ISME

بهبود روش رد يابي چند ترك همزمان در تيراويلر- برنولي بر مبناي اندازه گيري فركانسهاي ارتعاشي تير

مهدي راغبي[1]

دانشجوي دكتري

انوشيروان فرشيديان فر[2]

دانشيار

در این مقاله یک روش تحلیلی دینامیکی، جهت تعیین موقعیت و اندازه چند ترک همزمان ایجاد شده در تیر اویلر- برنولی ارائه شده است. با توجه به تغییر رفتار دینامیکی سازه در اثر وجود ترک و به کمک مدلسازی ترک با یک فنر پیچشی، فرکانسهای طبیعی تیر ترکدار به کمک روش ماتریس انتقال محاسبه شده است. سپس رابطه ای خطی میان تغییرات فرکانسی ارتعاشات تیر و پارامتر وجود ترک بدست آمده است. برای حل این رابطه خطی از آنجاییکه تعداد معادلات و مجهولات مسأله برابر نیستند از روشی موسوم به روش معکوس ساختگی استفاده شده است. جهت بیان کاربرد و دقت روش مذکور نتایج تحلیل یک تیر دو سر مفصل دارای دو ترک عرضی همزمان که نتایج آن در مراجع دیگر نیز گزارش شده است، ارائه خواهد شد. با مقایسه نتایج بدست آمده از این روش با مقادیر واقعی و نتایج مراجع دیگر، میتوان به برتری روش ارائه شده از لحاظ سرعت و دقت در ردیابی ترک پی برد.

واژه هاي راهنما: روش ماتریس انتقال، ردیابی ترکها، مدلسازی ارتعاشی تیر ترکدار، تست غیر مخرب ترکها

۱- مقدمه

بازرسی و عیب یابی اجزای حساس و بحرانی یک دستگاه یا سازه، امری لازم و ضروری برای ارزیابی عمر آن میباشد. یکی از روشهای ارزیابی عمر باقیمانده یک وسیله توجه پیوسته به تغییرات در رفتار دینامیکی یا استاتیکی آن میباشد. معمولاً با ايجاد ترك در يك وسيله، سفتي سازه تشكيل دهنده دچار تغييراتي محلي شده و درنتيجه رفتار ارتعاشي سازه دستخوش تغيير مي گردد. اگر ترکی در یک وسیله بوجود آید، هنوز میتوان از آن استفاده نمود؛ اماوجود ترک، مراقبت بيشتري را طلب می نماید.

بسیاری از مطالعاتی که در مورد تیرهای شامل چند ترک انجام شده است، مسأله مستقیم یعنی تعیین فرکانسهای تیر با چند ترک را بررسی نموده اند. اما مقالاتی نیز[۴-۱]، مسأله معکوس یعنی ردیابی ترک از روی پاسخ دینامیکی تیر را بررسی نموده اند. مسأله ردیابی چند ترک از پیچیدگی بسیار بیشتری نسبت به

[1] دانشجوي دكترا، بخش مهندسي مكانيك، دانشكده فني ومهندسي، دانشگاه فردوسي مشهد

[2] نويسنده مسئول، دانشيار، بخش مهندسي مكانيك، دانشكده فني ومهندسي، دانشگاه فردوسي مشهد farshid@um.ac.ir

تعیین موقعیت و اندازه یک ترک در طول تیربرخوردار است. برای حل این مسأله Choy و همکارانش[۵]، اثر ترک را به صورت کاهش صلبیت خمشی تیر (EI)، در اطراف ترک مدل کرده و حل را به کمک روش ماتریس انتقال بدست آورده اند. محققان دیگری به سرپرستی Zheng [۶و۷]، از روش سری فوریه اصلاح شده استفاده کرده اند.

روش تشخیص ترک میتواند بر اساس بررسی ارتعاشات طولی، ارتعاشات عرضی و یا کوپلینگی از ارتعاشات عرضی، طولی و پیچشی باشد. ولی با توجه به بررسی نتایج، ارتعاشات عرضی تیر پاسخهای دقیقتری را ارائه می‌کند. اکثر محققین در تشخیص ترک این نوع تحلیل را لحاظ می‌کنند[۸]. از سوی دیگر عموماً در تحلیلها ترک را از نوع باز(open crack) در نظر می گیرندتا از اثرات غیر خطی بودن مسأله که ناشی از بسته شدن ترک می باشد صرفنظر شود. برخی مطالعات آزمایشگاهی نیز برای بررسی درستی مدلها انجام شده است. در اکثر موارد ترکها با ایجاد یک برش ریز در نمونه ایجاد شده است. برخی از نتایج آزمایشگاهی توسط Cawley و Adams[۹]، و همچنین Ruotolo و Surace[۲]، برای چند ترک ارائه شده است.

روش ماتریس انتقال که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است دارای مزیتهای زیادی در مقایسه با روش المان محدودمیباشد. به طور مشخص میتوان گفت اندازه دترمینان معادله مشخصه دراین روش به طور چشم گیری کوچک شده و اندازه دترمینان به $n+2$ کاهش مي‌یابد که n تعداد تکیه گاههای صلب در طول دهنه تیر میباشد و برخلاف روش المان محدود به تعداد المانهای در نظر گرفته شده برای تیر بستگی ندارد.

درروش ارائه شده توسط Liang وهمکارانش[۳]، برای ردیابی ترک، تیر به چندین قسمت تقسیم میگردد که هر قسمت میتواند دارای خرابی یا ترک باشد، وجود ترک در هر المان را با کمک یک پارامتر خرابی میتوان نشان داد. در این پژوهش نیز از این روش و مدلسازی ترک بافنر پیچشی استفاده خواهد شد. آنگاه میتوان نشان داد که بین تغییرات در فرکانس ارتعاشات تیر و پارامتر خرابی در المانها، رابطه ای خطی وجود دارد. مزیت این پژوهش نسبت به سایر کارهاي انجام شده در مراجع [۳] و[۸]، ارائه حل دقیقتری برای رابطه خطی ذکر شده می باشد. این حل، باعث افزایش سرعت و دقت در ردیابي ترکها می شود. صحت این موضوع به کمک حل چند مثال و مقایسه نتایج با اعداد گزارش شده، بررسی گردیده است.

۲- مدلسازی ارتعاشی تیر ترکدار

تیری پیوسته و همگن با n ترک درطول تیر را مطابق شکل ۱ در نظر می گیریم. ترکها در طول تیر در موقعیتهای $\xi = x/l = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ قرارگرفته‌اند که در این رابطه $0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < 1$ میباشد. میتوان ترکها را با فنرهای پیچشی مدل نمود. سختی هر یک از فنرها از رابطه زیر قابل محاسبه میباشد: (اثبات روابط ۱و۲درضمیمه آمده است)[۱۰].

$$K_i = \frac{Ebh^2}{72\pi\, f(\eta_i)} \qquad (۱)$$

که در این رابطه $\eta_i = a_i / h$، اندازه بدون بعد شده ترک، a_i اندازه ترک، b ضخامت تیر، h عرض تیر و E مدول الاستیسیته ماده سازنده تیرمیباشد و تابع انعطاف پذیری $f(\eta_i)$ نیز توسط رابطه ذیل بیان میشود:

$$\begin{aligned} f(\eta_i) = {} & 0.6384(\eta_i)^2 - 1.035(\eta_i)^3 + 3.7201(\eta_i)^4 - 5.1774(\eta_i)^5 \\ & + 7.553(\eta_i)^6 - 7.3324(\eta_i)^7 + 2.4909(\eta_i)^8 \end{aligned} \quad (۲)$$

این رابطه به ازای $\eta_i \le 0.6$ دارای دقت بسیار خوبی می باشد.[۱۱]

معادله ارتعاشی تیر اویلر- برنولی به صورت زیر بیان میشود:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] + \rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (۳)$$

براساس روش جداسازی متغیرها پاسخ معادله فوق را میتوان به صورت: $y(x,t) = Z(x)\cos(\omega t)$ درنظر گرفت که در آن شکل مد $Z(x)$ را میتوان از رابطه ذیل بدست آورد:

$$\begin{aligned} Z(x) = {} & c_1(\cos(px) + \cosh(px)) + c_2(\cos(px) - \cosh(px)) \\ & c_3(\sin(px) + \sinh(px)) + c_4(\sin(px) - \sinh(px)) \end{aligned} \quad (۴)$$

که در رابطه فوق $p^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$ می باشد. به کمک رابطه فوق میتوان جابجایي Z، شیب $\theta = \frac{dZ}{dx}$، ممان‌خمشی $M = EI\frac{d^2Z}{dx^2}$ و نیروی برشی $V = EI\frac{d^3Z}{dx^3}$ در دو انتهای i و $i-1$ از یک المان دلخواه را به فرم زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & C_i/EI & D_i/EI \\ p^4 D_i & A_i & B_i/EI & C_i/EI \\ EI\,p^4 C_i & EI\,p^4 D_i & A_i & B_i \\ EI\,p^4 B_i & EI\,p^4 C_i & p^4 D_i & A_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{i-1} \quad \text{یا} \quad Z_R = [R_i] Z_L \quad (۵)$$

در رابطه فوق $[R_i]$ ماتریس انتقال برای المان i ام تیر نامیده میشود و

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\cos(pl_i) + \cosh(pl_i)}{2}, \qquad B_i = \frac{\sin(pl_i) + \sinh(pl_i)}{2p} \\ C_i &= \frac{-[\cos(pl_i) - \cosh(pl_i)]}{2p^2}, \quad D_i = \frac{-[\sin(pl_i) - \sinh(pl_i)]}{2p^3} \end{aligned} \quad (۶)$$

در رابطه بالا l_i طول المان i ام تیر میباشد.

درمحل ترک Z, M, V پیوسته هستند و تنها θ یا شیب تیر دارای ناپیوستگی است. در نتیجه میتوان پارامترهای دو سمت ترک را به صورت زیر به هم مربوط ساخت:

$$\begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/K_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{i-1} \quad \text{یا} \quad Z_R = [S_i] Z_L \tag{۷}$$

در رابطه فوق K_i سختی فنر پیچشی است که توسط رابطه (۱) قابل محاسبه می باشد. همچنین در صورت وجود تکیه‌گاه میانی، در نیروی برشی تیر V ناپیوستگی به وقوع می پیوندد.

برای یک تیر مشخص ماتریس انتقال‌کلی $[\overline{H}]$، یعنی ماتریسی که مشخصات گره N ام را به گره اول ربط مي‌دهد (شکل ۱)، با ضرب کردن ماتریسهای انتقال میانی قابل محاسبه است. یعنی:

$$\begin{gathered} [Z]_N = [\overline{H}][Z]_1 \\ [\overline{H}] = [R_{n+1}]_{4\times4}[S_n]_{4\times4}[R_n]_{4\times4}[S_{n-1}]_{4\times4}\ldots[R_2]_{4\times4}[S_1]_{4\times4}[R_1]_{4\times4} \end{gathered} \tag{۸}$$

که ماتریسهای انتقال $[R]$و$[S]$ در روابط(۵) و (۷) تعریف شده اند. با اعمال شرایط مرزی مشخص درانتهای تیر میتوان معادله ای به فرم $[\tilde{H}][Z]=0$ به دست آورد. معمولاً دو پارامتر از چهار پارامتر در انتهای تیر صفر است و این باعث میشود که ماتریس مشخصه $[\tilde{H}]$ به یک ماتریس 2×2 بدل شود. بنابراین معادله مشخصه ارتعاشات سیستم به صورت ذیل خواهد بود:

$$\det\left[\tilde{H}(\omega, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, K_1, K_2, K_3, \ldots)\right]_{2\times2} = 0 \tag{۹}$$

که درآن ω فرکانس طبیعی است. برای یک تیر طره اي با یک ترک معادله مشخصه به صورت زیر می باشد:

$$\begin{vmatrix} H_{11}^1 + \dfrac{H_{11}^2}{K} & H_{12}^1 + \dfrac{H_{12}^2}{K} \\ H_{21}^1 + \dfrac{H_{21}^2}{K} & H_{22}^1 + \dfrac{H_{22}^2}{K} \end{vmatrix} = 0 \tag{۱۰}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} H_{11}^1 &= p^4 C_1 C_2 + p^4 B_1 D_2 + A_1 A_2 + p^4 D_1 B_2, & H_{11}^2 &= EIp^4 A_1 D_2 \\ H_{12}^1 &= p^4 D_1 C_2 + p^4 C_1 D_2 + B_1 A_2 + A_1 B_2, & H_{12}^2 &= EIp^4 B_1 D_2 \\ H_{21}^1 &= p^4 C_1 B_2 + p^4 B_1 C_2 + p^4 A_1 D_2 + p^4 D_1 A_2, & H_{21}^2 &= EIp^4 A_1 C_2 \end{aligned}$$

$$H_{22}^{1}=p^{4}D_1B_2+p^{4}C_1C_2+p^{4}B_1D_2+A_1A_2,\qquad H_{22}^{2}=EIp^{4}B_1C_2$$

در روابط بالا $A_i, B_i, C_i, D_i\ (i=1,2)$ توسط رابطه (۶) محاسبه می شوند. البته باید در این رابطه L_i جایگزین l_i گردد و همچنین $L_1=\beta L$ ؛ $L_2=(1-\beta)L$ بوده که β موقعیت بدون بعد ترک را درطول تیر نشان میدهد. در نهایت برای تیر یکسرگیردار- یکسرآزاد با یک ترک در طول دهنه میتوان معادله مشخصه را به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned}&4(1+\cosh\lambda\cos\lambda)+\frac{\lambda}{\overline{K}}\{\sinh\lambda(\cos\lambda+\cos\lambda e)-\sin\lambda(\cosh\lambda+\cosh\lambda e)+2\cosh(\lambda\beta)\sin(\lambda\beta)\\&-2\cos(\lambda\beta)\sinh(\lambda\beta)-2\sin[\lambda(1-\beta)]\cosh[\lambda(1-\beta)]+2\cos[\lambda(1-\beta)]\sinh[\lambda(1-\beta)]\}=0\end{aligned}\qquad (۱۱)$$

همچنین با روندی مشابه در مورد تیر با تکیه گاههای ساده نیز میتوان نوشت:

$$4\sin\lambda\sinh\lambda+\frac{\lambda}{\overline{K}}\{\sinh\lambda(\cos\lambda-\cos\lambda e)-\sin\lambda(\cosh\lambda-\cosh\lambda e)\}=0\qquad (۱۲)$$

که درروابط فوق $\lambda=pL,\ \beta=L_1/L,\ e=2\beta-1,\ \overline{K}=KL/(EI)$ و L طول تیر می باشد. اگر درروابط فوق انعطاف پذیری $(1/\overline{K})$ صفر درنظرگرفته شود، معادلات مشخصه تیرهای بدون ترک در حالت یکسر گیردار- یکسرآزاد و همچنین با تکیه گاه ساده به ترتیب بدست خواهند آمد. با حل کردن معادلات (۱۱) و (۱۲) میتوان مسأله مستقیم را حل نموده و فرکانسهای تیر ترکدار را محاسبه نمود. همچنین شکل مدهای مربوط را میتوان از معادله (۴) بدست آورد. این روش، تحت عنوان روش ماتریس انتقال[1] نامگذاری شده است.

۳- ردیابي کردن ترك

برای ردیابی کردن یک ترک در یک تیر تک دهنه یکسر گیردار یکسر آزاد یا تیر با تکیه گاه ساده به ترتیب معادلات (۱۱) و (۱۲) معادلات اصلی ما خواهند بود. اما برای ردیابی کردن چند ترک نمیتوان مستقیماً از این معادلات استفاده نمود. در اینجا از روش تقریبی که توسط Hu و Liang [۴]، ارائه شده است، استفاده می نماییم. نسبت رایلی در یک تیر به کمک رابطه زیر تعریف میشود:

$$\omega^2=\mu=\frac{\frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left(\frac{d^2Z}{dx^2}\right)^2dx}{\frac{1}{2}\int_0^L \rho AZ^2dx}=\frac{U}{V}\qquad (۱۳)$$

که در آن

[1] Transfer Matrix Method

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left(\frac{d^2Z}{dx^2}\right)^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^L \psi\, dx$$
$$\psi=EI\left(\frac{d^2Z}{dx^2}\right)^2$$

در رابطه (۱۳) U انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر و V انرژی جنبشی تیر می‌باشد. برای تغییرات کوچک در فرکانس تیر میتوان نوشت:

$$\frac{\Delta\mu}{\mu}=\frac{\Delta U}{U}-\frac{\Delta V}{V} \tag{۱۴}$$

اگر ترک موجود در تیر عمود بر محور تیر باشد، در ارتعاشات عرضی تیر اثری بر میزان انرژی جنبشی تیر نخواهد داشت و میزان تغییرات انرژی جنبشی تیر ترکدار (ΔV) صفر است. میتوان اثر محلی ترک بر روی شکل مد تیر را با پارامتر خرابی S نشان داد. S شاخص عیب و نقصان در تیر نامیده میشود. در واقع این شاخص نشان دهنده بزرگی انرژی کرنشی ذخیره شده در فنر پیچشی است. $S=0$ نشان دهنده عدم وجودترک و $S=1$ نشان دهنده ترک‌کامل و شکست تیر می باشد. حال تغییر در انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر به علت وجود ترک را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta U=\frac{1}{2}\int_0^L S\psi\, dx \tag{۱۵}$$

درنتیجه میتوان معادله (۱۴) را به فرم زیر نوشت:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=\frac{1}{2}\frac{\int_0^L S\psi\, dx}{\int_0^L \psi\, dx} \tag{۱۶}$$

اگر تیربه m المان تقسیم شده باشد و المان i ام دارای پارامتر نقص S_i باشد، میتوان نوشت:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=2\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{I_0}\int_{L_i}\psi\, dxS_i \tag{۱۷}$$

که در این رابطه : $I_0=4\int_L \psi\, dx$ ، و L_i طول المان i ام می باشد. در مورد فرکانس n ام تیر میتوان نوشت:

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n}=2\sum_{i=1}^{m}\int_L g_n(\xi)\,L\,d\xi S_i,\quad g_n(\xi)=\psi_n/I_{0n} \tag{۱۸}$$

که در رابطه بالا $I_{0n}, \psi_n, g_n(\xi)$ مقادیر مربوط به شکل مد nام می‌باشند. رابطه (۱۸) درواقع رابطه‌ای خطی میان تغییرات فرکانس ارتعاشات تیر و پارامتر وجود ترک، S_i بوجود می آورد. دراین رابطه: $\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{nc}$ است که ω_n و ω_{nc} به ترتیب فرکانس ارتعاشی درمد nام برای تیر بدون ترک و تیر ترکدار می باشد. بنابراین برای تیری که به m المان تقسیم شده است و تعداد فرکانسهای اندازه گیری شده آن q است، میتوان معادله (۱۸) را به فرم زیر نوشت:

$$\left\{\frac{\Delta\omega}{\omega}\right\}_{q\times 1} = 2[H]_{q\times m}\{S\}_{m\times 1} \qquad (۱۹)$$

عناصر ماتریس $[H]$ را میتوان به صورت روبرو نوشت:

$$h_{ij} = \int_{L_j} g_i(\xi)\, L_j\, d\xi,\ i = 1,2,\ldots,q\ \&\ j = 1,2,\ldots,m$$

دراین رابطه i شماره مد و j شماره المان تیر میباشد. به عنوان مثال برای یک تیر با تکیه‌گاه ساده در دو طرف، شکل مد nام به صورت زیر محاسبه میشود:

$$Z_n(\xi) = \sin(n\pi\xi),\ Z_n'(\xi) = n\pi\cos(n\pi\xi),\ Z_n''(\xi) = -n^2\pi^2\sin(n\pi\xi)$$

از اینرو میتوان نوشت :

$$g_n(\xi) = \frac{\left[-n^2\pi^2\sin(n\pi\xi)\right]^2}{4\int_0^1\left[-n^2\pi^2\sin(n\pi\xi)\right]^2 d\xi} = \frac{1}{2}\sin^2(n\pi\xi)$$

$$h_{nj} = \int_{L_j}\frac{1}{2}\sin^2(n\pi\xi)Ld\xi = \frac{L_j}{4}\left[(\xi_2-\xi_1) - \frac{1}{2n\pi}\left[\sin(2n\pi\xi_2) - \sin(2n\pi\xi_1)\right]\right] \qquad (۲۰)$$

بنابراین برای ردیابی کردن ترک پس از حل معادله (۱۹) و یافتن مقادیرشاخص عیب S_i میتوان در مورد خرابی و داشتن ترک المانهای تیر اظهار نظر نمود.

۴- حل مثال عددی

۱-۴- مثال اول

۱-۱-٤- محاسبه فرکانس تیر ترکدار

در این بخش فرکانسهای طبیعی تیری با تکیه‌گاههای ساده دارای دو ترک که درشکل ۲ الف نشان داده شده است را محاسبه می نماییم. برای اطمینان از درستی روش و محاسبات از مشخصات تیر داده شده در مرجع[۴] استفاده می‌کنیم. مشخصات تیر و همچنین موقعیت دو ترک در طول تیر در جدول شماره ۱ آمده است. در سطر اول فرکانسهای طبیعی تیر بدون ترک از رابطه $\omega_n = (n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$ محاسبه شده است. در سطر دوم فرکانسهای طبیعی تیر دارای ترک از مرجع[۴] آورده شده است، که به کمک نرم افزار SAP84 که

اساس آن روشهای المان محدود می باشد، محاسبه شده است. در سطر سوم به کمک روش ماتریسهای انتقال که در بخش ۲ توضیح داده شد، (به معادله (۹) مراجعه شود) فرکانسهای ارتعاشی تیرترکدارمحاسبه شده است. همانطور که مشاهده میشود جوابهای حاصل از دو روش با دقت خوبی برهم منطبق می باشند.

۲-۱-۴- ردیابی کردن ترک

با محاسبه مقادیر عددی S_i از معادله (۱۹) اطلاعاتی راجع به مقدار عیب و خرابی در المانهای مختلف تیر بدست می آید. اگر q یعنی تعداد فرکانسهای اندازه گیری شده از تعداد المانهای تیر m کمتر باشد، پارامترهای خرابی مجهول را میتوان به کمک روش معکوس ساختگی[1] برای ماتریس $[H]$ که در ادامه توضیح داده میشود، محاسبه نمود.[۳]

طرفین رابطه (۱۹) را در ترانهاده ماتریس $[H]$ ضرب مي کنیم:

$$[H]^T_{m\times q}\left\{\frac{\Delta\omega}{\omega}\right\}_{q\times 1} = 2[H]^T_{m\times q}[H]_{q\times m}\{S\}_{m\times 1} = 2[HH]_{m\times m}\{S\}_{m\times 1} \qquad (۲۱)$$

اکنون با ضرب کردن طرفین رابطه (۲۱) در معکوس ماتریس $[HH]$، میتوان بردار $\{S\}_{m\times 1}$ را که میزان وجود ترك در هر المان را نشان میدهد، بدست آورد.

$$\{S\}_{m\times 1} = 0.5\ [HH]^{-1}_{m\times m}[H]^T_{m\times q}\left\{\frac{\Delta\omega}{\omega}\right\}_{q\times 1} \qquad (۲۲)$$

ممکن است برخی از S_iهاي بدست آمده در رابطه (۲۲) مقاديري منفی باشند. از آنجا که مقادیر مثبت S_i نشان دهنده کاهش سطح مقطع تیر به دلیل وجود ترک می باشند، میتوان گفت یک مقدارمنفی به معنای افزایش سطح مقطع تیر است. از نظر فیزیکی این مفهوم غیر واقعی است. برای حل کردن این مشکل میتوان فرض کرد که المان موردنظر دارای هیچگونه ترکی نیست و درنتیجه پارامتر خرابی مربوط را برابر صفر درنظر گرفت. این فرایند تا آنجا ادامه می یابد که تمام پارامترهای عیب و خرابی حاصل همگی مثبت باشند.

برای ردیابی کردن ترک به این صورت عمل میشود که در ابتدا پارامتر خرابی مربوط به المان iام را درنظرگرفته و بقیه پارامترهای مربوط به سایر المانها صفر می‌شوند. با توجه به معادله (۱۹) میتوان تغییر در فرکانسهای طبیعی تیر $\Delta\omega_n$را محاسبه نمود. سپس از رابطه $\omega_{nc} = \omega_n - \Delta\omega_n$ میتوان ω_{nc} یعنی فرکانس ارتعاشی تیر ترکدار را محاسبه نمود. اکنون با توجه به معادلات (۱۱) و (۱۲) میتوان تغییرات $\overline{K}$ را برحسب β یعنی موقعیت ترک در طول تیر رسم نمود. اگر اینکار را برای سه مد یا تعداد بیشتری از مدها انجام دهیم از آنجا که سختی فنر پیچشی معادل ترک، مستقل از مد فرکانسی تیر میباشد، نقطه برخورد این منحنیها،

[1] Pseudo-inverse

موقعیت ترک و سختی فنر معادل را خواهد داد. با بدست آمدن $\overline{K}$ اندازه ترک را میتوان به کمک رابطه (۲) محاسبه نمود.

برای ردیابی کردن ترک، فرکانسهای طبیعی تیر ترکدار و همچنین تیر بدون ترک را نیاز داریم، که این فرکانسها در قسمت ۱-۱-۴ بدست آمد. مطابق شکل ۲ب، ده المان در طول تیر با شرایط مرزی دو سرمفصل در نظر می گیریم. از پنج فرکانس ارتعاشی اول تیر (جدول ۱) برای بدست آوردن دستگاه معادلات خطی زیر استفاده می کنیم:

$$\left\{\frac{\Delta\omega}{\omega}\right\}_{5\times1} = 2[H]_{5\times10}\{S\}_{10\times1} \qquad (۲۳)$$

حال میتوان ده پارامتر خرابی مجهول را به کمک روش معکوس ساختگی محاسبه نمود.

با حل کردن معادله (۲۳) مقادیر زیر برای بردار S بدست می آید:

$$\{S\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}^T$$
$$= \{0.4760,\ 0.0748,\ 0.1482,\ 0.5388,\ 0.2012,\ -0.4282,\ -0.6158,\ -0.0022,\ -0.0411,\ -0.8502\}^T$$

$S_{10}, S_9, S_8, S_7, S_6$ دارای مقادیر منفی هستند، بنابراین آنها را صفر نموده و مسأله دوباره حل می گردد.

مرحله دوم:

$$\{S\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}^T$$
$$= \{0.00075,\ -0.00430,\ 0.04844,\ -0.00872,\ 0.06635\}^T$$

اگر مقادیر منفی را صفرنموده و عمل تکرار شود، نتایج زیر بدست مي آيد:

مرحله سوم:

$$\{S\} = \{S_1, S_3, S_5\}^T$$
$$= \{-0.00899,\ 0.04295,\ 0.06309\}^T$$

مرحله چهارم:

$$\{S\} = \{S_3, S_5\}^T$$
$$= \{0.04153,\ 0.06108\}^T$$

در مرحله چهارم تمام مقادیر بردار S مثبت هستند. درنتیجه میتوان گفت که تیر دارای دو ترک در المانهای سوم و پنجم میباشد. برای پیش بینی موقعیت ترک در المان سوم المانهای بردار S به صورت زیر در نظر گرفته میشود: $\{S_3, S_5\} = \{0.04153,\ 0\}$ آنگاه به‌کمک رابطه (۲۳) تغییرات فرکانسهای ارتعاشی تیرمحاسبه می‌گردد:

$$\frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} = 0.20763\%, \qquad \frac{\Delta\omega_2}{\omega_2} = 0.40186\%, \qquad \frac{\Delta\omega_3}{\omega_3} = 0.20763\%, \qquad (۲۴)$$

این تغییرات قابل ملاحظه هستند و نشان میدهند که در المان سوم ترک وجود دارد. درنهایت برای پیش بینی موقعیت ترک در المان پنجم المانهای بردار S به صورت زیردرنظرگرفته میشود:

$\{S_3, S_5\} = \{0,\ 0.06108\}$ و به‌کمک رابطه (۲۳) تغییرات فرکانسهای ارتعاشی تیر محاسبه می‌گردد:

$$\frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} = 0.591107\%, \qquad \frac{\Delta\omega_2}{\omega_2} = 0.074266\%, \qquad \frac{\Delta\omega_3}{\omega_3} = 0.459497\%, \tag{۲۵}$$

این تغییرات نیز وجود ترک را در المان پنجم نشان میدهند.

به منظور پیش بینی موقعیت دقیق ترک در المان سوم، تغییرات فرکانسی داده شده در رابطه (۲۴) بـرای رسم منحنی تغییرات سختی فنر بر حسب موقعیت ترک β درطول تیر و با فرض وجود تنهـا یـک تـرک بـه کمک معادله (۱۲) رسم میشود. تغییرات سختی برای سه فرکانس اول در یک شکل رسم میشود. همین کـار برای ترک مربوط به المان پنجم و بر اساس رابطه (۲۵) نیز تکرارمیشود. نمودارهای حاصله در شکل ۳ آمـده است. موقعیت ترک ازروی محل برخورد منحنی ها بدست می‌آید. برای محاسبه انـدازه تـرک نیـز میتـوان از معادله (۲) استفاده نمود. نتایج حاصل در جدول ۲ آمده است. در این جدول همچنین نتایج محاسبه شده در مرجع[۸]، براي مقایسه داده شده است. همانطور که مشاهده میشود، دقت روش ارائه شـده در ایـن مقالـه از دقت روش مرجع ذکرشده بیشتر است. مهمترین دلیل ایـن موضـوع تفـاوت در نحـوه حـل نمـودن دسـتگاه معادلات خطـي (۱۹) مـي باشـد. Patil و Maiti[۸]، بـراي حـل ایـن معادلـه از تـابع pinv درنـرم افـزار MATLAB استفاده نموده اند و نتایج زیر در مورد حل مثال بالا گزارش شده است:

$$\begin{aligned}\{S\} &= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}^T \\ &= \{0.00066,\ \ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.05317,\ -0.00699,\ \ 0.03901,\ \ -0.00343,\ 0\}^T\end{aligned}$$

S_7 و S_9 دارای مقادیر منفی هستند، بنابراین آنها را مساوی صفر قرار داده و مسأله دوباره حل می گردد:

$$\begin{aligned}\{S\} &= \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8, S_{10}\}^T \\ &= \{0.00066,\ -0.00343,\ 0,\ -0.00699,\ 0,\ 0.05317,\ \ 0.03901,\ 0\}^T\end{aligned}$$

اگر مقادیر منفی را صفرنموده و عمل تکرار شود، خواهیم داشت:

مرحله سوم :

$$\begin{aligned}\{S\} &= \{S_1, S_3, S_5, S_6, S_8, S_{10}\}^T \\ &= 10^3 \times \{1.23876,\ 0.78202,\ 0,\ 0.00006,\ -0.78198,\ -1.23879\}^T\end{aligned}$$

مرحله چهارم :

$$\begin{aligned}\{S\} &= \{S_1, S_3, S_5, S_6\}^T \\ &= 10^3 \times \{0.00001,\ 0.00003,\ -5.37444,\ 5.37447\}^T\end{aligned}$$

مرحله پنجم :

$$\begin{aligned}\{S\} &= \{S_1, S_3, S_6\}^T \\ &= \{0.00941,\ 0.031318,\ 0.050402\}^T\end{aligned}$$

در مرحله پنجم تمام مقادیر بردار S مثبت هستند. درنتیجه میتوان گفت که تیر دارای سه ترک در المانهای اول ،سوم و ششم میباشد. همانطور که مشاهده میشود پس از ۵ مرحله تمام مقادیر مثبت بوده و یك ترك اضافي نیز در المان اول پیش بیني شده است که با مدل واقعی ناسازگار است.

با بررسي دقيقتر اعداد گزارش شده در مرجع [۸] و اعداد بدست آمده در اين پژوهش بايد گفت دليل اصلي خطا آنست كه به هنگام حل معادله (۱۹) با صفر نمودن مقادير منفي در هر مرحله، در واقع تعداد مجهولات را كاهش ميدهيم تا زمانيكه تعداد مجهولات برابر و يا كمتر از تعداد معادلات گردد. Patil و Maiti [۸]، در مراحل نهايي جستجو از مرحله چهارم به بعد هنگاميكه تعداد مجهولات از معادلات كمتر ميشود، معادلات مربوط به فركانسهاي بالاتر را ناديده گرفته و تنها معادلات بدست آمده از تغييرات چند فركانس اوليه را لحاظ مي كنند و در نتيجه اين خطا ايجاد مي گردد. در حاليكه در روش حل ارائه شده، در مراحل پاياني يعني از مرحله سوم به بعد كه تعداد مجهولات از معادلات كمتر است باز هم تمامي معادلات حفظ شده و در واقع حلي كه موسوم به حل كمترين مجموع مربعات است بدست مي آيد. اين حل اگر چه به دليل كمتر بودن مجهولات از معادلات هيچ يك از معادلات را به طور دقيق ارضا نمي نمايد اما داراي دقت بهتري است. زيرا اثر فركانسهاي بالاتر يعني فركانس چهارم و پنجم نيز در آن لحاظ شده است.

۴-۲- مثال دوم: ردیابي ترك عميق در طول تير

به منظور اطمينان بيشتر از درستي روش ارائه شده، در تير مثال قبل تركي به ضخامت $a/h = 0.5$ و در موقعيت $\beta = 0.25$ قرار مي دهيم و به رديابي اين ترك مي پردازيم. اعداد اين مثال شبيه به مرجع[۳] انتخاب شده است. در مرجع[۳]، در مورد رديابي اين ترك به دليل در نظر نگرفتن تمامي فركانسها در مراحل پاياني جستجو، به جاي يك ترك وجود سه ترك در المانهاي دوم، سوم و پنجم پيش بيني شده است. نتايج مرجع[۳] درشكل شماره ۴ نشان داده شده است. به كمك روش بهبود يافته اي كه در اين مقاله توضيح داده شد ميتوان با دقت خوبي محل و اندازه اين ترك را پيش بيني نمود. نتايج حاصل در شكل ۵ و جدول شماره ۳ آمده است.

همانطور كه مشاهده ميشود در اين مثال نيز با وجود عمق زياد ترك، موقعيت آن با دقت بسيار بالايي پيش بيني شد و ميزان خطا براي پيش بيني اندازه آن نيز قابل قبول است. نكته مهم در اين مثال آنست كه بر خلاف مرجع[۳]، در اين مثال تنها يك ترك و نه سه ترك، در طول تير پيش بيني شده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با بهره گیری از روش ماتریس انتقال و مدلسازی ترک با فنر پیچشی، به ردیابی چند ترک در طول تیر پرداختیم. معادلات مربوط برای دو شرط مرزی تیر با تکیه گاه ساده و همچنین تیر یکسرگیردار بدست آمدند. در این روش به دلیل استفاده از روش ماتریس انتقال، ابعاد ماتریس معادله مشخصه به مقدار زیادی کاهش می یابد. در این روش از آنجا که به هر المان یک شاخص عیب نسبت داده میشود درنتیجه تعداد ترکهای قابل ردیابی n، همواره از تعداد المانهای در برگیرنده تیر m کوچکتر است $n \le m$.

در مثال عددی، تیری با شرایط مرزی دو سرمفصل همراه با دو ترک بررسی گردید. در این مثال به دلیل تقارن شرایط مرزی تیر، هر یک از ترکها میتوانند نسبت به وسط تیر در دو موقعیت مختلف و به فاصله مساوی از وسط تیر قرار بگیرند. به همین دلیل در شکل ۳د مربوط به موقعیت ترک دوم این ترک میتواند در

هر یک از موقعیتهاي $\beta = 0.5 + 0.06 = 0.56$ یا $\beta = 0.5 - 0.06 = 0.44$ قرار داشته باشد. در مـورد تیـر یکسـر گیردار به دلیل عدم تقارن هندسه با مشکل کمتری برای ردیابی موقعیت ترک مواجه خواهیم بود.

با مقایسه روش حل ارائه شده و روش حل در مرجع[۸]، ميتوان نتیجه گرفت که روش ارائه شده داراي سرعت همگرايي بيشتر و همچنين دقت بالاتري است؛ تا آنجا که نتایج حاصل در مورد ردیابی موقعیت دو ترک دارای خطايي کمتر از 2% و در مورد پيش بيني اندازه ترکها نیز داراي خطاي کمتر از 1% مي باشد. حال آنکه میزان خطاي مرجع[۸]، در مورد رديابي موقعيت دو ترك کمتر از 2% و در مورد پيش بيني اندازه ترکها بیش از 13% است. در ضمن در مدل اولیه تیر, تنها دو ترك وجود دارد درحالیکه در روش حل ارائه شده توسط Patil و Maiti [۸]، وجود سه ترك پيش بيني شده و وجود يك ترك ريز در المان اول نيز پيش بینی شده است که با مدل واقعی مطابقت ندارد.

مراجع

[1] Sekhar, A. S., "Vibration Characteristics of a Cracked Rotor with Two Open Cracks," J. of Sound and Vibration, Vol. 223 (4), pp. 497–512, (1999).

[2] Ruotolo, R., and Surace, C., "Damage Assessment of Multiple Cracked Beams: Numerical Results and Experimental Validation," J. of Sound and Vibration, Vol. 206 (4), pp. 567–588, (1997.(

[3] Liang, R. Y., Hu, J., and Choy, F. K., "Quantitative NDE Technique for Assessing Damage in Beam Structures," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 118 (7), pp. 1468–1487, (1992 .(

[4] Hu, J., and Liang, R. Y., "An Integrated Approach to Detection of Cracks using Vibration Characteristics," J. Franklin Inst., Vol. 330 (5), pp. 841–853, (1993 .(
a. [۴]

[5] Choy, F. K., Liang, R., and Xu, P., "Fault Identification in Beams on Elastic Foundation," Comput. Geotech., Vol. 17 (2), pp. 157–176, (1995 .(
a. [۵]

[6] Zheng, D. Y., and Fan, S. C., "Natural Frequencies of a Non-Uniform Beam with Multiple Cracks via Modified Fourier Series," J. of Sound and Vibration, Vol. 242 (4), pp. 701–717, (2001 .(
a. [۶]

[7] Zheng, D. Y., and Fan, S. C., "Natural Frequency Changes of a Cracked Timoshenko Beam by Modified Fourier Series," Journal of Sound and Vibration, Vol. 246 (2), pp. 297–317, (2001 .(
a. [۷]

[8] Patil, D. P., and Maiti, S. K., "Detection of Multiple Cracks using Frequency Measurements," Engineering Fracture Mechanics, Vol. 70, pp. 1553-1572, (2003.(
a. [۸]

[9] Cawley, P., and Adams, R. D., "The Location of Defects in Structures from Measurements of Natural Frequencies," J. Strain Anal., Vol. 14 (2), pp. 49–57, (1979.(
a. [۹]

[10] Ostachowicz, W. M., and Krawczuk, M., "Analysis of the Effect of Cracks on the Natural Frequencies of a Cantilever Beam," J. Sound and Vibration, Vol. 150, pp. 191–201, (1991.(

i. [۱۰]

[11] Tada, H., Paris, P. C., and Irwin, G. R., “The Stress Analysis of Cracks Handbook,” Third ed., ASME Press, Professional Engineering Publishing, New York, (2000 .(

i. [۱۱]

[12] Atluri, S. N., “Computational Methods in the Mechanics of Fracture,” Amsterdam, North-Holland, (1986 .(

i. [۱۲]

[13] Anifantis, N., and Dimarogonas, A. D., “Stability of Columns with a Single Crack Subjected to Follower and Vertical Loads,” International Journal of Solids Structures, Vol. 19 (3), pp. 281–291, (1983 .(

i. [۱۳]

فهرست علائم انگليسي

A : مساحت مقطع تير، [m^2]

E : مدول الاستيسيته،[N/m^2]

I: ممان اينرسي سطحي مقطع تير، [m^4]

K : سفتي فنر پيچشي معادل ترك، [N.m/rad.]

L : طول تير، [m]

M : تعداد المانهاي تيرشس

q : تعداد فركانسهاي اندازه گيري شده تير تركدار و تير بدون ترك

s : پارامتر ميزان خرابي درتير

x : موقعيت ترك در طول تير،[m]

فهرست علائم يوناني

ρ : دانسيته ماده سازنده تير، [kg/m^3]

ω : فركانس تير،[rad/sec]

اعداد بدون بعد

$e=2\beta-1$ ، $x/L=\beta$: موقعيت بي بعد شده ترك در طول تير

$\overline{K} = KL / EI$: سفتي بي بعد شده فنر پيچشي معادل ترك

$\lambda=(\rho A\omega^2/EI)^{0.25}L$: فركانس بي بعد شده تير

پیوستها

محاسبه سختی فنر پیچشی معادل برای ترک یکطرفه

ترک باز یکطرفه در شکل (۶) نشان داده شده است.

میتوان‌کاهش انرژی الاستیک ذخیره شده در تیر را به علت وجود ترک در حالت تنش صفحه ای به صورت زیر نمایش داد:[۱۲]

$$\Delta U = \frac{1}{E}\int_0^A K_I{}^2 dA \qquad \text{(پ۱)}$$

که در این رابطه K_I ضریب تمرکز تنش، E مدول الاستیسیته ماده سازنده تیر و A سطح ترک می باشد.
ضریب‌تمرکزتنش به صورت زیر محاسبه میشود:[۱۲]

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\, g(a/h) \qquad \text{(پ۲)}$$

در رابطه فوق σ تنش درمحل ترک، a عمق ترک و h ارتفاع تیرمیباشد.
با پذیرفتن تابع تصحیح ارائه شده توسط Anifantis و Dimarogonas[۱۳]، به صورت زیر:

$$g(a/h) = 1.13 - 1.374(a/h) + 5.749(a/h)^2 - 4.464(a/h)^3 \qquad \text{(پ۳)}$$

و روابط: $\Delta U = M_i{}^2/2K_i$ و $\sigma = 6M/bh^2$ و $dA = bd\alpha$ و با کمی محاسبات و با تعریف $\eta = a/h$ میتوان نشان دادکه K_i یا سختی فنر پیچشی معادل ترک از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$K_i = Ebh^2/72\pi\, f(\eta)$$

که در این رابطه $f(\eta)$ به صورت زیر تعریف میشود:

$$f(\eta) = 0.6384(\eta)^2 - 1.035(\eta)^3 + 3.7201(\eta)^4 - 5.1774(\eta)^5 + 7.553(\eta)^6 - 7.3324(\eta)^7 + 2.4909(\eta)^8 \qquad \text{(پ۴)}$$

جدولها

جدول ۱- فرکانسهای طبیعی تیر دوسر مفصل دارای دو ترک

موقعیت و اندازه ترک				روش حل	فرکانس طبیعی تیر $rad/\sec.$				
β_1	a_1/h	β_2	a_2/h		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
تیر بدون ترک				حل کلاسیک	59.007	236.029	531.065	944.116	1475.182
0.25	0.07971	0.45	0.0986	مرجع [4]	58.625	235.142	528.096	942.515	1469.103
				روش این پژوهش	58.531	234.928	527.368	942.124	1467.620

$E = 2.8\times10^{10}\,N/m^2, \rho = 2350\,kg/m^3, L = 10m, h = 0.6m, B = 0.2m$

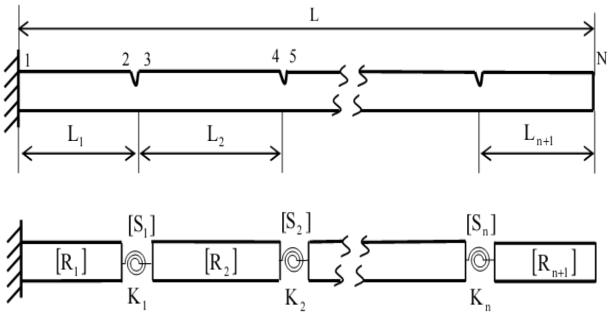
جدول ۲- مقایسه موقعیت واندازه ترک پیش بینی شده با مقدار واقعی برای تیر دوسرمفصل مثال اول

مقادیر واقعی			فرکانس طبیعی تیر $rad/\sec.$			مقدار پیش بینی شده				
موقعیت	a/h		ω_1	ω_2	ω_3	موقعیت	% خطا	سختی	a/h	%خطا
تیر بدون ترک			59.007	236.029	531.065					
ترک المان سوم										
0.25	0.0797		58.884	235.080	529.962	0.25	0.0	243.8	0.079	0.6
		مرجع [8]	58.915	235.314	530.233	0.25	0.0	320.7	0.069	13.4
ترک المان پنجم										
0.45	0.0986		58.658	235.854	528.625	0.444	1.3	161.5	0.098	0.5
		مرجع [8]	58.719	235.884	529.051	0.443	1.6	195.6	0.089	9.7

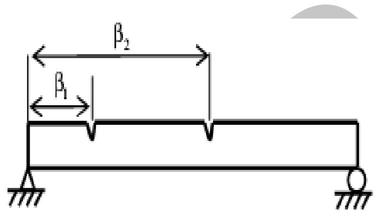
جدول ۳- مقایسه موقعیت واندازه ترک پیش بینی شده با مقدار واقعی برای تیر دوسرمفصل مثال دوم

مقادیر واقعی		فرکانس طبیعی تیر $rad/\sec.$			مقدار پیش بینی شده				
موقعیت	a/h	ω_1	ω_2	ω_3	موقعیت	% خطا	سختی	a/h	% خطا
تیر بدون ترک		59.007	236.029	531.065					
0.25	0.5	53.897	204.512	502.072	0.25	0.0	7.996	0.4194	16

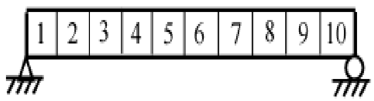
شکلها



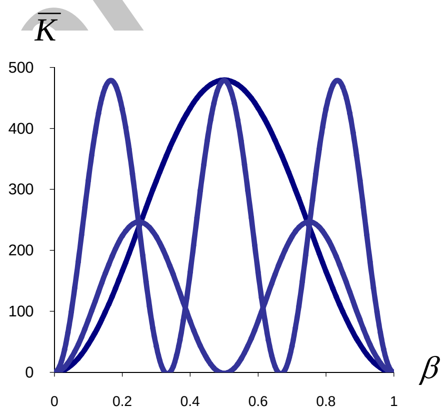
شکل ۱- مدلسازی ترک با فنر پیچشی



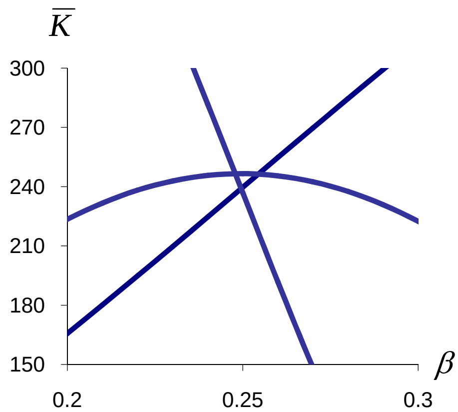
شکل ۲الف- تیر دو سر مفصل دارای دو ترک



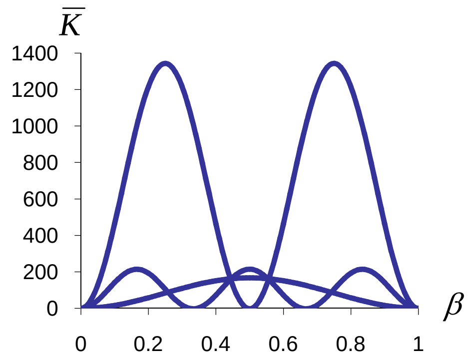
۲ب- نحوه المان بندی تیر برای ردیابی کردن



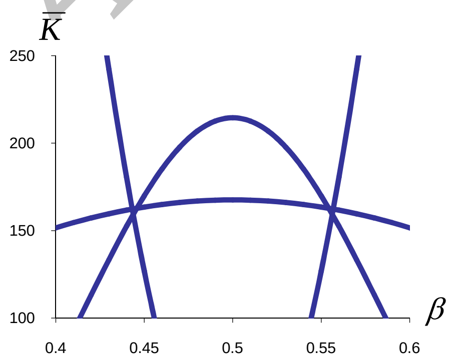
۳ الف- ترک در المان سوم $\beta = 0.25, a/h = 0.07971$



۳ب- بزرگنمايي منحني۳الف روی المان سوم

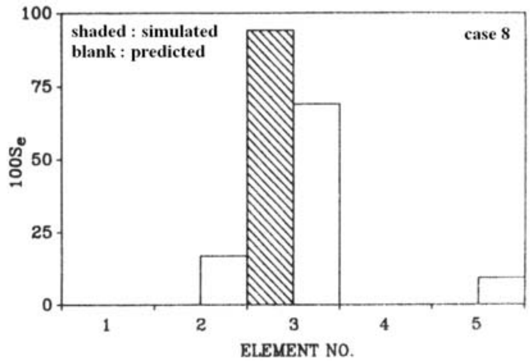


۳ ج- ترک در المان پنجم $\beta = 0.45, a/h = 0.0986$

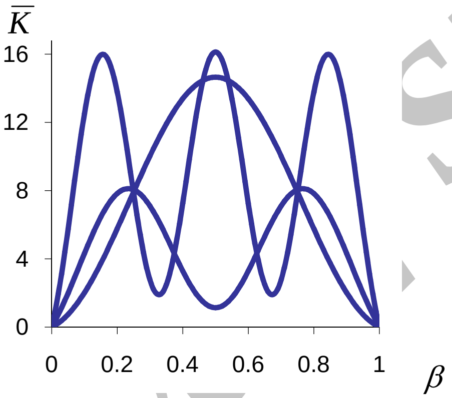


۳د- بزرگنمايي منحني۳ج روی المان پنجم وششم

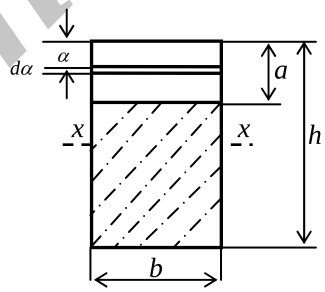
شکل ۳- منحنی سفتی فنر پیچشي برحسب موقعیت ترک در مثال اول



شکل ۴- نتايج مرجع[۳] در مورد پيش بيني موقعيت و اندازه ترك در مثال دوم



شکل ۵- منحنی سفتی فنر پيچشي برحسب موقعيت ترک در مثال دوم



شکل ۶- ترک یکطرفه

Abstract

The development of nondestructive techniques for assessment of the state of crack-induced damages in structural components is very important in recent years. This is particularly true when considering that large amounts of resources have been spent on repair and rehabilitation of structures, such as highway bridges, airport runways, water-treatment facilities, etc.
In this article a physical model using a massless rotational spring to represent the crack-induced local flexibility is adopted as a basis for developing a method for detection of multiple open cracks in a Euler-Bernoulli Beam. The beam divided into a number of segments and each of them is considered to be associated with a quantitative damage index. The procedure gives a linear relationship explicitly between the changes in natural frequencies of the beam and the damage parameters. This linear relation is formulated via an influence matrix H. The elements of the H matrix can be determined from the modal shapes of the undamaged beam. Damage index matrix S can be solved by the resulting system of linear algebraic equations. Usually in driven linear algebraic equations the number of unknowns is greater than the number of equations and pseudo-inverse technique is necessary to solve the system of equations. In this article the method of solving these equations promoted and therefore position and size of cracks can be predicted faster and sharper than other methods that mentioned in references [3] and [8]. After obtaining damage indexes, each is treated in turn to exactly pinpoint the crack location in the segment and determine its size. The forward, or natural frequency determination problems, are discussed. The numbers of segments into which the beam is virtually divided limits the maximum number of cracks that can be handled. Case studies (numerical) are presented to demonstrate the method effectiveness for two simultaneous cracks and one large crack. The differences between the simulated and predicted crack locations and sizes are less than 2% and 1% respectively.