

تحلیل تنش پادصفحه ای گوه مرکب تضعیف شده با ترکهای شعاعی

رضا تیموری فعال^۱، علیرضا فتوحی^۲، شهریار فریبرز^۳، حمیدرضا داغیان^۴

تحلیل تنش در یک گوه مرکب حاوی یک نابجائی پادصفحه ای با شرایط مرزی متفاوت برای وجوه گوه ، انجام پذیرفته است . گوه مرکب از دو گوه نامتجانس بهم چسبیده تشکیل شده که نابجائی در فصل مشترک دو گوه قرار دارد . بکمک تبدیل ملین میدانهای تنش و تغییر مکان بدست آمده است . از میدان تنش نابجائی بعنوان حل گرین برای مسئله گوه مرکب تضعیف شده بوسیله مجموعه ای از ترکهای شعاعی تحت بارگذاری پادصفحه ای استفاده شده است . ترکها همانند نابجائی در فصل مشترک دو گوه قرار دارند . تاثیرات فاصله نوک ترکها نسبت به یکدیگر و نیز فاصله نوک اولین ترک تا رأس گوه بروی ضرائب شدت تنش بررسی گردیده و اثبات اعتبار جوابها صورت پذیرفته است .

واژه های راهنما: گوه مرکب، نابجائی پادصفحه ای، ترک، ضریب شدت تنش

۱- مقدمه

مسئله تحلیل تنش در محیطهای تضعیف شده توسط مجموعه ای از ترکها و حفره ها از دیرباز مورد توجه محققین بوده است . از جمله تکنیکهای موثر در تحلیل مذکور استفاده از روش توزیع نابجائی می باشد . وجود نابجایی^۱ نخستین بار توسط دانشمندان علم مواد بررسی شد . بعدها نابجائی از دیدگاه الاستیسیته نیز

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۲- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۳- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۴- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تعریف گردید. ولترا^۲ جزء نخستین کسانی بود که به تعریف نابجائی پرداخت. اشلبی^۳ نشان داد که نابجائی در مواد و نابجائی تعریف شده در الاستیسیته دارای ماهیت یکسان هستند. داندرز^۴ تعریفی از نابجائی در الاستیسیته و شرایط و خواص آنرا ارائه داده است [۱]. برای مشخص شدن مفهوم نابجائی در الاستیسیته یک شکاف در محیط الاستیک ایجاد می گردد و سپس لبه های شکاف به اندازه ثابت از یکدیگر فاصله داده می شوند که در اثر این عمل میدان تنش در ماده بوجود می آید. در اینحالت شکاف ایجاد شده در ماده در حکم یک نابجائی در نظر گرفته می شود که میدان تنش ایجاد شده ناشی از وجود این نابجائی است. بسته به اینکه لبه های شکاف در کدام جهت از یکدیگر فاصله بگیرند سه نوع نابجائی تعریف می گردند. اگر لبه های شکاف در داخل صفحه از هم دور شوند بطوریکه وجوه شکاف دیگر با هم تماس نداشته باشند و سپس فاصله بین وجوه شکاف با ماده ای پر شود نابجائی را لبه ای^۵ می نامند. البته این نوع نابجائی را می توان با حذف قسمتی از ماده به موازات دو لبه شکاف بنحویکه لبه های شکاف از هم فاصله داشته باشند و سپس بهم رساندن مجدد لبه های شکاف ایجاد نمود. اگر تغییر مکان دو لبه شکاف بموازات لبه ها باشد نابجایی را گوه ای^۶ می نامند. در صورتیکه وجوه شکاف در جهت عمود بر صفحه از هم فاصله داده شوند نابجائی را پادصفحه ای^۷ می نامند. حل مسئله شرط مرزی در الاستیسیته بنحویکه بتواند میدان تنش یک نابجائی در محیطهای محدود و یا نامحدود را ارائه دهد، حل نابجائی در آن محیط نامیده می شود. مطابق شرایط ذکر شده توسط داندرز شکاف ایجاد شده برای تعریف نابجائی پاد صفحه ای می تواند نامحدود باشد و در صورت محدود بودن جسم به مرزهای جسم محدود گردد وجوه شکاف باید در جهت عمود بر وجوه عاری از تنش باشند. حل نابجائی در محیطهای محدود و بعضی محیطهای نیمه محدود در مراجع متعددی ارائه شده است. کیر^۸ و همکارانش میدان تنش یک نابجائی لبه ای را در گوه قائم الزاویه بدست آوردند و به کمک آن مسئله یک ترک مستقیم با موقعیت دلخواه را در گوه مذکور حل نمودند [۲]. هکر^۹ و رومانو^{۱۰} مسئله یک نابجائی لبه ای در یک گوه نامحدود را بررسی نمودند [۳]. کلی^{۱۱} و همکارانش میدان تنش یک نابجائی واقع در دو گوه قائم الزاویه چسبیده بهم را بدست آوردند [۴]. کیپینیس^{۱۲} مسئله یک گوه الاستیک نامحدود را که توسط یک ترک نیمه بینهایت نصف شده، بررسی نمود. در مسئله مذکور نوک ترک در فاصله محدود از راس گوه قرار دارد و بارگذاری بصورت مجموعه ای از نیروها و ممانهای خود متعادل در رأس گوه می باشد [۵]. صادیخو^{۱۳} مسئله قبلی را برای حالتی که ممانهای خود متعادل دور از رأس گوه هستند مجدداً حل نموده است [۶]. اردوان^{۱۴} و گوپتا^{۱۵} مسئله یک ترک واقع بر فصل مشترک دو گوه نامتجانس چسبیده بهم را

¹ Dislocation

² Volterra

³ Eshelby

⁴ Dundurs

⁵ Climb

⁶ Glid

⁷ Scew

⁸ Keer

⁹ Hecker

¹⁰ Romanov

¹¹ Kelly

¹² Kipinis

¹³ Sadykhov

¹⁴ Erdogan

تحت بارگذاری پادصفحه ای خاص بطوریکه بردار تنش فرض شده توسط اصل باکنر روی ترک ثابت می باشد، بررسی نموده اند [۷]. اهر و همکارانش تاثیر متقابل یک ترک نیمه بینهایت و یک نابجائی پادصفحه ای را بررسی نمودند [۸].

حل نابجائی کاربرد های فراوانی در مهندسی مکانیک دارد. از جمله این کاربردها می توان به محاسبه میدان تنش و ضرائب شدت تنش ترکها با اشکال دلخواه و محاسبه میدان تنش حفره های موجود در محیط مورد نظر اشاره نمود. در واقع توانایی حل نابجائی در حل مسائل مکانیک شکست خطی به قدرتمندی حل گرین در حل معادلات دیفرانسیل می باشد. در این مقاله حل نابجائی پاد صفحه ای در یک گوه مرکب با شرایط مرزی متفاوت برای نخستین بار صورت گرفته است و سپس به کمک حل بدست آمده مسئله محاسبه میدان تنش و ضرائب شدت تنش نوک ترک برای مجموعه ای از ترکهای شعاعی واقع بر فصل مشترک دو گوه نامتجانس که گوه مرکب را تشکیل داده اند صورت پذیرفته است. مسئله ذکر شده بعنوان یک مسئله جدید مطرح بوده که قبلا در مراجع دیگر مورد بررسی قرار نگرفته و نیز روش بکار رفته برای حل مسئله چندین ترک به عنوان یک نوآوری در این زمینه ارائه گردیده است.

۲- حل نابجائی پادصفحه ای

گوه مرکب شکل (۱) از دو گوه نامحدود ایزوتروپیک با خواص متفاوت که از یک وجه به هم متصل شده اند، تشکیل شده است. یک نابجائی پاد صفحه ای ولترا، [۱] در فصل مشترک دو گوه در نظر گرفته می شود. این نابجائی یک شکاف در فصل مشترک دو گوه است که از فاصله a از راس گوه شروع و تا بینهایت ادامه دارد. لبه های برش در جهت عمود بر صفحه گوه به اندازه ثابت δ از هم فاصله داده می شوند تغییر مکان روی گوه مرکب بصورت پاد صفحه ای می باشد. برای دو وجه دیگر گوه مرکب شرایط مرزی مختلفی را می توان در نظر گرفت. در تغییر شکل پاد صفحه ای معادلات حاکم عبارتند از [۹]

$$\nabla^2 w_k(r, \theta) = 0, \quad k = 1, 2 \quad (1)$$

که در آن w مولفه تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه و k شماره گوه های ۱ و ۲ و $r = \rho/a$ می باشد و (ρ, θ) مختصات یک نقطه دلخواه از گوه مرکب می باشد. مولفه های غیر صفر تنش، $\tau_{k\theta z}$ و τ_{krz} برای گوه های نشان داده شده در شکل (۱) که در آن زیرنویس k نشان دهنده شماره گوه می باشد از روابط زیر بدست می آیند.

$$\tau_{k\theta z} = \frac{\mu_k}{ar} \frac{\partial w_k}{\partial \theta}, \quad k = 1, 2$$

$$\tau_{krz} = \frac{\mu_k}{a} \frac{\partial w_k}{\partial r} \quad (2)$$

¹⁵ Gupta

که در آن μ_k مدل برشی هر گوه می باشد. شرط پیوستگی تنش در فصل مشترک دو گوه عبارتست از

$$\tau_{1\theta z}(r, \alpha) = \tau_{2\theta z}(r, \alpha) \quad 0 < r < \infty \quad (3)$$

برای یک نابجایی پادصفحه که در فاصله a از راس گوه روی فصل مشترک دو گوه قرار گرفته شرایط مرزی زیر را باید در نظر گرفت

$$\begin{aligned} w_1(r, \alpha) - w_2(r, \alpha) &= 0 \quad 0 < r < 1 \\ w_1(r, \alpha) - w_2(r, \alpha) &= \delta \quad 1 < r < \infty \end{aligned} \quad (4)$$

که δ مولفه در جهت Z بردار برگرز^{۱۶} می باشد. برای حل معادله (۱) از تبدیل ملین^{۱۷} استفاده می شود. تبدیل ملین تابع $f(r)$ بصورت زیر تعریف می گردد

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(r)r^{s-1}dr \quad (5)$$

که در آن تابع می بایستی به نحوی باشد که انتگرال بالا قابل محاسبه باشد. معکوس تبدیل عبارت است از

$$(6)$$

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)r^{-s}ds$$

با اعمال تبدیل (۵) به معادله (۱)، معادله دیفرانسیل کامل بدست می آید که جزئیات محاسبه در مرجع [۱۲] آمده است. با حل معادله دیفرانسیل کامل ایجاد شده نتیجه می شود که

$$W_k(s, \theta) = A_k(s) \cos(\theta s) + B_k(s) \sin(\theta s) \quad , \quad k = 1, 2 \quad (7)$$

که $W_k(s, \theta)$ تبدیل ملین تغییرمکان $w_k(s, \theta)$ است و ثوابت دلخواه $A_k(s)$ و $B_k(s)$ بعدا محاسبه خواهند شد. اعمال تبدیل به روابط (۳) و (۴) با شرط $c < 0$ که در آن c ثابت مشخص کننده خط بروموویچ^{۱۸} می باشد، معادلات زیر را می دهد

$$\begin{aligned} \mu_1 \left. \frac{\partial W_1(s, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha} &= \mu_2 \left. \frac{\partial W_2(s, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha} \\ W_1(s, \alpha) - W_2(s, \alpha) &= -\frac{\delta}{s} \end{aligned} \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه (۷) در روابط (۸) روابط زیر حاصل می شوند

$$\begin{aligned} \mu[-A_1(s) \sin(\alpha s) + B_1(s) \cos(\alpha s)] &= -A_2(s) \sin(\alpha s) + B_2(s) \cos(\alpha s) \\ [A_1(s) - A_2(s)] \cos(\alpha s) + [B_1(s) - B_2(s)] \sin(\alpha s) &= -\frac{\delta}{s} \end{aligned} \quad (9)$$

¹⁶ Burgers

¹⁷ Mellin

¹⁸ Bromwich

که در آن $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ نسبت مدول برشی دو گوه می باشد. برای دو وجه دیگر گوه مرکب شرایط مرزی مختلف زیر را می توان در نظر گرفت که عبارتند از

الف) دو وجه گوه آزاد هستند.

ب) یک وجه گوه گیردار و وجه دیگر آن آزاد است.

۲-۱- گوه با دو وجه آزاد

شرایط مرزی حالت (الف) بصورت زیر می باشد

$$\begin{aligned} \tau_{1\theta_z}(r,0) &= 0 & 0 < r < \infty \\ \tau_{2\theta_z}(r,\alpha + \beta) &= 0 & 0 < r < \infty \end{aligned} \quad (10)$$

با توجه به اولین رابطه (۲)، با اعمال تبدیل ملین به روابط (۱۰) نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W_1}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} &= 0 & 0 < r < \infty \\ \left. \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha+\beta} &= 0 & 0 < r < \infty \end{aligned} \quad (11)$$

با جایگذاری رابطه (۷) در روابط (۱۱) نتیجه می شود

$$\begin{aligned} B_1(s) &= 0 \\ B_2(s) &= \tan[(\alpha + \beta)s]A_2(s) \end{aligned} \quad (12)$$

حل معادلات (۹) و (۱۲) عبارت است از

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \frac{-\delta \sin(\beta s)}{sD_1(s)} \\ A_2(s) &= \frac{\delta \mu \sin(\alpha s) \cos((\alpha + \beta)s)}{sD_1(s)} \\ B_2(s) &= \frac{\delta \mu \sin(\alpha s) \sin((\alpha + \beta)s)}{sD_1(s)} \end{aligned} \quad (13)$$

که در روابط (۱۳) تابع $D_1(s)$ برابر است با

$$D_1(s) = \sin(\beta s) \cos(\alpha s) + \mu \cos(\beta s) \sin(\alpha s) \quad (14)$$

با جایگذاری اولین رابطه (۱۲) و روابط (۱۳) در رابطه (۷) تبدیل ملین تغییر مکان دو گوه بهم چسبیده بدست می آیند

$$W_1(s, \theta) = \frac{-\delta \sin(\beta s) \cos(\theta s)}{sD_1(s)}$$

$$W_2(s, \theta) = \frac{\delta \mu \sin(\alpha s) \cos((\alpha + \beta - \theta)s)}{sD_1(s)} \quad (15)$$

با توجه به روابط (۲) و روابط (۶) و با استفاده از روابط (۱۵) مولفه های تنش بصورت زیر ارائه می شوند.

$$\tau_{\theta z} = \mu_1 \frac{\delta}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\sin(\beta s) \sin(\theta s)}{D_1(s)} \right] r^{-s-1} ds \quad 0 \leq \theta \leq \alpha$$

$$\tau_{\theta z} = -\mu_1 \frac{\delta}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\sin(\alpha s) \sin((\theta - \alpha - \beta)s)}{D_1(s)} \right] r^{-s-1} ds \quad \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta$$

$$\tau_{rz} = \mu_1 \frac{\delta}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\sin(\beta s) \cos(\theta s)}{D_1(s)} \right] r^{-s-1} ds \quad 0 \leq \theta \leq \alpha$$

$$\tau_{rz} = -\mu_1 \frac{\delta}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\sin(\alpha s) \cos((\theta - \alpha - \beta)s)}{D_1(s)} \right] r^{-s-1} ds \quad \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta \quad (16)$$

انتگرالهادر رابطه (۱۶) می تواند با استفاده از انتگرال گیری روی کانتور و قضیه مانده ها محاسبه گردد . نقاط تکین برای عبارتهای داخل انتگرالها ریشه های معادله $D_1(s) = 0$ هستند . به سادگی می توان نشان داد که این ریشه ها درجه اول حقیقی مثبت $s_i, i = 1, 2, 3, \dots$ هستند که $s_i < s_{i+1}$ و قطبهای ساده حقیقی منفی $s_{-i}, i = 1, 2, 3, \dots$ طوری هستند که $s_i = -s_{-i}$. با توجه به شرط $c < 0$ اعمال شده در دومین رابطه (۸) خط برمویچ طوری انتخاب می شود که $s_{-1} < c < 0$. برای محاسبه انتگرالها می بایستی روی کانتور در نظر گرفته شده وقتی $|s| \rightarrow \infty$ ، عبارت داخل انتگرالها حذف گردند . لذا برای $0 < r \leq 1$ ، کانتور انتگرال گیری شامل ربع دوم و سوم صفحه مختلط و برای $1 \leq r < \infty$ کانتور مورد نظرب ربع اول و چهارم رادر برمی گیرد . با استفاده از قضیه مانده ها برای ناحیه $0 < r \leq 1$ نتیجه می شودکه

$$\tau_{\theta z} = 2\mu_1 \frac{\delta}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) \sin(\theta s_i)}{G_1(s_i)} \right] r^{s_i-1} \quad 0 \leq \theta \leq \alpha$$

$$\tau_{\theta z} = -2\mu_1 \frac{\delta}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\alpha s_i) \sin((\theta - \alpha - \beta)s_i)}{G_1(s_i)} \right] r^{s_i-1} \quad \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta$$

$$\tau_{rz} = -2\mu_1 \frac{\delta}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) \cos(\theta s_i)}{G_1(s_i)} \right] r^{s_i-1} \quad 0 \leq \theta \leq \alpha$$

$$\tau_{rz} = 2\mu_1 \frac{\delta}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\alpha s_i) \cos((\theta - \alpha - \beta)s_i)}{G_1(s_i)} \right] r^{s_i-1} \quad \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta \quad (17)$$

که $s_i < s_{i+1}$ و $i = 1, 2, 3, \dots$ ریشه های مثبت معادله $D_1(s) = 0$ هستند و

$$G_1(s) = (\mu + 1)(\alpha + \beta) \cos[(\alpha + \beta)s] + (\mu - 1)(\alpha - \beta) \cos[(\alpha - \beta)s] \quad (18)$$

مولفه های تنش در ناحیه $1 \leq r < \infty$ با جایگذاری s_i با $-s_{-i}$ و تغییر علامت در مولفه مربوطه در ناحیه $0 < r \leq 1$ بدست می آیند. با جایگذاری مولفه های تنش $\tau_{\theta z}$ از رابطه (۱۷) در اولین رابطه (۲) و انتگرال گیری نسبت به θ و صرف نظر کردن از جابجائی صلب نتیجه می شود

$$\begin{aligned}
 w(r, \theta) &= -2\delta \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) \cos(\theta s_i)}{s_i G_1(s_i)} \right] r^{s_i} & 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 < r < 1 \\
 w(r, \theta) &= 2\delta \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) \cos(\theta s_i)}{s_i G_1(s_i)} \right] r^{-s_i} & 0 \leq \theta \leq \alpha, 1 < r < \infty \\
 w(r, \theta) &= 2\mu\delta \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\alpha s_i) \cos((\theta - \alpha - \beta)s_i)}{s_i G_1(s_i)} \right] r^{s_i} & \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta, 0 < r < 1 \\
 w(r, \theta) &= -2\mu\delta \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\alpha s_i) \cos((\theta - \alpha - \beta)s_i)}{s_i G_1(s_i)} \right] r^{-s_i} & \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta, 1 < r < \infty
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

۲-۲- گوه با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد

شرایط مرزی بگونه ای فرض می شوند که وجه گوه در $\theta = 0$ گیردار و در $\theta = \alpha + \beta$ آزاد می باشد. شرایط مرزی برای حل نابجائی پادصفحه ای عبارتند از

$$\begin{aligned}
 w_1(r, 0) &= 0 & 0 < r < \infty \\
 \tau_{2\theta z}(r, \alpha + \beta) &= 0 & 0 < r < \infty
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

با توجه به اولین رابطه (۲) و رابطه (۵) روابط زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
 W_1(s, 0) &= 0 & 0 < r < \infty \\
 \left. \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha+\beta} &= 0 & 0 < r < \infty
 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

با استفاده از روابط (۸) و (۲۱) چهار ضریب ظاهر شده در رابطه (۷) محاسبه شده و با کمک روابط (۲) و (۶) مولفه های تنش به صورت زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
 \tau_{\theta z} &= \mu_1 \frac{\delta}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\sin(\beta s) \cos(\theta s)}{D_2(s)} \right] r^{-s-1} ds & 0 \leq \theta \leq \alpha \\
 \tau_{\theta z} &= -\mu_1 \frac{\delta}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\cos(\alpha s) \sin((\theta - \alpha - \beta)s)}{D_2(s)} \right] r^{-s-1} ds & \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta \\
 \tau_{rz} &= -\mu_1 \frac{\delta}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\sin(\beta s) \sin(\theta s)}{D_2(s)} \right] r^{-s-1} ds & 0 \leq \theta \leq \alpha
 \end{aligned}$$

$$\tau_{rz} = -\mu_1 \frac{\delta}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\cos(\alpha s) \cos((\theta - \alpha - \beta)s)}{D_2(s)} \right] r^{-s-1} ds \quad \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta \quad (22)$$

که در این روابط

$$D_2(s) = \mu \cos(\alpha s) \cos(\beta s) - \sin(\alpha s) \sin(\beta s) \quad (23)$$

با تحلیل مشابه با حالت (الف) مولفه های تنش برای $0 < r \leq 1$ بصورت زیر حاصل می شوند

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} &= -2\mu_1 \frac{\delta}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) \cos(\theta s_i)}{G_2(s_i)} \right] r^{s_i-1} & 0 \leq \theta \leq \alpha \\ \tau_{\theta z} &= 2\mu_1 \frac{\delta}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(\alpha s_i) \sin((\theta - \alpha - \beta)s_i)}{G_2(s_i)} \right] r^{s_i-1} & \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta \\ \tau_{rz} &= -2\mu_1 \frac{\delta}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) \sin(\theta s_i)}{G_2(s_i)} \right] r^{s_i-1} & 0 \leq \theta \leq \alpha \\ \tau_{rz} &= -2\mu_1 \frac{\delta}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(\alpha s_i) \cos((\theta - \alpha - \beta)s_i)}{G_2(s_i)} \right] r^{s_i-1} & \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta \end{aligned} \quad (24)$$

که $s_i < s_{i+1}$ و $i = 1, 2, 3, \dots$ ریشه های مثبت معادله $D_2(s) = 0$ هستند و

$$G_2(s) = (\mu + 1)(\alpha + \beta) \sin[(\alpha + \beta)s] + (\mu - 1)(\alpha - \beta) \sin[(\alpha - \beta)s] \quad (25)$$

مولفه های تنش برای ناحیه $1 \leq r < \infty$ می توانند با جایگزینی s_i با $-s_i$ و تغییر علامت در مولفه مربوطه ، در ناحیه $0 < r \leq 1$ بدست آیند . با جایگذاری روابط (۲۲) در اولین رابطه (۲) و انتگرال گیری نسبت به θ صرفنظر کردن از جابجائی مد صلب ، تغییر مکانها در نقاط مختلف گوه بدست می آیند

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= -2\delta \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) \sin(\theta s_i)}{s_i G_2(s_i)} \right] r^{s_i} & 0 \leq \theta \leq \alpha, \quad 0 < r < 1 \\ w(r, \theta) &= 2\delta \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) \sin(\theta s_i)}{s_i G_2(s_i)} \right] r^{-s_i} & 0 \leq \theta \leq \alpha, \quad 1 < r < \infty \\ w(r, \theta) &= -2\mu\delta \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(\alpha s_i) \cos((\theta - \alpha - \beta)s_i)}{s_i G_2(s_i)} \right] r^{s_i} & \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta, \quad 0 < r < 1 \\ w(r, \theta) &= -\delta + 2\mu\delta \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(\alpha s_i) \cos((\theta - \alpha - \beta)s_i)}{s_i G_2(s_i)} \right] r^{-s_i} & \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta, \quad 1 < r < \infty \end{aligned} \quad (26)$$

مولفه های تنش بدست آمده در حالت‌های (الف) و (ب) در محل نابجائی ($r=1$) دارای تکیگی کوشی هستند.

۳- استفاده از اصل باکنر

اصل باکنر^{۱۹} بعنوان وسیله ای قدرتمند برای تحلیل محیط‌های تضعیف شده توسط ترک می باشد. طبق اصل باکنر مسئله جسم حاوی ترک که تحت تاثیر بارهای خارجی قرار دارد می تواند به دو مسئله تفکیک گردد. در مسئله نخست میدان تنش در جسم بدون ترک تحت بارگذاری خارجی بدست می آید و مولفه های تنش در محل ترک محاسبه می شوند. در مسئله دوم جسم حاوی ترک بوده و بار خارجی صفر است. با اعمال مولفه های تنش بدست آمده در محل ترک روی لبه های ترک در جهت عکس از مسئله اول، میدان تنش در کل جسم بدست می آید. با جمع دو مسئله مذکور مولفه های تنش در سطح ترک صفر شده و حل مسئله مکانیک شکست ارائه می گردد. حل مسئله نخست که یک مسئله تئوری الاستیسیته بوده و مربوط به محیط‌های همبند ساده^{۲۰} می باشد عموماً به سادگی صورت می گیرد. بکمک اصل باکنر این امکان بوجود می آید که بارگذاری انجام شده در مرزهای خارجی جسم بشکل بردار تنش^{۲۱} معلوم روی مرزهای ترکها تبدیل نمود (مسئله دوم).

شرط مرزی مسئله اول در حالت (الف) بصورت $\bar{\tau}_{\theta z}(\rho, \alpha) = \bar{\tau}_{\theta z}(\rho, \alpha + \beta) = h(\rho)$ است. مولفه تنش در فصل مشترک دو گوه بکمک تبدیل ملین، مشابه روابط بدست آمده در قبل بصورت زیر است

$$\bar{\tau}_{\theta z}(\rho, \alpha) = \frac{2}{\rho} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) + \mu \sin(\alpha s_i)}{G_1(s_i)} \right] \left\{ H(\rho - \xi) \left[\left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{s_i} - \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{-s_i} \right] - \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{s_i} \right\} h(\xi) d\xi \quad (27)$$

که $s_i < s_{i+1}$ و $i = 1, 2, 3, \dots$ ریشه های مثبت معادله $D_1(s) = 0$ هستند و تابع $H(\rho)$ تابع پله هویساید^{۲۲} می باشد. بردار تنش بکاررفته روی وجوه آزاد گوه مرکب در حالت (ب) بصورت $\bar{\tau}_{\theta z}(\rho, \alpha + \beta) = h(\rho)$ فرض می شود. با اعمال تبدیل ملین مولفه های تنش در فصل مشترک بصورت زیر حاصل می شوند

$$\bar{\tau}_{\theta z}(\rho, \alpha) = \frac{2}{\rho} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(\alpha s_i)}{G_2(s_i)} \right] \left\{ H(\rho - \xi) \left[\left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{-s_i} - \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{s_i} \right] + \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{s_i} \right\} h(\xi) d\xi \quad (28)$$

که $s_i < s_{i+1}$ و $i = 1, 2, 3, \dots$ ریشه های مثبت معادله $D_2(s) = 0$ هستند. بردار تنش بکاررفته روی لبه های آزاد گوه در حالت خاص بصورت $h(\rho) = \tau_0 H(l - \rho)$ هستند که l و τ_0 به ترتیب طول بارگذاری و اندازه تنش اعمالی می باشند. با جایگذاری $h(\rho)$ در رابطه (۲۷) برای حالت (الف) نتیجه می شود.

¹⁹ Bueckner

²⁰ Simply connected

²¹ Traction

²² Heaviside step function

$$\bar{\tau}_{\theta z}(\rho, \alpha) = 2\tau_0 \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) + \mu \sin(\alpha s_i)}{(1-s_i)G_1(s_i)} \right] \left[\frac{2s_i}{s_i+1} - \left(\frac{\rho}{l}\right)^{s_i-1} \right] & \rho \leq l \\ - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_i) + \mu \sin(\alpha s_i)}{(1+s_i)G_1(s_i)} \right] \left(\frac{l}{\rho}\right)^{s_i+1} & \rho \geq l \end{cases} \quad (29)$$

بطور مشابه در حالت (ب) نتیجه می شود که

$$\bar{\tau}_{\theta z}(\rho, \alpha) = 2\tau_0 \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(\alpha s_i)}{(1-s_i)G_2(s_i)} \right] \left[\left(\frac{\rho}{l}\right)^{s_i-1} - \frac{2s_i}{s_i+1} \right] & \rho \leq l \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(\alpha s_i)}{(1+s_i)G_2(s_i)} \right] \left(\frac{l}{\rho}\right)^{s_i+1} & \rho \geq l \end{cases} \quad (30)$$

۴- گوه مرکب با ترکهای واقع بر فصل مشترک دو گوه

همانطور که قبلا اشاره شد حل نابجائی پادصفحه ای در گوه می تواند برای تحلیل گوه مرکب با ترکهای واقع بر فصل مشترک دو گوه غیر همجنس بکار رود. N ترک بر روی فصل مشترک دو گوه طوری فرض می شوند که فواصل ابتدا و انتهای ترک i ام از راس گوه به ترتیب a_i و b_i باشند. مطابق اصل باکنبر برای حل مسئله دوم، بردار تنش روی ترک i ام $q_i(\rho) = -\bar{\tau}_{\theta z}(\rho, \alpha)$ است که $a_i \leq \rho \leq b_i$ فرض می شوند. برای حصول به بردار تنش مورد نظردریک نقطه دلخواه واقع بر فصل مشترک دو گوه یک نابجائی با دانسیته $B_{z_i}(\xi)$ بین دو نقطه ξ و $\xi + d\xi$ (که ξ فاصله تا راس گوه می باشد) روی ترک i ام در نظر گرفته می شود. مولفه تنش $\tau_{\theta z}$ روی فصل مشترک بخاطر وجود نابجائی برای حالتیکه گوه دارای دو وجه گیردار است مطابق روابط (۱۷) عبارتست از

$$\tau_{\theta z}(\rho, \alpha) = 2\mu_1 \frac{B_{z_i}(\xi)d\xi}{\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_k) \sin(\alpha s_k)}{G_1(s_k)} \right] \times \left\{ \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{s_k-1} - H(\rho-\xi) \left[\left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{s_k-1} + \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{-s_k-1} \right] \right\} \quad a_i < \xi < b_i \quad (31)$$

و برای حالتیکه گوه دارای یک وجه گیردار و یک وجه آزاد است مطابق روابط (۲۴) باشد نتیجه می شود که

$$\tau_{\theta z}(\rho, \alpha) = 2\mu_1 \frac{B_{z_i}(\xi)d\xi}{\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_k) \cos(\alpha s_k)}{G_2(s_k)} \right] \times \left\{ - \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{s_k-1} + H(\rho-\xi) \left[\left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{s_k-1} + \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{-s_k-1} \right] \right\} \quad a_i < \xi < b_i \quad (32)$$

با توزیع نابجائی ها روی سطوح ترکها بکمک روابط (۲۹) و (۳۰) بردارتنش روی سطح ترک i ام بدست می آید

$$q_i(\rho) = -\sum_{j=1}^{i-1} \int_{a_j}^{b_j} 2\mu_1 \frac{B_{z_j}(\xi)}{\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_k) \sin(\alpha s_k)}{G_1(s_k)} \right] \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{-s_k-1} d\xi$$

$$+ \int_{a_i}^{b_i} 2\mu_1 \frac{B_{z_i}(\xi)}{\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_k) \sin(\alpha s_k)}{G_1(s_k)} \right] \left\{ \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{s_k-1} - H(\rho-\xi) \left[\left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{s_k-1} + \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{-s_k-1} \right] \right\} d\xi$$

$$+ \sum_{j=i+1}^N \int_{a_j}^{b_j} 2\mu_1 \frac{B_{z_j}(\xi)}{\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_k) \sin(\alpha s_k)}{G_1(s_k)} \right] \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{s_k-1} d\xi \quad a_i < \rho < b_i, \quad i=1,2,\dots,N \quad (33)$$

$$q_i(\rho) = \sum_{j=1}^{i-1} \int_{a_j}^{b_j} 2\mu_1 \frac{B_{z_j}(\xi)}{\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_k) \cos(\alpha s_k)}{G_2(s_k)} \right] \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{-s_k-1} d\xi$$

$$+ \int_{a_i}^{b_i} 2\mu_1 \frac{B_{z_i}(\xi)}{\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_k) \cos(\alpha s_k)}{G_2(s_k)} \right] \left\{ -\left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{s_k-1} + H(\rho-\xi) \left[\left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{s_k-1} + \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{-s_k-1} \right] \right\} d\xi$$

$$- \sum_{j=i+1}^N \int_{a_j}^{b_j} 2\mu_1 \frac{B_{z_j}(\xi)}{\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_k) \cos(\alpha s_k)}{G_2(s_k)} \right] \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^{s_k-1} d\xi \quad a_i < \rho < b_i, \quad i=1,2,\dots,N \quad (34)$$

روابط (۳۳) و (۳۴) به ترتیب برای حالات (الف) و (ب) ذکر شده در قبل هستند. در این روابط سمت چپ معادلات مطابق اصل باکنر با تغییر علامت بردار تنش ارائه شده در روابط (۲۹) و (۳۰) بدست می آیند. لازم به ذکر است که با توجه به تکینگی موجود در محل نابجائی، معادلات (۳۳) و (۳۴) دارای تکینگی از نوع کوشی برای $\rho = \xi$ هستند. با حل این معادلات دانسیته نابجائی $B_{z_i}(\xi)$ روی ترکها محاسبه می شوند. برای حل عددی معادلات مذکور فاصله (a_j, b_j) نرمالیزه می گردد

$$m_j = \frac{b_j + a_j}{2}, \quad n_j = \frac{b_j - a_j}{2}$$

$$\rho_j(\eta) = n_j \eta + m_j, \quad \xi_j(t) = n_j t + m_j \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (35)$$

بعلت تکینگی تنش در نوک ترکها دانسیته نابجائی بصورت زیر در نظر گرفته می شود

$$B_{z_j}(\xi) = \frac{g_{z_j}(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 < t < 1, \quad j=1,2,\dots,N \quad (36)$$

با تغییر η و t بین -1 و 1 ، $\rho_j(\eta)$ و $\xi_j(t)$ بین a_j و b_j تغییر می کنند و ترک زام را می پوشانیم. با اعمال تبدیلات (۳۵) و (۳۶) به معادلات (۳۳) و (۳۴) نتیجه می شود

$$q_i(\rho_i(\eta)) = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 \frac{g_{zj}(t)}{\sqrt{1-t^2}} k_{ij}(\eta, t) dt \quad , i = 1, 2, \dots, N \quad (37)$$

که در آن $k_{ij}(\eta, t)$ برای حالت (الف) بصورت

$$k_{ij}(\eta, t) = \frac{2\mu_1 n_j}{\xi_j(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_k) \sin(\alpha s_k)}{G_1(s_k)} \right] \left\{ \left(\frac{\rho_i(\eta)}{\xi_j(t)} \right)^{s_k-1} - H(\rho_i(\eta) - \xi_j(t)) \left[\left(\frac{\rho_i(\eta)}{\xi_j(t)} \right)^{s_k-1} + \left(\frac{\rho_i(\eta)}{\xi_j(t)} \right)^{-s_k-1} \right] \right\} \quad (38)$$

و برای حالت (ب) بصورت

$$k_{ij}(\eta, t) = \frac{2\mu_1 n_j}{\xi_j(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\beta s_k) \cos(\alpha s_k)}{G_2(s_k)} \right] \left\{ H(\rho_i(\eta) - \xi_j(t)) \left[\left(\frac{\rho_i(\eta)}{\xi_j(t)} \right)^{s_k-1} + \left(\frac{\rho_i(\eta)}{\xi_j(t)} \right)^{-s_k-1} \right] - \left(\frac{\rho_i(\eta)}{\xi_j(t)} \right)^{s_k-1} \right\} \quad (39)$$

می باشد. با توجه به تعریف دانسیته نابجائی ، باز شدگی دهانه ترک ^{۲۳} برای ترک زام عبارتست از

$$w_j(\eta, \alpha^-) - w_j(\eta, \alpha^+) = n_j \int_{-1}^{\eta} \frac{g_{zj}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (40)$$

با در نظر گرفتن اینکه باز شدگی دهانه ترک در هر دو نوک ترک صفر می باشد ، نتیجه می شود.

$$\int_{-1}^{\eta} \frac{g_{zj}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \quad (41)$$

۵- حل عددی معادلات انتگرالی

یک روش ساده و کارا برای حل عددی معادلات انتگرالی با تکیه بر نوع کوشی که در مرجع [۱۱] ارائه شده ، برای حل معادلات (۳۷) مورد استفاده قرار می گیرد . با استفاده از معادلات (۳۷) و (۴۱) و روش شرح داده شده در مرجع [۱۱] ، سیستم معادلات جبری وخطی زیر حاصل می شوند

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2N} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{z1}(t_l) \\ g_{z2}(t_l) \\ g_{z3}(t_l) \\ \vdots \\ g_{zN}(t_l) \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2\mu_1\pi} \right) \begin{bmatrix} \{q_1(n_1\eta_r + m_1)\} \\ \{q_2(n_2\eta_r + m_2)\} \\ \{q_3(n_3\eta_r + m_3)\} \\ \vdots \\ \{q_N(n_N\eta_r + m_N)\} \end{bmatrix} \quad (42)$$

و نقاطی که در آن معادلات انتگرالی گسسته شده اند عبارتند از

²³ crack opening displacement

$$\eta_r = \cos\left(\frac{\pi r}{m}\right), \quad r = 1, \dots, m-1$$

$$t_p = \cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{2m}\right), \quad p = 1, \dots, m \quad (43)$$

دارایه های ماتریس و مولفه های بردار هادر رابطه (۴۲) عبارتند از

$$A_{ij} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} k_{ij}(s_1, t_1) & k_{ij}(s_1, t_2) & \dots & k_{ij}(s_1, t_m) \\ k_{ij}(s_2, t_1) & k_{ij}(s_2, t_2) & \dots & k_{ij}(s_2, t_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{ij}(s_{m-1}, t_1) & k_{ij}(s_{m-1}, t_2) & \dots & k_{ij}(s_{m-1}, t_m) \\ \pi\delta_{ij}n_j & \pi\delta_{ij}n_j & \dots & \pi\delta_{ij}n_j \end{bmatrix}$$

$$g_{zj}(t_p) = [g_{zj}(t_1) \quad g_{zj}(t_2) \quad \dots \quad g_{zj}(t_m)]^T$$

$$q_j(s_r) = \frac{-1}{\pi} [\bar{\tau}_{\theta z}(\rho_j(s_1), \alpha) \quad \bar{\tau}_{\theta z}(\rho_j(s_2), \alpha) \quad \dots \quad \bar{\tau}_{\theta z}(\rho_j(s_{m-1}), \alpha) \quad 0]^T \quad (44)$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر^{۲۴} می باشد. پس از تعیین $g_{zj}(t)$ از معادله (۴۲) ضرایب شدت تنش در نوک ترک i ام توسط روابط زیر بدست می آیند [۷].

$$k_{IIIi} = \frac{-\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} n_i^2 g_{zi}(-1)$$

$$k_{IRi} = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} n_i^2 g_{zi}(1) \quad (45)$$

۶- نتیجه گیری

برای اثبات اعتبار نتایج و روابط بدست آمده چند مثال عددی مورد بررسی قرار می گیرند. در مثال نخست یک نیم صفحه مرکب تشکیل شده از دو گوه نامتجانس حل می شود. ضرائب شدت تنش نرمالیزه شده k/k_0 برای زوایای مختلف رأس گوه ها و نیز نسبت های مختلف فاصله مرکز ترک تا رأس گوه ها به نصف طول ترک، بدست آمده است که در آن $k_0 = \tau_0 \sqrt{.5(b_i - a_i)}$ ضریب شدت تنش یک ترک با همان طول برابر می باشد که در صفحه بینهایت تحت بردار تنش ثابت τ_0 قرار دارد. نتایج بدست آمده تطبیق بسیار خوبی با نتایج بدست آمده توسط اردوان در مرجع [۷] دارد.

²⁴ Kornecker Delta

در مثال دوم دو ترک شعاعی واقع بر فصل مشترک دو گوه مطابق شکل (۲) در نظر گرفته می شوند
 زوایای راس دو گوه نامتجانس $\alpha = \pi/4$ و $\beta = \pi/2$ می باشند. فواصل مراکز دو ترک $l/4$ و فاصله
 مرکز ترک اول تا راس گوه مرکب $l/8$ می باشد و نسبت مدول برشی دو گوه $\mu = \frac{1}{5}$ می باشد.

نمودار تغییرات ضرائب شدت تنش نوک ترکها برحسب افزایش طول ترک در اشکال (۳) و (۴) نمایش
 داده شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش طول ترکها نوک ترک اول که به رأس گوه نزدیک
 می شود بدلیل تمرکز تنش بالا در رأس گوه، دارای ضریب شدت تنش افزاینده نسبت به فاصله آن از رأس
 گوه خواهد بود. برای دو نوکی از ترک اول و دوم که بهم نزدیک می شوند رفتار مشابهی مشاهده می شود،
 یعنی با نزدیک شدن این نوکها ضرائب شدت تنش بدلیل تاثیر متقابل تکینگی تنشها روی یکدیگر افزایش
 می یابد.

با دور کردن ترک دوم بطوریکه تاثیری روی ترک اول نداشته باشد مسئله به گوه حاوی یک ترک و صفحه
 بینهایت حاوی یک ترک تبدیل می شود و لذا برای ترک اول نتایج مشابه با یک ترک در گوه مرکب که در
 مرجع [۷] ارائه شده بدست می آید.

۷- فهرست علائم

طول بار گذاری روی وجوه گوه	l	ماتریس ضرائب	A_{ij}
تعداد ترکها	N	ضرائب ثابت تبدیل ملین برای تغییر مکان	A_k, B_k
تعداد تقسیمات برای حل معادلات انتگرالی	m	فواصل نوکهای ترک i ام تا رأس گوه	a_i, b_i
نصف طول ترک	n_j	دانسیته نابجائی	$B_{z_i}(\xi)$
فاصله وسط ترک از رأس گوه	m_j	ثابت مربوط به خط برمویچ	c
بار گذاری روی ترک i ام	$q_i(\rho)$	معادله مربوط به قطبها	$D_1(s)$
مختصه شعاعی	r	تبدیل ملین تابع $f(r)$	$F(s)$
متغییر تبدیل ملین	s	ترم غیر تکین دانسیته نابجائی	$g_{z_j}(t)$
قطبهای روابط تنش	s_i	تابع پله ای هویساید	H
متغییر نرمالیزه شده برای مشخص شدن محل نابجائی	t	اندازه بردار تنش روی وجوه گوه	$h(\xi)$
متغییر نرمالیزه شده برای گسسته کردن معادلات انتگرالی	t_p	ترم غیر تکین دانسیته نابجائی	$g_{z_j}(t)$
مولفه غیر صفر تغییر مکان	w	ضریب شدت تنش در صفحه بینهایت	k_0

k_{IIIi} ضریب شدت تنش اولین نوک ترک W_1, W_2 تبدیل ملین تغییر مکانهای دو گوه
 k_{IIIr} ضریب شدت تنش دومین نوک نامتجانس
 ترک
 $k_{ij}(\eta, t)$ کرنل معادله انتگرالی

۸- فهرست علائم یونانی

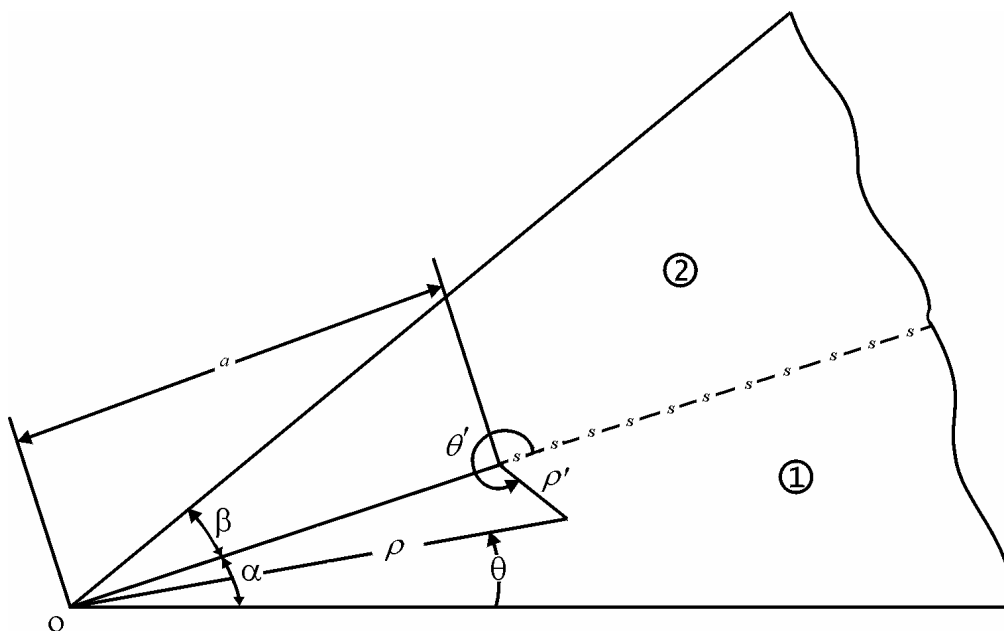
α	زاویه راستای برش نابجائی با اولین وجه گوه	μ	نسبت مدول برشی دو گوه
β	زاویه راستای برش نابجائی با وجه گوه	μ_k	مدول برشی گوه ها
δ_{ij}	دلتای کرونگر	ξ	فاصله نابجائی تا رأس گوه
δ	بردار برگرز	ρ	اولین مختصه قطبی
η_r	متغییر نرمالیزه شده برای گسسته کردن معادلات انتگرالی	$\tau_{k\theta z}, \tau_{krz}$	مولفه های تنش
η	متغییر نرمالیزه شده برای گسسته کردن معادلات انتگرالی	$\bar{\tau}_{\theta z}$	مولفه های تنش در فصل مشترک
θ	دومین مختصه قطبی	τ_0	اندازه بردار تنش ثابت روی وجوه گوه

۹- مراجع

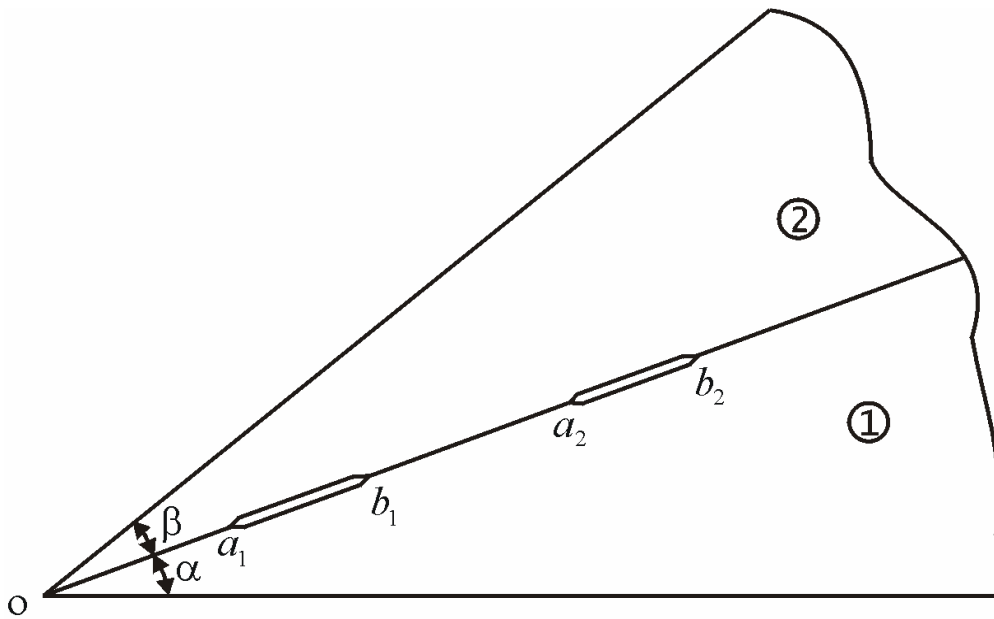
- [1] J. Dunders, Elastic Interaction of Dislocations with Inhomogeneities, Mathematical Theory of Dislocation, Ed. by T. Mura, ASME (pub.) New York, pp. 70-115, (1969).
- [2] L.M. Keer, J.C. Lee, and T. Mura, Stress Distributions for a Quarter Plane Containing an Arbitrarily Oriented Crack, Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 43-49, (1983).
- [3] M. Hecker, and A.E. Romanov, The Stress Fields of an Edge Dislocation Near a Wedge-Shaped Boundary, Phys. Stat. Sol., 130, pp. 91-101, (1992).
- [4] P. Kelly, D.A. Hills and D. Nowell, The Complete Stress Field Due to a Dislocation Located Anywhere in Two Bonded Quarter Planes, Journal of Applied Mechanics, Vol. 61, pp. 992-993, (1994).
- [5] L.A. Kipinis, Elastic Equilibrium of Wedge with a Crack, PMM, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 43, No. 1, pp. 153-159, (1979).

- [6] A.E. Sadukhov, Elasticity-Theory Problem for Wedge with Semi-Infinite Crack Subjected to Point Moment, Soviet Applied Mechanics, Vol. 16, No. 5, pp. 431-437, (1980).
- [7] F. Erdogan and G.D. Gupta, Bounded Wedge with an Interface Crack under Anti-Plane Shear Loading, International Journal of Fracture, Vol. 11, No. 4, pp. 583-593, (1975).
- [8] S.M. Ohr, S.J. Chang and R. Thomson, Elastic interaction of a wedge crack with a screw dislocation, J. Appl. Phys., Vol. 57, No. 6, pp. 1839-1843, (1985).
- [9] M.F. Kanninen, C.H. Popelar, Advanced Fracture Mechanics, Oxford Engineering Science, (1985).
- [10] A. M. Korsunsky, D. A. Hills, The solution of crack problems by using distributed strain nuclei, Proc Instn Mech. Engrs, IMech E, Vol. 210, pp. 23-31, (1996).
- [11] F. Erdogan, G.D. Gupta and T.S. Cook, Numerical Solution of Integral Equations, Methods of Analysis and Solution of Crack Problems, Edited by G. C. Sih, Noordhoof, Leyden, Holland, (1973).
- [12] Ian. N. Sneddon, The Use of Integral Transforms, New York, McGraw-Hill, (1972).

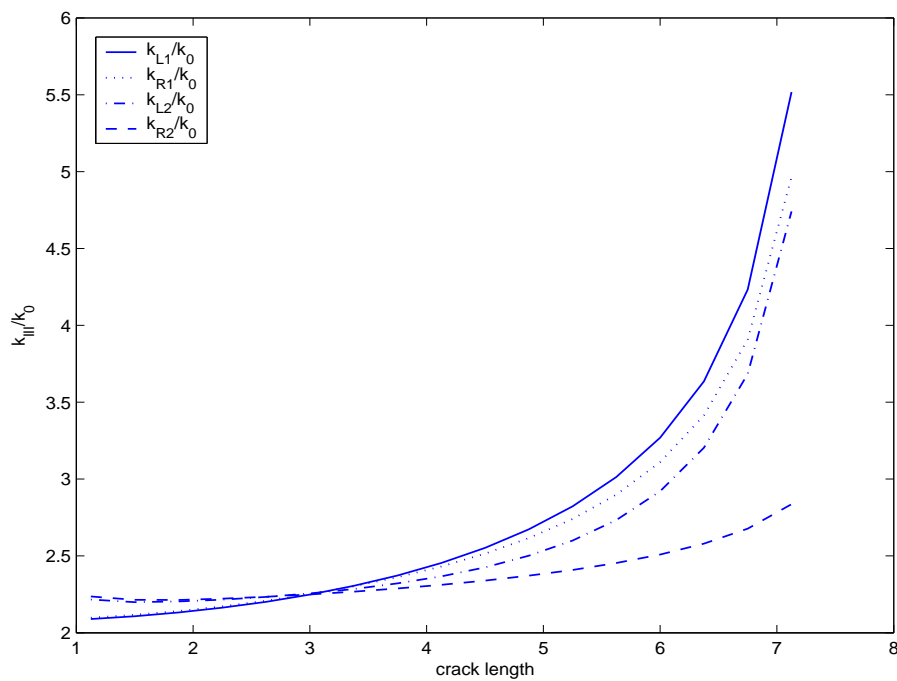
شکلها



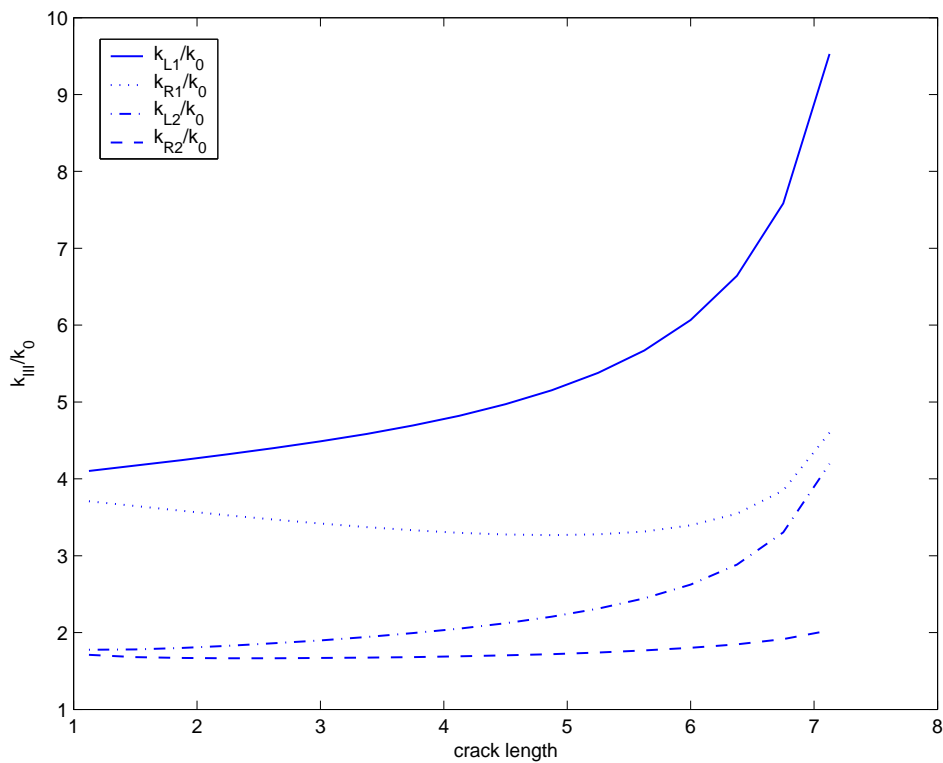
شکل ۱ - نمایش نابجائی پادصفحه ای در گوه مرکب



شکل ۲- نمایش دو ترک شعاعی واقع بر فصل مشترک دو گوه نامتجانس



شکل ۳- نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش نرمالیزه شده بر حسب طول ترک برای گوه با دو وجه آزاد



شکل ۴ - نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش نرمالیزه شده بر حسب طول ترک برای گوه با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد

Abstract

In the present research, thermal buckling of rectangular plates made of functionally graded material (FGM) under thermal loads are investigated, based on the first order shear deformation plate theories. Nonlinear Kinematic (strain-displacement) relations are considered based on the first order shear deformation plate theories. By substituting kinematic and stress-strain relations of functionally graded plate in the total potential energy equation and employing Euler equations, the equilibrium equations are obtained. Applying Euler equations to the second variation of total potential energy equation leads to the stability equations. Then, buckling analysis of functionally graded plate under two type of thermal loads is carried out resulting into closed-form solutions. The results are compared with the critical buckling obtained for functionally graded plate based on classical plate theory given in the literature.