کمانش حرارتی ورق مستطیل شکل FGM بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات

دکتر محمد مهدی نجفی زاده[1] شهروز یوسف زاده[2]

در این مقاله به بررسی کمانش حرارتی ورق مستطیل شکل ساخته شده از مواد FGM مطابق با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پرداخته شده است. در ابتدا روابط سینماتیکی (کرنش ـ تغییر مکان) غیر خطی بر مبنای تئوری Sanders و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات در نظر گرفته شده است. مطابق با حساب تغییرات، با جایگذاری روابط سینماتیکی تنش ـ کرنش ورق FGM در رابطه انرژی پتانسیل کل و اعمال معادلات اولر بر فانکشنال رابطه انرژی، معادلات تعادل ورق بدست آمده است. با اعمال معادلات اولر بر تغییرات دوم فانکشنال رابطه انرژی پتانسیل کل، معادلات پایداری ورق بدست آمده است. سپس با تحلیل کمانش ورق FGM تحت دو نوع بارگذاری حرارتی، مقادیر درجه حرارت بحرانی کمانش ورق محاسبه و نتایج با حالت تئوری کلاسیک صفحات مقایسه شده است.

واژه های راهنما: ماده FGM، کمانش حرارتی، تغییر شکل برشی

۱- مقدمه

در سالهای اخیر مواد FGM در صنعت بویژه جهت استفاده در محیطهای با درجه حرارت بسیار بالا مانند راکتورهای هسته ای، توربین ها و اجزاء ماشین های پرقدرت بکار می روند و پیش بینی می گردد با توجه به ویژگیهای منحصر بفرد این ماده، کاربردهای صنعتی آن طی سالهای آتی توسعه یابد. FGM یک ماده مصنوعی

۱- استادیار دانشگاه آزاد اسلامي واحد اراک
۲- دانشجوي کارشناسي ارشد دانشگاه آزاد اسلامي واحد اراک

با ریزساختار غیرهمگن می باشد که خواص مکانیکی آن بطور ملایم و پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر جسم تغییر می کند. این خاصیت ویژه بوسیله تغییر یکنواخت نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده بدست می آید. نوع رایج مواد FGM از ترکیب سرامیک و فلز حاصل می گردد. این مواد برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ در آزمایشگاه هوا-فضایNiino در ژاپن به منظور عایق حرارتی مطرح گردید[۱]. در این مواد مؤلفه سرامیکی باعث مقاومت در برابر دماهای بالا می گردد و از سوی دیگر مؤلفه فلزی باعث انعطاف پذیری و جلوگیری از رشد ترک و شکست ماده در اثر تنشهای حرارتی بسیار بالا می شود. هم چنین پیوستگی تغییرات ریز ساختاری باعث امتیاز ماده FGM نسبت به انواع مواد مرکب لایه ای گردیده است.

محققان زیادی پایداری ترموالاستیک ورقهای مستطیلی و دایره‌ای شکل را تحت بارگذاری های متعدد و شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار داده‌اند. Mossavarali و Eslami [۲] کمانش ترموالاستیک ورقهای مرکب لایه ای ارتوتروپیک را براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی صفحات با نقص اولیه مورد مطالعه قرار دادند. با استفاده از رابطه انرژی پتانسیل کل معادلات تعادل و پایداری ورق ارائه گردیده و سپس با حل معادلات پایداری، دمای بحرانی کمانش برای دو حالت بارگذاری حرارتی مختلف بدست آمده است. Najafizadeh و Eslami [۳,۴] پایداری مکانیکی و حرارتی ورق دایره‌ای FGM را مورد مطالعه قرار دادند که برای تحلیل، از تئوری کلاسیک صفحات و فرضیات Sanders استفاده نمودند و معادلات پایداری را با روش تحلیلی حل نمودند. Javaheri و Eslami [۵،۶،۷] کمانش حرارتی و مکانیکی ورق مستطیل شکل FGM را با استفاده از تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی صفحات مورد بررسی قرار دادند.

کمانش حرارتی و مکانیکی ورق دایره ای شکل FGM با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات به ترتیب توسط Hedayati و Najaizadeh [۸] و Heydari و Najaizadeh [۹] مورد مطالعه قرار گرفته است. اخیراً Ma و Wang [۱۰] خمش غیرخطی و کمانش ورق دایره ای شکل FGM را تحت اثر بارهای مکانیکی و حرارتی مورد بررسی قرار داده اند.

هدف از مقاله حاضر محاسبه دمای بحرانی کمانش برای یک ورق مستطیل شکل FGM با شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده مطابق با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی می باشد.

۲- پروفیل توزیع فلز و سرامیک در مواد FGM

در ارتباط با توزیع فلز و سرامیک، مدلهای مختلفی ارائه شده است. از جمله ۱) مدل Reddy [۱۱] ۲) مدل Tanigawa [۱۲] ۳) مدل Mori-Tanaka [۱۳] که هر کدام با یک توزیع بخصوص از ترکیب نسبی سرامیک

و فلز بدست آمده اند. در این مقاله از مدل Reddy برای تخمین خصوصیات فلز و سرامیک استفاده شده است. چنانچه محور مختصات در جهت ضخامت را z بنامیم خواهیم داشت :

$$P(z) = P_m + P_{cm}(\frac{2z+h}{2h})^k \tag{۱}$$

که P(z) می تواند یکی از خصوصیات ماده باشد مانند مدول الاستیسیته و یا ضریب انبساط حرارتی، که در این مقاله مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی مطابق با رابطه توانی (۱) تغییر می‌کند و به علت نزدیک بودن ضریب پواسون سرامیک با فلز[۱۱] .

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + E_{cm}(\frac{2z+h}{2h})^k \\ \alpha(z) &= \alpha_m + \alpha_{cm}(\frac{2z+h}{2h})^k \\ \upsilon(z) &= \upsilon_0 \end{aligned} \tag{۲}$$

که E مدول الاستیسیته، α ضریب انبساط حرارتی و υ ضریب پواسون می باشد بطوریکه :

$$\begin{aligned} E_{cm} &= E_c - E_m \\ \alpha_{cm} &= \alpha_c - \alpha_m \end{aligned} \tag{۳}$$

که در رابطه فوق اندیس m معرف خصوصیات فلز و اندیس c معرف خصوصیات سرامیک می باشد.

۳- بدست آوردن معادلات تعادل و پایداری

ورق مستطیل شکل FGM بطول a و عرض b و ضخامت h مفروض است. ورق تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی قرار دارد. با در نظر گرفتن مدل Reddy، خواص مکانیکی مثل E، α و υ بصورت (۲) فرض می شود. با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی تغییر مکانهای u، v و w در جهت های x، y و z بصورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + zu_1(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + zv_1(x,y) \\ w(x,y) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{۴}$$

در تئوری فوق جابجایی های u و v از مرتبه اول نسبت به z در نظر گرفته می شوند. روابط بین کرنش ها و جابجایی که به روابط سینماتیکی Sanders معروف هستند عبارتند از:

$$\begin{aligned} e_x &= u_{,x} + \tfrac{1}{2} w_{,x}^{\;2} \\ e_y &= v_{,y} + \tfrac{1}{2} w_{,y}^{\;2} \\ e_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \\ e_{xz} &= u_1 + w_{,x} \\ e_{yz} &= v_1 + w_{,y} \end{aligned} \tag{۵}$$

با جایگذاری مؤلفه های جابجایی از روابط (۴) در روابط غیرخطی کرنش-تغییرمکان (۵) داریم :

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ e_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e_{xz} \\ e_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xz}^0 \\ e_{yz}^0 \end{pmatrix} \tag{۶}$$

بطوریکه :

$$\begin{pmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ e_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,x} + \dfrac{1}{2} w_{0,x}^{\;2} \\ v_{0,y} + \dfrac{1}{2} w_{0,y}^{\;2} \\ u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x} w_{0,y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_{xz}^0 \\ e_{yz}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + w_{0,x} \\ v_1 + w_{0,y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,x} \\ v_{1,y} \\ u_{1,y} + v_{1,x} \end{pmatrix} \tag{۷}$$

روابط تنش بر حسب کرنش بصورت زیر نوشته می شوند.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left[e_x + \upsilon e_y - (1+\upsilon)\alpha T\right]$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left[e_y + \upsilon e_x - (1+\upsilon)\alpha T\right]$$
$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\upsilon)} e_{xy}$$
$$\sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\upsilon)} e_{xz}$$
$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\upsilon)} e_{yz} \qquad (۸)$$

تنش های منتجه N_i، M_i و Q_i بصورت زیر تعریف می گردد.

$$(N_i, M_i) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i (1, z) dz \qquad i = x, y, xy$$
$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{iz} dz \qquad i = x, y \qquad (۹)$$

نیروها و ممانهای منتجه بصورت زیر در می آیند.

$$(N_x, M_x) = \frac{1}{1-\upsilon_0{}^2}\left[(E_1, E_2)(e_x^0 + \upsilon_0 e_y^0) + (E_2, E_3)(k_x^0 + \upsilon_0 k_y^0) - (1+\upsilon_0)(\phi_1 + \phi_2)\right]$$
$$(N_y, M_y) = \frac{1}{1-\upsilon_0{}^2}\left[(E_1, E_2)(e_y^0 + \upsilon_0 e_x^0) + (E_2, E_3)(k_y^0 + \upsilon_0 k_x^0) - (1+\upsilon_0)(\phi_1 + \phi_2)\right]$$
$$(N_{xy}, M_{xy}) = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[(E_1, E_2)(e_{xy}^0) + (E_2, E_3)(k_{xy}^0)\right]$$
$$Q_x = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[E_1 e_{xz}^0 + E_3 k_{xz}^0\right]$$
$$Q_y = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[E_1 e_{yz}^0 + E_3 k_{yz}^0\right] \qquad (۱۰)$$

بطوریکه :

$$(E_1, E_2, E_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) E(z) dz$$
$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) E(z) \alpha(z) T(x, y, z) dz$$
$$\psi = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \alpha^2 (z) T^2 (x, y, z) dz \qquad (۱۱)$$

در حالتیکه ورق تحت بارهای مکانیکی و حرارتی قرار دارد رابطه انرژی پتانسیل کل بصورت زیر نوشته می شود.

$$V = U + \Omega \qquad (۱۲)$$

U انرژی کرنشی ورق بوده و با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بصورت زیر تعریف می گردد.

$$U = \frac{1}{2}\iint\int_{-h/2}^{h/2}\left[\sigma_x(e_x-\alpha T)+\sigma_y(e_y-\alpha T)+\sigma_{xy}e_{xy}+\sigma_{xz}e_{xz}+\sigma_{yz}e_{yz}\right]dxdydz \qquad (۱۳)$$

همچنین Ω انرژی پتانسیل نیروهای مکانیکی اعمالی بر ورق بوده و بصورت زیر بیان می شود.

$$\Omega = \iint\left(\frac{1}{b}P_x u_{,x}+\frac{1}{a}P_y v_{,y}-P_n w\right)dxdy \qquad (۱۴)$$

با جایگذاری روابط (۷) و (۸) در رابطه پتانسیل کل (۱۲) خواهیم داشت.

$$V = \iint F dxdy \qquad (۱۵)$$

که انتگراند F بصورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}F = {} & \frac{1}{2(1-\upsilon_0{}^2)}\Big[E_1(e_x^0)^2+E_3(k_x^0)^2+2E_2e_x^0k_x^0+E_1(e_y^0)^2+E_3(k_y^0)^2+2E_2e_y^0k_y^0+2\upsilon_0(E_1e_x^0e_y^0+E_2e_x^0k_y^0+\\ & E_2e_y^0k_x^0+E_3k_x^0k_y^0)-2(1+\upsilon_0)(\phi_1e_x^0+\phi_2k_x^0+\phi_1e_y^0+\phi_2k_y^0)+2(1+\upsilon_0)\psi+\\ & \frac{1-\upsilon_0}{2}(E_1(e_{xy}^0)^2+E_3(k_{xy}^0)^2+2E_2e_{xy}^0k_{xy}^0+E_1(k_{xz}^1)^2+2E_3e_{xz}^0k_{xz}^1+E_1(k_{xz}^1)^2+2E_3e_{yz}^0k_{yz}^1)\Big]\\ & +\frac{1}{b}P_x(u_{0,x}+zu_{1,x})+\frac{1}{a}P_x(v_{0,y}+zv_{1,y})-P_nw_0\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

برای بدست آوردن معادلات تعادل، باید معادلات اولر را به عبارت فانکشنال انرژی پتانسیل اعمال نمود. معادلات اولر بصورت زیر نوشته می شوند[۳] .

$$\frac{\partial F}{\partial u_0}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_{0,x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_{0,y}}=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial v_0}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v_{0,x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v_{0,y}}=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial w_0}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial w_{0,x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial w_{0,y}}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial w_{0,xx}}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial w_{0,xy}}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial w_{0,yy}}=0 \quad (۱۷)$$
$$\frac{\partial F}{\partial u_1}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_{1,x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_{1,y}}=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial v_1}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v_{1,x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v_{1,y}}=0$$

با اعمال معادلات اولر (۱۷) بر عبارت فانکشنال (۱۶) معادلات تعادل بصورت زیر حاصل می شوند.

$$\begin{aligned}
&N_{x,x}+N_{xy,y}=0\\
&N_{xy,x}+N_{y,y}=0\\
&(Q_{x,x}+Q_{y,y})+(N_x w_{0,xx}+2N_{xy}w_{0,xy}+N_y w_{0,yy})=0\\
&M_{x,x}+M_{xy,y}-Q_x=0\\
&M_{xy,x}+M_{y,y}-Q_y=0
\end{aligned} \quad (۱۸)$$

معادلات پایداری ورق بوسیله روش تغییری قابل دستیابی می باشد اگر V معرف انرژی پتانسیل ورق باشد بسط آن نسبت به حالت تعادل بوسیله سری تیلور بصورت زیر نوشته می شود.

$$\Delta V=\delta V+\frac{1}{2!}\delta^2 V+\frac{1}{3!}\delta^3 V+\cdots \quad (۱۹)$$

پایداری ورق در همسایگی حالت تعادل، با علامت دومین تغییرات انرژی پتانسیل مشخص مـی شـود. از شـرط $\delta^2 V=0$ برای بدست آوردن معادلات پایداری برای مسایل کمانش استفاده می‌شود [۳]. مؤلفه‌های جابجـایی در همسایگی حالت تعادل اولیه بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
u_0&=u_0^0+u_0^1\\
v_0&=v_0^0+v_0^1\\
w_0&=w_0^0+w_0^1
\end{aligned}$$

$$u_1 = u_1^0 + u_1^1$$
$$v_1 = v_1^0 + v_1^1 \qquad (۲۰)$$

مؤلفه های $(u_0^1, v_0^1, w_0^1, u_1^1, v_1^1)$ معرف انحراف جابجایی از حالت تعادل می باشد. با جاگذاری مقادیر جابجایی (۲۰) در رابطه انرژی پتانسیل کل و بدست آوردن دومین تغییرات انرژی پتانسیل و اعمال معادلات اویلر (۱۷)، معادلات پایداری بصورت زیر حاصل می شود.

.

$$N_{x1,x} + N_{xy1,y} = 0$$
$$N_{xy1,x} + N_{y1,y} = 0$$
$$(Q_{x1,x} + Q_{y1,y}) + (N_{x0} w^1_{0,xx} + 2N_{xy0} w^1_{0,xy} + N_{y0} w^1_{0,yy}) = 0$$
$$M_{x1,x} + M_{xy1,y} - Q_{x1} = 0$$
$$M_{xy1,x} + M_{y1,y} - Q_{y1} = 0 \qquad (۲۱)$$

بطوریکه:

$$(N_{x0}, M_{x0}) = \frac{1}{1-\upsilon_0^{\,2}}\left[(E_1, E_2)(e^0_{x0} + \upsilon_0 e^0_{y0}) + (E_2, E_3)(k^0_{x0} + \upsilon_0 k^0_{y0}) - (1+\upsilon_0)(\phi_1 + \phi_2)\right]$$
$$(N_{y0}, M_{y0}) = \frac{1}{1-\upsilon_0^{\,2}}\left[(E_1, E_2)(e^0_{y0} + \upsilon_0 e^0_{x0}) + (E_2, E_3)(k^0_{y0} + \upsilon_0 k^0_{x0}) - (1+\upsilon_0)(\phi_1 + \phi_2)\right]$$
$$(N_{xy0}, M_{xy0}) = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[(E_1, E_2)(e^0_{xy0}) + (E_2, E_3)(k^0_{xy0})\right]$$
$$Q_{x0} = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[E_1 e^0_{xz0} + E_3 k^0_{xz0}\right]$$
$$Q_{y0} = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[E_1 e^0_{yz0} + E_3 k^0_{yz0}\right]$$
$$(N_{x1}, M_{x1}) = \frac{1}{1-\upsilon_0^{\,2}}\left[(E_1, E_2)(e^0_{x1} + \upsilon_0 e^0_{y1}) + (E_2, E_3)(k^0_{x1} + \upsilon_0 k^0_{y1})\right]$$
$$(N_{y1}, M_{y1}) = \frac{1}{1-\upsilon_0^{\,2}}\left[(E_1, E_2)(e^0_{y1} + \upsilon_0 e^0_{x1}) + (E_2, E_3)(k^0_{y1} + \upsilon_0 k^0_{x1})\right]$$
$$(N_{xy1}, M_{xy1}) = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[(E_1, E_2)(e^0_{xy1}) + (E_2, E_3)(k^0_{xy1})\right] \qquad (۲۲)$$
$$Q_{x1} = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[E_1 e^0_{xz1} + E_3 k^1_{xz1}\right]$$
$$Q_{y1} = \frac{1}{2(1+\upsilon_0)}\left[E_1 e^0_{yz1} + E_3 k^1_{yz1}\right]$$

۴- تحلیل کمانش ورق مستطیل شکل FGM تحت افزایش یکنواخت درجه حرارت و شرایط مرزی ساده بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات

یک ورق مستطیل شکل از جنس ماده FGM که از چهار طرف بر روی تکیه گاههای ساده قرار دارد مفروض است. شرایط تکیه گاهی بگونه ای است که از انبساط ورق جلوگیری می نماید. فرض می گردد دمای کل ورق T_i باشد. سپس بطور ملایم و یکنواخت دما به T_f افزایش یابد. اختلاف درجه حرارت بصورت زیر تعریف می گردد.

$$\Delta T = T_f - T_i \tag{۲۳}$$

با جایگذاری مؤلفه های کرنش خطی برای حالت انحراف از تعادل اولیه از روابط (۷) و با حذف عبارات مرتبه دوم جابجایی در روابط مربوط به نیروهای انحراف یافته از وضعیت تعادل, نیروهای منتجه برحسب مؤلفه های جابجایی بدست می آید. با جاگذاری روابط حاصله در معادلات پایداری (۲۱)، معادلات پایداری ورق FGM برحسب مؤلفه‌های جابجایی بدست می آید.

$$E_1 u^1_{0,xx} + \frac{E_1(1-\upsilon_0)}{2} u^1_{0,yy} + \frac{E_1(1+\upsilon_0)}{2} v^1_{0,xy} + E_2 u^1_{1,xx} + \frac{E_2(1-\upsilon_0)}{2} u^1_{1,yy} + \frac{E_2(1+\upsilon_0)}{2} v^1_{1,xy} = 0$$

$$\begin{gathered}
E_1 v^1_{0,yy} + \frac{E_1(1-\upsilon_0)}{2} v^1_{0,xx} + \frac{E_1(1+\upsilon_0)}{2} u^1_{0,xy} + E_2 v^1_{1,xx} + \frac{E_2(1-\upsilon_0)}{2} v^1_{1,xx} + \frac{E_2(1+\upsilon_0)}{2} u^1_{1,xy} = 0 \\
\left[\left(\frac{4E_3}{h^2} - \frac{E_1}{2}\right)(1-\upsilon_0) - (1-{\upsilon_0}^2) N_{x0} \right] w^1_{0,xx} + \left[\left(\frac{4E_3}{h^2} - \frac{E_1}{2}\right)(1-\upsilon_0) - (1-{\upsilon_0}^2) N_{y0} \right] w^1_{0,yy} + \\
- 2(1-{\upsilon_0}^2) N_{xy0} w^1_{0,xy} + \left[\left(\frac{4E_3}{h^2} - \frac{E_1}{2}\right)(1-\upsilon_0) \right] u^1_{1,x} + \left[\left(\frac{4E_3}{h^2} - \frac{E_1}{2}\right)(1-\upsilon_0) \right] v^1_{1,y} = 0 \\
\left[\left(\frac{E_1}{2} - \frac{4E_3}{h^2}\right)(1-\upsilon_0) \right] w^1_{0,x} + \left[\left(\frac{E_1}{2} - \frac{4E_3}{h^2}\right)(1-\upsilon_0) \right] u^1_1 - E_2 u^1_{0,xx} - \frac{E_2}{2}(1-\upsilon_0) u^1_{0,yy} - \frac{E_2}{2}(1+\upsilon_0) v^1_{0,xy} \\
- E_3 u^1_{1,xx} - \frac{E_3}{2}(1-\upsilon_0) u^1_{1,yy} - \frac{E_3}{2}(1+\upsilon_0) v^1_{1,xy} = 0 \\
\left[\left(\frac{E_1}{2} - \frac{4E_3}{h^2}\right)(1-\upsilon_0) \right] w^1_{0,y} + \left[\left(\frac{E_1}{2} - \frac{4E_3}{h^2}\right)(1-\upsilon_0) \right] v^1_1 - E_2 v^1_{0,xx} - \frac{E_2}{2}(1-\upsilon_0) v^1_{0,xx} - \frac{E_2}{2}(1+\upsilon_0) u^1_{0,xy} \\
- E_3 v^1_{1,yy} - \frac{E_3}{2}(1-\upsilon_0) v^1_{1,xx} - \frac{E_3}{2}(1+\upsilon_0) u^1_{1,xy} = 0
\end{gathered} \tag{۲۴}$$

در روابط فوق N_{x0}، N_{y0}و N_{xy0} نیروهای پیش کمانش می باشد که از حل معادلات تعادل مطابق با تئوری غشایی بدست می آید. معادلات تعادل غشایی با حذف کلیه ممانها و دورانهای قبل از کمانش از معادلات (۱۸) بدست می آید.

$$\begin{aligned} &N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ &N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \\ &N_x w_{0,xx} + 2N_{xy} w_{0,xy} + N_y w_{0,yy} = 0 \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

معادلات فوق شبیه به معادلات تعادل غشایی ورق FGM برمبنای تئوری کلاسیک می باشد در حالیکه تعریف نیروهای (N_x,N_y,N_{xy}) کاملاً متفاوت است. قبل از حل معادله کمانش لازم است با حل معادلات تعادل نیروهای پیش کمانش تعیین گردد. جهت حل این معادلات از روش پیشنهادی Meyers و همکارانش [۱۴]استفاده گردیده است. با توجه به اینکه شرایط مرزی ورق ساده می باشد می توان نوشت.

$$\begin{aligned} &w_0(x,0) = w_0(x,b) = w_0(0,y) = w_0(a,y) = 0 \\ &M_y(x,0) = M_y(x,b) = M_x(0,y) = M_x(a,y) = 0 \\ &u_0(x,0) = u_0(x,b) = v_0(0,y) = v_0(a,y) = 0 \\ &u_1(x,0) = u_1(x,b) = v_1(0,y) = v_1(a,y) = 0 \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

جوابهایی که بتواند شرایط مرزی فوق را ارضاء کند بصورت زیر فرض می گردد.

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} u_{0mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\ u_1(x,y) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} u_{1mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\ v_0(x,y) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} v_{0mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\ v_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} v_{1mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\ w_0(x,y) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{0mn} \sin \alpha x \sin \beta y \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

مطابق با روش گالرکین، انتگرال حاصلضرب خطای تخمینی R در تابع وزن W در محدوده تعریف مسئله معادل صفر قرار داده می شود. تابع وزن مشابه فرم جوابهای تقریبی مسئله انتخاب می گردد.

$$\int_{\Omega} R(x,y) W(x,y) d\Omega = 0 \qquad (۲۸)$$

با جایگذاری کرنشها از روابط خطی شده سینماتیکی (۷) در روابط مربوط به نیروهای حالت تعـادل اولیـه (۲۲) نیروهای منتجه برحسب مؤلفه های جابجایی بدست می آید. با جایگذاری نیروها از روابـط مـذکور در معـادلات تعادل غشایی (۲۵) و سپس جایگذاری جوابهای تخمینی از روابط (۲۷)، توابع خطا بدست می آید. با جایگذاری توابع خطا و توابع وزن که مشابه فرم جوابهای تخمینی در نظـر گرفتـه شـده در رابطـه (۲۸) و انتگـرال‌گیـری، نیروهای پیش کمانش بصورت زیر حاصل می شوند.

$$\begin{aligned} N_{x0} &= \frac{\phi_1}{1-\upsilon_0} \\ N_{y0} &= \frac{\phi_1}{1-\upsilon_0} \\ N_{xy0} &= 0 \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

شرایط مرزی ورق بصورت زیر تعریف می شود.

$$B.C: \begin{cases} w_0^1(x,0) = w_0^1(x,b) = w_0^1(0,y) = w_0^1(a,y) = 0 \\ M_y(x,0) = M_y(x,b) = M_x(0,y) = M_x(a,y) = 0 \\ u_0^1(x,0) = u_0^1(x,b) = v_0^1(0,y) = v_0^1(a,y) = 0 \\ u_1^1(x,0) = u_1^1(x,b) = v_1^1(0,y) = v_1^1(a,y) = 0 \end{cases} \qquad (۳۰)$$

جوابهایی که بتواند شرایط مرزی فوق را ارضاء نماید بصورت زیر تعریف می شود.

$$
\begin{aligned}
u_0{}^1(x,y) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} u_{0mn}\cos\alpha x\sin\beta y \\
u_1{}^1(x,y) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} u_{1mn}\cos\alpha x\sin\beta y \\
v_0{}^1(x,y) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} v_{0mn}\sin\alpha x\cos\beta y \\
v_1{}^1(x,y) &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} v_{1mn}\sin\alpha x\cos\beta y \\
w_0{}^1(x,y) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{0mn}\sin\alpha x\sin\beta y
\end{aligned}
\tag{۳۱}
$$

بطوریکه u_{0mn}، u_{1mn}، v_{0mn}، v_{1mn} و w_{0mn} مقادیر ثابتی بوده وm و n تعداد نیم موجها در جهات x و y می باشند. با جایگذاری جوابهای تقریبی در معادلات پایداری (۲۴) پنج معادله حاصل می شود که بصورت ماتریسی زیر قابل نوشتن می باشد.

$$
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\
K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\
K_{31} & K_{32} & \overline{K}_{33} & K_{34} & K_{35} \\
K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\
K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_{0mn} \\ v_{0mn} \\ w_{0mn} \\ u_{1mn} \\ v_{1mn} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{۳۲}
$$

بطوریکه :

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= E_1\left[\alpha^2 + \frac{1-\upsilon_0}{2}\beta^2\right] \\
K_{12} &= \frac{E_1(1+\upsilon_0)}{2}\alpha\beta \\
K_{13} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{14} &= E_2\left[\alpha^2 + \frac{1-\upsilon_0}{2}\beta^2\right] \\
K_{15} &= \frac{E_2}{2}(1+\upsilon_0)\alpha\beta \\
K_{21} &= K_{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{22} &= E_1\left[\frac{1-\upsilon_0}{2}\alpha^2+\beta^2\right] \\
K_{23} &= 0 \\
K_{24} &= \frac{E_2}{2}(1+\upsilon_0)\alpha\beta \\
K_{25} &= E_2\left[\frac{1-\upsilon_0}{2}\alpha^2+\beta^2\right] \\
K_{31} &= K_{13} \\
K_{32} &= K_{23} \\
K_{33} &= (\frac{E_1}{2}-\frac{4E_3}{h^2})(1-\upsilon_0)(\alpha^2+\beta^2) \\
\overline{K}_{33} &= K_{33}+(1-{\upsilon_0}^2)\left[N_{x0}\alpha^2+N_{yx0}\beta^2\right] \\
K_{34} &= (\frac{E_1}{2}-\frac{4E_3}{h^2})(1-\upsilon_0)\alpha \\
K_{35} &= (\frac{4E_3}{h^2}-\frac{E_1}{2})(1-\upsilon_0)\beta \\
K_{41} &= -K_{14} \\
K_{42} &= -K_{24} \\
K_{43} &= -K_{34} \\
K_{44} &= -E_3\left[\alpha^2+\frac{1-\upsilon_0}{2}\beta^2\right]-(\frac{E_1}{2}-\frac{4E_3}{h^2})(1-\upsilon_0) \\
K_{45} &= -\frac{E_3}{2}(1+\upsilon_0)\alpha\beta \\
K_{51} &= -K_{15} \\
K_{52} &= -K_{25} \\
K_{53} &= -K_{35} \\
K_{54} &= K_{45} \\
K_{55} &= -E_3\left[\frac{1-\upsilon_0}{2}\alpha^2+\beta^2\right]-(\frac{E_1}{2}-\frac{4E_3}{h^2})(1-\upsilon_0)
\end{aligned} \tag{۳۳}
$$

که $\alpha=\frac{m\pi}{a}$ و $\beta=\frac{n\pi}{b}$ می باشد. عبارتهای E_1، E_2 و E_3 با جایگذاری رابطه توانی مدول الاستیسیته ماده FGM از روابط (۱) در روابط (۱۱) بدست می آید.

$$E_1 = E_m h + \frac{E_{cm} h}{k+1}$$
$$E_2 = E_{cm} h^2 (\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2k+2})$$
$$E_3 = \frac{E_m h^3}{12} + E_{cm} h^3 (\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)}) \qquad (۳۴)$$

در مجموعه ضرایب معادلات (۳۳) تنها ضریب $\overline{K}_{33}$ دارای عبارت مربوط به نیروهای پیش کمانش می باشد. با جایگذاری جوابهای تقریبی (۳۱) در معادلات پایداری (۲۴)، معادلات (۳۲) حاصل می شود. ضرایب معادلات مطابق روابط (۳۳) تعریف می گردد با این تفاوت که ضریب $\overline{K}_{33}$ با جاگذاری روابط (۲۹) در رابطه (۳۳) بدست می آید.

$$\overline{K}_{33} = K_{33} - (1+\upsilon_0)\phi_1\left[\alpha^2 + \beta^2\right] \qquad (۳۵)$$

با جایگذاری تابع بارگذاری حرارتی از رابطه (۲۳) در روابط (۱۱) مقدار عبارت ϕ_1 بدست می آید.

$$\phi_1 = \Delta T h\left[E_m\alpha_m + \frac{1}{k+1}(E_m\alpha_{cm} + E_{cm}\alpha_m) + \frac{E_{cm}\alpha_{cm}}{k+1}\right] \qquad (۳۶)$$

شرط داشتن جواب غیر صفر برای دستگاه پنج معادله- پنج مجهول (۳۲) این است که دترمینان ماتریس رابطه مذکور مساوی صفر باشد.

$$\det\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} = 0 \qquad (۳۷)$$

کلیه ضرایب K_{ij} از روابط (۳۳) و ضریب $\overline{K}_{33}$ از رابطه (۳۵) قابل محاسبه می باشد. از رابطه حاصله مقدار اختلاف دما ΔT بدست می آید.

$$\Delta T = \frac{b^2 k_d}{\pi^2 (1+\upsilon_0) k_c h (\alpha^2 + n^2)\left[E_m \alpha_m + \frac{1}{k+1}(E_m \alpha_{cm} + E_{cm}\alpha_m) + \frac{E_{cm}\alpha_{cm}}{2k+1}\right]\left[(\frac{mb}{a})^2 + n^2\right]}$$

(۳۸)

بطوریکه :

$$\begin{aligned}
K_c = {} & K_{15}K_{24}K_{42}K_{51} + K_{12}K_{25}K_{44}K_{51} + K_{14}K_{22}K_{45}K_{51} + K_{14}K_{25}K_{41}K_{52} + \\
& K_{15}K_{21}K_{44}K_{52} + K_{11}K_{24}K_{45}K_{52} + K_{15}K_{22}K_{41}K_{54} + K_{11}K_{25}K_{42}K_{54} + \\
& K_{12}K_{21}K_{45}K_{54} + K_{12}K_{24}K_{41}K_{55} + K_{14}K_{21}K_{42}K_{55} + K_{11}K_{22}K_{44}K_{55} - \\
& (K_{14}K_{25}K_{42}K_{51} + K_{15}K_{22}K_{44}K_{51} + K_{12}K_{24}K_{45}K_{51} + K_{15}K_{24}K_{41}K_{52} + \\
& K_{11}K_{25}K_{44}K_{52} + K_{14}K_{21}K_{45}K_{52} + K_{12}K_{25}K_{41}K_{54} + K_{15}K_{21}K_{42}K_{54} + \\
& K_{11}K_{22}K_{45}K_{54} + K_{14}K_{22}K_{41}K_{55} + K_{11}K_{24}K_{42}K_{55} + K_{12}K_{21}K_{44}K_{55})
\end{aligned}$$

$$K_d = \det\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \qquad (۳۹)$$

اختلاف دمای بحرانی کمانش ΔT_{cr} بازای مقادیری از m و n که رابطه (۳۸) را کمینه کند بدست می آید.با فرض k=1 اختلاف دمای بحرانی کمانش برای ورق FGM با ترکیب خطی مؤلفه ها از رابطه (۳۸) بدست می آید. همچنین با فرض k=0 اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق همگن ایزوتروپ از رابطه (۳۸) قابل محاسبه می باشد.

۴- تحلیل کمانش ورق مستطیل شکل FGM تحت افزایش درجه حرارت غیر خطی در راستای ضخامت ورق و شرایط مرزی ساده بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات

یک ورق مستطیل شکل از جنس ماده FGM که از چهار طرف بر روی تکیه‌گاههای ساده قرار دارد مفروض است. شرایط مرزی بگونه ای تعریف گردیده تا از انبساط صفحه‌ای ورق جلوگیری شود. مشابه بخش قبلی ، ورق تحت افزایش درجه حرارت غیرخطی در راستای ضخامت قرار دارد که تابع بارگذاری حرارتی با توجه به تغییر خواص مادی و حرارتی ورق FGM در راستای ضخامت، از حل معادله انتقال حرارت در حالت پایا بدست می آید. پس از حل، توزیع درجه حرارت مطابق رابطه زیر بدست می آید.

$$T(z)=T_m+\frac{\Delta T}{C}\left[(\frac{2z+h}{2h})-\frac{K_{cm}}{(k+1)K_m}(\frac{2z+h}{2h})^{k+1}+\frac{K_{cm}{}^2}{(2k+1)K_m{}^2}(\frac{2z+h}{2h})^{2k+1}-\right.$$
$$\left.\frac{K_{cm}{}^3}{(3k+1)K_m{}^3}(\frac{2z+h}{2h})^{3k+1}+\frac{K_{cm}{}^4}{(4k+1)K_m{}^4}(\frac{2z+h}{2h})^{4k+1}-\frac{K_{cm}{}^5}{(5k+1)K_m{}^5}(\frac{2z+h}{2h})^{5k+1}\right] \quad (۴۰)$$

که T_m دمای سطح فلز، K_m و K_c بترتیب ضریب هدایت حرارتی فلز و سرامیک و $K_{cm}=K_c-K_m$ می باشد.نیروهای پیش کمانش مشابه حالت بارگذاری قبل طبق روابط (۲۹) تعیین می گردند. با جایگذاری جوابهای تقریبی (۳۱) در معادلات پایداری (۲۱)، معادلات (۳۲) حاصل می گردند. ضرایب معادلات مطابق روابط (۲۹) تعریف می گردد. همچنین ضریب $\overline{K}_{33}$ مشابه رابطه (۳۵) بدست می آید. با جایگذاری تابع بارگذاری حرارتی از رابطه (۴۰) در روابط (۱۱) مقدار عبارت ϕ_1 بدست می آید.

$$\phi_1=\Delta ThH_1+hH_2 \quad (۴۱)$$

بطوریکه :

$$H_1=\frac{1}{C}\left\{\frac{E_m\alpha_m}{2}+\frac{1}{k+2}\left[E_m\alpha_{cm}+E_{cm}\alpha_m-\frac{K_{cm}E_m\alpha_m}{(k+1)K_m}\right]+\frac{1}{2k+2}\right.$$

$$\left[E_{cm}\alpha_{cm}-\frac{K_{cm}}{(k+1)K_m}(E_m\alpha_{cm}+E_{cm}\alpha_m)+\frac{K_{cm}{}^2E_m\alpha_m}{(2k+1)K_m{}^2}\right]+\frac{1}{3k+2}$$
$$\left[\frac{K_{cm}{}^2}{(2k+1)K_m{}^2}(E_m\alpha_{cm}+E_{cm}\alpha_m)-\frac{K_{cm}{}^3E_m\alpha_m}{(3k+1)K_m{}^3}-\frac{K_{cm}E_{cm}\alpha_{cm}}{(k+1)K_m}\right]+\frac{1}{4k+2}$$
$$\left[\frac{K_{cm}{}^4E_m\alpha_m}{(4k+1)K_m{}^4}-\frac{K_{cm}{}^3}{(3k+1)K_m{}^3}(E_m\alpha_{cm}+E_{cm}\alpha_m)+\frac{K_{cm}{}^2E_{cm}\alpha_{cm}}{(k+1)K_m}\right]+\frac{1}{5k+2}$$
$$\left[\frac{K_{cm}{}^4}{(4k+1)K_m{}^4}(E_m\alpha_{cm}+E_{cm}\alpha_m)-\frac{K_{cm}{}^5E_m\alpha_m}{(5k+1)K_m{}^5}-\frac{K_{cm}{}^3E_{cm}\alpha_{cm}}{(3k+1)K_m{}^3}\right]+\frac{1}{6k+2}$$
$$\left.\left[\frac{K_{cm}{}^4E_m\alpha_m}{(4k+1)K_m{}^4}-\frac{K_{cm}{}^5}{(5k+1)K_m{}^5}(E_m\alpha_{cm}+E_{cm}\alpha_m)\right]-\frac{1}{7k+1}\frac{K_{cm}{}^5E_{cm}\alpha_{cm}}{(5k+1)K_m{}^5}\right\} \quad (۴۲)$$
$$H_2=T_m[E_m\alpha_m+\frac{1}{1+k}(E_m\alpha_{cm}+E_{cm}\alpha_m)+\frac{1}{2k+1}E_{cm}\alpha_{cm}]$$

و

$$C = 1 - \frac{K_{cm}}{(k+1)K_m} + \frac{K_{cm}{}^2}{(2k+1)K_m{}^2} - \frac{K_{cm}{}^3}{(3k+1)K_m{}^3} + \frac{K_{cm}{}^4}{(4k+1)K_m{}^4} - \frac{K_{cm}{}^5}{(5k+1)K_m{}^5} \quad (۴۳)$$

شرط داشتن جواب غیر صفر برای دستگاه پنج معادله-پنج مجهول (۳۲)، معادل صفر بودن دترمینان طبق رابطه (۳۷) می باشد. کلیه ضرایب K_{ij} از روابط (۳۳) و ضریب $\overline{K}_{33}$ از رابطه (۳۵) قابل محاسبه مـی باشـد. از رابطـه حاصله مقدار اختلاف دما ΔT بدست می آید.

$$\Delta T = \frac{b^2 K_d - \pi^2(1+\upsilon_0)K_c h H_2[(\frac{mb}{a})^2 + n^2]}{\pi^2(1+\upsilon_0)K_c h H_1[(\frac{mb}{a})^2 + n^2]} \quad (۴۴)$$

بطوریکه K_c و K_d از روابط (۳۹) محاسبه می گردند. اختلاف دمای بحرانی کمانش ΔT_{cr} بازای مقادیری از m و n که رابطه (۴۴) را کمینه کند بدست می آید. با فرض k=1 اختلاف دمای بحرانی کمانش برای ورق FGM با ترکیب خطی مؤلفه ها از رابطه (۴۴) بدست می آید. همچنین با فرض k=0 اختلاف دمای بحرانی کمانش برای ورق همگن ایزوتروپ از رابطه (۴۴) قابل محاسبه می باشد.

۵- مشخصات ورق FGM نمونه

$$\frac{b}{a} = 1,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5,5$$
$$\frac{b}{h} = 10,20,30,40,50,60,70,80,90,100$$
$$h = 0.005m$$
$$\upsilon_0 = 0.3$$

Aluminium (Metal Constituent)

$$E_m = 70GPa$$
$$\alpha_m = 23\times10^{-6} / C^\circ$$
$$K_m = 204W / mK$$

Alumina (Ceramic Constituent)

$E_c = 380GPa$
$\alpha_c = 7.4\times10^{-6} / C^\circ$
$K_c = 10.4W / mK$

۶- نتیجه گیری

در این مقاله تحلیل کمانش ورق مستطیل شکل FGM با فرض شرایط مرزی ساده تحت دو نوع بارگذاری حرارتی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات ارائه گردیده است. نتیجه گیری انجام شده در ارتباط با معادلات تعادل، پایداری و روابط اختلاف دمای بحرانی کمانش و همچنین نتایج تحلیل کمانش ورق نمونه بصورت زیر قابل جمع بندی و ارائه می باشد:

۱- در هر دو حالت بارگذاری حرارتی و با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحات، مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش مربوط به ورق FGM از مقادیر مربوط به ورق همگن کاملاً فلزی کمتر است. با توجه به ویژگیهای بارز مواد FGM از جمله مقاومت در برابر دماهای بالا و شوکهای حرارتی و شکست و کاربرد صنعتی رو به گسترش این مواد، بررسی مقاومت سازه های ساخته شده از FGM نسبت به پدیده کمانش امری ضروری می باشد.

۲- در هر دو حالت بارگذاری و استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحات، مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق با افزایش نسبت b/a افزایش می یابد.

۳- در هر دو حالت بارگذاری و استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحات مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق با افزایش نسبت b/h کاهش می یابد.

۴- استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی باعث تعیین مقادیر دمای بحرانی کمانش ورق با دقت بالاتری می گردد. استفاده از تئوری کلاسیک صفحات جهت تحلیل کمانش حرارتی ورق FGM منجر به تقریب بالاتری برای اختلاف دمای بحرانی کمانش می گردد.

۷- مراجع

[1] Koizumi, M., Activities in Japan, Composites, Part B, Vol 28 , No . 1-2 , pp . 1-4 , (1997).

[2] Eslami, M.R., Mossavarali, A., and Saheli, G,P., em Thermoelastic Buckling of lsotropic and Orthotropic Plates with Imperfections, J. Thermal Stresses, Vol. 23, No.9, pp. 853-872,2000

[3] Najafizadeh, M.M., and Eslami, M.R., First Order Theory Based Thermoelastic Stability of Functionally Graded Material Circular Plates, AIAA J, Vol 40. pp. 1444-1450,(2002).

[4] Najafizadeh, M.M., and Eslami, M.R., Buckling Analysis of Circular Plates of Functionally Graded Materials under Uniform Radial Compression, International Journal of Mechanical Sciences, Vol 4 . pp. 2479-2493, (2002).

[5] Javaheri, R., and Eslami, M.R., Thermal Buckling of Functinally Graded Plates, AIAA J, Vol 40 . pp. 162 169 (2002).

[6] Javaheri, R., and Eslami, M.R., Buckling of Functinally Graded Plates under In-Plane Compressive Loading, ZAMM, Vol 82 . pp. 277 283, (2002).

[7] Javaheri, R., and Eslami, M.R., Thermal Buckling of Functinally Graded Plates Based On Higher-Order Theory, Journal of Thermal Stresses, Vol 25. pp. 603 625 (2002).

[8] Najafizadeh, M.M., and Hedayati, B., Refined Theory for Thermoelastic Stability of Functionally Graded Circular Plates, Accepted for Publication, Journal of Thermal Stresses.

[9] Najafizadeh, M.M., and Heydari, H.R., An Exact Solution for Thermal Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher Order Shear Deformation Plate Theory, Submitted for Review, Eur. J. Mech. A/Solid

[10] Ma, L.S., and Wang, T.J., Nonlinear Bending and Postbuckling of a Functionally Graded Circular Plate under Mechanical and Thermal Loading, Int. Journal Solid Structures, Vol. 40, pp. 3311 -3330, (2003).

[11] Reddy, J.N., and Praveen, G.N., Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates, Int. Journal Solid Structures, Vol 35, pp. 4467-4476, (1998).

[12] Tanigawa, Y., Some Basic Thermoelastic Problem for Nonhomogeneous Structural Materials, Applied Mechanical Review, Vol 48 , pp. 377 389, (1995).

[13] Mori, T., and Tanaka, K., Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusion, Acta Metallurgica, Vol 21 , pp. 571-574 (1973).

[15] Meyers, C.A., and Hyer, M.W., Thermal Buckling and Postbuckling of Symmetrically Laminated Composite Plates, Journal of Thermal Stresses, Vol 14 , pp. 519 -540, (1991).

جدول۱- مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت یکنواخت بر حسب b/a مبتنی بر تئوری های کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول(b/h=100)

K		$b/a=1$	$b/a=2$	$b/a=3$	$b/a=4$	$b/a=5$
0	C	17.099	42.747	85.495	145.342	222.288
	F	17.098	42.647	85.000	145.000	221.889
1	C	7.943	19.859	39.718	67.522	103.269
	F	7.941	19.811	39.685	67.422	103.170
5	C	7.265	18.164	36.328	61.758	94.454
	F	7.259	18.154	36.284	61.688	94.322
10	C	7.469	18.673	36.346	63.488	97.100
	F	7.446	18.578	35.895	62.011	95.897

جدول۲- مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت یکنواخت بر حسب b/h مبتنی بر تئوری های کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول(b/a=1)

K		$b/h=10$	$b/h=20$	$b/h=40$	$b/h=60$	$b/h=80$	$b/h=100$
0	C	1709.911	427.477	106.869	47.497	26.717	17.099
	F	1706.854	426.254	405.875	46.986	26.021	17.097
1	C	794.377	198.594	49.648	24.066	12.412	7.943

	F	792.456	191.325	48.568	23.578	12.024	7.784
5	C	726.571	181.642	45.410	20.182	11.352	7.265
	F	724.685	180.054	44.687	19.875	11.032	7.201
10	C	756.927	186.731	46.820	20.747	11.670	7.469
	F	755.252	185.630	45.975	19.991	11.124	7.411

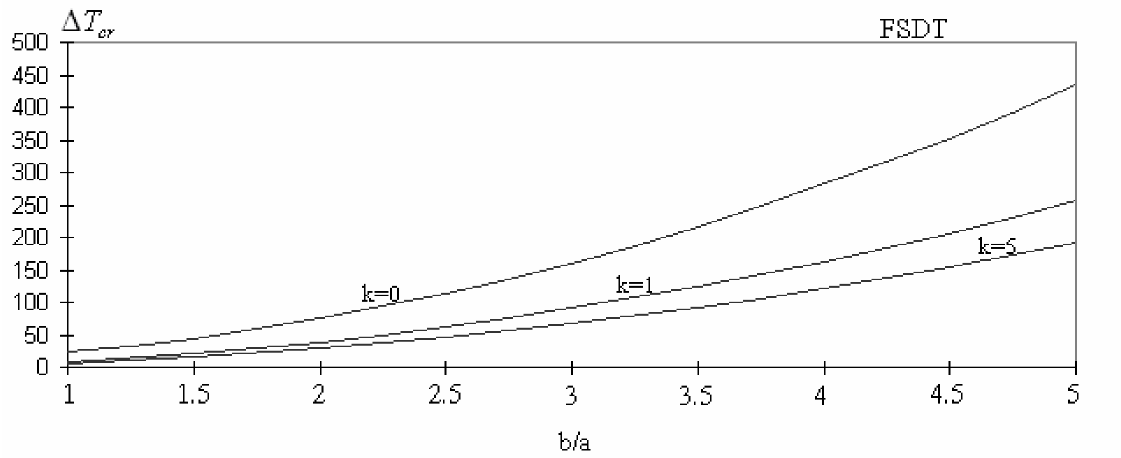
جدول۳- مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت غیرخطی در جهت ضخامت بر حسب b/a مبتنی بر تئوریهای کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول (b/h=100)

K		$b/a=1$	$b/a=2$	$b/a=3$	$b/a=4$	$b/a=5$
0	C	24.198	75.495	160.991	280.684	434.576
	F	24.142	74.654	159.254	279.241	432.854
1	C	7.663	38.683	90.384	162.764	255.825
	F	7.625	37.852	89.010	161.002	253.997
5	C	4.877	28.338	67.441	122.184	192.569
	F	4.834	27.451	66.012	120.857	190.124
10	C	5.057	28.004	66.249	119.793	188.643
	F	5.055	27.874	65.541	118.240	186.512

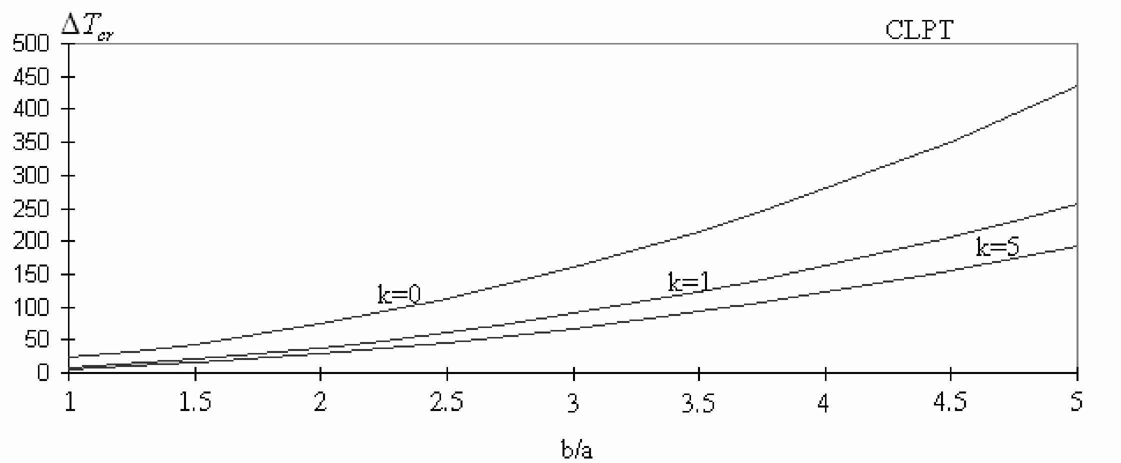
جدول۴- مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت غیرخطی در جهت ضخامت بر حسب b/h مبتنی بر تئوریهای کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول (b/a=1)

K		$b/h=10$	$b/a=20$	$b/a=40$	$b/a=60$	$b/a=80$	$b/a=100$
0	C	3409.821	844.955	203.738	84.995	43.434	24.198
	F	3406.658	842.865	202.452	83.999	42.879	24.001
1	C	2055.001	503.987	116.234	44.428	19.296	7.663
	F	2053.024	501.875	115.025	43.251	18.784	7.612
5	C	1553.336	380.261	86.999	32.683	13.675	4.877
	F	1551.120	178.854	85.845	31.684	13.025	4.801
10	C	1519.568	372.211	85.372	32.254	13.662	5.057
	F	1516.351	370.111	84.064	31.354	12.784	5.023

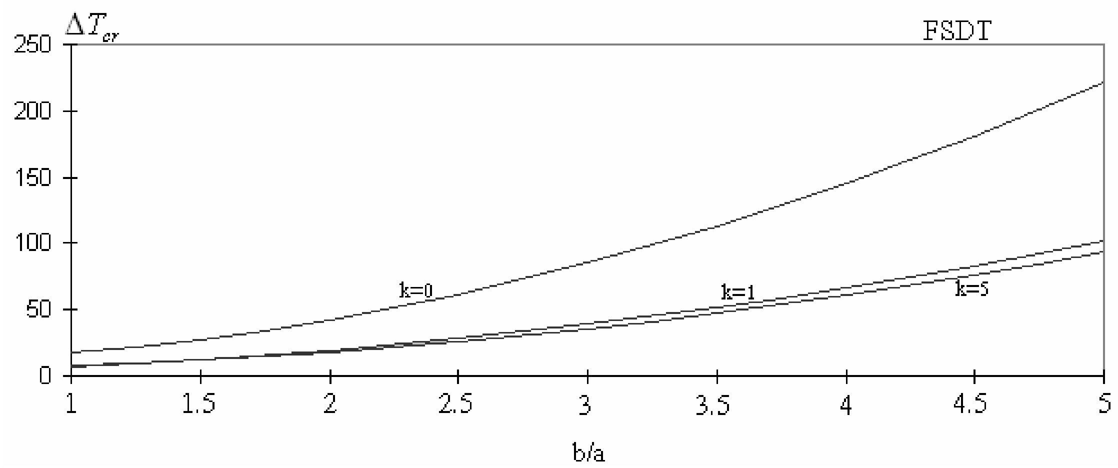
شکلها



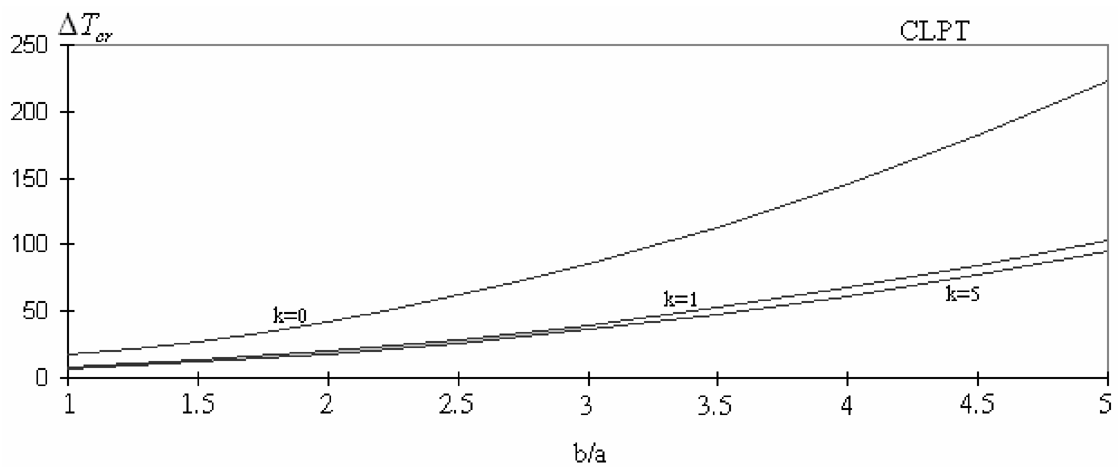
شکل۱– اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت غیر خطی در جهت ضخامت بر حسب b/a مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحات(b/h=100)



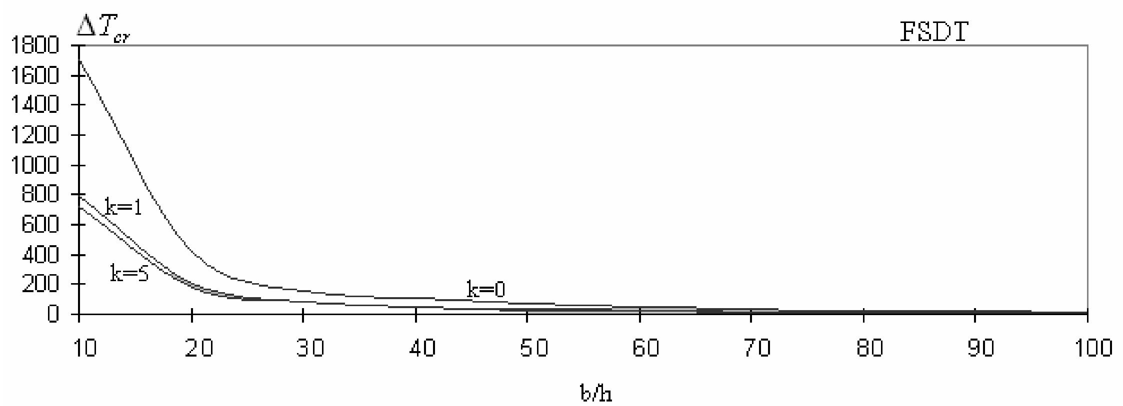
شکل۲– اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت غیر خطی در جهت ضخامت بر حسب b/a مبتنی بر تئوری کلاسیک صفحات(b/h=100)



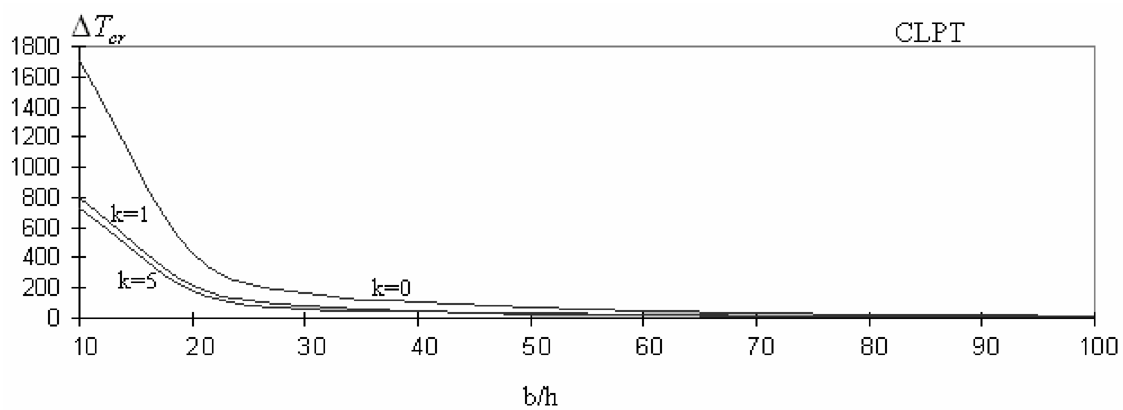
شکل۳- اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت یکنواخت بر حسب b/a مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحات(b/h=100).



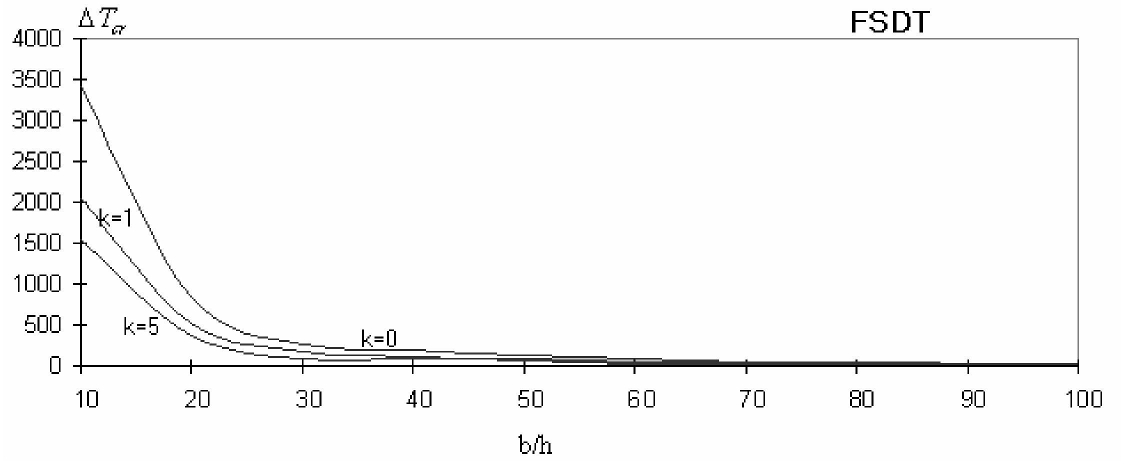
شکل۴- اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت یکنواخت بر حسب b/a مبتنی بر تئوری کلاسیک صفحات(b/h=100)



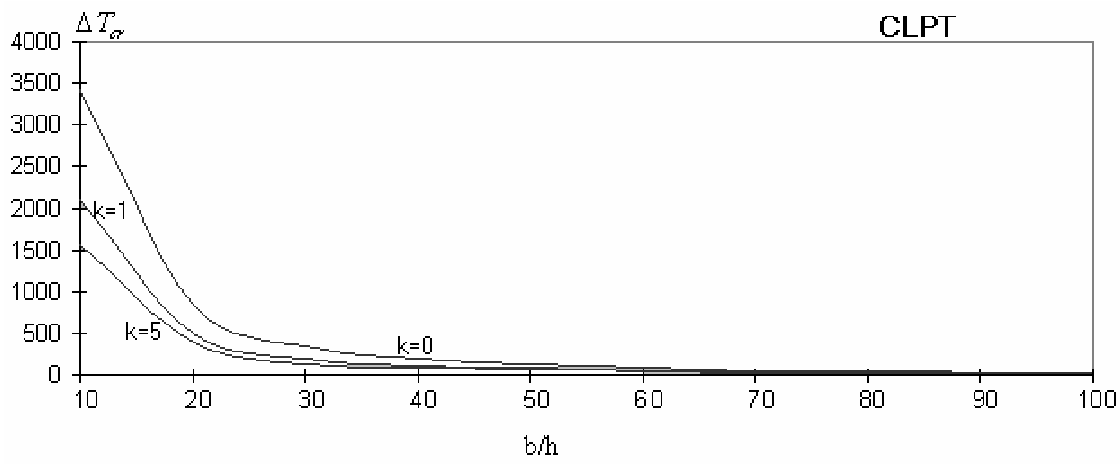
شکل ۵- اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت یکنواخت بر حسب b/h مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحات(b/a=1)



شکل۶- اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت یکنواخت بر حسب b/h مبتنی بر تئوری کلاسیک صفحات(b/a=1).



شکل۷– اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت غیرخطی درجهت ضخامت بر حسب b/h مبتنی بر تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات (b/a=1).



شکل۸– اختلاف دمای بحرانی ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت غیرخطی درجهت ضخامت بر حسب b/h مبتنی بر تئوری کلاسیک صفحات (b/a=1).

Abstract

In the present research, thermal buckling of rectangular plates made of functionally graded material (FGM) under thermal loads are investigated, based on the first order shear deformation plate theories. Nonlinear Kinematic (strain-displacement) relations are considered based on the first order shear deformation plate theories. By substituting kinematic and stress-strain relations of functionally graded plate in the total potential energy equation and employing Euler equations, the equilibrium equations are obtained. Applying Euler equations to the second variation of total potential energy equation leads to the stability equations.Then, buckling analysis of functionally graded plate under two type of thermal loads is carried out resulting into closed-form solutions. The results are compared with the critical buckling obtained for functionally graded plate based on classical plate theory given in the literature.