تحليل مسائل مقدار مرزي خطي يک بعـدي و دو بعدي بـه روش بـدون المـان RKPM و اعمال شرايط مرزي بروش انتقال

مهردادفروتن[1]
استاديار

حسين دلايلي[2]
استاديار

مهدي صادقيان[3]
دانشجوي كارشناسي ارشد

در اين مقاله تحليل مسائل مقدار مـرزي يک بعـدي و دو بعـدي بـا روش بـدون المان(RKPM)[4] مورد بررسي قرار گرفته اسـت. مشـكل روشـهاي بـدون المـان در مقايسه با روش اجزاء محدود اعمال شرايط مرزي اساسي است.در كار حاضر بـراي اعمال شرايط مرزي اساسي از روش انتقال استفاده شده است. مسائل حل شده از نوع مسائل خطي يك بعدي و دو بعدي هستند كه شرايط مرزي متنوعي براي آنها در نظر گرفته شده اسـت. بـراي ايـن منظـور يـک برنامـه كـامپيوتري در محـيط MATLAB نوشته شده است.نتايج بدست آمده از ايـن روش بـا نتـايج روش اجـزاء محدود و روش تحليلي مقايسه شده است.

واژه هاي راهنما: روش بدون المان RKPM، مسائل مقدار مرزي، انتقال حرارت، روش انتقال

۱- مقدمه

در نيم قرن اخير روشهاي گوناگوني براي تحليل تقريبي معادلات ديفرانسـيل بـا مشـتقات جزئـي گسـترش يافته كه از جمله مهمترين آنها روشهاي فرم ضعيف هسـتند كـه بـه كمـک روشـهاي باقيمانـده وزنـي و يـا تغييراتي، فرم ضعيف آنها را استخراج نموده ومتغيرمجهول مسئله را درتعداد محـدودي نقطـه بـه نـام گـره تقريب مي زنند. روشهاي اجزاء محدود وحجم محدود از جمله شـناخته شـده تـرين روشـهاي المـان محـور هستندكه در سالهاي اخير كاملاً توسعه يافته اند . روشهاي تحليل المان محور با خُرد كردن حوزه مسئله بـه اجزاء محدودي به نام المان آغاز مي شوند به طوري كه لازمه تقريب تابع مجهول در اين روشها وجـود پـيش تعريفي از نحوه اتصال گره هاي المانها به يكديگر است. با توجه به مشكلات مربوط به روش هـاي المـاني در دهه اخير كلاس جديدي ازروش هاي عددي گسترش يافته اندكه جهت تحليل مسئله نيازي به المان نداشته

---

[1] نويسنده مسئول، استاديار گروه مهندسي مكانيک، دانشگاه رازي كرمانشاه Foroutan2002@yahoo.com

[2] استاديار، گروه مهندسي مكانيک، دانشگاه صنعتي مالک اشتر، شاهين شهر

[3] دانشجوي كارشناسي ارشد، گروه مهندسي مكانيک، دانشگاه رازي كرمانشاه

[4] Reproducing Kernel Particle Method

وتنها ازگره ها و اطلاعات مربوط به آنها براي تقريب تابع مجهول استفاده مي كنند.در اين روشها نحوه اتصال گره ها به يكديگر در حين تحليل مشخص مي شود. بنا بر ويژگي هاي منحصر به فرد اين روش هاي عـددي در سالهاي اخير گروه هاي پژوهشي زيادي به طور موازي در زمينه گسترش آن تلاش كرده اندكه با توجه به نو بودن زمينه كاري نامهاي مختلف (Mesh Free,Mesh Less,Element Free) به اين روش ها اطلاق شده است[۱]. مزيت مهم اين روشها نسبت به روش اجزاء محدود در حل مسائل مقدار مـرزي ايـن اسـت كـه بـا انتخاب توابع وزن و بردار پايه مناسب علاوه بر تابع مجهول مورد نظر(ميدان تغيير مكان در مسـائل مكانيـک جامدات يا ميدان درجه حرارت در مسائل انتقال حرارت),مشتقات تـابع نيـز در حـوزه حـل مسـئله پيوسـته ميگردد. درحاليكه حل هاي بدست آمده از روش اجزاء محدود اين خصوصيت را ندارنـد. روش SPH [1] اولـين روش بدون المان با منشاء انتگرال محدود است كه در سال ۱۹۷۷توسـط لـوكي ارائـه شـد و سـپس توسـط Monaghan و همكاران [۲] تكميل گرديد . خواستگاه اصلي اين روش فضاي بيكران ستارگان اسـت امـا بـه واسطه ويژگيهاي منحصر به فرد جايگاه خاصي در تحليل مسائل با دامنه محدود پيـدا كـرده اسـت . در ايـن روش تقريب تابع در نقطه مركزي به كمک مقادير گره اي موجود در حوزه اثر محلي يـا حـوزه همـوار شـده اطراف آن بدست مي آيد. عيب اصلي اين روش در تقريب مقاديرمرزي است. در بـين روشـهاي بـدون المـان روشهاي EFG[2] و RKPM براي تحليل هاي سازه اي بيشتر از ساير روشها مورد استفاده قرار گرفته انـد. در روش اول كه توسط Belytschko وهمكاران[۳] ارائه گرديده، از تقريب مينيمم مربعـات متحـرک (MLS [3]) كه توسط Lancaster و همكاران[٤] ابداع گرديده، استفاده شـده اسـت. روش دوم توسـط Liu و همكـاران ارائه گرديده است [٥و٦]. در اين روش از يک تابع تصحيح در فرم انتگرالي تابع تقريب اسـتفاده شـده اسـت. مشكل اصلي روشهاي بدون المان در مقايسه با روش اجزاء محدود اعمال شـرايط مـرزي اساسـي اسـت.ايـن مشكل از آنجا ناشي ميشود كه توابع شكل روشهاي بدون المان دلتاي كرونيكـر را ارضـاء نميكننـد. بـه ايـن معني كه مقدارتابع شكل هرگره درخودآن گره برابريك نميشود.روشهاي مختلفي براي اعمال شـرايط مـرزي اساسي مانند روش ضرايب لاگرانژ، روش تابع جريمه و روش تركيبي با اجزاء محدود ارائه گرديده است.

در كار حاضر با استفاده از روش RKPM سه مسئله مقدار مرزي خطي تحليل شده است. در اين كـار از روش انتقال كه توسط Chen و همكاران[۷] ارائه گرديده، براي اعمال شرايط مـرزي اساسـي اسـتفاده شـده است. بعنوان اولين مثال يک مسئله مقدار مرزي يک بعدي با روش بدون المان تحليل گرديده و نتايج بدست آمده با جواب دقيق مقايسه شده است. در مثال دوم يک مسئله انتقـال حـرارت دوبعـدي تحليـل گرديـده و نتايج حاصل با جواب دقيق و جواب بدست آمده از روش اجزاء محدود مقايسه شده است. در مثال سـوم تيـر يكسردرگير تيموشنكو كه يک نيروي برشي گسترده با توزيع سهمي شكل در انتهاي آزاد آن اعمال گرديـده, با روش بدون المان تحليل گرديده و نتايج بدست آمده با حل دقيـق مقايسـه شـده اسـت. بـراي انجـام ايـن تحليل ها يك برنامه در محيط MATLAB نوشته شده است.

1 - Smoothed Particle Hydrodynamics
2 - Element Free Galerkin Method
3 - Moving Least Squares

۲- تقريب **RKPM** و روش انتقال براي اعمال شرايط مرزي اساسي

در روش تقريبRKPM كه توسط Liu و همكاران [۵و٦] ارائه گرديده است متغير ميدان u بـا رابطـه زيـر تقريب زده ميشود.

$$u^h(\mathbf{X}) = \int_{\Omega_\mathbf{Y}} K(\mathbf{X},\mathbf{Y})u(\mathbf{Y})d\Omega_\mathbf{Y} = \int_{\Omega_\mathbf{Y}} C(\mathbf{X},\mathbf{X}-\mathbf{Y})w(\mathbf{X}-\mathbf{Y})u(\mathbf{Y})d\Omega_\mathbf{Y} \qquad (۱)$$

در اين رابطه $w(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ و $C(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ به ترتيب تابع وزن و تابع اصلاحي هستند. تابع اصلاحي بصورت چند جمله اي زير بيان ميگردد.

$$C(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{P}^\mathrm{T}(\mathbf{Y}-\mathbf{X})\mathbf{a}(\mathbf{X})$$

$$\xrightarrow{d=1} C(x,y) = a_0(x) + a_1(x)(y-x) + a_2(x)(y-x)^2 + \cdots + a_n(x)(y-x)^n \qquad (۲)$$

در رابطه بالا $\boldsymbol{P}$ بردار توابع پايه ميباشد و عبارت $d=1$ بيـانگر رابطـه در حالـت يـك بعـدي اسـت. اگـر رابطه(۲) و بسط سري تيلور تابع $u(\mathbf{Y})$ كه به شكل زير است،

$$u(\mathbf{Y}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Y}-\mathbf{X})^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\alpha}|!} D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{X}),$$

$$\xrightarrow{d=1} u(y) = u(x) + u'(x)(y-x) + \frac{1}{2!}u''(x)(y-x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}u^{(n)}(x)(y-x)^n + \cdots \qquad (۳)$$

در رابطه(۱) جايگزين گردد، رابطه زير حاصل ميشود:

$$u^h(X) = \int_{\Omega_Y} \left[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{(Y-X)a(X)} w(X-Y) \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{(Y-X)}^{\alpha}}{|\alpha|\boldsymbol{!}} D^{\alpha} u(X) \right] d\Omega_Y . \qquad (۴)$$

براي اينكه رابطه(٤) چندجمله اي هاي تا مرتبه n را بازيابي نمايد بايستي شرايط زير ارضا گردند [۵و٦].

$$\int_{\Omega_Y} w(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{P}^T(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{X})d\Omega_Y = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{P}(0). \qquad (۵)$$

با حل دستگاه معادلات(۵) براي$\mathbf{a}(\mathbf{X})$ و جايگذاري آن در رابطه (۲) تابع اصلاحي بدست ميايد. در نهايـت با جايگذاري تابع اصلاحي در رابطه(۱) تقريب RKPM بشكل زير درميايد.

$$u^h(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{P}^T(\boldsymbol{X})\left[\int_{\Omega_Y} w(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{P}^T(\boldsymbol{Y})d\Omega_Y\right]^{-1}\int_{\Omega_Y} w(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y})u(\boldsymbol{Y})d\Omega_Y \qquad (۶)$$

براي بيان تقريب بالا بر حسب توابع شكل بدون المان انتگرال هاي رابطه (۶) باروش عددي محاسبه ميشوند.

$$\begin{aligned} u^h(\boldsymbol{X}) &= \int_{\Omega_Y} C(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})w(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})u(\boldsymbol{Y})d\Omega_Y \\ &= \sum_{i=1}^{N} C(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_i)w(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i)u_i\Delta V_i \\ &= \boldsymbol{P}^T(\boldsymbol{X})\left[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})\right]^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_i)w(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i)u_i\Delta V_i. \end{aligned} \quad (۷)$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{M}$ ماتريس ممان ناميده ميشود وبه شكل زير تعريف ميگردد:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{N} w(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_i)\boldsymbol{P}^T(\boldsymbol{X}_i)\Delta V_i \quad (۸)$$

وزنهاي انتگرالگيري ΔV_i روابط فوق اثر هر ذره را در مقدار انتگرال نشان مي دهند و يا بطور توصيفي تر معرف حجم فشرده اطراف هر ذره مي باشند. وزنهاي انتگرال گيري تقريب RKPM در دو مرحله محاسبه ماتريس ممان و محاسبه تقريب نهايي ظاهر مي شود.

نظير حالت $\Delta V_i = 1$ تقريب كاملاً شبيه تقريب MLS مي شود. به عبارت ديگر تقريب MLS حالت خاصي از تقريب RKPM است. لازم به ذكر است كه درحالت كلي نمي توان $\Delta V_i = 1$ را مناسب ترين وزن براي انتگرال گيري تقريب پيوسته RKM دانست زيرا با فرض $\Delta V_i = 1$ حاصل انتگرال واحد $\int_{\Omega} 1 d\Omega = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i = N$ به تعداد نقاط انتگرال گيري وابسته شده و از انتگراند مستقل مي شود . با اين حال تا كنون يک روند سيستماتيک براي انتخاب مناسب ترين $\Delta V_i \neq 1$ ارائه نشده است و نتايج عددي نيز با مقادير دلخواه ΔV_i بهبود خاصي را در سازگاري توابع شكل RKPM نشان نمي دهند. به عبارتي نظير مقادير ثابت و متنوع $\Delta V_i = c, c \in R$ تنها يک تابع تقريب بدست آمده است. بنابر اين در اين كار $\Delta V_i = 1$ فرض مي شودكه ضمن وجود تفاوت در ريشه استخراج اين دو تقريب(RKPM و MLS) معادل بودن آنها را نشان مي دهد. درنهايت تابع تقريب را در اين روش ميتوان بشكل زير نوشت:

$$u^h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(\mathbf{X})u_i \quad (۹)$$

در اين رابطه Φ_i توابع شكل بدون المان گره ها، u_i مقادير مجازي متغير ميدان در گره ها و N تعداد گره هاست. با توجه به روابط (۷)و(۸)و(۹) تابع شكل بدون المان بصورت زير تعريف ميشود.

$$\Phi_i(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{P}^T(\boldsymbol{X})[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})]^{-1}w(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_i) \quad (۱۰)$$

توابع وزن به شكل هاي مختلف مورد استفاده قرار ميگيرند. در كار حاضر از توابع بي اسپيلاين[1] مرتبه سه استفاده شده است. اين توابع بشكل زير تعريف ميشوند.

$$w(x-x_i)=\begin{cases}\frac{2}{3}-4(\frac{x-x_i}{\rho})^2+4(\frac{x-x_i}{\rho})^3 & 0\le\left|\frac{x-x_i}{\rho}\right|\le\frac{1}{2}\\ \frac{4}{3}-4(\frac{x-x_i}{\rho})+4(\frac{x-x_i}{\rho})^2-\frac{4}{3}(\frac{x-x_i}{\rho})^3 & \frac{1}{2}<\left|\frac{x-x_i}{\rho}\right|\le 1\\ 0 & \left|\frac{x-x_i}{\rho}\right|\succ 1\end{cases} \quad (۱۱)$$

در رابطه بالا ρ شعاع حوزه اثر ميباشد كه بر حسب فاصله گره هاي متوالي Δx و پارامتر اتساع $d_{\max}$ بشكل زير تعريف ميگردد.

$$\rho=d_{\max}.\Delta x \quad (۱۲)$$

هر قدر پارامتر اتساع بزرگتر انتخاب گردد، حوزه اثر گره ها بزرگتر خواهد شد. توابع وزن دو بعدي را ميتوان از ضرب تانسوري توابع وزن يك بعدي بدست آورد.

$$w(X-X_i)=w(\frac{x-x_i}{\rho_x})w(\frac{y-y_i}{\rho_y}) \quad ,$$
$$\rho_x=d_{\max}\cdot\Delta x,\rho_y=d_{\max}\cdot\Delta y \quad (۱۳)$$

در رابطه بالا ρ_x و ρ_y به ترتيب شعاع اثـر در راستاهاي x و y و همچنـين Δx و Δy فاصـله افقـي و عمودي گره هاي متوالي ميباشد.

براي اعمال شرايط مرزي اساسي روش انتقال توسط Chen و همكاران [۷] ارائه گرديده است. با جايگذاري تابع تقريبي رابطه(۹) در فرم ضعيف معادله ديفرانسيل حاكم بر مسائل مقدار مرزي خطي دستگاه معادلات خطي زير حاصل ميشود:

$$\boldsymbol{K}.\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f} \quad (۱۴)$$

در معادله بالا $\boldsymbol{K}$ ماتريس سفتي، $\boldsymbol{u}$ بردار مقادير مجازي گرهي و $\boldsymbol{f}$ بردار نيرو ميباشند. در اين معادله ماتريس سفتي و بردار نيرو تعريفي شبيه به ماتريس سفتي و بردار نيرو در روش اجزاء محدود دارند، با ايـن تفاوت كه بجاي توابع شكل المانها از توابع شكل بدون المان استفاده ميگردد. چـون مجهـولات دسـتگاه بـالا مقادير مجازي گرهي ميباشند اعمال شرايط مرزي اساسي مانند روش اجزاء محدود امكان پذير نيست. بنـابر تقريب RKPM مقادير حقيقي تابع تقريب در گره ها، $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}_i)$ و مقـادير مجـازي گـره اي، $\boldsymbol{u}_j$ بفـرم زيـر در

1 -Cubic Bspline

ارتباط هستند:

$$u^h(x_i) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_j(x_i) u_j \qquad (۱۵)$$

رابطه بالا رابشکل زير هم ميتوان نوشت:

$$\hat{u}_i = [\Phi_1(x_i), \Phi_2(x_i), ...\Phi_N(x_i)] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_N \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

که در اين رابطه $\hat{u}_i$ مقدار تابع تقريب u^h در گره $\boldsymbol{i}$ ام ميباشد.با محاسبه تـابع تقريـب بـالا در همـه گـره هاي $i = 1,2,\ldots,N$ ماتريس تبديل $\boldsymbol{T}$ براي مسائل يک بعدي با يک درجه آزادي براي هر گره به صورت زيـر بدست مي آيد.

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ . \\ \hat{u}_N \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \Phi_1(x_1) & \Phi_2(x_1) & \cdots & \Phi_N(x_1) \\ \Phi_1(x_2) & \Phi_2(x_2) & \cdots & \Phi_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_1(x_N) & \Phi_2(x_N) & \cdots & \Phi_N(x_N) \end{bmatrix}}^{T} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_N \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

رابطه بالا را بشکل زير هم ميتوان نوشت:

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}.\boldsymbol{u} \longrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}^{-1}.\hat{\boldsymbol{u}} \qquad (۱۸)$$

با توجه به مطالب بالا ميتوان رابطه تقريب (۹) را بشکل زير نوشت:

$$u^h(X) = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}_i(\mathbf{X}) \hat{u}_i \qquad (۱۹)$$

در اين حالت مقدار تابع تقريب در هر نقطه برحسب مقادير واقعي گره ها بيان ميشوند. به همين دليل توابع خاصيت دلتاي کرونيکر را ارضاء مينمايند. بدين معني که مقدار تابع شکل اصلاح شده $\hat{\Phi}_i$ شکل اصلاح شده مربوط به هر گره در خود آن گره برابر يک ميشود. با مقايسه روابط (۹)و (۱۹)و همچنين با توجه به رابطه(۱۸) ارتباط توابع شکل اصلاح شده و توابع شکل بدون المان بشکل زير خواهد بود:

$$\left[\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, ...\hat{\Phi}_N\right] = \left[\Phi_1, \Phi_2, ...\Phi_N\right].\left[T\right]^{-1} \qquad (۲۰)$$

که ماتريس تبديل در رابطه (۱۷) مشخص گرديده است. ايده روش انتقال براي اعمال شرايط مـرزي اساسـي استفاده از توابع شکل اصلاح شده بجاي توابع شکل بدون المان است. در شکل (۱) اين دو نوع تابع شـکل بـا هم مقايسه شده اند. براي مقايسه در فاصله صفر تا يک يازده گره به فواصل مساوي در نظر گرفتـه شـده وبـا

پارامتر اتساع $d_{\max} = 2$ تغييرات تابع شكل گره ها بر روي فاصله مذكور در دو حالت مورد برسي قرار گرفته است. در قسمت بالاي اين شكل تغييرات توابع شكل بدون المان نشان داده شده است. همانطور كـه در ايـن شكل ملاحظه ميشود، تابع شكل هر گره در خود آن گره برابر یک نيست. در قسـمت پـايين تغييـرات توابـع شكل اصلاح شده نشان داده شده است. در اين شكل ملاحظه ميشود كه مقدار تابع شكل هر گره در خود آن گره برابر یک ميباشد. با استفاده از تابع تقريب رابطه(۱۹) بجاي رابطه(۹) در فرم ضعيف معادله ديفرانسـيل، دستگاه معادلات خطي رابطه(۱۴) بشكل زير نوشته ميشود.

$$\hat{K}.\hat{u} = \hat{f} \qquad (۲۱)$$

در رابطه بالا ماتريس سفتي اصلاح شده و بردار نيروي اصلاح شده بشكل زير تعريف ميشوند:

$$\hat{K} = (T^{-1})^T.K.T \qquad (۲۲)$$

$$\hat{f} = (T^{-1})^T.f \qquad (۲۳)$$

در دستگاه معادلات رابطه(۲۳) شرايط مرزي اساسي به راحتي مانند روش اجزاء محدود قابل اعمال ميباشد.

۳- نتايج و بحث

در اين مقاله سه مسئله مقدارمرزي خطي با استفاده از روش توضيح داده شده در بخش ۲ تحليل گرديده است. با توجه به اينكه نحوه بدست آوردن فرم ضعيف مسايل مقدار مرزي خطي شبيه به يكديگر است، براي رعايت اختصار فقط در مثال تير تيموشنكو نحوه بدست آوردن فرم ضعيف توضيح داده شده است.

۳-۱- انتقال حرارت یک بعدي

معادله ديفرانسيلي حاكم بر مسئله انتقال حرارت از یک پره (فين) با شـار حرارتـي جـانبي و شـرايط مـرزي ديريكله و نيومن كه به مسئله بنچ مارک معروف است را در نظر بگيريد. اين مسئله اولين بار در سـال ۱۹۷٤ توسط راچفورد و ويلرجهت ارزيابي نرخ همگرايي روش اجزاء محدود بكار رفته است. معادلات حاكم بصـورت زير هستند. [۸]

$$\begin{cases} Lu = -u'' + u = f(x) \qquad x \in [0,1] \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = -(\tan^{-1}(\alpha(1-x_0)) + \tan^{-1}(\alpha x_0)) \end{cases}$$

$$f(x) = (1-x)[\tan^{-1}(\alpha(x-x_0)) + \tan^{-1}(\alpha x_0)] + \frac{2\alpha(1+\alpha^2(1-x_0)(x-x_0))}{(1+\alpha^2(x-x_0)^2)^2}$$

با جايگزيني ترم گرماي توليدي در معادله ديفرانسيل و اعمال شرايط مرزي حل دقيق مسئله بنچ مارک برابر است با:

$$u(x) = (1-x)[\tan^{-1}(\alpha(x-x_0)) + \tan^{-1}(\alpha x_0)]$$

در این مثال پس ازتشکیل فرم ضعیف معادله دیفرانسیل حاکم، توابع تقریب و آزمون بر اساس توابـع شـكل بدون المان تشکیل شده و به منظور اعمال شرایط مرزي اساسي از روش انتقال استفاده مي شـود. شـکل (۲) نتایج تحلیل عددي بدست آمده براي مسئله یک بعدي به روش بدون المـان را نظیـر ۱۲۹ گـره، بـردار پایـه خطي $\boldsymbol{P}=[1,\boldsymbol{x}]$ ، حوزه اثر $\rho=2\cdot\Delta x$ و$\alpha=25, x_0=.25$ نشان مي دهد.در شبکه پـس زمینـه اسـتفاده شده براي انتگرال گیري گوشه سلولهاي انتگرال گیري منطبق بر گره هاست و هر سلول شانزده نقطه گـوس دارد. در این شکل توزیع درجه حرارت و مشتق آن در طول پره نشان داده شده اسـت. همـانطور کـه از ایـن نمودارها مشاهده میشود تطابق بسیار خوبي بـین مقـادیر عـددي و مقـادیر دقیـق وجـود دارد. مزیـت مهـم روشهاي بدون المان نسبت به روش اجزاء محدود که پیوسـتگي مشـتق u میباشـد در ایـن شـکل مشـاهده میشود.

۲-۳- انتقال حرارت دوبعدي

به عنوان دومین مثال یک مسئله انتقال حرارت دو بعدي مورد بررسي قرار گرفته است. در این مثال توانـایي روش بدون المان RKPM جهت تحلیل عددي معادله پواسوني بشرح زیر مورد ارزیابي قرار گرفته است:

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = f(x,y) = [110x^9 - \pi^2(1-x^{11})]\cosh(\pi y) & in \quad \Omega = [-1,1]\times[-1,1] \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} = g(x) = -\pi\sinh(\pi)(1-x^{11}) & on \quad \Gamma_N \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} = (u-u_\infty) = (u - 13\cosh(\pi y)) & on \quad \Gamma_C \\ u = 0 & on \quad \Gamma_D \end{cases}$$

در این مثال تابع شار حرارتي مرزي $g(x)$ ، تابع گرماي تولیـدي در واحـد حجـم $f(x,y)$ و دمـاي سـیال مرزي u_∞ به گونه اي انتخاب شده اند تا حل دقیق معادله حاکم بر انتقال حـرارت دو بعـدي بـه صـورت زیـر بدست آید.

$$u = (1-x^{11})\cosh(\pi y)$$

در شکل (۳) حوزه دوبعدي معادله پواسون، Ω با شرایط مرزي دیریکه Γ_D ، نیومن Γ_N و مخلوط Γ_C به همراه آرایش 15×15 گره نشان داده شده است. براي نمایش یک نمونه از شبکه پس زمینه انتگرال گیـري، در شکل (٤) یک آرایش 12×12 سلولي با $n_q\times n_q=3\times3$ نقطه گـوس در هـر سـلول نمـایش داده شـده است. در این شکل همچنین مجموعه گره هاي داخلي حوزه اثـر یـک نقطـه گـوس نمونـه بـا $\rho=1.5\cdot\Delta\mathbf{x}$ مشخص شده است ($\Delta\mathbf{x}$ فاصله دو گره متوالي در امتداد x یا y). در این مثال پس ازتشـکیل فـرم ضـعیف معادله پواسون توابع تقریب و آزمون بر اساس توابع شکل RKPM تشکیل شده و بـه منظـور اعمـال شـرایط مرزي دیریکله از روش تبدیل استفاده شده است. جهت مقایسه قدر مطلق خطـاي روشـهاي بـدون المـان و اجزاء محدود از اطلاعاتي به شرح زیر استفاده شده است:

توزیع گره ها : بر اساس یک شبکه بندي منظم $N_x\times N_y=40\times40$

شبكه پس زمينه : بر اساس شبكه بندي منظم 39×39 سلولي و $n_q \times n_q = 4\times 4$ نقطه گوس در هر سلول
بردار تابع پايه : $\mathbf{P^T}(\mathbf{X}) = \mathbf{P^T}(x,y) = [1, x, y]$
تابع وزن : حاصلضرب تانسوري تابع بي اسپيلاين مرتبه سه با شعاع اثر $\rho = 1.5\times\Delta\mathbf{X}$
نظير روش اجزاء محدود نيز از المانهاي مثلث خطي با شبكه بندي منظم $N_x \times N_y = 40\times 40$ استفاده شده است.شكل (۵) مقادير دقيق و نتايج عددي روش اجزاء محدود را مقايسه كرده و قدر مطلق خطاي روش اجزاء محدود را برحسب شماره گره نشان مي دهد.شكل (٦) مقادير دقيق و نتايج عددي روش RKPM را مقايسه كرده و قدر مطلق خطاي روش RKPM را برحسب شماره گره نشان مي دهد.با مقايسه شكل هاي (۵) و(٦) دقت روش RKPM در مقايسه با روش اجزاء محدود در اين مثال مشخص ميگردد. در شكل (۷) رويه ايجاد شده توسط حل دقيق مسئله مورد نظر و حل عددي بدست آمده با شرايط زير مقايسه شده اند:
توزيع گره ها : بر اساس شبكه بندي منظم 40×40 گرهي
بردار تابع پايه كامل مرتبه سه: $\boldsymbol{p}^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3]$
شعاع حوزه اثر : $\rho = 3.2\times\Delta X$.
در شكل (۸) مشتق دقيق متغير ميدان نسبت به x و مقدار عددي اين مقدار با هم مقايسه شده اند. پيوستگي مشتق در دامنه حل مسئله براي حل بدست آمده از روش عددي در اين شكل قابل ملاحظه ميباشد. در روش اجزاء محدود اين پيوستگي وجود ندارد.

۳-۳- تير تيموشنكو

در اين مثال تير يكسر گيردار تيموشنكو كه در انتهاي آزاد تحت بار برشي گسترده با توزيع سهمي شكل قرار دارد، مورد بررسي قرار گرفته است. شرايط مرزي اساسي در انتهاي درگير تير اعمال ميشود.به اين صورت كه در اين مقطع در $y=0$ تغيير مكان در هر دو جهت افقي و عمودي صفر است و در $y=\pm D/2$ تغيير مكان فقط در جهت افقي صفر است.شرايط مرزي و نحوه بارگذاري تير در شكل(۹) نمايش داده شده است.

حل تحليلي اين مدل در مرجع [۹] توسط تيموشنكو و گودير به فرم زير ارائه شده است:

$$u = \frac{-Py}{6EI}\left[(6L-3x)x + (2+\nu)\left(y^2 - \frac{D^2}{4}\right)\right]$$

$$v = \frac{P}{6EI}\left[3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu)\frac{D^2x}{4} + (3L-x)x^2\right]$$

در روابط فوق u و v بترتيب مولفه هاي افقي و عمودي ميدان تغيير مكان هستند. همچنين I ممان اينرسي سطح مقطع تير ميباشد. براي بدست آوردن فرم ضعيف از معادله تعادل حاكم استفاده ميشود. عمومي ترين فرم معادله تعادل استاتيكي كه مي توان جهت فرمول بندي مسائل الاستيک با شرايط مرزي نيروئي و اساسي بكار برد بصورت زير است.

$$\begin{cases} \nabla.\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = 0 & in \quad \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}} & on \quad \Gamma_t \\ \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} & on \quad \Gamma_u \end{cases}$$

در اين معادله $\boldsymbol{\sigma}$ تانسور تنش کوشي، $\mathbf{b}$ بردار نيروي حجمي، $\bar{\mathbf{t}}$ بردار نيروي سطحي مـرز نيروئـي Γ_t و $\bar{\mathbf{u}}$ بردار تغيير مکان هاي مشخصي از نقاط واقع بر مرز اساسي Γ_u مي باشند. فـرم ضـعيف معادلـه تعـادل و شرايط مرزي نيروئي به صورت زير است:

$$\int_{\Omega} \delta\left(\nabla_s \boldsymbol{v}^T\right) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \boldsymbol{v}^T \cdot \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma = 0$$

در فرم ضعيف شرايط مرزي اساسي مستقيماً ظاهر نمي شوند بلکـه بـا درون يـابي مناسـب تـابع تقريـب $\boldsymbol{u}(x)$ و تابع آزمون $\delta \boldsymbol{v}(x)$ اعمال مي شوند. $\nabla_s \boldsymbol{v}^T$ (بخش متقارن گراديان). $\nabla \boldsymbol{v}^T$ با جـايگزيني تقريبهـاي بدون المان توابع $\boldsymbol{u}(x)$ و $\delta \boldsymbol{v}$ در فرم ضعيف دستگاه معادلات جداشده زير بدست مي آيد.

$$\boldsymbol{K}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

که در اين رابطه ماتريس سفتي و بردار نيرو بشکل زير تعريف ميگردند:

$$\boldsymbol{k}_{IJ} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}_I^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_J d\Omega$$

$$\boldsymbol{f}_I = \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I \boldsymbol{b} d\Omega$$

ماتريس $\boldsymbol{B}$ که در تعريف ماتريس سفتي ظاهر ميگردد، بشکل زير خواهد بود:

$$\boldsymbol{B}_I = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix}$$

ماتريس $\boldsymbol{D}$ ارتباط بين بردار تنش و بردار کرنش را بيان ميکند، که در مسائل تنش صفحه اي اين ارتبـاط بشکل زير است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \overbrace{\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & 01 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{D}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

براي اعمال شرايط مرزي اساسي، همـانطور کـه در بخـش ۲ توضـيح داده شـد، از روش انتقـال اسـتفاده ميشود. جهت مقايسه نتايج تحليل عددي RKPM با حل دقيق از اطلاعاتي بشرح زير استفاده شده است:

توزيع گره ها : بر اساس يک شبکه بندي منظم $N_y \times N_x = 9 \times 33$

شبکه پس زمينه : بر اساس شبکه بندي منظم 8×32 سلولي و $n_q \times n_q = 4 \times 4$ نقطه گوس در هر سلول

بردار تابع پايه : با توجه به حل تحليلي درجه سه جهت بازيابي دقيق ميدان از تابع پايه مرتبه سه استفاده مي گردد. $\mathbf{P^T}(\mathbf{X}) = \mathbf{P^T}(x, y) = \left[1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, y^3\right]$

تابع وزن : حاصلضرب تانسوري تابع بي اسپيلاين مرتبه سه با شعاع $\rho = 3.2 \times \Delta \mathbf{X}$.
شكل (۱۰) تغيير مكان خط مركزي تير يكسر گير دار $(y=0)$ و تفاوت بين تغيير مكانهاي تحليلي ومقادير بدست آمده بر اساس روش بدون المان RKPM را نشان مي دهد. با توجه به اينكه تابع پايه و حل تحليلي هر دو درجه سه هستند، نتايج نشان مي دهد كه باز يابي مجدد ميدان نيز دقيق مي باشد. همانگونه كه در اين شكل مشاهده ميشود حداكثر خطاي روش عددي حدود پانزده صدم درصد است كه در نزديكي تكيه گاه اتفاق ميافتد. در شكل(۱۱) تغييرات تنش برشي و عمودي در مقطع مياني تير نشان داده شده است. در اين شكل تطابق بسيار خوبي بين مقادير عددي و تحليلي تنشهاي برشي وعمودي مقطع وسط تير $(x = L/2)$ مشاهده ميشود. در نتايج عددي بدست آمده تنش برشي با افزايش حوزه اثر تابع وزن در مرز آزاد تير به صفر ميل مي كند در حاليكه اين ويژگي در روش اجزاء محدود مشاهده نمي شود.

٦- نتيجه گيري

روش بدون المان بكار رفته براي حل مسايل مقدار مرزي يک بعدي و دو بعدي كه در آن براي اعمال شرايط مرزي اساسي از روش انتقال استفاده شده است جوابهاي بسيار دقيقي را نتيجه داده است. مزيت مهم اين روش در مقايسه با روش اجزاء محدود اين است كه با انتخاب توابع وزن مناسب و بردار پايه مناسب علاوه بر پيوستگي u پيوستگي مشتق u هم در حل عددي قابل دستيابي است. نتايج عددي شكلهاي (۵) و (٦) نشان مي دهند كه بازيابي مجدد متغير هاي ميدان با استفاده از روش بدون المان RKPM به همراه اعمال شرايط مرزي اساسي به روش انتقال نتايج عددي بهتري رانسبت به روش اجزاء محدود جهت دستيابي به مقادير واقعي متغير ميدان در اختيار مي گذارد . به طوري كه قدر مطلق بيشترين خطاي روش RKPM تقريبا يک صدم روش اجزاء محدود است و بيشترين مقدار آن در مرز با شرايط مخلوط ديده مي شود كه مي توان با افزايش تعداد گره ها در نزديكي اين مرز نتايج بهتري را براي هر دو روش بدست آورد. نتايج بدست آمده از تحليل تير نيز پيوستگي ميدان هاي تنش برشي و عمودي محاسبه شده بروش بدون المان را نتيجه داده است. همانگونه كه قبلا اشاره گرديد، اين خصوصيت در تحليل هاي روش اجزاء محدود وجود ندارد.

مراجع

[1] Thomas, P.F., and Herman, G.M., "Classification and Overview of Meshhfree Methods," Institute of Scientific Computing Technical University Braunschweig, Brunswick, Germany, (2004).

[2] Monaghan, J.J., "An Introduction to SPH.," Comput. Phys. Comm., Vol. 48, pp. 89-96, (1988).

[3] Belytschko, T., Lu, Y.Y., and Gu, L., "Element – Free Galerkin Methods," Internat. J. Numer. Methods in Engrg., Vol. 37, pp. 229-256, (1994).

[4] Lancaster, P., and Salkauskas, K., "Surface Generated by Moving Least Squares Methods," Math. Comput., Vol. 37, pp. 141-158, (1994).

[5] Liu, W.K., Jun, S., Lee, S., Adee, J., and Belytschko, T., " Reproducing Kernel Particle Methods for Structural Dynamics," Internat. J. Numer. Methods in Engrg., Vol. 187, pp. 441-468, (2000).

[6] Liu, W.K., Jun, S., and Zhang, Y.F., " Reproducing Kernel Particle Methods," Internat. J. Numer. Methods Fluids., Vol. 20, pp. 1081-1106, (1995).

[7] Chen, J.S., and Wang, H.P., "New Boundary Condition Treatment in Meshfree Computation of Contact Problems," Compul. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 187, pp. 441-468, (2000).

[8] Durate, C.A., and Oden J.T., "HP Clouds- A Meshless Method to Solve Boundary Value Problems," TICAM-Texas Institute for Computations and Applied Mathematics, (2000).

[9] Timoshenko, S.P., and Goodier, J.N., "*Theory of Elasticity (3)*," McGraw-Hill, New York, (1970).

فهرست علائم انگليسي

$\boldsymbol{f}$: بردار نيرو

$\hat{\boldsymbol{f}}$: بردار نيروي تصحيح شده

$\boldsymbol{K}$: ماتريس سفتي

$\hat{\boldsymbol{K}}$: ماتريس سفتي اصلاح شده

$\boldsymbol{T}$: ماتريس انتقال

$\boldsymbol{u}$: بردار مقادير گرهي مجازي

$\hat{\boldsymbol{u}}$: بردار مقادير گرهي واقعي

$\boldsymbol{u}^h$: مقدار تقريبي متغير ميدان

u,v: مولفه هاي افقي و عمودي ميدان تغيير مكان

w : تابع وزن

$\boldsymbol{X}$: بردار مختصات

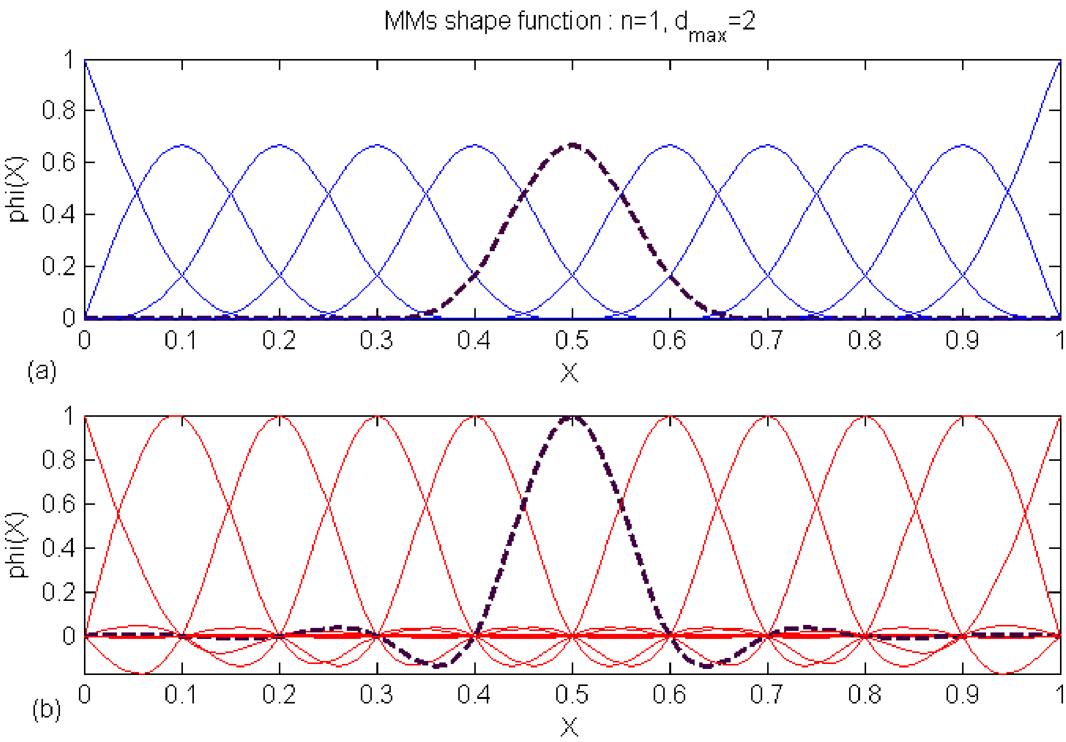
x,y: مولفه هاي بردار مختصات

فهرست علائم يوناني

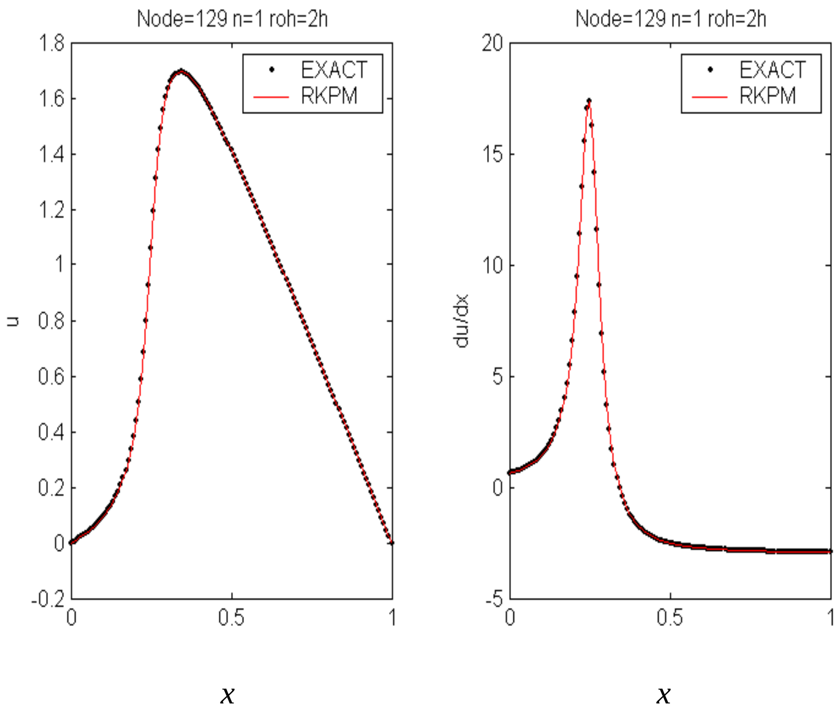
Φ : تابع شكل بدون المان

$\hat{\Phi}$: تابع شكل اصلاح شده

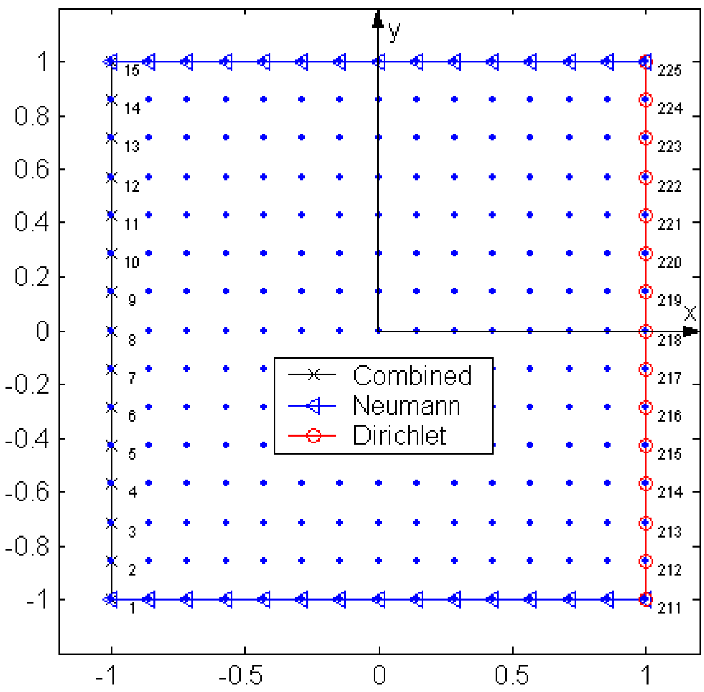
شکلها



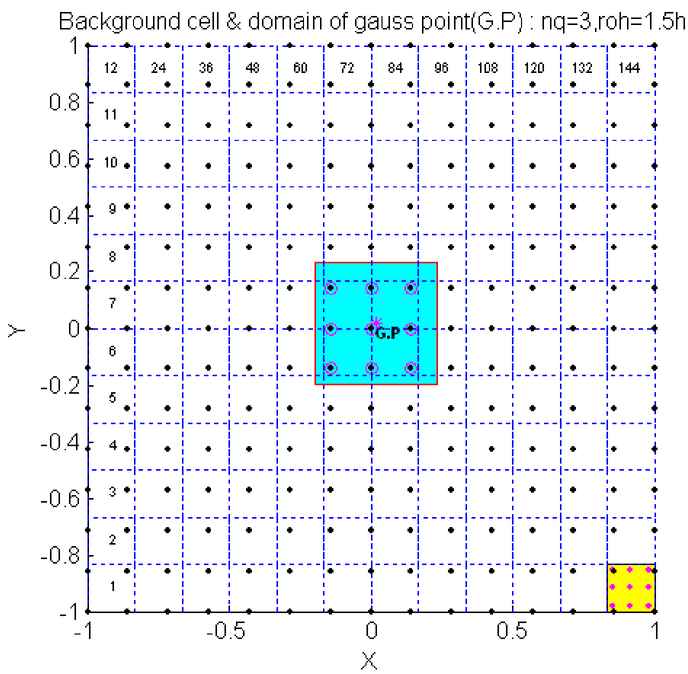
شکل۱- (a) توابع شکلRKPM و (b) توابع شکل اصلاح شده



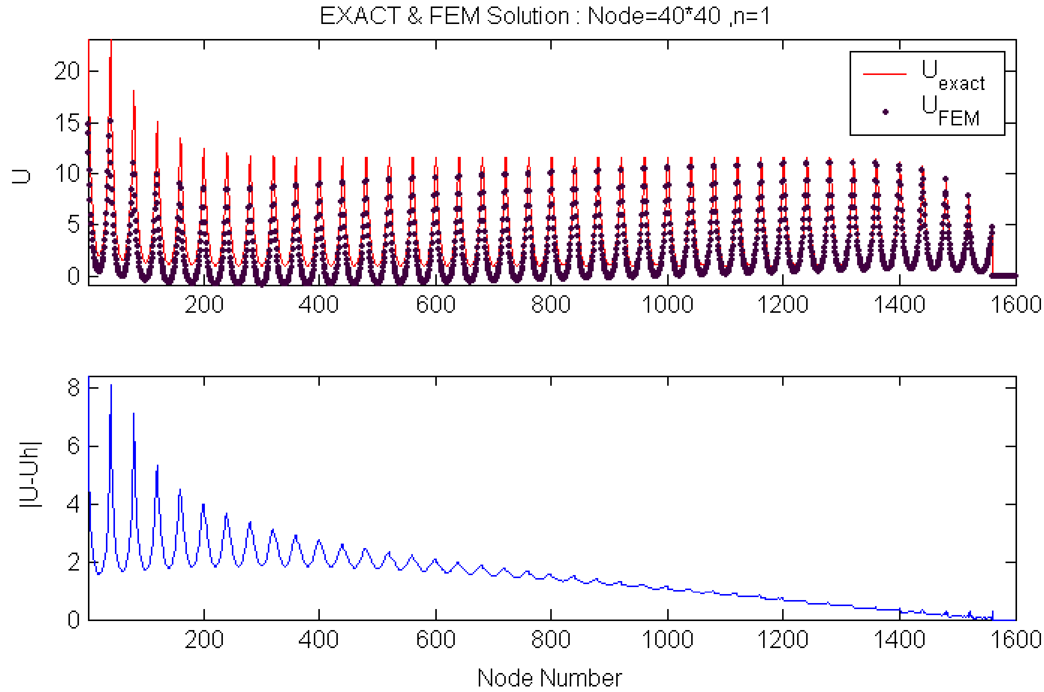
شکل۲- توزیع u و مشتق آن در مسئله انتقال حرارت یک بعدي



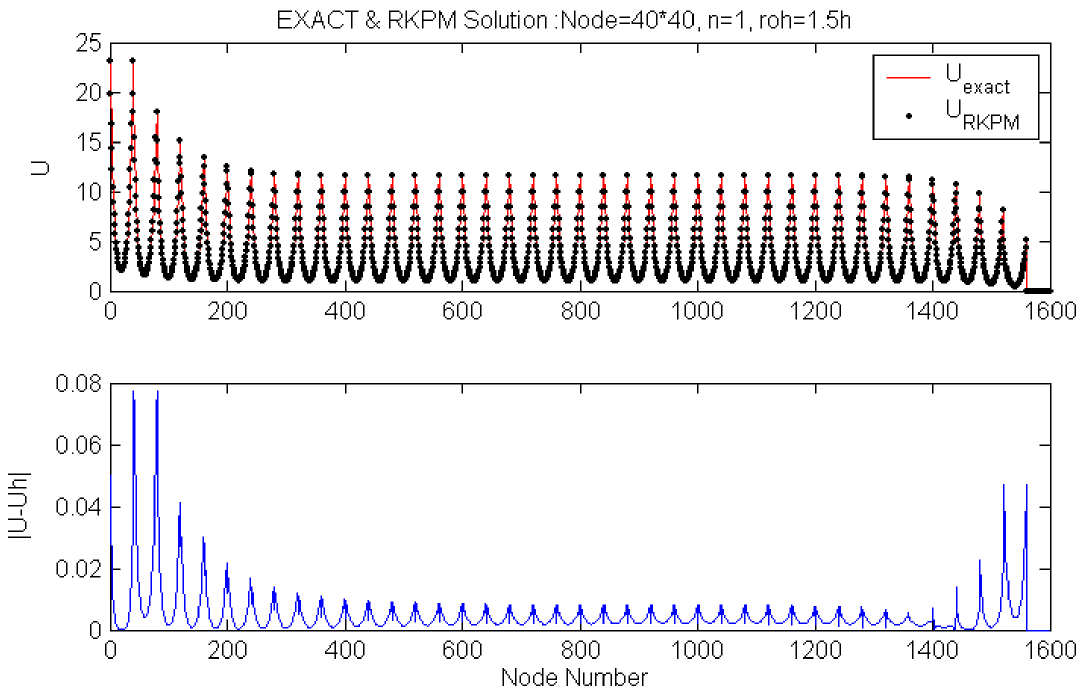
شکل۳- آرایش گره ها و شرایط مرزي در مسئله انتقال حرارت دو بعدي



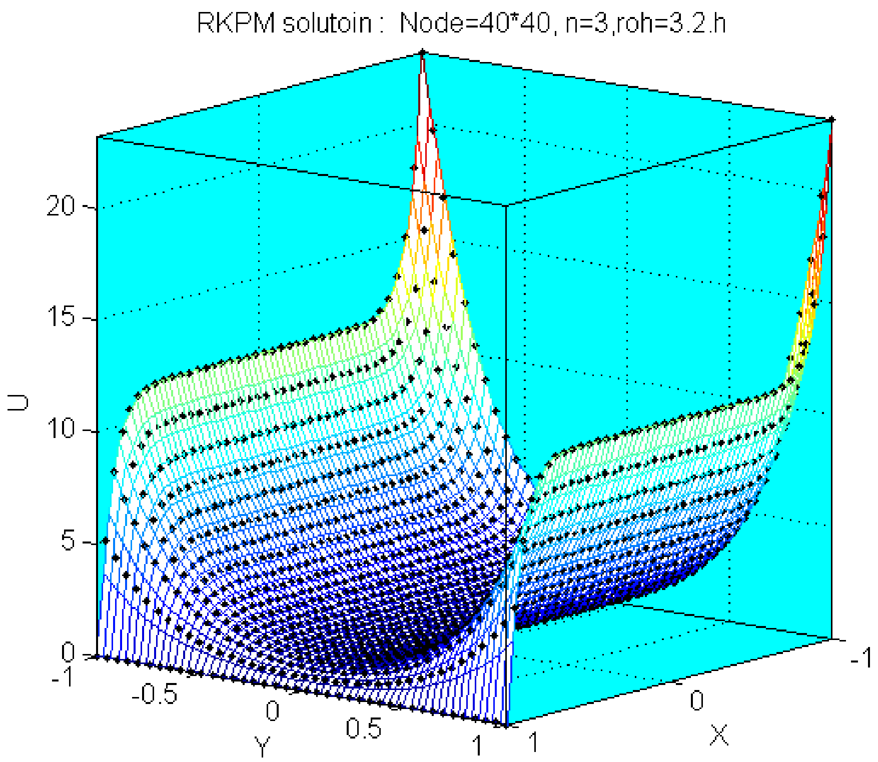
شکل٤- شبکه پس زمینه ۱۲× ۱۲سلولي با گوس مرتبه سه



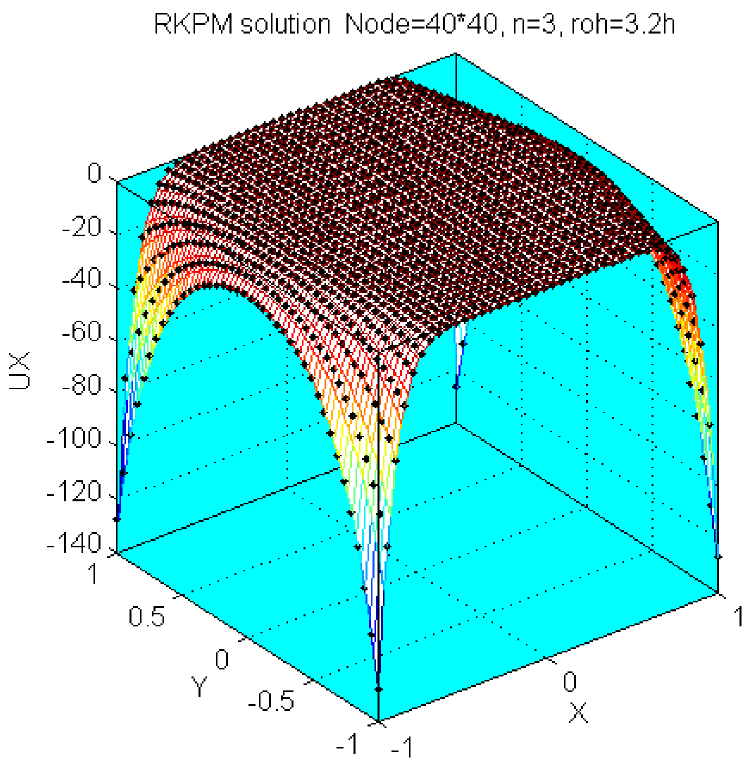
شكل٥- مقايسه نتايج تحليلي و عددي اجزاء محدود در مسئله انتقال حرارت دو بعدي



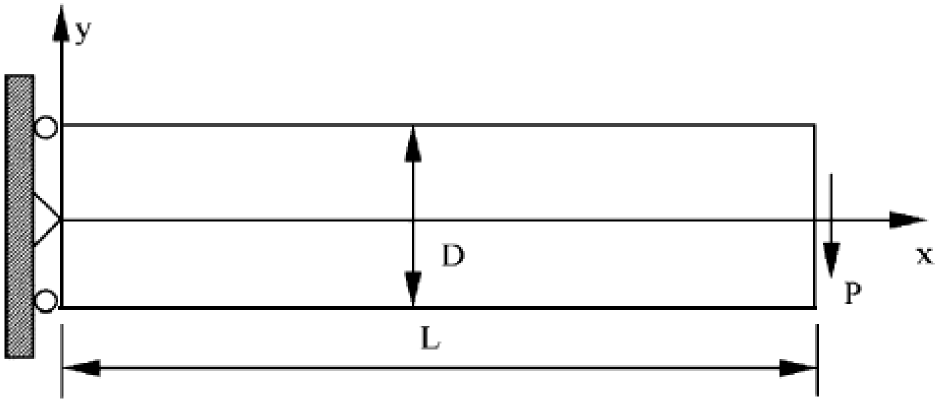
شكل٦- مقايسه نتايج تحليلي و عددي RKPM در مسئله انتقال حرارت دوبعدي



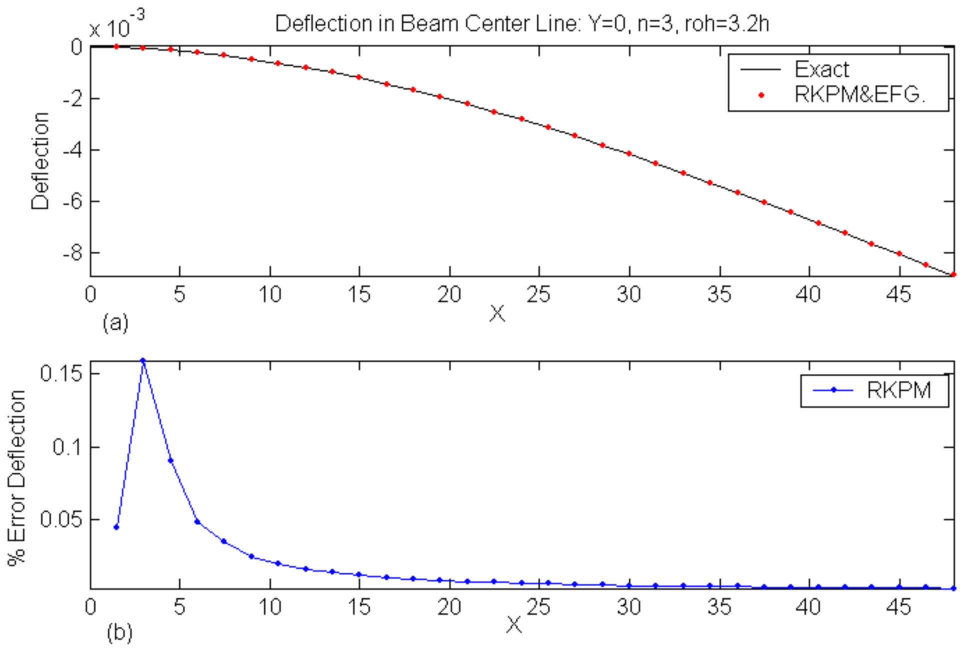
شکل۷- مقایسه نتایج تحلیلي و عدديRKPM براي مقدار u در مسئله انتقال حرارت دوبعدي



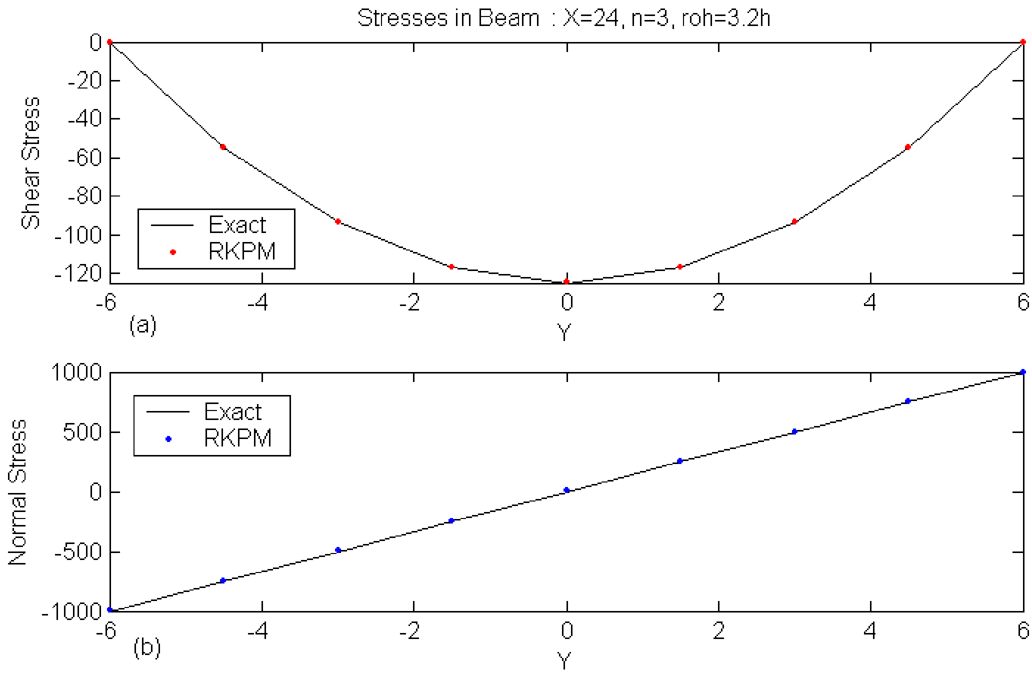
شکل۸- مقایسه نتایج تحلیلي و عددي RKPM براي مشتق u نسبت به x در مسئله انتقال حرارت دوبعدي



شكل۹- تير يكسرگيردار تيموشنكو با بار برشي گسترده با توزيع سهمي شكل در انتهاي آزاد



شكل ۱۰- تغيير مكان خط مركزي تير يكسر گير دار و درصد خطاي مقادير محاسبه شده



شکل۱۱- توزیع تنش برشي و عمودي در مقطع وسط تیر

Abstract

In this paper RKPM method is used for simulation of one and two dimensional linear boundary value problems. Due to the loss of kronecker delta properties in the mesh less shape functions, the imposition of essential boundary conditions is the main problem in mesh free computations. In this work transformation method is used for imposition of essential boundary conditions. Several linear boundary value problems with various type of boundary conditions are simulated and Results obtained from these simulations are compared with exact solutions.