر قابل اتساع با دقت زیاد و برای عدد الاستیک بزرگتر از یک (که تاکنون امکان دستیابی به آن وجود نداشته است) حل نموده و بدین ترتیب تاثیر خواص الاستیک سیال را بر پروفیل سرعت، ضخامت لایه مرزی و نیز توزیع تنش برشی در دیواره بدست آوریم.

۲- معادلات حاکمه

اولین گام در تحلیل لایه مرزی یک سیال غیر نیوتنی، تصمیم‌گیری در مورد معادله اساسی^۱ سیال مورد نظر است. با توجه به تنوع سیالات غیر نیوتنی طبیعی است که در اینجا با تنوعی از معادلات اساسی (که معمولاً بسیار پیچیده تر از معادله اساسی یک سیال نیوتنی می‌باشند) مواجه هستیم. در این کار تحقیقاتی، به منظور فراهم نمودن امکان مقایسه نتایج محاسبات خود با نتایج سایر محققین، تصمیم گرفته شده است که از یکی از ساده ترین و متداولترین مدل‌های ویسکوالاستیک استفاده شود. سیال انتخابی در واقع جزو خانواده سیالات Rivlin-Erickson بشمار میرود که کلاً سیالاتی ساده با حافظه میرا (Fading Memory Fluids) محسوب میگردند. معادله اساسی سیال انتخابی بصورت زیر است [۶]:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(E_{ij} - \lambda \overset{\nabla}{E}_{ij}) \quad (1)$$

در رابطه فوق، σ تنسور تنش کل، δ تنسور واحد، E تنسور نرخ تغییر شکل، p فشار ایزوتروپیک، μ ویسکوزیته برشی و λ زمان طبیعی (Relaxation Time) سیال است. نگاهی مجدد به معادله فوق نشان میدهد که تنها اختلاف آن با یک سیال نیوتنی در ترمی می‌باشد که شامل λ است. این ترم معرف رفتار الاستیک سیال است و در مورد سیالات نیوتنی بعلت صفر بودن زمان طبیعی آنها این ترم کلاً وجود ندارد. در ضمن در معادله فوق، علامت ∇ در بالای تنسور نرخ تغییر شکل E معرف نوع خاصی از مشتق زمانی است که در متون رئولوژی از آن تحت عنوان Upper-Convected Time Derivative یاد می‌شود [۶]. مشتق مزبور هنگامیکه بر روی تنسوری همچون E اثر کند علاوه بر ترم آشنای مشتق مادی (که با D/Dt نشان داده شده است) دو ترم دیگر، که در ارتباط با تنسور گرادیان سرعت L_{ij} هستند، بصورت زیر تولید می‌کند [۱۲]:

$$\overset{\nabla}{E}_{ij} = \frac{D}{Dt} E_{ij} + L_{ki} E_{kj} + L_{kj} E_{ik} \quad (2)$$

تعریف فوق در مورد مشتق زمانی موجب می‌گردد که نه تنها خواص سیال (μ, λ) مستقل از دستگاه مختصات گردند بلکه علاوه بر آن و مطابق انتظار، دوران ذرات سیال نیز نتواند تنش اضافی را در سیال القا نماید. بعبارت دیگر، در سایه استفاده از این نوع خاص از مشتق زمانی، معادله اساسی یک سیال بطور صحیح مستقل از دستگاه مختصات و حرکت ناظر می‌گردد. در ضمن، لازم بذکر است که معادله اساسی مورد اشاره در رابطه (۱) به همراه مشتق زمانی فوق در واقع جزو ساده ترین معادلات اساسی در مورد سیالات غیر نیوتنی بشمار میرود. با اینوصف، با توجه به اینکه هدف اصلی این کار تحقیقاتی مطالعه اثر خواص الاستیک یک سیال بر خصوصیات لایه مرزی آن در فرآیند روکشی از نوع آزاد، آن هم بطور کیفی، است بنظر میرسد که این معادله بتواند بخوبی اهداف این پروژه را تامین نماید. در ضمن میتوان براحتی نشان داد که اگر تنش σ را بصورت یک سری بر حسب تنسور نرخ تغییر شکل E بنویسیم در اینصورت سیال نیوتنی، ترم اول این سری و سیال فوق الذکر ترم دوم این سری را تشکیل خواهند داد. به همین دلیل، سیالات نیوتنی را اصطلاحاً سیالات مرتبه اول و سیال مزبور را اصطلاحاً سیال مرتبه دوم (Second-Order Fluid) می‌نامند. در مطالعات مربوط به لایه مرزی سیالات ویسکوالاستیک، سیال مرتبه دوم دارای این مزیت بزرگ است که همچون یک سیال نیوتنی ویسکوزیته آن ثابت است و در نتیجه میتوان از اثرات پیچیده کننده ایکه ویسکوزیته متغیر سیالات غیرنیوتنی (در کلی ترین حالت آن) بر خصوصیات لایه مرزی آنها دارد اجتناب نمود و صرفاً بر روی اثری که خواص الاستیک یک سیال بر روی خصوصیات لایه مرزی آن دارد متمرکز شد.

پس از تصمیم گیری در مورد نوع سیال و معادله اساسی آن، در گام بعد میتوان مؤلفه های تنسور تنش را از معادله (۱) محاسبه نمود و آنها را در معادلات حرکت Cauchy قرار داد. حال با استفاده از تقریب لایه مرزی میتوان نشان داد که در مورد جریان یک سیال مرتبه دوم در بالای یک صفحه متحرک، معادله ممنتوم در جهت y همچون حالت نیوتنی به ثابت بودن فشار در هر مقطع از لایه مرزی تقلیل می یابد اما در جهت x علاوه بر ترمهای نیوتنی، معادله ممنتوم شامل چندین ترم الاستیک بصورت زیر نیز میگردد که در داخل پرانتز جمع آوری شده اند [۱۳]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (3)$$

در روابط فوق u و v مؤلفه های سرعت در داخل لایه مرزی، v ویسکوزیته سینماتیک و α نیز ضریبی ویسکوالاستیک برابر با حاصلضرب λv است. شرایط مرزی مسئله نیز بصورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} y = 0; & \quad u = U_w; & \quad v = 0 \\ y \rightarrow \infty; & \quad u \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4)$$

در رابطه فوق U_w سرعت ورق است که برای تمام نقاط ورق یکی در نظر گرفته میشود. حال با فرض غیر قابل تراکم بودن سیال، معادله پیوستگی آن را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

معادلات (۳) و (۵) به همراه شرایط مرزی (۴) تشکیل دستگاه معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی می دهند که با حل آنها بطور همزمان میتوان به میدان سرعت (u, v) دست یافت. متأسفانه برای این دستگاه معادلات دیفرانسیل تاکنون حل تحلیلی پیدا نشده است و لازم است به طریق عددی حل شود. روش معمول برای حل این معادله معرفی نمودن تابع جریان Ψ بصورت زیر است [۱۴].

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6)$$

حال با استفاده از متغیر تشابه ای η میتوان تابع جریان Ψ را بصورت تابع $f(\eta)$ بدون بعد نمود و دنبال حلهای متشابه برای این جریان گشت:

$$\Psi(x, y) = f(\eta) \sqrt{vxU_w}$$

$$\eta(x, y) = y \sqrt{\frac{U_w}{vx}} \quad (7)$$

با جایگذاری عبارات فوق در معادلات حاکمه میتوان به معادله دیفرانسیل زیر که یک معادله ODE غیر خطی از نوع مرتبه ۴ است، رسید:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' + \frac{K}{2}(ff'' + 2ff''' - f'^2) = 0 \quad (8)$$

با توجه به معادله (۴) شرایط مرزی معادله فوق به صورت زیر در می آیند:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f'(\infty) = 0 \quad (9)$$

در رابطه (۸)، ضریب K عددی بدون بعد و برابر با نسبت $\frac{\lambda U_w}{x}$ است. با توجه به ظاهر شدن زمان طبیعی سیال در این عدد بدون بعد، در متون غیر تخصصی [۱۰]، معمولاً از این عدد بدون بعد تحت عنوان عدد الاستیک یاد میشود ولی با توجه به اینکه K در حقیقت نسبت زمان طبیعی سیال به زمان مشخصه جریان، x/U_w ، است بنابراین بهتر است آن را بصورت عدد بدون بعد Deborah تعبیر نمود که معمولاً با نماد De نشان داده میشود و جزو مهمترین اعداد بدون بعد در مورد سیالات ویسکوالاستیک به شمار میرود [۱۲]. در

حقیقت، بررسیهای متعدد تجربی و نیز تئوریهای مولکولی جملگی حاکی از آن است که اگر این عدد بدون بعد از مرتبه یک باشد در اینصورت رفتار الاستیک یک سیال غیر نیوتنی همچون رفتار ویسکوز آن حائز اهمیت میگردد [۱۲]. در ضمن با توجه به ظاهر شدن x در معادله (۸) میتوان نتیجه گرفت که برای این سیال خاص و در این جریان خاص، پروفیلهای سرعت با یکدیگر متشابه نمی باشند. با اینوصف نگاهی مجدد به این معادله نشان میدهد که امکان بدست آوردن حلهای متشابه از نوع موضعی (Local Similarity Solution) برای این مسئله وجود دارد [۱۵]. برای این منظور کافی است در هر x معینی (که متناظر با عدد رینولدز معینی است) با تغییر خاصیت λ سیال و یا سرعت ورق U ، مقدار K را در معادله (۸) بدلیخواه تغییر داد و بدین ترتیب تاثیر الاستیسیته سیال (عدد دبور) را بر پروفیل سرعت و سایر خصوصیات لایه مرزی آن در هر مقطع از صفحه متحرک بطور موضعی بررسی نمود.

۳- روش حل

معادله (۸) یک معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه ۴ است و برای حل نیاز به ۴ شرط مرزی دارد. با توجه به موجود بودن تنها ۳ شرط مرزی، واضح است که حل این معادله بطریق تحلیلی و یا عددی (با استفاده از روشهای متداولی همچون رانج کوتا، روش پرتابه‌ای و یا روش تفاضل محدود) امکان پذیر نیست. از طرف دیگر از آنجاییکه در نقطه $\eta = 0$ مقدار f برابر با صفر میگردد در نتیجه در این نقطه خاص ترم f^{iv} از معادله حذف میشود. این بدان که نقطه $\eta = 0$ یک نقطه منفرد (Singularity) برای معادله (۸) است بطوریکه حل این معادله در مراحل اولیه با دشواری بیشتری مواجه می باشد. با توجه به این مشکلات، Hassanien [۱۰] همچون اغلب محققین [۱۶] از روش Perturbation برای حل این معادله استفاده نمود. در حقیقت، Hassanien با این فرض که K بسیار کوچک باشد f را به صورت عبارت $f = f_0 + Kf_1$ در نظر گرفت و سپس معادله ۸ را به دو معادله دیفرانسیل مرتبه ۳ بر حسب f_0 و f_1 تبدیل نمود که با توجه به موجود بودن سه شرط مرزی، هر دو معادله قابل حل بطریق عددی بودند. متأسفانه با توجه به محدودیتهای ذاتی روش Perturbation نتایج بدست آمده توسط Hassanien به مقادیر K کوچکتر از ۰.۲ اختصاص دارد. عبارت دیگر امکان پیش بینی رفتار سیال مورد نظر به ازای مقادیر بزرگ K (نزدیک به مقدار بحرانی عدد دبور) در این روش وجود ندارد. در این مقاله با استفاده از یک روش ابتکاری [۱۱] نشان خواهیم داد که میتوان بدون توسل جستن به روش Perturbation، معادله (۸) را به ازای مقادیر K بزرگتر از یک (که تا به امروز امکان پذیر نبوده است) حل نمود. در این روش ابتکاری لازم است در ابتدا معادله (۸) به فرم خاصی نوشته شود تا از نقطه منفردی که در بالا بدان اشاره شد اجتناب گردد. در مرحله بعد، از ترکیبی از روش تفاضل محدود و روش پرتابه‌ای به همراه بسط سری تیلر برای حل این معادله استفاده میشود. برای این منظور در ابتدا تبدیلات زیر معرفی می گردند:

$$y_1 = f, y_2 = f', y_3 = f'', y_3' = f''', y_3'' = f^{iv}$$

(۱۰)

با اعمال تبدیلات فوق در روابط (۸) و (۹) به معادلات زیر خواهیم رسید [۱۴].

$$y_3' + \frac{1}{2}y_1y_3 + \frac{K}{2}(y_1y_3'' + 2y_2y_3 - y_3^2) = 0$$

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} = 1,$$

(۱۱)

در مرحله بعد، دامنه η به N قسمت مساوی تقسیم میشود:

$$\eta_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

(۱۲)

با توجه به اینکه از نقطه نظر تئوریک، دامنه η بین صفر تا بینهایت تغییر میکند برای اینکه تقسیم بندی دامنه به N قسمت مساوی از نظر فیزیکی معنی داشته باشد لازم بود برای η مقداری متناهی (که به اندازه کافی بزرگ باشد) به جای بینهایت در نظر گرفته می شود. انتخاب مقداری متناهی برای η به جای بینهایت امری مجاز در مباحث مربوط به لایه مرزی به شمار میرود زیرا اگر چه از نقطه نظر تئوریک تاثیر لایه مرزی تا بینهایت گسترش دارد اما در عمل بعد از لبه لایه مرزی میتوان از تاثیر دیواره بر جریان آزاد چشم پوشید. محاسبات قبلی انجام شده توسط Sakiadis (در مورد سیالات نیوتنی) و Hassanien (در مورد سیالات غیرنیوتنی) در جریان بالای یک صفحه متحرک هر دو حاکی از آن است که در بالاتر از $\eta = 8$ میتوان از تاثیر لایه مرزی بر جریان آزاد صرف نظر کرد. در این پروژه تحقیقاتی مقدار ماکزیمم η برای اطمینان بیشتر برابر با ۲۰ (به جای بینهایت) در نظر گرفته شد. در ضمن تعداد تقسیمات N نیز به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته شد تا تاثیر سائز شبکه بر روی نتایج ناچیز (کمتر از مقدار 10^{-5}) گردد. در عمل مقدار N برابر با ۱۰۰۰۰ برای انجام کلیه محاسبات مناسب تشخیص داده شد.

پس از تصمیم گیری در مورد η و N ، در مرحله بعد با جایگذاری تقریب تفاضل محدود مرکزی برای y_3 و مشتقات آن در معادله (۱۱) به رابطه زیر خواهیم رسید [۱۴]:

$$\frac{y_3^{j+1} - y_3^{j-1}}{2h} + \frac{1}{2}y_1^j y_3^j + \frac{K}{2}(y_1^j \frac{y_3^{j+1} - 2y_3^j + y_3^{j-1}}{h^2} + 2y_2^j y_3^j - y_3^{j2}) = 0$$

(۱۳)

از رابطه فوق میتوان y_3^{j+1} را به طور صریح بصورت زیر بدست آورد [۱۴]:

$$y_3^{j+1} = (1 + \frac{K}{h}y_1^j)^{-1} \{y_3^{j-1} - hy_1^j y_3^j - K[y_1^j \frac{-2y_3^j + y_3^{j-1}}{h} + 2hy_2^j y_3^j - hy_3^{j2}]\}$$

(۱۴)

y_1 و y_2 را نیز میتوان بر حسب مشتقات آنها به فرم زیر نوشت:

$$y_2^{j+1} = y_2^j + \frac{1}{2}h(y_3^j + y_3^{j+1}), \quad (15)$$

$$y_1^{j+1} = y_1^j + \frac{1}{2}h(y_2^j + y_2^{j+1}),$$

شرایط مرزی (۱۲) نیز بصورت زیر در می‌آیند:

$$y_1^0 = 0, y_2^0 = 0, y_2^N = 1, \quad (16)$$

حال برای استفاده از روش پرتابه‌ای، حدس اولیه‌ای برای $f''(0)$ (که در واقع همان y_3^0 است) انتخاب میشود، در صورتیکه y_3^1 معلوم باشد، می‌توان y_2^1 و y_1^1 را به ترتیب از روابط (۱۶) و (۱۷) محاسبه نمود و سپس با مشخص شدن آنها مقدار y_3^2 را از رابطه (۱۵) بدست آورد. برای محاسبه بقیه مقادیر متناظر با $z > 1$ نیز لازم است ابتدا مقادیر y_2^{j+1} و y_1^{j+1} را از روابط (۱۶) و (۱۷) محاسبه نمود و سپس با استفاده از آنها y_3^{j+1} را از معادله (۱۵) بدست آورد و این عمل را تا جایی که z برابر با $N-1$ شود، تکرار نمود. در انتهای محاسبات، مقدار بدست آمده برای y_2^N با شرط مرزی آن در بینهایت مقایسه می‌شود و در صورتی که با آن اختلاف داشته باشد با استفاده از روش Secant، حدس اولیه در مورد $f''(0)$ اصلاح شده و عملیات تا رسیدن به نتیجه مطلوب تکرار میشود.

همانطور که در بالا اشاره شد، برای اینکه روش فوق قابل اجرا گردد لازم است مقدار y_3^1 معلوم باشد. برای تعیین مقدار y_3^1 میتوان بسط تیلر آن را حول نقطه $\eta = 0$ با دقت $O(h^2)$ به صورت زیر نوشت:

$$y_3^1 = y_3^0 + h(y_3^0)' + \frac{h^2}{2!}(y_3^0)'' + \dots \quad (17)$$

مطابق با آنچه قبلاً گفته شد در رابطه فوق y_3^0 در واقع همان $f''(0)$ است و داریم:

$$y_3^1 = f''(0) + hf'''(0) + \frac{h^2}{2!}f^{iv}(0) + \dots, \quad (18)$$

در نقطه $\eta = 0$ ، میتوان $f'''(0)$ را مستقیماً از معادله (۸) بدست آورد. برای بدست آوردن $f^{iv}(0)$ نیز کفایت از معادله (۸) مشتق گرفته و مقدار $f^{iv}(0)$ را بصورت زیر بدست آوریم:

$$f'''(0) = \frac{K}{2}[f''^2(0) - 2f''(0)] \quad (19)$$

$$f^{iv}(0) = \left(\frac{2}{2+K}\right)[Kf''(0)f'''(0) - Kf''^2(0) - Kf'''(0) - f''(0)/2]$$

با معلوم شدن $f'''(0)$ و $f^{iv}(0)$ از روابط (۱۹)، میتوان براحتی y_3^1 را از رابطه (۱۸) بدست آورد و بدین ترتیب امکان حل معادله (۸) نیز فراهم میگردد [۱۴]. با حل این معادله، میتوان براحتی پروفیل سرعت در داخل لایه مرزی و نیز توزیع تنش برشی در دیواره را بر حسب عدد رینولدز Re_x و یا عدد دبورا De_x (همان عدد الاستیک K) بدست آورد.

$$f'(\eta) = \frac{u}{U_w}, \quad C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_w^2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{Re_x}}$$

$$Re_x = \frac{xU_w}{\nu}, \quad De_x = \frac{\lambda U_w}{x}$$

(۲۰)

با توجه به روابط فوق، واضح است که در طول ورق، عدد رینولدز بطور یکنواخت افزایش می یابد اما برعکس عدد دبورا بطور پیوسته کاهش پیدا میکند. از طرف دیگر، به ازای یک x معین (و به اندازه کافی دور از نقطه $x=0$) و برای سیالی با ویسکوزیته ثابت، عدد رینولدز مقدار ثابتی خواهد داشت و این در حالی است که میتوان عدد دبورا را بطور پیوسته با افزایش λ افزایش داد. در ضمن میتوان برای سیالی با خواص لزجت و خواص الاستیک معین، در هر مقطع از صفحه، عدد دبورا و عدد رینولدز را بطور دلخواه با افزایش سرعت ورق U_w افزایش داد.

۴- نتایج بدست آمده

شکل (۲) پروفیل سرعت در داخل لایه مرزی را برای جریان آرام سیال مورد نظر در بالای ورق متحرک نشان میدهد. در این شکل، تاثیر عدد الاستیک K بر روی پروفیل سرعت بخوبی نشان داده شده است. نمودار $K=0$ در این شکل متناظر با حل Sakiadis برای یک سیال نیوتنی است [۱۷]. همانطور که در این شکل مشاهده می شود، با افزایش K (بعبارت دیگر با افزایش الاستیسیته سیال) ناحیه ای که تحت تاثیر دیواره متحرک قرار میگیرد بطور پیوسته نازکتر میشود. بعبارت دیگر، بنظر میرسد که در این نوع خاص از جریان، در اثر خواص الاستیک یک سیال، ضخامت لایه مرزی کمتر از مقدار نیوتنی آن باشد (تحت شرایط یکسان از نظر خواص ویسکوز). هنگامیکه این پیش بینی را با پیش بینی کاملاً متفاوت Harris [۱۷] در مورد جریان این سیال بالای یک صفحه ساکن (جریان بلازیوس) مقایسه می کنیم به این نتیجه گیری مهم می رسیم که تاثیر الاستیسیته یک سیال بر ضخامت لایه مرزی آن بستگی به نوع جریان دارد و ممکن است موجب افزایش و یا کاهش در ضخامت لایه مرزی گردد. کاهش در ضخامت لایه مرزی در جریان بالای یک صفحه متحرک دارای توجیه فیزیکی است. در واقع حرکت صفحه متحرک موجب تغییر شکل ذرات سیال در مجاورت دیواره میشود که این امر منجر به ظهور تنشهای الاستیک در سیال میگردد. از آنجاییکه تنشهای مزبور از نوع کششی بوده و در جهت جریان می باشند میتوانند براحتی موجب شتاب دادن به ذرات سیال و

در نتیجه نازک شدن لایه مرزی آن گردند. این امر تلویحاً بدان معناست که برای یک سیال ویسکوالاستیک امکان تشکیل لایه مرزی حتی در رینولدزهای کم نیز وجود دارد مشروط بر آنکه سیال به اندازه کافی الاستیک باشد (البته اثبات این امر نیاز به بررسیهای دقیقتری دارد که موضوع تحقیقات آتی می باشد). در ضمن برای سیالی معین با خواص ویسکوالاستیک معین (بعبارت دیگر، به ازای μ و λ معین)، افزایش در عدد الاستیک K فقط با افزایش در سرعت ورق امکان پذیر است و با توجه به تاثیر K بر ضخامت لایه مرزی، میتوان نتیجه گرفت که با افزایش سرعت ورق، ضخامت فیلم مایع بطور پیوسته کاهش یابد که این امر نیز با مشاهدات تجربی هماهنگی دارد [۳-۵].

شکل (۳) بوضوح تاثیر عدد الاستیک K را بر روی ضخامت لایه مرزی بدون بعد η^* نشان میدهد (برای تعریف η به معادله (۷) رجوع شود). نکته ای که در این شکل قابل ذکر بنظر میرسد این است که در صورتیکه عدد الاستیک K به اندازه کافی کوچک باشد، در اینصورت ضخامت لایه مرزی بدون بعد η^* بطور خطی با K تغییر میکند اما هنگامیکه عدد K از یک بزرگتر میگردد رابطه مزبور غیر خطی شده و تغییر در ضخامت لایه مرزی شدیدتر میگردد. بعبارت دیگر، پیش بینی میشود که در این نوع خاص از جریان عدد الاستیک (عدد دیورا De) دارای مقداری بحرانی که در حدود یک است باشد. وجود مقدار بحرانی برای عدد دیورا امری شناخته شده است [۱۲]. در واقع تئوریهای پیچیده مولکولی نیز وجود مقدار بحرانی (از مرتبه یک) را برای این عدد بدون بعد پیش بینی نموده اند [۱۲]. بررسیهای تجربی نیز همگی حاکی از وجود مقدار بحرانی برای این عدد بدون بعد می باشند. این مقدار بحرانی بستگی به نوع جریان دارد و لی همواره از مرتبه یک است [۱۲].

شکل (۴) توزیع ضریب اصطکاک پوسته ای C_f را در بالای یک ورق متحرک بر حسب مقادیر مختلف عدد الاستیک K نشان میدهد. همانطور که در این شکل مشاهده میشود در اثر الاستیسیته سیال، ضریب اصطکاک پوسته ای از مقدار نیوتنی آن بیشتر می گردد و هر چقدر الاستیسیته سیال (بعبارت دیگر K) بیشتر باشد میزان افزایش در ضریب C_f نیز بیشتر خواهد بود. این پیش بینی با پیش بینی Harris [۱۷] در مورد این سیال (که با استفاده از معادله انتگرال ممنوم بدست آمده است) و نیز با پیش بینی Hassanien [۱۰] که با استفاده از روش Perturbation بدست آمده است در تطابق کامل است. در واقع شکل (۴) نشان میدهد که مقادیر C_f حاصل از این کار تحقیقاتی و مقادیر بدست آمده توسط Hassanien صرف نظر از روشی که در بدست آوردن آنها بکار رفته است دارای رفتاری شبیه به هم بوده و از نظر مقدار نیز بیکدیگر نزدیک می باشند. با توجه به تشابه ای که بین پروفیلهای سرعت حاصل از این دو روش وجود دارد (این تشابه در $K = 0.1$ در شکل (۵) بخوبی نشان داده شده است)، تشابه بین ضریب C_f حاصل از این دو روش کاملاً قابل درک است. از نظر فیزیکی، میتوان گفت که ظهور تنشهای الاستیک در یک سیال، موجب شتاب گرفتن سیال و در نتیجه افزایش گرادیان سرعت در مجاور دیواره میگردد. بنابراین افزایش در تنش برشی در اثر افزایش در الاستیسیته سیال امری منطقی بنظر میرسد که در مقاله Hassanien نیز منعکس شده است. متأسفانه Hassanien قادر به محاسبه ضریب مزبور در اعداد بزرگ الاستیک K نشده است. شکل (۴) برای نخستین بار نشان میدهد که افزایش C_f با K در ابتدا بصورت خطی است اما در K های بزرگ (نزدیک به یک) این افزایش با شدت بیشتری صورت می پذیرد. همانطور که در بالا اشاره شد مقدار

بحرانی عدد دבורا در حدود یک است و این امر در شکل (۳) در مورد ضخامت لایه مرزی قبلاً خود را نشان داده است. شکل (۴) تاییدی دیگر بر وجود مقدار بحرانی برای این عدد است و در انطباق کامل با شکل (۳) قرار دارد.

۵- نتیجه گیری کلی

بر اساس محاسبات انجام شده در این پروژه، میتوان به این نتیجه گیری مهم رسید که در فرآیند روکش دهی از نوع آزاد سیالات ویسکوالاستیک، خواص الاستیک سیال موجب کاهش در ضخامت لایه روکش میگردد و این در واقع مهر تاییدی بر فرضیه Spiers [۳] و Middleman [۴] است. با اینوصف باید اذعان نمود که کاهش در ضخامت این لایه، در صورتیکه عدد الاستیک به اندازه کافی کوچک باشد ممکن است چندان محسوس نباشد. در حقیقت، در یک سیال ویسکوالاستیک دو پدیده رهایی تنش (Stress Relaxation) و پدیده ظهور تنشهای قائم (Normal Stress Effects) همزمان بر ضخامت لایه مرزی تاثیر میگذارند. در حالیکه پدیده اول سعی در رها نمودن تنشهای الاستیک و در نتیجه افزایش در ضخامت این لایه دارد پدیده دوم موجب شتاب گرفتن سیال و در نتیجه کاهش در ضخامت این لایه میگردد. در صورتی که K چندان بزرگ نباشد این دو پدیده اثر یکدیگر را تقریباً خنثی می نمایند و ضخامت لایه مرزی با افزایش K تغییر محسوسی نمی یابد. با بالا رفتن K و تجاوز نمودن آن از مقدار بحرانی (حدوداً یک) تنشهای قائم بطور پیوسته و با نرخ شدیدتری افزایش می یابند و این در حالی است که اثرات مربوط به پدیده رهایی تنش (که با زمان طبیعی سیال کنترل میشود و به حرکات براونی مربوط میگردد) تغییر چندانی نمی کند. در نتیجه، لحظه ای فرا می رسد که کاهش در ضخامت این لایه در اثر ظهور تنشهای الاستیک بیش از آن میگردد که بتواند توسط پدیده رهایی تنش جبران شود بطوریکه در عمل شاهد کاهشی شدید در ضخامت لایه مرزی خواهیم بود. از طرف دیگر، تنشهای الاستیک القا شده در ذرات سیالی که در مجاورت ورق متحرک قرار دارند موجب شتاب گرفتن ذرات مزبور میشود و در نتیجه گرادیان سرعت در مجاورت دیواره از مقدار نیوتنی آن بیشتر می گردد. بنابراین میتوان انتظار داشت که در اثر خواص الاستیک یک سیال، ضریب اصطکاک پیوسته ای (و یا بعبارت دیگر ضریب درگ) افزایش یابد و این امر به معنای بالا رفتن نیروی لازم برای به حرکت در آوردن ورق است. در اعداد الاستیک کوچک، این افزایش در نیروی محرک چندان قابل ملاحظه نیست [۱۸] اما پیش بینی میشود که در صورتیکه عدد الاستیک به مقدار بحرانی خود (حدوداً یک) نزدیک گردد با افزایش قابل ملاحظه ای در این نیرو مواجه گردیم.

سپاسگزاری

انجام این پروژه، در قالب طرح تحقیقاتی مصوب شورای پژوهشی دانشگاه تهران امکان پذیر گردیده است. بدینوسیله نگارندگان این مقاله از بودجه و امکاناتی که توسط این دانشگاه در اختیار آنان قرار داده شده است صمیمانه تشکر می‌نمایند. در ضمن لازم میدانیم از اصلاحات پیشنهادی داوران محترم مقاله که در بهبود کیفیت مقاله موثر بوده اند تشکر نماییم.

منابع و مراجع

- [1] Benkreira H., R. Patel, M.F. Edwards and W.L. Wilkinson, "Classification and Analysis of Coating Flows", J. of non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 54, P. 437, (1994).
- [2] Esmail M.N. and R.L. Hummel, "Nonlinear Theory of Free Coating onto a Vertical Surface", AIChE Journal, Vol. 21, No. 5, (1975).
- [3] Spiers R.P., C.V. Subbaraman and W.L. Wilkinson, "Free Coating of Non-Newtonian Liquids onto a Vertical Surface", Chem. Eng. Sci., Vol. 30, p. 379, (1975).
- [4] Middleman S., "Free Coating of Viscoelastic Fluids", Polym. Eng. Sci., 18, p. 355, (1978).
- [4] Dutta A. and R.A. Mashelkar, "On Slip Effects in Free Coating of Non-Newtonian Fluids", Rheological Acta, Vol. 21, P. 52, (1982).
- [6] Larson, R.G. ,Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions, First Edition, Butterworths, Boston, (1988).
- [7] Ponterli, G., "Flow of a Fluid of Second-Order over a Stretching Sheet.", Int. J. Non-linear. Mechanics., Vol 30, No 3, p. 287,(1995).
- [8] Ariel, D., "Axisymmetric Flow of a Second Grade Fluid Past a Stretching Sheet", Int. Journal of Eng. Sci., Vol. 39, p. 529, (2001).
- [9] Rajagopal, K.R., T.Y. Na, and A.S. Gupta, Flow of a Viscoelastic Fluid over a Stretching Sheet", Rheol. Acta, Vol. 23, p. 213, (1984).

- [10] Hassanien, "Flow and Heat Transfer from a Continuous Surface in a Parallel Free Stream of Viscoelastic Second-Order Fluid", *App. Sci. Research*, Vol. 49, p. 335, (1992).
- [11] Ariel, D., "A Hybrid Method for Computing the Flow of Viscoelastic Fluids", *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 14, p. 757, (1992).
- [12] Bird R.B., R.C. Armstrong and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1 and Vol. 2, 2nd edition, John Wiley & Sons, (1987).
- [13] Beard D.W., and K. Walters, "Elastico-Viscous Boundary Layer Flows", *Proc. Camb. Phil Soc.*, Vol. 60, p. 667, (1964).
- [14] Sharifi M., *Viscoelastic Boundary Layers*, M.A.Sc. Thesis, in preparation, University of Tehran, (2002).
- [15] Massoudi, M., "Local Non-Similarity Solutions for the Flow of a Non-Newtonian Fluid over a Wedge", *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, Vol. 36, p. 961, (2001).
- [16] Harnoy, A., "The Role of the Fluid Relaxation Time in Laminar Elastico-Viscous Boundary Layers", *Rheologica Acta*, Vol. 18, p. 210, (1979).
- [17] Sakiadis, B, "Boundary layer behaviour on continuous solid surface", *A.I.Ch.E. Journal*, Vol. 7, p. 221, (1961).
- [18] Papanastasiou, T.C., *Applied Fluid Mechanics*, Prentice Hall. New Jersey, (1994).

نمادها و نشانه ها

E = تنسور کرنش	f = تابع جریان بصورت بدون بعد
K = عدد دبورا	h = کوچکترین تقسیم دامنه حل
L = تنسور گرادیان سرعت	u = مولفه x سرعت (m/s)
N = تعداد تقسیمات دامنه حل h	v = مولفه y سرعت (m/s)
P = فشار (Pa)	x = مولفه مکانی در امتداد لایه مرزی (m)
U = سرعت ورق	y = مولفه مکانی در جهت قائم (m)
	C_f = ضریب اصطکاک پوسته ای

نمادهای یونانی

ν = ویسکوزیته سینماتیکی (m²/s)

ρ = دانسیته (kg/m³)

σ = تنش کل

τ = تنش اضافی

Ψ = تابع جریان

α = پارامتر الاستیک

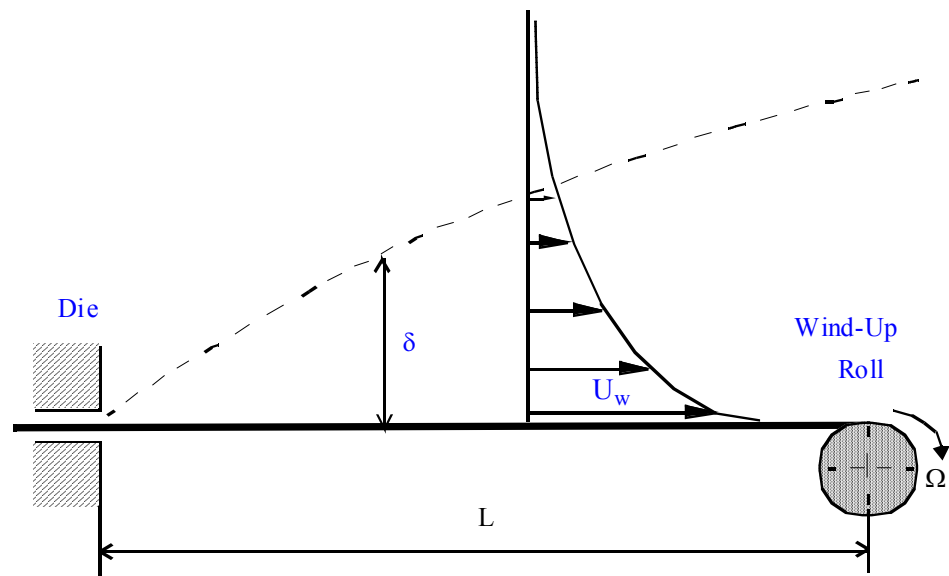
δ = تنشور واحد

η = پارامتر تشابه ای

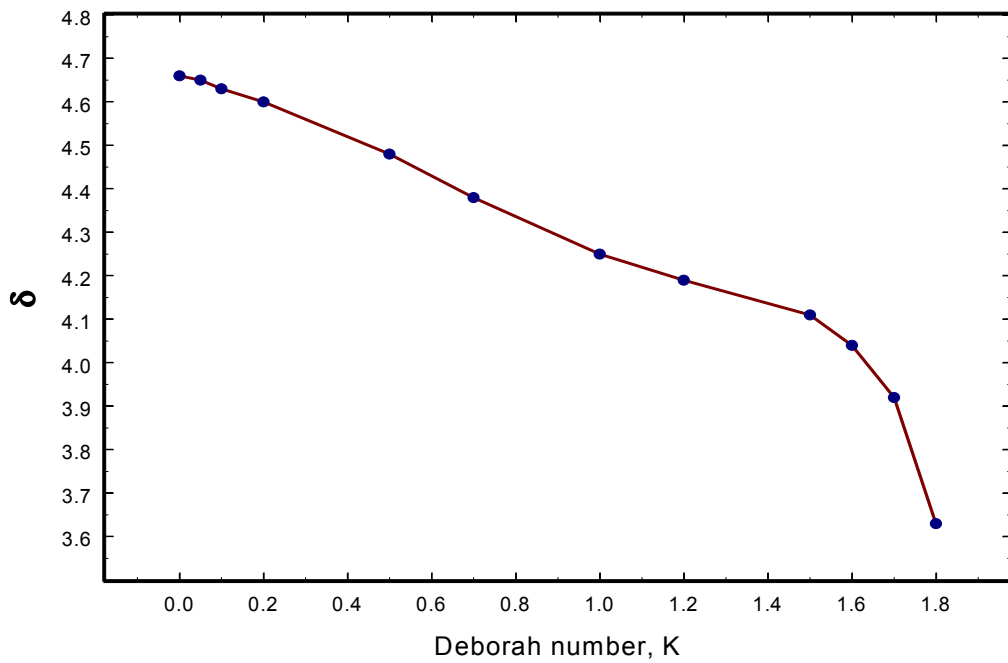
λ = زمان طبیعی سیال (sec)

μ = ویسکوزیته دینامیکی (Pa.s)

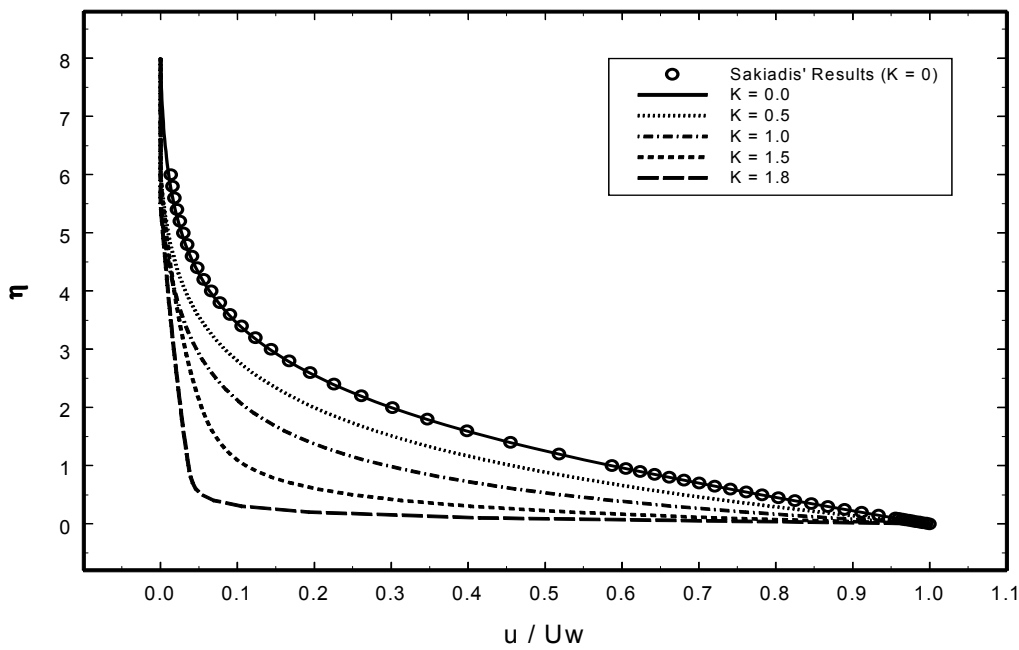
شکلها



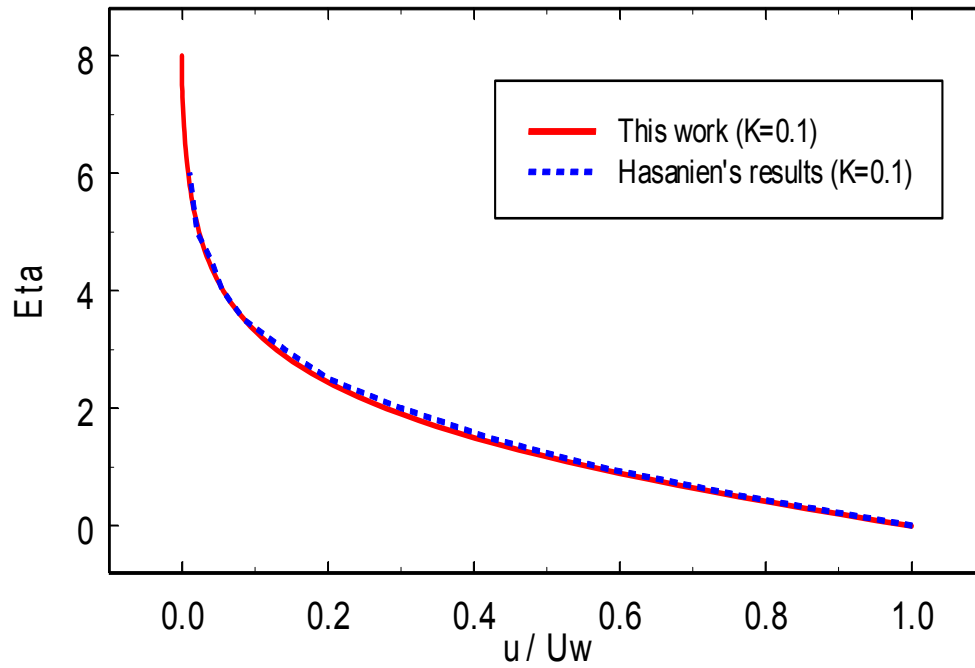
شکل (۱): خارج شدن یک صفحه تخت با سرعت ثابت از میان یک قالب دو بعدی در هوای ساکن



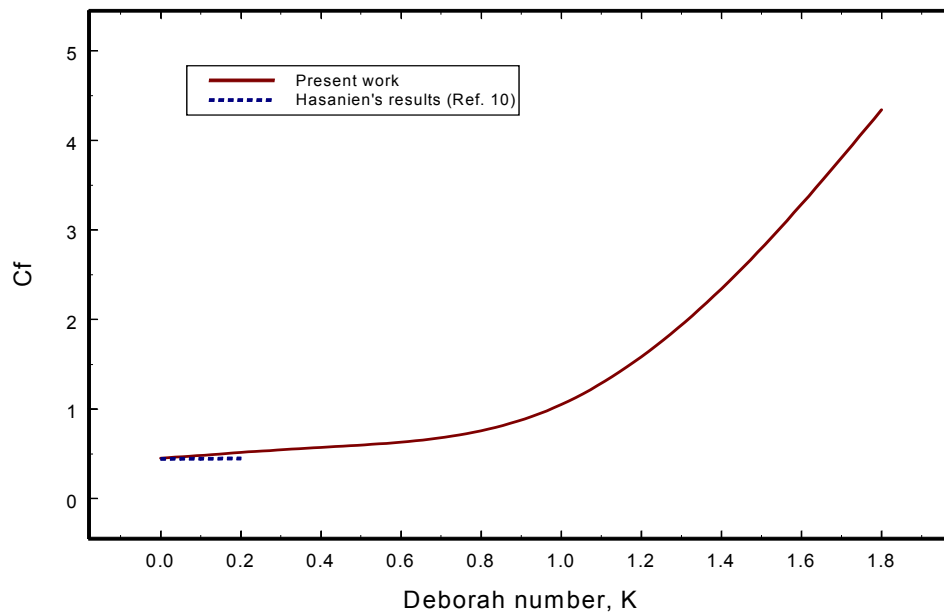
شکل (۲): اثر عدد الاستیک K بر پروفیل سرعت بدون بعد (u/U_w) در لایه مرزی بالای یک صفحه متحرک



شکل (۳): اثر خواص الاستیک یک سیال، K ، بر ضخامت لایه مرزی (بدون بعد)



شکل (۴): اثر خواص الاستیک یک سیال بر ضریب اصطکاک پوسته ای



شکل (۵): مقایسه ای بین پروفیل سرعت در $K = 0.1$ بین نتایج بدست آمده از روش اغتشاشات جزئی (نتایج Hasanien) و روش تفاضل محدود (بدست آمده در این کار تحقیقاتی)

Abstract:

Laminar two-dimensional flow of a viscoelastic fluid of the "second-order" type is investigated above a rigid continuous plate moving with constant velocity, U , in an otherwise quiescent fluid. Conventional boundary layer assumptions are invoked to simplify the equations of motion. The x - momentum equation is turned out to reduce into a PDE equation incorporating several elastic terms in addition to the familiar inertia, viscous and pressure terms; the y -momentum equation simply reduces to the pressure being constant across the boundary layer. The PDE equation governing the flow is further transformed into a nonlinear fourth-order ODE through the use of the concept of a stream function together with introducing a similarity variable η . The x -coordinate is impossible to eliminate from this equation showing that velocity profiles are non-similar at different x -locations. To find local similarity solutions at any given x , a combination of finite difference and shooting method are used in order to get results at Deborah numbers as high as 1.0. Because only three boundary conditions are available for this problem, a fourth boundary condition is constructed from the main governing equation itself with the help of Taylor series. Numerical results show that the wall shear stress scales with fluid's elasticity, increasing the higher the fluid's elasticity. The boundary layer thickness is also found to decrease with an increase in the elasticity level of the fluid. It is thus concluded that with an increase in fluid's elasticity, or plate withdrawal speed, the final film thickness of the coating layer should decrease in any free coating processes. This prediction is in agreement with published experimental data dealing with coating formulations exhibiting viscoelasticity.