بهينه سازي ديسك غيرهمگن دوار به روش سيمپلكس

بهروز فرشي[1]
دانشيار

محمدحسين فائزي[2]
كارشناس ارشد

در صنايع هوا فضا استفاده‌هاي متعددي براي ديسک هاي توربين گاز، مانند استفاده در موتورهاي توربوجت تعريف شده است وشرايط حاكم براين ديسك ها موجب شده تا كم كردن وزن اين عضوها موردتوجه قرارگيرد.بمنظور بدست آوردن آناليز ديسک و رسيدن به توزيع مناسب تنش‌ها،بايد خواص ماده راباتوجه به شعاع، دما يا هر دو متغيردرنظرگرفت. در اينجا، بامدل‌كردن ديسک دوار، بعنوان مجموعه‌اي از حلقه‌هاي مختلف که هرکدام خواص ثابتي دارند، تغييرات خواص در کل ديسك را با کمي تقريب و با ايجاد تغييرات در خواص هرکدام از رينگ‌ها نسبت به ديگري، مي‌توان مدل‌سازي کرد. پروفيل حالت بهينه با متناسب‌شدن ضخامت رينگ‌ها نسبت به‌هم بدست مي‌آيد و محدوديت‌هاي تنش را ارضا مي‌کند. در اين تحقيق با استفاده از الگوريتم سيمپلکس اين فرآيند انجام شده است. سيمپلكس الگوريتمي نامقيد است و اين در حالي است كه مسئله داراي قيد مي باشد. لذا با روشي ابداعي قيدهاي مسئله با تابع هدف تركيب شده است. اين تجربه نشان مي دهد كه با استفاده از قابليت هاي سيمپلكس و روش ارائه شده در اين مقاله مي توان بهينه سازي مسائل مقيد را بدون استفاده از روشهاي مقيد و گراديانى و حتي ساده تر انجام داد. نتايج نهايي مؤيد اين مطلب هستند.

واژه هاي راهنما : بهينه سازي، تنش الاستيك، ديسك دوار، ديسك غيرهمگن، سيمپلكس

۱- مقدمه

همانطوركه ذكرشد درديسكهاي توربين گاز،شرايطي خاص برديسك درحال دوران حاكم است. همچون دماي بسياربالا وچرخش باسرعت زاويه اي زياد. اين شرايط موجب شده تاكم كردن وزن اين عضوهابعنوان يك مسئله مهم موردتوجه طراحان اين ديسكها قرارگيرد. ايجادشدن نيروي گريزازمركز بزرگ درديسك و وجود دماي بسياربالا ، منجربه كاهش مقاومت ماده ودرنتيجه افزايش تغييرشكل درديسك ميگردد لذابايد ضخامت ديسك درحدي تعيين ومحاسبه شودكه هم وزن كمي را براي ديسك دوار ايجادكند وهم مقاومت

[1] نويسنده مسئول، دانشيار، دانشكده مهندسي مكانيك، دانشگاه علم و صنعت ايران farshi@iust.ac.ir
[2] كارشناس ارشد، مهندسي مكانيك، دانشگاه علم و صنعت ايران

قابل قبولي را در برابر تنشهاي وارده داشته باشد.حل تحليل ديسك دوار متقارن و همگن با ضخامت ثابت، هنوز نيز به عنوان يك روش استاندارد در كتب مختلف الاستيسيته نظير Timoshenko [١] موجوداست. براي بررسيو محاسبه تنشهاي موجود در يك ديسك دوار با ضخامت متغير، Leopold [٢] روشي نيمه ترسيمي را براي بدست آوردن تنشهاي الاستيك در ديسك پيشنهاد كرده است. با افزايش كاربرد روش‌هاي عددي و استفاده از كامپيوتر در محاسبات عددي، راه‌هاي عددي متعددي براي حل مسأله ديسك با ضخامت متغير مورد مطالعه قرار گرفت كه از آن جمله مي‌توان به موارد ذيل اشاره كرد :

روش تفاضل محدود Manson [٣]، روش تكرار دوم Shilizki [٤]، روش المان محدود Genta و همكاران [٥]، روش حل متوالي Mendelson [۶] و روش المان مـرزي Abdol-Mihsein و همكـارانش [٧]. Yuan وYeh Huan [٨] يك فرمول بندي سيستماتيك را براي تعيـين تـنش‌هـاي الاسـتيك درديسـك دوار غيـر همگن با ضخامت دلخواه متغير تحت بار حرارتي ارائه نموده‌اند كه دراين روش ديسك غير همگن با ضخامت متغير به تعداد محدودي حلقه با ضخامت و خواص ثابت تقسيم مي‌شود وحـل مسـتقلي بـراي آن اسـتخراج مي‌گردد. اين روش همانند روشي است كه توسط لئوپولد و ديگران ارائه شده و منجر به تشكيل يك سيسـتم معادلات جبري مي‌شود. اين سيستم معادلات نيازمند شيوه‌اي عددي براي حل مي‌باشد. اما روشي كه مـا بـه آن مي‌پردازيم تفاوت مهمي با آن شيوه دارد؛ در اينجا شرايط پيوستگي در محل اتصال هـر دو حلقـه مجـاور برحسب شرايط مرزي كل مسأله بيان مي‌شود. بنابراين به جاي يك سيستم معادلات جبري، تنها يك معادله فارغ از تعداد حلقه‌هاي به كار رفته در تجزيه ديسك بدست مي‌آيد. ايـن مفهـوم بسـيار مفيـد بـراي تحليـل ديسك دوار غيرهمگن با ضخامت متغير بـه كـار مـي‌رود. ايـن روش مبنـاي كـار Jahed و Sherkati [٩] در تعيين تنشهاي الاستيك و پلاستيك در ديسك بوده است. همچنين لازم به‌ذكراست دقت اين روش بسـتگي به تعداد حلقه‌هاي به كار رفته در تجزيه ديسك دارد و با افزايش تعداد حلقه‌ها، دقت حل زياد مي‌گردد.

مسأله بهينه‌سازي در دهه‌هاي اخير در مسائل مهندسي بسيار مطرح گرديده است و در صنايع هـوايي بـا توجه به اهميت خاص پارامترهايي مانند استحكام و لزوم پايين بودن وزن، داراي اهميـت خاصـي مـي‌باشـد، يكي از زمينه‌هاي مهم بهينه‌سازي در صنايع هوايي همان‌گونه كه گفته شد، ديسك توربين گاز مي‌باشـد كـه در سال‌هاي اخير كارهاي عددي و تحليل عمده‌اي در اين زمينه صورت گرفته است.

Seireg و Surana [١٠] در زمينه بهينه‌سازي ديسك متقارن تحت سرعت زاويه اي بدون گراديان دمايي كار كرده و از الگوريتم‌هاي خاصي براي بهينه‌سازي ديسك متقارن اسـتفاده نمـوده‌انـد. همچـنين Prager و Chen [١١] در همان زمان به طور جداگانه تحليـل هـايي را در زمينـه بهينـه‌سـازي ديسـك متقـارن ارائـه نموده‌اند. استفاده از روشهاي عددي براي بهينه‌سازي ديسك ابتـدا توسـط Malkov و Salganskaya مطـرح گرديد [١٢]. لازم به ذكر است كارهاي انجام شده فوق اغلب بدون در نظرگرفتن غيرخطي بودن محدوديت‌ها و بررسي تأثير گردايان محدوديت‌ها در بهينه‌سازي ديسك بود. بـا گذشـت زمـان و بكـار گـرفتن روش‌هـاي كارآمدتر در بهينه‌سازي ديسك كه قدرت درنظـر گـرفتن غيرخطـي بـودن محـدوديت و محاسـبه گردايـان محدوديت غيرخطي را داشتند، بهينه‌سازي ديسك به‌طور جدي‌تري مطرح گرديد. Fox [١٣] بـا اسـتفاده از روش از جهت قابل قبول[1] كه روشي بر مبناي محاسبه گردايان محـدوديتها مـي‌باشـد بهينـه‌سـازي ديسـك

[1] Feasible Direction Method

توربين گاز اقدام نمود و در ادامه دردهه نـود، Campbell و Zienkiwicz [١۴]، Wang و Gallaher [١۵] و Pederson [١۶]، از بهينه‌سازي به روش برنامه‌ريزي خطي مكرر[1] كه روشي بر مبناي در نظر گـرفتن پروسـه بهينه‌سازي با توجه به گراديان تابع هدف و گراديان محدوديت‌ها مي‌باشد استفاده نمودند. همچنين در دهـه اخير استفاده از روش‌هاي المان محدود در بهينه‌سازي ديسك دوار مطرح گرديـده اسـت كـه در ايـن زمينـه مي‌توان به كارهاي انجام شده توسط Chen Chev و همكارانش اشاره كرد كه براي بهينه‌سـازي ديسـك دوار از خاصيت المان محدود در بهينه‌سازي از روش جهت قابل قبول و روش برنامه‌ريـزي خطـي مكـرر اسـتفاده نمودند.

اما مسئله اي كه در مقايسه بين روش هاي گراديانی و غيرگراديانی حائز اهميت است، اين است كه در روش هاي گراديانی، بايد گراديان ها بصورت متغير طراحي محاسبه شوند و اين محاسبات هميشه بسيار مفصل و دست وپاگيرهستند. اگر بتوانيم بدون طي اين مرحله دشوار محاسباتي، كار را به سرانجام برسانيم بطور قطع شيوه ساده تري را براي نتيجه گيري برگزيده ايم. يكي از اين روش هاي غيرگراديانی روش سيمپلكس است. در اين تحقيق از روش سيمپلكس براي بهينه يابي استفاده شده است و مزيت بزرگ اين روش آن است كه علاوه بر عدم استفاده از گراديان و محاسبات پيچيده مربوط به آن، براي برنامه نويسي در محيط رايانه بسيار مناسب مي باشد. البته بايد توجه داشت كه سيمپلكس روشي نامقيد است و قيود مسئله را درخود نمي پذيرد. لذا مرسوم است كه هنگام استفاده از روشهاي نامقيد براي مسائل مقيد، طوري الگوريتم محاسباتي برنامه را مي نويسند كه قيدها هم در مرحله اي از محاسبات لحاظ شوند. در اين تحقيق از اين روش هاي مرسوم استفاده اي نكرده ايم؛ نوآوري خاص اين مقاله در استفاده از تابع هدف جديدي است كه در آن تعريف شده و با استفاده از اين تابع هدف ازاين پس مي توان محاسبات بهينه سازي اي را كه بدين صورت هستند، دقيق تر و آسان تر و حتي با روش هاي نامقيد انجام داد. در پايان مقاله دو مثال براي حالاتي كه تنش تسليم در تمام ديسك ثابت و يا با شعاع متغير باشد و مطابق با برخي مراجع معتبر حل شده و نتيجه نهايي با آن منابع مقايسه گرديده است.

٢- معادلات حاكم بر رفتار ترموالاستيک ديسک دوار

پيش از بررسي معادلات حاكم بر اين ديسك، لازم است تا با شرايط ترمومكانيكي حاكم بر اين ديسك دوار در حين كار آشنا شويم. اين ديسك در شرايطي كار مي‌كند كه سرعت چرخش توربين در بعضي موارد به حدود پنجاه هزار دور بر دقيقه مي‌رسد و اختلاف دمايي حدود چندصد درجه سانتيگراد بر ديسك حاكم مي‌باشد. در اين شرايط نيروهاي مختلفي بر ديسك دوار غيرهمگن وارد مي‌گردد كه به شرح زيرند:

١- نيروهاي ناشي از مونتاژ قطعات جانبي‌كه در اثر اختلاف فشار جانبي ديسك و نيروهاي ناشي از دوران پره ايجاد مي‌گردد.

٢- نيروهايي كه در اثر چرخش و ارتعاش اجزا متحرك ايجاد مي‌شود، نيروهاي ارتعاشي در حالت عادي بسيار كم هستند؛ ولي در صورت وجود نابالانسي در محور توربين، قابل توجه خواهند بود. در عين حال

---
1 Sequential Linear programming

بيشترين تنش‌هاي وارد بر توربين، ناشي از نيروهاي گريز از مركز حاصل از چرخش قسمتهاي دوار توربين مي‌باشد.

۳- نيروهاي ناشي از وجود گراديان حرارتي در ديسك كه باعث ايجاد تنشهاي حرارتي در ديسك مي‌گردد و مقدار قابل توجهي تغيير شكل در ديسك ايجاد مي‌نمايد. به طور كلي گردايان حرارتي حاكم بر ديسك سهم كمي در ايجاد تنش در ديسك را داراست. اما سهم قابل توجهي از تغيير شكل‌ها، مربوط به اين بارگذاري مي‌باشد.

٤- نيروهاي ضربه‌هاي ناشي از برخورد قطعات خارجي به ديسك توربين نيز پديده اي است كه هميشه قابل جلوگيري نيست. اين قطعات خارجي معمولاً بسيار كوچك بوده و قطري در حدود يك ميليمتر و يا كمتر دارند و سبب صدمات موضعي و سايش در ديسك مي‌گردند.

لازم به ذكر است كه درحل تحليلي موجود، نيروهاي ناشي از گرديان حرارتي حاكم بر ديسك و نيز نيروهاي ناشي از چرخش اجزاء متحرك درنظر گرفته شده است.

در بيشتر كاربردهاي عملي، ضخامت ديسک همراه با شعاعش تغيير مي‌كند؛ شكل (۱) نمايانگر اين مسئله و نيز نيروهاي وارد بر يك المان در پروفيل ديسک مي‌باشد. در تحليل ديسک دوار و تعيين تنشها و جابجايي موجود در ديسک در صورتي‌كه مقطع قطري، متقارن بوده و بزرگترين ضخامت ديسک در مقايسه با قطر داخلي اش كوچک باشد، شيوه‌اي تحليلي موجود است [۱۷]. در اين شرايط، تنش محوري، σ_z در دو طرف ديسک، صفر و به ميزان ناچيزي در داخل المان، كوچک مي‌باشد. در تحليل هايي كه در قسمتهاي بعدي ارائه شده است، فرض تنش سطح رعايت گرديده است، يعني :

$$\sigma_z = o \qquad (1)$$

تنش هاي داخلي ديسک از وجود نيروي گريز از مركز، به همراه شتاب آن با چگالي ρ نتيجه مي‌شود. ديسک با سرعت زاويه اي ثابت ω مي‌چرخد. نيروي گريز از مركز بطور يكنواخت در طول محيط ديسک توزيع شده است. در مواردي‌كه اثر دما نيز در نظر گرفته مي‌شود، فرض بر آن است كه دما تنها با شعاع تغيير مي‌كند و درنتيجه، تقارن محوري اثرات دمايي حفظ مي‌شود. تنشهايي كه تابحال معرفي شده اند مستقل از موقعيت زاويه‌اي بوده و تنها تابعي از شعاع r مي‌باشند. ديگر آنكه، چون هيچ برشي نمي‌تواند در صفحه $r\theta$ وجود داشته باشد، لذا :

$$\tau_{r\theta} = o \qquad (2)$$

در اينجا معادلات حاكم بر رفتار ترموالاستيک يک ديسک دوار غير همگن با ضخامت متغير ارائه شده است. اگر ضخامت ديسک در مقايسه با شعاعش كوچک باشد، تنش محوري قابل صرف‌نظر كردن بوده و در نتيجه ديسک در حالت تنش صفحه‌اي‌ست. جنس ديسک از ماده‌اي است كه ايزوتروپيک بوده اما در طول شعاع، غيرهمگن فرض شده است. يعني مدول يانگ $E = E(r)$ ، چگالي ديسک $\gamma = \gamma(r)$ ، ضريب انبساط حرارتي طولي $\alpha = \alpha(r)$ ، و ضريب پواسون $\nu = \nu(r)$ مي‌باشند.

F_r نشانگر مؤلفه شعاعي نيروي كششي بر واحد طول و F_θ مولفه مماسي نيروي كششي بر واحد طول مي‌باشد. شرط تعادل در راستاي r بصورت زير نوشته مي‌شود:

$$\sum F_r = 0: \quad F_r rd\theta + d\left(F_r rd\theta\right) - F_r rd\theta + \frac{\gamma}{g} r^2\omega^2 hdrd\theta - 2F_\theta dr\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$dF_r rd\theta + F_r drd\theta + F_r rd^2\theta + \frac{h\gamma}{g} r^2\omega^2 drd\theta - F_\theta drd\theta = 0 \qquad (۳)$$

از جملات مرتبه ۲ و بالاتر، به‌علت كوچكي صرف‌نظر كرده، از تقسيم طرفين معادله (۳) بر واحد سطح $rdrd\theta$، معادله تعادل بصورت زير بدست مي‌آيد:

$$\frac{dF_r}{dr} + \frac{F_r - F_\theta}{r} + \frac{h\gamma}{g}\omega^2 r = 0 \qquad (۴)$$

كه در آن $h = h(r)$ ضخامت ديسک در شعاع r ، g شتاب جاذبه و ω ، سرعت زاويه اي ديسک مي‌باشد.

معادلات سازگاري براي حالت تنش صفحه اي عبارتند از :

(۵)

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

رابطه عمومي هوک نيز براي حالت تنش صفحه‌اي به‌صورت زير مي‌باشد:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E(r)h}\left(F_r - \nu F_\theta\right) + \alpha(r)T(r)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E(r)h}\left(F_\theta - \nu F_r\right) + \alpha(r)T(r) \qquad (۶)$$

كه از تركيب معادلات (۵) و (۶) داريم :

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E(r)h}\left(F_r - \nu F_\theta\right) + \alpha(r)T(r)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E(r)h}\left(F_\theta - \nu F_r\right) + \alpha(r)T(r) \qquad (۷)$$

كه در آن α، ضريب انبساط حرارتي و T تابع توزيع دما در راستاي شعاعي ديسک مي‌باشد. بنابراين مولفه‌هاي نيروي كششي بر واحد طول عبارتند از:

$$F_r = \frac{hE}{1-\nu^2}\left[\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha T\right]$$

$$F_\theta = \frac{hE}{1-\nu^2}\left[\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr} - (1+\nu)\alpha T\right] \qquad (۸)$$

با قرار دادن عبارات (۸) در معادله تعادل (۴)، معادله ديفرانسيل حاكم بر ديسک دوار غير همگن با ضخامت متغير تحت يک ميدان پايدار غير همگن حرارتي بصورت زير بدست مي‌آيد :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{d\nu}{dr}\frac{u}{r} + \left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)\frac{d}{dr}\left(Ln\frac{hE}{1-\nu^2}\right) =$$

$$\frac{d}{dr}\left[(1+\nu)\alpha T\right] - \frac{1-\nu}{Eg}\gamma\omega^2 r + (1+\nu)\alpha T\frac{d}{dr}\left(Ln\frac{hE}{1-\nu^2}\right) \qquad (۹)$$

حال چنانچه ديسک، يکنواخت و همگن فرض شود يعني γ, E, h, ν و α همگي ثابت باشند، معادله (۹) بصورت زير ساده مي‌شود :

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=(1+\nu)\alpha\frac{dT}{dr}-\frac{1-\nu^2}{Eg}\gamma\omega^2 r \qquad (۱۰)$$

که حل عمومي آن براي جابجايي u به شکل زير مي‌باشد :

$$u(r)=C_1 r+\frac{C_2}{r}+(1+\nu)\frac{1}{r}\int_{r_i}^{r}\xi\alpha T d\xi-\frac{\gamma(1-\nu^2)}{8Eg}\omega^2 r^3 \qquad (۱۱)$$

که در رابطه فوق r_i ، شعاع داخلي ديسک و C_2, C_1 ثابتهايي هستند که با اعمال شرايط مرزي محاسبه مي‌شوند.

در اين قسمت روش حل ترموالاستيک ديسک دوار غير همگن با ضخامت متغير بيان مي‌شود. براي تحليل ديسک دوار غير همگن با ضخامت متغير، ديسک دوار را به تعداد محدودي حلقه تجزيه مي‌کنيم [۱۸]. در هر حلقه از ديسك که تحت فشارهاي داخلي و خارجي و نيروي گريز از مرکز قرار دارد، از تغييرات ضخامت و نيز تغييرات خواص ماده صرف‌نظر مي‌شود.

شکل (۲)، نمونه‌اي از يک ديسک دوار را نشان مي‌دهد. در اين شکل، P_o, P_i به ترتيب فشارهاي داخل و خارج، ω سرعت زاويه‌اي ديسک و T_o, T_i دماهاي داخل و خارج ديسک مي‌باشند. منحني‌هاي تنش ثابت ($\sigma_{eq}=Const.$) براي اين مسأله، دوايري هم‌مرکزند. با فرض اينکه مقدار تنش معادل روي يک شعاع کوچک ds، ثابت باقي مي‌ماند، تنش معادل در هر حلقه ثابت فرض مي‌شود.

با جايگزيني معادله (۱۱) درمعادلات (۸)، مؤلفه هاي نيروي کشش بر واحد طول در راستاهاي شعاعي (F_r) و مماسي (F_θ)، بر حسب ثابتهاي C_2, C_1 بصورت زير بدست مي‌آيند:

$$F_r=hE\left[\frac{C_1}{1-\nu}-\frac{C_2}{(1+\nu)r^2}\right]-\frac{hE}{r^2}\int_{r_i}^{r}\xi\alpha T d\xi-\frac{h\gamma}{g}\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\omega^2 r^2$$
$$F_\theta=hE\left[\frac{C_1}{1-\nu}+\frac{C_2}{(1+\nu)r^2}\right]+\frac{hE}{r^2}\int_{r_i}^{r}\xi\alpha T d\xi-h\alpha ET-\frac{h\gamma}{g}\left(\frac{1+3\nu}{8}\right)\omega^2 r^2 \qquad (۱۲)$$

که r شعاع متوسط هر حلقه مي‌باشد، و C_2, C_1 ثابتهايي هستند که با اعمال شرايط مرزي $F_r=-F_i$ در $r=r_i$ و $F_r=-F_o$ در $r=r_o$ بدست مي‌آيند. اين ثابتها به شکل زير مي‌باشند:

$$C_1=\frac{1-\nu}{hE}\left[\frac{F_i r_i^2-F_o F_o^2}{r_o^2-r_i^2}+\frac{hE}{r_o^2-r_i^2}\int_{r_i}^{r_o}\xi\alpha T d\xi+\frac{h\gamma\omega^2}{g}\left(\frac{3+\nu}{8}\right)(r_i^2+r_o^2)\right]$$
$$C_2=\frac{1+\nu}{hE}\left(\frac{r_i^2 r_o^2}{r_o^2-r_i^2}\right)\left[F_i-F_o+\frac{hE}{r_o^2}\int_{r_i}^{r_o}\xi\alpha T d\xi-\frac{h\gamma\omega^2}{g}\left(\frac{3+\nu}{8}\right)(r_i^2+r_o^2)\right] \qquad (۱۳)$$

كه روابط فوق نشان‌دهنده غيرخطي‌بودن توزيع تنش در ديسک برحسب ضخامت مي‌باشد.همچنين جابجاييهاي داخل و خارج هر حلقه را مي‌توان بر حسب مؤلفه‌هاي شعاعي نيروهاي كششي داخل و خارج بر واحد طول حلقه به‌صورت زير نوشت :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}C_{12} \\ C_{21}C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_i \\ F_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

مؤلفه هاي ماتريس ضرايب [C] در حالت تنش صفحه اي عبارتند از:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1+\nu}{hE}\frac{r_i^3}{r_0^2 - r_i^2}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{r_o^2}{r_i^2}\right) \\ C_{12} &= -\frac{2}{hE}\frac{r_i r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \\ C_{21} &= -\frac{2}{hE}\frac{r_i^2 r_o}{r_o^2 - r_i^2} \\ C_{22} &= -\frac{1+\nu}{hE}\frac{r_o^3}{r_o^2 - r_i^2}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{r_i^2}{r_o^2}\right) \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

و مؤلفه هاي ماتريسهاي اثر دوران و حرارت در حالت تنش صفحه اي بدين صورت مي‌باشد:

$$\theta_1 = \frac{2r_i}{r_o^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r_o} \xi\alpha T d\xi$$

$$\theta_2 = \frac{2r_o}{r_o^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r_o} \xi\alpha T d\xi$$

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= \frac{\gamma}{8gE}\omega^2 r_i\left(2r_i^2 + 6r_o^2 - 2\nu r_i^2 - 2\nu r_o^2\right) \\ \varpi_2 &= \frac{\gamma}{8gE}\omega^2 r_o\left(6r_i^2 + 2r_o^2 - 2\nu r_i^2 - 2\nu r_o^2\right) \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

براي بيان مؤلفه شعاعي نيروهاي كشش بر واحد طول داخل و خارج بر حسب جابجايي هاي داخل و خارج، معادله (۱۴) به صورت زير نوشته مي‌شود:

$$\begin{bmatrix} C_{11}C_{12} \\ C_{21}C_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}C_{12} \\ C_{21}C_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}C_{12} \\ C_{21}C_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

پس از درهم نمودن تمامي حلقه‌ها در يكديگر و رعايت تعادل و سازگاري لايه هاي مشترک، يک دستگاه معادلات خطي به شكل :

$$[K]\{U\} = \{F\} + [K][\Theta] + [K][\Omega] \qquad (۱۸)$$

بدست مي‌آيد و براي بردار جابجايي $\{U\}$ حل مي‌شود.
در اين حالت مؤلفه هاي شعاعي و مماسي نيروي كشش بر واحد طول، F_θ, F_r ، براي حالت تنش صفحه اي از روابط زير بدست مي‌آيند:

$$F_r = A_1 - \frac{A_2}{r^2} + \frac{hE}{r^2}\left[\frac{r^2 - r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r}\xi\alpha Td\xi - \int_{r_i}^{r}\xi\alpha Td\xi\right] + \frac{h\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left[r_i^2 + r_o^2 - \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - r^2\right]$$

$$F_\theta = A_1 + \frac{A_2}{r^2} + \frac{hE}{r^2}\left[\frac{r^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r_o}\xi\alpha Td\xi + \int_{r_i}^{r}\xi\alpha Td\xi - \alpha Tr^2\right] + \frac{h\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left[r_i^2 + r_o^2 - \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - \left(\frac{1+3\nu}{3+\nu}\right)r^2\right] \quad (۱۹)$$

كه در اين روابط r ، شعاع متوسط هر حلقه مي‌باشد. همچنين ثابتهاي A_2, A_1 عبارتند از:

$$A_1 = \frac{F_i r_i^2 - F_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$A_2 = \frac{(F_i - F_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (۲۰)$$

در حالت خاص ديسک توپر، شعاع داخل r_i برابر صفر در نظر گرفته مي‌شود. در اين حالت بايد $C_2 = 0$ باشد تا جابجايي مركز ديسک صفر شود، در نتيجه معادلات (۱۱) و (۱۹) به معادلات زير كاهش مي‌يابند:

$$u = -\frac{1-\nu}{hE}F_o r + \frac{1}{r}\left[(1+\nu)\int_{o}^{r}\xi\alpha Td\xi + (1-\nu)\left(\frac{r}{r_o}\right)^2\int_{o}^{r_o}\xi\alpha Td\xi\right] + \frac{(1-\nu)\gamma\omega^2}{8Eg}r\left[(3+\nu)r_o^2 - (1+\nu)r^2\right]$$

$$F_r = -F_i + hE\left[\frac{1}{r_o^2}\int_0^{r_o}\xi\alpha Td\xi - \frac{1}{r^2}\int_0^{r}\xi\alpha Td\xi\right] + \frac{h\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_o^2 - r^2\right)$$

$$F_\theta = -F_o + hE\left[\frac{1}{r_o^2}\int_0^{r_o}\xi\alpha Td\xi - \frac{1}{r^2}\int_0^{r}\xi\alpha Td\xi - \alpha T\right] + \frac{h\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)r^2 \quad (۲۱)$$

۳- روش بهينه‌سازي سيمپلكس[1]

Nelder و Mead [۱۹] روشي را به نام سيمپلكس در بهينه‌سازي بنيان نهادند كه تاحدي از ساير روشهاي جستجو پيچيده‌تر بنظر مي‌رسد. سيمپلكس از دسته روشهاي غير گراديانی و به‌معناي يك چندوجهي هندسي منظم در فضاي N بعدي است كه داراي (N+1) وجه مي‌باشد و نبايد با روشي به‌همان نام كه در

[1] Simplex

حل برنامه‌ريزي خطي [۲۰] به‌كار مي‌رود، اشتباه شود. اما آنچه كه اين روش را بعنوان يك استراتژي مؤثر به ما معرفي مي‌كند، راحتي اجراي آن براي محاسبات ديجيتالي و كامپيوتري است.

همان طور كه در مقدمه ذكر شد، در روش هاي گراديانی بايد گراديان ها بصورت متغير طراحي محاسبه شوند كه اين محاسبات هميشه بسيار مفصل و پيچيده هستند و اگر بتوانيم بدون طي اين مرحله دشوار محاسباتي، بهينه سازي را انجام دهيم، بطور قطع شيوه ساده تري را براي نتيجه گيري برگزيده ايم كه يكي از اين روش هاي غيرگراديانی روش سيمپلكس است. سيمپلكس عبارت است از پيداكردن كوچكترين حجم در فضا با كمترين تعداد نقاط كه حجم تعريف شده حاكم بر فضا باشد. حاكم بودن بر فضا در جبرخطي بدين معناست كه نقاط مذكور از يكديگر مستقل باشند و هر نقطه ديگري در آن فضا از تركيب اين نقاط بدست آيد. لذا در اين روش در فضاي N بعدي به N+۱ نقطه مستقل نياز داريم. از اين رو است كه روش هاي غيرگراديانی مانند روش سيمپلكس براي بالابردن راندمان محاسباتي مناسب ترند.

روش سيمپلكس مي‌تواند يك تابع با N متغير مستقل را با استفاده از يك چندوجهي N ضلعي قابل تغيير بهينه كند. اين چندوجهي N+1 رأس دارد كه هر رأس را مي‌توان با يك بردار نشان داد. در بين اين نقاط رأس، دو نقطه وجود دارند كه مقدار تابع هدف در يكي از آنها بيشتر از ساير نقاط و در ديگري كمترين است. اين دو نقطه در محاسبات نقش مهمي ايفا مي‌كنند.

روش سيمپلكس نقطه ماكزيمم را با استفاده از مركز گرانش[1] تمام N نقطه ديگر، به محل جديدي پرتاب مي‌كند. سپس با بررسي ويژگيهاي نقطه جديد درصورتي كه به گودي فضاي N بعدي نزديكتر باشد، آن را جايگزين نقطه ماكزيمم مي‌كند.

بردارهاي ما x_1 تا x_{n+1} هستند و $f(x_1)$ تا $f(x_{n+1})$ اعداد منتسب به بردارها مي‌باشند. در كل چهار مرحله را براي رسيدن به نقطه كمينه بايد طي كنيم كه در ادامه با اين مراحل آشنا مي‌شويم.

۳-۱- مرحله اول؛ يافتن نقاط مينيمم و ماكزيمم در بين N+1 نقطه اوليه

اگر طبق آنچه گفته شد، براي هر نقطه يك بردار تصور كنيم، خواهيم داشت

$$x_i^k = [x_{i1}^{(k)},\dots\dots,x_{ij}^{(k)},\dots\dots,x_{in}^{(k)}] \quad , \; i=1,\dots,n+1 \qquad (۲۲)$$

انديس (k) كه در اينجا و ساير فرمول‌هاي بعدي ديده مي‌شود، شمارش گر تعداد سيكل هايي است كه كل الگوريتم سيمپلكس اجرا شده است. يعني در ابتداي كار مقدارش ۱ است كه با هر بار تكرار سيكل، يكي به آن افزوده مي‌شود. اگر مقدار تابع هدف براي هر بردار برابر با f باشد، $f(x_L)$ و $f(x_h)$ طبق فرمول (۲۳) بدست مي‌آيند:

$$\begin{aligned} f(x_h^{(k)}) &= \max\{f(x_1^{(k)}),\dots\dots\dots,f(x_{n+1}^{(k)})\} \\ f(x_l^{(k)}) &= \min\{f(x_1^{(k)}),\dots\dots\dots,f(x_{n+1}^{(k)})\} \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

---

[1] Centroid

۳-۲- مرحله دوم؛ بدست آوردن مرکز گرانش N نقطه مابقي

با انجام اين مرحله، مرکز گرانش N نقطه از N+1 نقطه بدست مي‌آيد. نقطه x_h را از بين نقاط حذف مي‌کنيم تا پس از اين مرحله با استفاده از مرکز گرانش بدست آمده، x_h را به مکاني ديگر پرتاب نماييم.

$$x_{n+2,j}^{(k)} = \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij}^{(k)}\right) - x_{hj}^{(k)}\right] \qquad j = 1,\ldots\ldots,n \qquad (۲۴)$$

انديس i بردارها را مي‌چرخاند و انديس j در بين درايه‌ها گردش مي‌کند؛ j با زياد شدن خود باعث مي‌شود که تك تك درايه‌هاي تمام N+1 بردار با هم جمع شوند.

۳-۳- مرحله سوم؛ بازتاب[1] دادن نقطه ماکزيمم

اکنون همان گونه که گفته شد، با استفاده از مرکز گرانش بدست آمده، x_h را به مکاني ديگر پرتاب مي‌کنيم تا نقطه اي جايگزين براي آن بدست آوريم.

$$x_{n+3}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \alpha\,(x_{n+2}^{(k)} - x_h^{(k)}) \qquad (۲۵)$$

در فرمول (۲۵)، α ضريب بازتاب است. بايد α >۰ باشد تا بازتاب صورت پذيرد؛ نلدر و ميد مقدار ۱ را براي ضريب بازتاب پيشنهاد مي‌کنند.

۳-۴- مرحله چهارم؛ انبساط و انقباض و کاهش

پس از انجام مرحله بازتاب، يکي از حالات زير پيش روي ما قرار مي‌گيرد:

الف- انبساط[2] : اگر $f(x_{n+3}^{(k)}) \le f(x_l^{(k)})$ باشد، رابطه $(x_{n+3}^{(k)} - x_{n+2}^{(k)})$ منبسط مي‌شود. يعني خواهيم داشت :

$$x_{n+4}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \gamma\,(x_{n+3}^{(k)} - x_{n+2}^{(k)}) \qquad (۲۶)$$

که در اين رابطه γ ضريب انبساط است. بايد ۱< γ باشد تا انبساط صورت پذيرد؛ نلدر و ميد مقدار ۲ را براي ضريب انبساط پيشنهاد مي‌کنند.

اکنون باز مقايسه اي بايد انجام گيرد؛ اگر $f(x_{n+4}^{(k)}) \le f(x_l^{(k)})$ بردار $x_h^{(k)}$ را با بردار $x_{n+4}^{(k)}$ جايگزين مي‌کنيم. در غير اينصورت بردار $x_{n+3}^{(k)}$ را بجاي بردار $x_h^{(k)}$ مي‌نشيند.

حال به مرحله اول برمي گرديم و با N+1 وجهي جديد الگوريتم را اجرا مي‌کنيم. با برگشت به مرحله اول به مقدار شمارش‌گر (k) يکي افزوده مي‌شود.

ب- انقباض[3] : اگر به ازاي هر مقدار i بجز حالت $i = h$ داشته باشيم $f(x_{n+3}^{(k)}) > f(x_i^{(k)})$ ، بردار $(x_h^{(k)} - x_{n+2}^{(k)})$ با استفاده از رابطه زير انقباض مي‌يابد:

---

[1]Reflection
[2]Expansion
[3]Contraction

$$x_{n+5}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \beta(x_h^{(k)} - x_{n+2}^{(k)}) \qquad (۲۷)$$

که در اين رابطه β ضريب انقباض است. بايد ۱>β>۰ باشد تا انقباض صورت پذيرد؛ نلدر و ميد مقدار ۰/۵ را براي ضريب انقباض پيشنهاد مي‌کنند.

اکنون بردار $x_h^{(k)}$ با بردار $x_{n+5}^{(k)}$ جايگزين مي‌شود و براي ادامه کار به مرحله اول برمي گرديم. با برگشت به مرحله اول به مقدار شمارش‌گر (k) يکي افزوده مي‌شود.

ج- کاهش[1] : اگر $f(x_{n+3}^{(k)}) > f(x_h^{(k)})$ باشد، براي تمام بردارها رابطه $(x_i^{(k)} - x_l^{(k)})$ را کاهش مي‌دهيم. براي کاهش چندوجهي از اين فرمول استفاده مي‌شود:

$$x_i^{(k)} = x_l^{(k)} + 0.5(x_i^{(k)} - x_l^{(k)}) \qquad i = 1,....n+1 \qquad (۲۸)$$

حال به مرحله اول برمي گرديم و با N+1 وجهي جديد الگوريتم را اجرا مي‌کنيم. با برگشت به مرحله اول به مقدار شمارش‌گر (k) يکي افزوده مي‌شود.

اين مراحل آنقدر تکرار مي‌شود و آنقدر به شمارنده (k) اضافه مي‌گردد تا آنکه شرط همگرايي براي توقف محاسبات محقق شود. شرط همگرايي نلدر و ميد از اين قرار است:

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}[\,f(x_i^{(k)}) - f(x_{n+2}^{(k)})]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon \qquad (۲۹)$$

که در اينجا مقدار ε بسيار کوچك است. اين شرط در پايان هر سيکل و پيش از آنکه دوباره به ابتداي الگوريتم برگرديم بايد کنترل شود. اگر برقرار بود، بدين معناست که به حالت بهينه رسيده ايم و ديگر نيازي به ادامه کار نيست. آخرين پروفيل بدست آمده نيز، همان پروفيل بهينه است. [۱۹]

۴- بکار بردن روش سيمپلکس

همان طور که در توضيح روش سيمپلکس به بيان نلدر و ميد آمد، درصورتي که در فضاي N بعدي باشيم، و تابع هدف ما داراي N متغير باشد، به N+1 نقطه مستقل از هم در اين فضا به عنوان حدس‌ها و ورودي‌هاي اوليه مسئله نيازمنديم. اين N+1 نقطه، رؤوس يك چندوجهي هستند.

پروفيل‌هاي ما N المان دارند و متغير، ضخامت المان‌هاست. پس براي اين N ضخامت بايد N+1 پروفيل را به عنوان ورودي‌هاي مسئله وارد کنيم؛ درفضاي N بعدي هرکدام از اين N+1 پروفيل معرف يکي از آن نقاط مستقل هستند.

نکته مهم در اينجا اين است که بايد پروفيل‌هاي اوليه کاملا از هم مستقل باشند و نتوان از ترکيب خطي برخي از آنها، برخي ديگر را بدست آورد. درصورتي که استقلال اين پروفيل‌ها رعايت نشود، چندوجهي ايجاد شده نمي تواند پاسخ بهينه قطعي را براي ما پيدا کند. البته احتمالا به جواب مي‌رسد، ولي آن جواب يك جواب محلي است. مثلا اگر در يك فضاي سه بعدي، ۴نقطه انتخاب شده اوليه به هم وابسته باشند، به جاي ساختن فضا، خط و يا صفحه‌اي را مي‌سازند و تنها در آن دور مي‌زنند. در اين حالت حرکت سيکل بهينه‌سازي ما درون صفحه‌اي از فضا محدود مي‌شود و نمي تواند همه قسمت‌هاي فضا را براي يافتن نقطه

[1] Reduction

بهينه جستجو كند. شيوه‌هاي ديگري نيز براي استفاده از اين الگوريتم بهينه‌سازي مي‌توان تعريف كرد كه البته استفاده از آنها سخت تر و كم دقت تر از روش ذكر شده در اين مقاله است. در اين روش استفاده از الگوريتم نلدر و ميد، آنقدر بدنه اين پروفيل‌ها را به بازي گرفته مي‌شود تا از آنها پروفيل بهينه را بيرون بيايد و شكل مورد نظر را بدست آيد. اين نوع بكار بردن سيمپلكس بسيار مطمئن و دقيق است. چون كل پروفيل با هم درنظر گرفته مي‌شود. در اينجا تمام المان‌ها در محاسبات در كنار هم هستند. در واقعيت جابجايي يا تغيير اندازه هركدام از اين المان ها، موجب تغييرات تنشي روي سايرين مي‌شود كه در محاسبات ما براي بهينه‌سازي، اين امر به خوبي درنظر گرفته مي‌شود.

۱-۴- نحوه انتخاب ورودي‌هاي مسئله

در حالتي كه از روش سيمپلكس N+1 نقطه‌اي استفاده مي‌كنيم، انتخاب نقاط شروع كاري مهم و حساس است. زيرا استقلال اين نقاط از همديگر اهميت زيادي دارد. بطور كلي در فضاي يك بعدي با داشتن ۲ نقطه يا يك بردار ـ كه از ۲ نقطه ساخته مي‌شود ـ مي‌توان كل فضا را ساخت. در فضاي ۲ بعدي نيز ۲ بردار مستقل و يا سه نقطه مستقل ـ يعني سه نقطه‌اي كه بتوانند با هم يك صفحه را بسازند ـ كل فضا را بوجود مي‌آورد و همين طور از طريق استقراء بدست مي‌آيد كه در فضاي ۳بعدي، ۳ بردار يا ۴ نقطه اين كار را انجام مي‌دهند. اگر در همين فضاي ۳بعدي، بجز مبدأ مختصات، ۳نقطه ديگر نيز روي محورهاي متعامد انتخاب كنيم، اكنون ۴ نقطه مستقل داريم كه با اتصال نقطه مبدأ به سايرين، ۳بردار مستقل بوجود مي‌آيد. اين بردارها، پايه فضاي ۳بعدي ما هستند.

حال به فضاي N بعدي مي‌رويم؛ در اين فضا N+1 نقطه اوليه لازم داريم. مي‌توان نقطه اول را مبدأ فضا روي درنظر گرفت و ساير نقاط را بر روي محورهاي متعامد مختصاتي مشخص كرد. از اتصال نقطه اول به N نقطه ديگر، N بردار مستقل و متعامد پديدار مي‌شود كه پايه فضاي N بعدي مورد بحث ما هستند.

در روش سيمپلكس استفاده شده در اين تحقيق، در صورتي كه فضاي مسئله N متغير داشته باشد و تابع هدف براساس اين N متغير ساخته شود، N+1 نقطه اوليه و يا به عبارتي N+1 پروفيل اوليه براي شروع كار نياز داريم. پيش تر ذكر شد كه اين N+1 پروفيل بايد استقلال داشته باشند. طبق نظريه مطرح شده براي درنظر گرفتن N+1 نقطه در فضاي N بعدي، پروفيل اول را روي مبدأ فضا انتخاب مي‌كنيم. دراين صورت ورودي اوليه ما پروفيلي با ضخامت «صفر» در تمام المان‌ها خواهد بود. به سراغ ساير ورودي‌ها مي‌رويم؛ در پروفيل‌هاي بعدي نيز به همين صورت به سراغ محورهاي مختصات مي‌رويم. هر پروفيل در خود N المان دارد كه قطر تمام اين المان‌ها بجز يكي شان صفر خواهد بود، فقط بايد دقت كرد كه قطر المانهاي غير صفر نبايد تماما يك مقدار واحد را دارا باشد و حداقل بايد يكي از آن ها متفاوت با ساير قطرها عدد دهي شود. مانند ماتريس‌هاي زير:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad\ldots\ldots,\quad\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad(۳۰)$$

استفاده از اعداد ۱و۲ در اين ماتريس ها نمادين است و مي توان به جاي اين اعداد ضخامت خاصي را قرارداد. اما نكته ديگر اينكه انتخاب اين ضخامت‌هاي صفر، ما را به جواب نمي رساند. لذا از ترفندي جديد استفاده مي‌كنيم؛ ابتدا اين N+1 نقطه را به همان صورتي كه گفته شد انتخاب كرده و سپس مجموع تمام نقاط را با يك بردار انتقال، به وسط فضا منتقل مي‌كنيم. اگر بخواهيم يك حالت منظم و كلاسيك را براي شكل اين پروفيل‌ها ارائه دهيم، به شكل (۳) مي‌رسيم كه البته اين ۷ پروفيل اوليه براي حالت ۶ الماني است.

بايد دقت شود كه برخلاف تصور اوليه، نمي توان همه پروفيل‌ها را به شكل ذوزنقه وارد كرد. در تعداد بالا هيچ گاه اين ذوزنقه‌ها از هم استقلال ندارند و مي‌توان از تركيب خطي برخي از آنها ديگري را بدست آورد و اگر چنانچه يك يا چندتا از اين پروفيل‌ها به هم وابسته باشند، فضاي جستجوي الگوريتم ما محدود به يك صفحه از فضا خواهد شد كه براي يافتن نقطه مينيمم يا ماكزيمم، بجاي جستجو كردن كل فضا، تنها در همين صفحه بهينه‌يابي مي‌كند.

۵- تابع هدف و محدوديت ها

تابع هدفي كه براي حل اين مسئله درگذشته مورد استفاده بود، تابع وزن پروفيل بوده است كه بايد با استفاده از يكي از الگوريتم‌هاي بهينه‌سازي اين تابع را مينيمم مي‌كرده‌اند. بعنوان مثال اگر از روش‌هاي بهينه‌سازي مرتبه۱ و۲ براي بهينه كردن شكل و وزن پروفيل استفاده مي‌شده، تابع هدف تابع مسئله، وزن پروفيل وقيدهاي آن، تنش در نقاط مختلف پروفيل بوده كه بايستي از تنش تسليم عبور نمي كرده است. اما روش بهينه‌سازي مورد استفاده در اين تحقيق از روشهاي مرتبه صفر است. روش سيمپلكس كه توسط نلدر و ميد ارائه شده روشي است نامقيد. اين روش هيچ قيدي را نمي پذيرد؛ يعني اگر بخواهيم تابع هدف‌مان را همان تابع وزن قرار دهيم و با اين روش و بدون قيد مسئله را حل كنيم، پاسخ آن، پروفيلي خواهد بود كه هيچ ضخامتي ندارد و وزن آن مينيمم مقدار ممكن يعني «صفر» است.

براي رفع اين مشكل، ساده‌ترين راه حلي كه به ذهن خطور مي‌كند، آن است كه پس از هر بار طي مراحل بهينه‌سازي، مقدار تنش در نقاط مشخص شده و مهم كنترل شود و بدين ترتيب خودمان قيدي را به اين روش اضافه كنيم. ابتدا تصميم بر آن بود كه از اين راه براي حل مسئه با روش سيمپلكس بهره برده شود؛ ولي در ميانه مسير مشكلات عديده‌اي بوجود آمد. استفاده از اين شيوه و افزودن قيدي به يك روش نامقيد مشكلات خاص خودش را دارد. لذا روشي كه در اين تحقيق براي حل اين مشكل پيشنهاد مي‌شود، ارتباطي به راهكار فوق ندارد و شيوه‌اي كاملا بديع و ابتكاري است. روش جديد بدين صورت است :

مي توان بجاي كنترل قيدها در پايان هر سيكل بهينه‌سازي، قيد را در خود تابع هدف قرار داد. يعني تابع هدف را طوري طراحي كرد كه با مينيمم شدن آن قيدهاي ما هم مورد كنترل قرار بگيرند و خود بخود چك شوند. الگوريتم بهينه‌سازي در طي مراحل خود بارها به تابع هدف رجوع مي‌كند؛ درنتيجه بطريقي نامحسوس، قيود كه در دل تابع هدف هستند، نقش بسيار مهمي را در يك روش نامقيد ايفا مي‌كنند. با اين كار مشكل عدم وجود قيد در اين الگوريتم و كنترل آن بكلي از بين خواهد رفت.

اكنون به سراغ ساخت چنين تابعي مي‌رويم؛ شيوه‌اي كه براي ساخت چنين تابع هدفي پيشنهاد مي‌شود بدين صورت است :

مي دانيم كه براي حداقل شدن وزن پروفيل با توجه به المان بندي آن و ضخامت‌هاي مختلفي كه در شعاع‌هاي مختلف داريم، بايد ضخامت‌ها مينيمم و بهينه شوند. يعني ضخامت‌ها بايد نه آن قدر نازك باشند كه تنش از تنش تسليم بگذرد و نه آنقدر ضخيم كه تنش‌ها فاصله زيادي با تنش تسليم داشته باشند. ضخامت بهينه بدين معناست كه تنش در مرز تنش تسليم است نه اضافه و نه كم. يعني اگر تنش در المان‌ها به تنش تسليم برسد و در مرز آن قرار بگيرد، پروفيل ما بهينه خواهد بود. در اين صورت بطور قطع ضخامت‌ها حداقل و وزن هم مينيمم است.

لذا تابع هدف را براي يك شكل با N المان بصورت زير تعريف مي‌كنيم :

$$F = \sum_{i=1}^{N+1} (\sigma_{yi} - \sigma_{ei})^2 \qquad (۳۱)$$

پرواضح است كه هيچ‌كدام از اين عبارات نمي توانند منفي باشند؛ چون از توان دوم آنها استفاده كرده‌ايم. لذا اگر تابع F صفر شود، يعني تمام($\sigma_{yi} - \sigma_{ei}$)ها در آن صفرهستند.

لازم به ذكر است كه مي‌توان براي تابع هدف ضريب اطمينان تعريف كرد تا تنش‌هاي پروفيل بهينه از لبه تنش تسليم كمي فاصله داشته باشند. براي اين كار ضريبي از تنش تسليم را در معادله (۳۱) قرار مي‌دهيم، نه مقدار واقعي آن را؛ كه اين ضريب عددي دلخواه و كوچك‌تر از واحد است.

۶- شرط همگرايي

نلدر و ميد عبارتي را بعنوان شرط همگرائي پيشنهاد مي‌كنند كه بدين شكل است :

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} [\, f(x_i^{(k)}) - f(x_{n+2}^{(k)})\,]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon \qquad (۳۲)$$

اين عبارت بدين معناست كه هرگاه فاصله تمام N+1 نقطه از نقطه مركز گرانش يعني نقطه (N+2)ام، كمتر از ε شد ما به جواب رسيده ايم. انتخاب مقدارε كه دراختيار ماست، دقت همگرائي را به ما مي‌دهد كه كمتر بودن آن باعث افزايش دقت مي‌گردد.

تابع هدف پيشنهادي نلدر و ميد را بدين صورت مي‌توان تعبير كرد: «هرگاه تمام N+1 نقطه ما حول نقطه مركز گرانش چندوجهي مجتمع شدند، به طوري كه فاصله تمام آنها از مركز گرانش، كوچكتر از يا مساوي با ε شد، همگرايي انجام شده است». نلدر و ميد اين تابع را براي كنترل همگرايي پيشنهاد داده‌اند كه به نوبه خود تابع جالب و كارآمدي براي كنترل ميزان همگرايي است.

البته به نظر نويسندگان اين مقاله، با توجه به تابع هدف تعريف شده در اين تحقيق مي‌توان شرط همگرائي را نيز تغيير داد. شرط پيشنهادي ما براي همگرا شدن روش سيمپلكس بدين صورت مي‌باشد:

$$\sum F(i) < \varepsilon \qquad (۳۳)$$

ميزان تابع هدف F(i) براي هر پروفيل عددي مثبت وبزرگتر از صفر است كه در بهترين حالت بهينه يابي مقدارش صفر خواهد بود. حال با توجه به اينكه تمام اين N+1 نقطه به صورت همزمان سمت جواب بهينه پيش مي‌روند، پس تمامي F(i)ها در حال رسيدن به حداقل مقدار خود هستند. پس درصورتي كه مجموع آنها كوچكتر از حد همگرائي ما شود، مي‌توان گفت كه به جواب مورد نظر خود رسيده ايم؛ يعني بايد داشته باشيم :

$$\sum_{i=1}^{N+1} F(i) < \varepsilon \qquad (۳۴)$$

در محاسبات انجام شده براي يافتن پروفيل بهينه، از هر دو تابع براي كنترل همگرايي استفاده كرديم و اختلاف چنداني بين آن دو مشاهده نشد. ولي تابع پيشنهادي نلدر و ميد نتيجه بهتري را ارائه كرد. تابعي كه نگارنده براي همگرايي روش سيمپلكس پيشنهاد مي‌كند، ديرتر همگرايي را اعلام مي‌كند كه اين نقطه ضعفي براي اين تابع است. از طرفي تابع نلدر و ميد، در حالت كلي و براي هر شرايطي جواب مي‌دهد؛ درحالي‌كه تابع نگارنده تنها براي چنين مسئله‌اي و چنين تابع هدفي قابل قبول است.

در هر حال با وجود ضعف‌هاي موجود، با اين تابع نيز مي‌توان همگرايي را كنترل نمود.

۷- مثال‌هاي عددي

مثال (۱): بهينه‌سازي ديسك مطرح شده در مرجع [۲۱]

در مرجع [۲۱] ديسك فولادي داراي شعاع داخلي ۲۰/۳۲ ميلي‌متر و شعاع خارجي ۱۲۳/۲ ميلي‌متر كه با سرعت زاويه‌اي ۲۲۰۰۰ دور بر دقيقه مي‌چرخد بهينه شده است. اين ديسك در شعاع داخلي تحت دماي ۲۶ درجه و در شعاع خارجي تحت دماي ۲۵۲ درجه سانتيگراد است. تنش تسليم ماده بكار رفته در ديسك در همه جا ثابت و برابر مقدار 860MPa مي‌باشد. كشش خارجي و فشار داخلي وارد بر آن به‌ترتيب برابر با 165MPa و 500MPa است. در مرجع [۲۱]، ديسك با روش برنامه‌ريزي خطي و با استفاده از الگوريتم روش جهت قابل قبول بهينه شده است. به‌جز مرجع ياد شده، در مرجع [۲۲] نيز با استفاده از روش كره‌هاي محاطي ديسك مذكور بهينه شده است. در همه موارد فوق، تابع هدف وزن ديسك و محدوديت‌هاي مسئله، پايين‌تر بودن تنش از تنش تسليم ماده مي‌باشد. اما در اين تحقيق تابع هدف و محدوديت‌ها بطور كلي با تمام موارد پيشين فرق اساسي دارد. همان‌طور كه در بخش ۶ آمد، روش سيمپلكس جزء روش‌هاي نامقيد است و به همين علت، محدوديت‌ها را در تابع هدف قرار داديم كه معادله (۳۱) نتيجه كوشش‌هاي فراوان براي وارد كردن قيدها در اين روش نامقيد بود.

در اين تحقيق، با استفاده از معادلات بدست آمده در بخش۳ و با بكارگيري محيط برنامه‌نويسي ويژوال فورترن، پروفيل بهينه بدست آمد. پروفيل بدست آمده از اين روش بسيار نزديك به پروفيل مرجع [۲۳]

است. زيرا معادلات استفاده شده در هر دو روش يكسان هستند و تنها الگوريتم بهينه‌سازي است كه تفاوت مي‌كند. البته پروفيل بدست آمده در اين تحقيق در حدود ۱۱% سبك‌تر از پروفيل مرجع [۲۲] و كمي سنگين‌تر از پروفيل بهينه مرجع [۲۳] است. شكل (۴) نمودار ضخامت پروفيل بهينه برحسب شعاع است كه بصورت مقايسه‌اي بين پروفيل بهينه مرجع [۲۱]، مرجع [۲۳] و اين تحقيق نمايش داده شده است.
شكل (۵) نيز توزيع تنش بدست آمده در پروفيل بهينه بدست آمده از روش‌هاي مختلف را به صورت مقايسه‌اي نشان مي‌دهد.

مثال (۲): بهينه‌سازي ديسك مطرح شده در مرجع [۲۳]

در مرجع [۲۳] ديسك فولادي داراي شعاع داخلي ۲۰/۳۲ ميلي‌متر و شعاع خارجي ۱۲۳/۲ ميلي‌متر كه با سرعت زاويه‌اي ۲۲۰۰۰ دور بر دقيقه مي‌چرخد بهينه شده است. اين ديسك در شعاع داخلي تحت دماي 500 درجه سانتيگراد و در شعاع خارجي تحت دماي 900 درجه سانتيگراد است. تنش تسليم و مدول الاستيسيته با شعاع تغيير مي‌كنند. روابط مربوط به محاسبه اين دو متغير در معادله (۳۴) آمده است. كشش خارجي و فشار داخلي وارد بر ديسك به‌ترتيب برابر با 165MPa و 500MPa است. در مرجع [۲۳]، ديسك با روش بهينه‌سازي كره‌هاي محاطي بهينه شده است.

$$E(r)=(-2.0225r^3 + 0.6059r^2 - 0.0813r + 0.0194)\times 10^{13} \quad pa \qquad (۳۵)$$

در اين تحقيق كه محاسبه پروفيل بهينه، با استفاده از معادلات بدست آمده در بخش۳ و در محيط ويژوال فورترن انجام شد، پروفيل بهينه همانند نمودارهاي ترسيم شده بدست آمد. پروفيل بدست آمده از اين روش بسيار نزديك به پروفيل مرجع [۲۳] است. زيرا معادلات استفاده شده در هر دو روش يكسان هستند و تنها الگوريتم بهينه‌سازي است كه تفاوت مي‌كند.

شكل (۶) نمودار ضخامت پروفيل بهينه برحسب شعاع است كه بصورت مقايسه‌اي بين پروفيل بهينه مرجع [۲۳] و روش استفاده شده در اين تحقيق نمايش داده شده است. شكل (۷) نيز توزيع تنش بدست آمده در پروفيل بهينه بدست آمده از روش‌هاي مختلف را به صورت مقايسه‌اي نشان مي‌دهد.

۸- جمع بندي و نتيجه گيري

در اين تحقيق فرآيند طراحي بهينه ديسك دوار ناهمگن تحت گراديان دمايي بالا مورد بررسي قرار گرفته كه نتايج متعددي را ارائه مي كند. نخست اينكه حل پيچيده ترموالاستيك چنين ديسكي كه داراي ضخامت مختلف در شعاع هاي متفاوت است را مي توان با تقسيم اين ديسك به رينگ هايي ـ با ضخامت و دماي ثابت در هر رينگ ـ و استفاده از همان حل ترموالاستيك بسي ساده تر نمود. صحت اين مدل را نيز مي توان با انتخاب تعداد مناسبي از اين رينگ ها تنظيم و تضمين كرد. دوم اينكه علاوه بر مطلب فوق، فرآيند بهينه سازي توسط الگوريتمي انجام شده كه نياز به محاسبه گراديان در سلسله محاسبات خود ندارد كه در نتيجه، ساده سازي قابل توجهي در حل مسئله صورت پذيرفته است. سوم و مهمتر از همه اينكه با جاسازي روابط

قيدها در تابع هدف مسئله، فقط يك الگوريتم بهينه سازي نامقيد جهت يافتن پروفيل بهينه بكار گرفته شده و از رويه تكراري استفاده از تكنيك هاي بهينه سازي مقيد در چنين مسائلي اجتناب شده است. نكات فوق الذكر و روي هم رفته سادگي روش و اجراي ساده آن ما را به سمت يك راندمان بالاي محاسباتي سوق مي دهد. مثال هاي ارائه شده تلاش مي كنند كه موفقيت اين روش و دقت آن را در مقايسه با نتايج در دسترس در ساير مقالات علمي موجود نشان دهند.

مراجع

[1] Timoshenko, S.P., and Goodier, J.N., "*Theory of Elasticity*," McGraw-Hill, New York (1970).

[2] Leopold, W. R., "Centrifugal and Thermal Stresses in Rotating Disks," ASME. Appl. Mech, Vol. 15, pp. 322-326, (1984).

[3] Manson, S.S., "The Determination of Elastic Stresses in Gas Turbine Disks", NACA Rep. 871, (1947).

[4] Shilizki, G.S. *'The Calculation of Structure and Strength of Machine Elements of Steam Turbines*," Mechanical Engineering Publishers, (1968).

[5] Genta, G., Gola, M., and Gugliotta, A., "Axisymmetric Computation of the Stress Distribution in Orthotropic Rotating Disks," Int. J. Mech. Scie, Vol. 24, pp. 21-26, (1982).

[6] Mendelson, A., "*Plasticity; Theory and Applications*," Macmillan, New York, (1968).

[7] Abdoul-Mihsein, M.J., and , A. A., and Paker, A. P., "Stresses in Axisymmetric Rotating Bodies Determined by the Boundary Equation Method," J. Strain. Ana, Vol. 20, pp. 70-86, (1985).

[8] Yaun Yeh Kia, and Huan, R.P.S., "Analysis of High-speed Rotating Disks with Variable Thickness and Inhomogeneity," J. Appl. Mech., Vol. 61, pp. 186-191, March, (1994).

[9] Jahed, H., and Sherkati, S., "Thermoplastic Analysis of Inhomogeneous Rotating Disk with Variable Thickness," Proceedings of Fatigue 2000 Conference, Fatigue and Durability Assessment of Materials, Components and Structure and Yates, Cambridge, pp. 229-238.

[10] Sereg, A., and Surana, K.S., "Optimum Design of Rotating Disks," ASME. Appl. Mech, Vol. 92, pp. 1-10, (1970).

[11] Chern, J.M., and Prager, W., "Optimal Design of Rotating Disk for Given Radial Displacement of Edge, " J. Optimized Theory and Application. Vol. 6, pp. 161-170, (1970).

[12] Malkov, V.P., and Salganskaya, E.A., "Optimum Material Distribution in Rotating Disks for Minimum Strength," Sov. Aeronaut., Vol. 19, pp. 46-50, (1976).

[13] Fox, R.L., "Optimization Method for Engineering Design," Addison-Wesley, London, (1971).

[14] Zenkiewics, O.C., and Campbell, J.S., "*Shape Optimization and Sequential Linear Programming in Optimum Structural Design*," John Wily, New York, (1973).

[15] Wang, S.Y., Son, Y., and Gallagher, K.H., "Sensitivity Analysis in Shape Optimization of Continuum Structures," Computers and Structures, Vol. 20, pp. 855-867, (1985).

[16] Pederson P, "*The Integrated Approach of FEM-SLP for Solving Problems of Optimal Design, in Optimization of Distributed Parameters*," Leydan: Sijthoff and Nourdhoff, pp. 757-80, (1981).

[۱۷] شرکتی، شهریار، "تحلیل ترموپلاستیک دیسک دوار غیرهمگن با ضخامت متغیر،" پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه علم وصنعت ایران، زمستان (۱۳۷۸).

[18] Farshi, B., Jahed, H., and Mehrabian, A., "Optimum Design of Inhomogeneous Non-uniform Rotating Discs," Computers and Structures, Vol. 82, pp. 773-9, (2004).

[19] Nelder, J.A., and Mead, R., "Unconstrained Nonlinear Programming Methods," Computer Journal, Vol. 7, pp. 308 (1964).

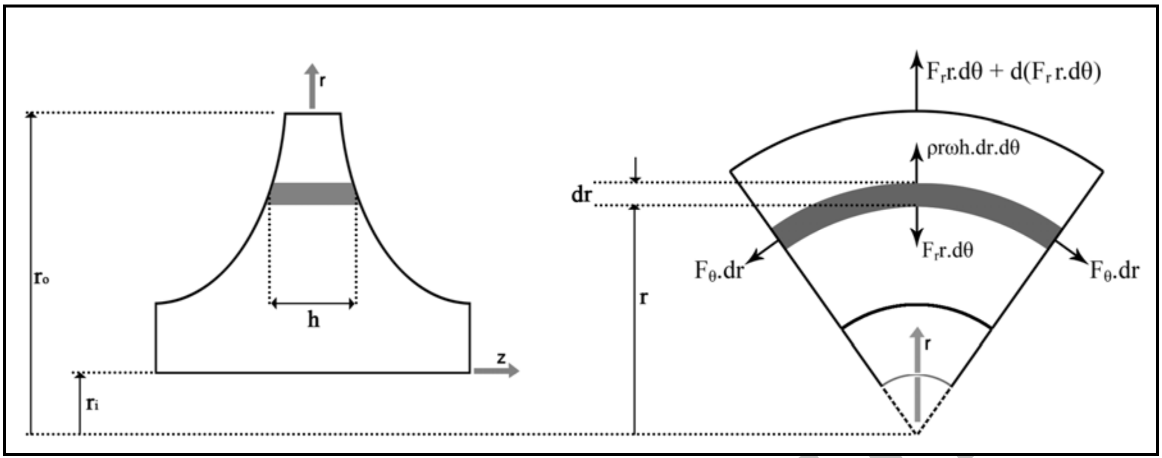
[۲۰] استیفن پی. برادلی، ترجمه هدایت ذکایی و حسین تقی‌زاده، "برنامه ریزی ریاضی کاربردی،" انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ اول (۱۳۸۰).

[21] Tsu-Chein C., "Procedures for Shape Optimization of Gas Turbine Disks," Computers and Structures, Vol. 54, No. 1, pp. 1-4, (1990).

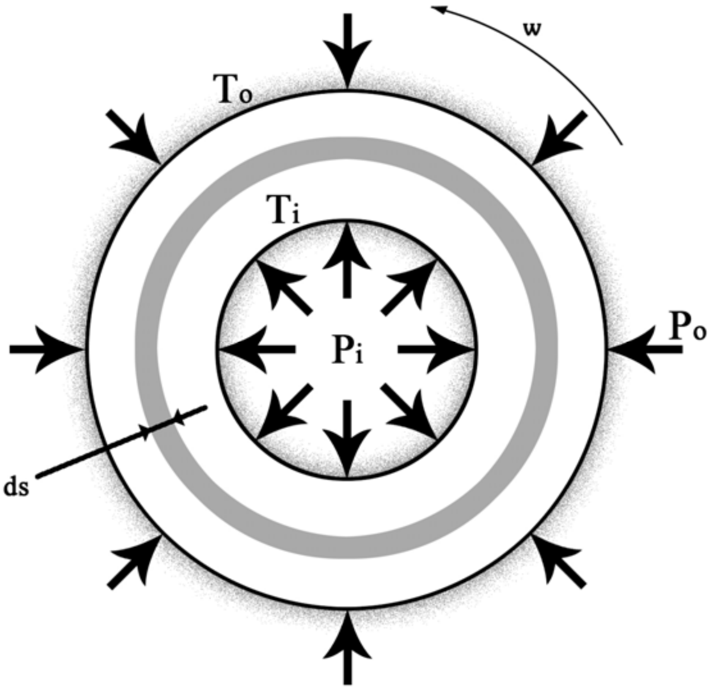
[۲۲] محرابیان. عبدالحسین، "طراحی بهینه دیسک دوار با ضخامت متغیر در دمای بالا،" پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه علم وصنعت ایران، پاییز (۱۳۸۰).

[23] Jahed, H., Farshi, B., and Bidabadi, J., "Minimum Weight Design of Inhomogeneous Rotating Discs," Int. J. Pressure Vessels and Piping, Vol. 82, pp. 35-41, (2005).

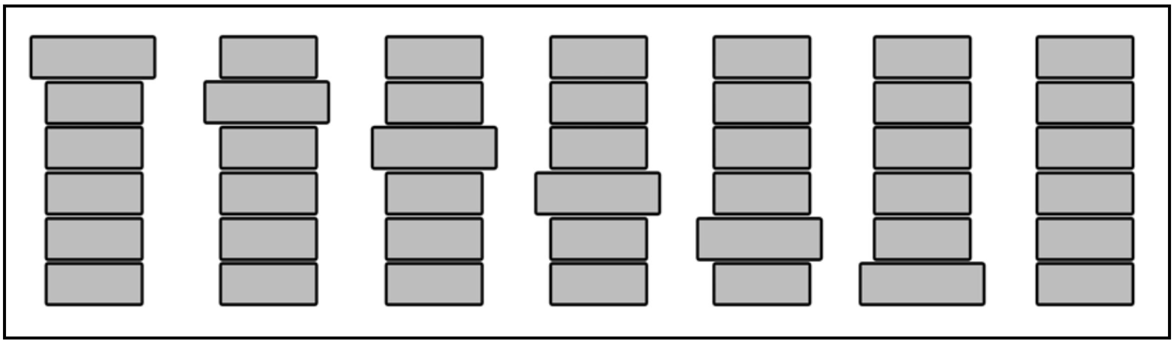
شكلها



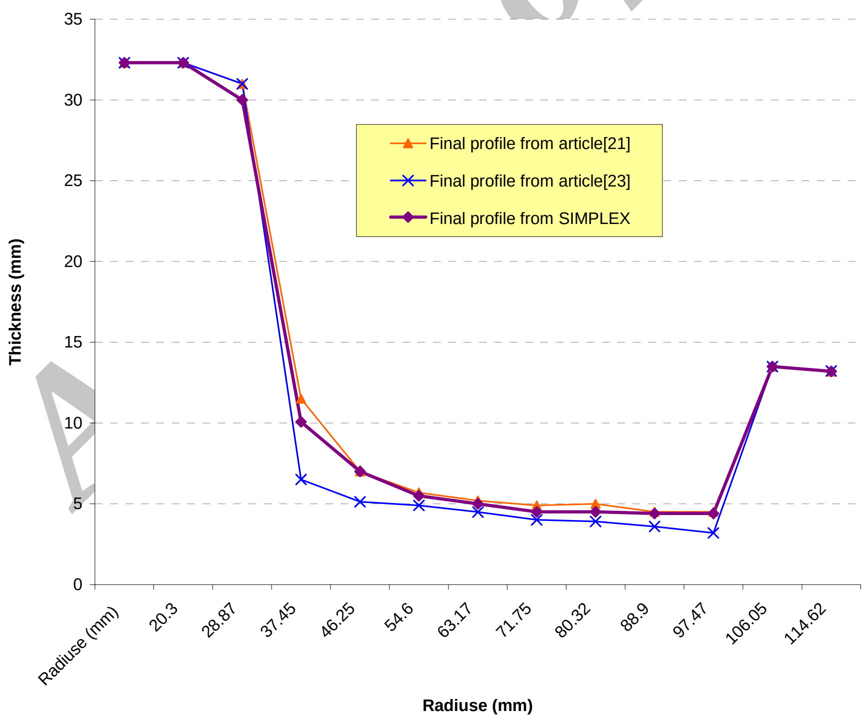
شكل ۱- پروفيل ديسك دوار و نيروهاي وارد بر يك المان



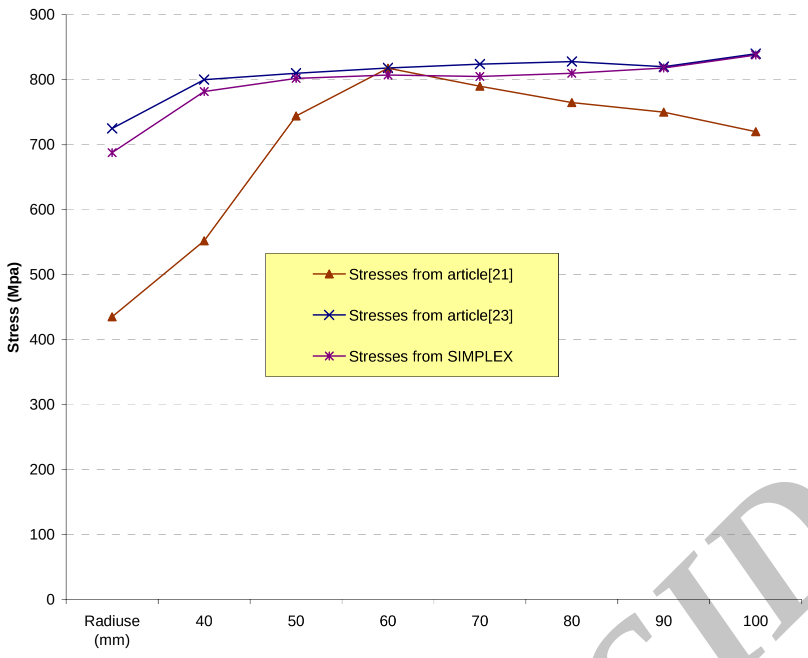
شكل ۲- ديسك دوار و عوامل خارجي وارد بر آن



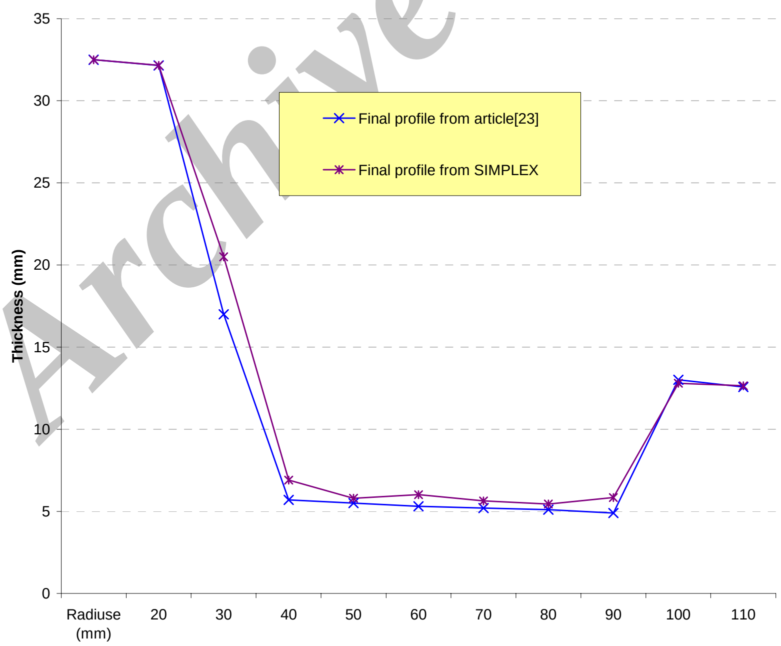
شكل ۳- نمايي از پروفيل‌هاي ورودي براي حالت تقسيم بندي ۶ الماني اين پروفيل‌ها



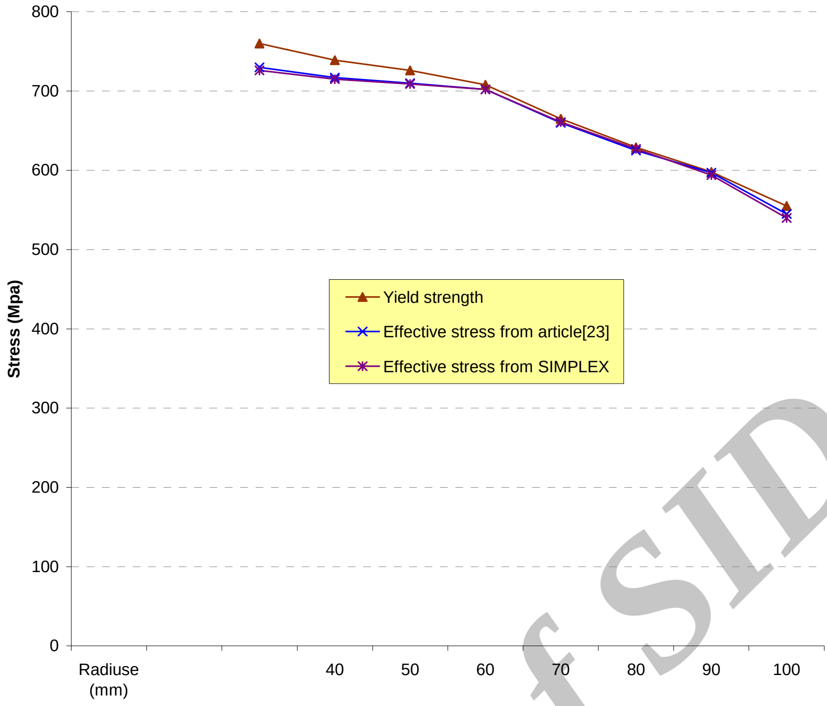
شكل ۴- مقايسه پروفيل‌هاي بدست آمده در اين تحقيق با نتايج مراجع [۲۱] و [۲۳]



شكل ۵- مقايسه تنش‌هاي بدست آمده در اين تحقيق با نتايج مراجع [۲۱] و [۲۳]



شكل ۶ - مقايسه پروفيل‌هاي بدست آمده در اين تحقيق با نتايج مرجع [۲۳]



شکل ۷- مقايسه تنش‌هاي بدست آمده در اين تحقيق با نتايج مرجع [۲۳]

Abstract

There are numerous applications for gas turbine discs in the aerospace industry such as in turbojet engines. These discs normally work under high temperature while subject to high angular velocities. Minimization of the weight of such items in aerospace applications results in benefits such as lower dead weights and costs.

In order to obtain a reliable disc analysis and arrive at the corresponding correct stress distribution for design, solutions should consider changes in material properties due to the temperatures field throughout the disc. To achieve this goal numerically, an inhomogeneous disc model with segmentally variable thickness is considered. Using the variable material properties method, stresses are obtained for the disc under rotation and a steady temperature field, by modeling it as a series of rings of different but constant properties. The analytical solution is performed for the series of rings as discs of constant thickness, and temperature, but satisfying compatibility and boundary conditions. Optimization of the ring thicknesses is performed by the non-gradient based method of Simplex. Simplex method is one of the unconstrained methods, but this problem is constrained. In this paper we combine constraints into objective function. The optimum disc profile is arrived at by sequentially proportioning the thicknesses of each ring to satisfy the stress requirement, while compatibility conditions would be satisfied in the analysis step. It is shown that the proposed method handles the above complex problem efficiently by the generation of a series of designs, followed by simple analytical solutions, leading towards the optimum. Results are verified against those of other investigations using different techniques.