محاسبة ضرايب شدت تنش در مواد هدفمند بـه روش MLPG

علي محي الدين[1]
كارشناس

عليرضا شفيعي[2]
استاديار

در اين مقاله از يكي از روشهاي بدون مش به نام MLPG[3] براي تحليل تـرک در صـفحة محدود از جنس مادة هدفمند[4] ايزوتروپيک و الاستيک خطي اسـتفاده شـده اسـت. توابـع شكل، با استفاده ازروش تقريب حداقل مربعات متحرک[5] بدست آمده اند. براي حل مسايل مكانيک شكست بدون نياز به افزايش حجم محاسبات، از روش اصـلاح تـابع وزن اسـتفاده شده است. ضرايب شدت تنش با استفاده از انتگرالهاي مستقل از مسير J كه بـراي مـواد ناهمگن فرمول بندي شده اند محاسبه مي شود. براي بررسي اعتبار روش عـددي حاضـر، ضريب شدت تنش مود اول در يک صفحه شامل ترک لبه اي با فرض تغيير نمايي مـدول يانگ در امتداد ترک محاسبه شده است. مقايسة پاسخ بدست آمده با پاسخ تحليلي، نشان دهندة دقت بالاي روش مورد استفاده است. تأثير شدت و راستاي گراديـان خـواص مـادة هدفمند بر ضرايب شدت تنش و نرخ رهايي انرژي در دو مثال عددي بررسي شـده اسـت. نتايج نشان ميدهند افزايش نرخ تغييرات مدول الاستيسيته در امتداد ترک موجب كاهش ضريب شدت تنش مود اول مي شود. همچنين افزايش نرخ تغييرات مدول الاستيسيته در امتداد عمود بر ترک، موجب افزايش نرخ رهايي انرژي و زاوية انحراف ترک مي شود.

واژه های راهنما: ترک، انتگرال J، ضريب شدت تنش، روشMLPG ، مادة هدفمند

۱- مقدمه

با توجه به نياز فناوري هاي نوين به ويژه در زمينـة صـنعت هوافضـا و ميكـرو الكترونيـک، مهندسـان مـواد، پيوسته در پي ابداع مواد جديد با خواص بهبـود يافتـه بـوده انـد. هـدف اصـلي تحقيقـات آنهـا توليـد انـواع كامپوزيت، سراميک، آلياژ و پوشش هاي همگن بود. ولـي ايـن مـواد قابليـت اسـتفاده در برخـي كاربردهـا و شرايط خاص به ويژه دماي بسيار بـالا را نداشـتند. زيـرا دمـاي بـالا موجـب خـوردگي و خـزش در فلـزات و آلياژهاي فلزي مي شود. از طرف ديگر مقاومت و چقرمگي پايين همـواره از معايـب سـراميک بـوده انـد. لـذا پوشش هاي ضد حرارت جديدي از جنس سراميک و كامپوزيت فلز- سراميک ابداع شدند تا خواص مطلـوب هر دو دسته از مواد فوق در كنار يكديگر را حفظ كنند. با اين حـال مشـكل اكسـايش و چقرمگـي پـايين در كامپوزيت ها هنوز وجود داشت و در محافظ هاي سراميكي نيز تنش هاي مانده و تـنش هـاي حرارتـي بـالا

[1] نويسنده مسئول، دانشجوي كارشناسي ارشد، دانشكده مهندسي مكانيک، دانشگاه يزد mohyeddin.ali@gmail.com
[2] استاديار، دانشكده مهندسي مكانيک، دانشگاه يزد

[3] Meshless Local Petrov Galerkin
[4] Functionally Graded Material
[5] Moving Least Squares Approximation

موجب ایجاد ترک و جدا شدن لاية محافظ مي شد[۱]. مفهوم مادة هدفمند براي اولـين بـار در سـال ۱۹۸۴ توسط کویزومي[1] و همکارانش به عنوان جایگزین سپرهاي حرارتـي مرسـوم، پیشـنهاد شـد. مـواد هدفمنـد، موادي هستند که از نظر ساختار و یا نسبت عناصر سازنده، به نحـوي درجـه بنـدي شـده انـد کـه خـواص و عملکرد مورد نیاز را ارائه دهند. در سپرهاي حرارتي هدفمند، درصد سرامیک از صفر درصد در محل اتصال تا صد درصد در سطح محافظ به طور پیوسته تغییر مي کند و درصد آن به نحوي تعیین مي شـود کـه خـواص ترمومکانیکي مورد نیاز را ارضا کند. با توجه به جدید بودن این مواد، تحقیـق روي آنهـا بـا هـدف طراحـي و ساخت ماده اي با گرادیان خواص مطلوب در دو بعـد تحلیلـي و تجربـي همچنـان ادامـه دارد. حـل مسـایل الاستیسیته برای مواد ناهمگن از جمله مواد هدفمند نیازمند روشهای پیشرفتة ریاضی است. اگرچه روشـهای تحلیلی، پاسخ با فرم بسته را نتیجه می دهند، محدود به هندسة ساده و حالـت خاصـی از نـاهمگنی (ماننـد تغییرات نمایی خواص[۲]) و بارگذاري هستند. لذا پاسخ بدست آمده، غالباً غیر کـاربردی بـوده و اسـتفاده از روش های عددی همچون روش اجزاي محدود را اجتناب ناپذیر مي کند[۱]. ولي روش اجزاي محـدود بـراي حل برخي مسایل، مناسب نیست. به طور مثال براي شـبیه سـازي رشـد تـرک نیـاز بـه مـش بنـدي ریـز و پي در پي در ناحیة اطراف ترک است که باعث افزایش مـدت زمـان تحلیـل و نیـز کـاهش دقـت محاسـبات مي شود. همچنین براي تحلیل سازه هاي ناهمگن نیاز به افزایش تعداد المان ها است. از طرف دیگر در حـل مسایل شامل تغییر شکل‌هاي بزرگ از دقت کافي برخوردار نیست. در اواخـر دهـة ۱۹۷۰ یـک روش عـددي جدید به نام روش بدون مش[2] ابداع شد که ویژگي اصلي آن، عدم نیاز به مش براي تعریف دامنـه و مرزهـاي مسأله بود. در روش بدون مش، محدودیت هاي روش اجزاي محدود که مربـوط بـه اسـتفاده از المـان بودنـد برطرف شدند. از این رو روش بدون مش، قابلیت بیشتري در حل مسایل مکانیک شکست بـه ویـژه شکسـت دینامیکي دارد. انواع مختلفي از روش‌هاي بدون مش در دو دهة اخیر ابداع شده‌اند که ویژگي مشترك تمامي آنها استفاده از يك مجموعه گرة مجزا براي تعریف دامنه و مرزهاي مسأله است. با این حـال، انتگـرال‌گیـري فرمول‌بندي ضعیف معادلة حاکم، نیاز به مش پس زمینه بر روي کل دامنه را اجتناب ناپذیر مي کند. آتلوري و ژو[3] [۳] در ۱۹۹۸ روش بدون مش MLPG را ارائه دادند که نه تنها براي درونیابي متغیرهاي میـدان بلکـه براي انتگرال گیري فرم ضعیف معادلات نیز نیاز به مش بندي دامنه ندارد. همچنین از روش حداقل مربعـات متحرک (MLS) براي تقریب میدان مجهول استفاده مي کند. در این مقالـه از روش MLPG بـراي محاسـبة ضرایب شدت تنش در یک صفحة ترکدار از جنس مادة هدفمند ایزوتروپیک و الاستیک خطي استفاده شـده است. به این منظور ابتدا فرمول بندي روش MLPG و الگوریتم تخمین MLS توضیح داده مي شـود. سـپس روند اصلاح فرمول بندي MLPG براي حل مسایل مکانیک شکست ارائه شده و روش محاسبة ضرایب شـدت تنش معرفي مي شود. در ادامه، توضیحات مختصري در مورد شکست مواد هدفمند داده مي شود. دقت روش عددي حاضر و تأثیر شدت گرادیان خواص مادة هدفمند بر ضرایب شدت تنش و نرخ رهایي انـرژي در قالـب چند مسأله بررسي مي شوند.

[1] Koizumi
[2] Meshfree method
[3] Atluri and Zhu

مقالة حاضر در مقايسه با تحقيقات گذشته در زمينة حل عددي مسايل مكانيک شكست مواد هدفمنـد در دو مورد، برتري دارد:

- با توجه به حجم بالاي محاسبات روش MLPG در مقايسه با روش اجزاي محدود، سعي شده است تـا براي تحليل مسايل مكانيک شكست از يک مدل ساده و دقيق استفاده شود. در ميان مدل هاي ابـداع شده، روش اصلاح تابع وزن كه پيش از اين براي يكـي ديگـر از الگـوريتم هـاي بـدون مـش بـه نـام EFG (Element Free Galerkin) پيشنهاد شده است مناسبترين روش به نظر مي رسد. در پـژوهش حاظر براي نخستين مرتبه از اين روش در الگوريتم MLPG استفاده شده است.
- براي مقايسة نتايج حل عددي مسايل مكانيک شكست مواد هدفمند، تا كنون از فرض تغيير خطي يـا نمايي مدول الاستيک استفاده شده است. در حالي كه در اين مقالـه ضـمن اسـتفاده از فـرض تغييـر نمايي براي بررسي دقت روش عددي، براي مدلسازي هرچه دقيقتر مواد هدفمند از روش موري-تاناكا استفاده شده است. همچنين براي اولين مرتبه، تأثير ميزان ضخامت لاية هدفمنـد بـر ضـريب شـدت تنش، نرخ رهايي انرژي و زاوية شروع رشد ترک بررسي شده است.

۲- روش MLPG

در اين بخش، الگوريتم MLS و فرمول بندي روشMLPG بر اساس مطالب ارائه شده در [۳] توضيح داده مي شوند.

۲-۱- الگوريتم MLS

در بيشتر روشهاي بدون مش از جمله MLPG براي تقريب تابع ميدان از الگوريتم MLS استفاده مي شود. روش MLS متغير ميدان $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ [۱] را به صورت زير تخمين مي زند:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{h}}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \mathbf{\Phi}_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I \qquad (۱)$$

$\mathbf{\Phi}_I$ ماتريس توابع شكل بوده و به شكل زير تعريف مي شود:

$$\mathbf{\Phi}_I = \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

φ_I تابع شكل گرة I نام دارد كه روي يک ناحية دلخواه حول گرة Iام به نام دامنة تأثير[۲] تعريف مي شود. N تعداد گره هايي است كه در دامنة تأثير نقطة $\mathbf{x}$ قرار دارند. در روش MLS مقدار φ_I در نقطة دلخواه $\mathbf{x}$ از رابطة زير بدست مي آيد:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{j}^{m} p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{x}))_{jI} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}_I \qquad (۳)$$

ماتريس هاي $\mathbf{A}$ و $\mathbf{D}_I$ به ترتيب عبارتند از:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I}^{N} W_I(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_I)\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_I)\,, \qquad \mathbf{D}_I(\mathbf{x}) = W_I(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \qquad (۴)$$

---

[1] Field variable
[2] Influence domain

$\mathbf{P}$ بردار كاملي از چندجمله‌اي‌هاي پايه تا درجة مشخص است. در حالت دو بعدي، بردار $\mathbf{P}$ از درجة m در نقطة دلخواه $\mathbf{x}$ به شكل زير تعريف مي شود:

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(x,y)=\left\{1,x,y,xy,x^2,y^2,\ldots,x^m,y^m\right\} \tag{۵}$$

براي جلوگيري از منفرد شدن ماتريس $\mathbf{A}$ حداقل تعداد گره هاي واقع در دامنة تأثير گرة I بايد برابر با تعداد چند جمله اي هاي پايه باشد. $W_I(\mathbf{x})$ تابع وزن گرة I است كه معمولاً روي يک ناحية دايره اي حول گرة I و به شعاع d_I به فرم رابطة (۶) تعريف مي شود.

$$W_I(\mathbf{x})=\begin{cases}1-6r_I^2+8r_I^3-3r_I^4 & \text{for} \quad r_I\le 1\\ 0 & \text{for} \quad r_I>1\end{cases} \tag{۶}$$

$r_I=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|/d_I$ فاصلة نرماليزه از نقطة $\mathbf{x}$ تا گرة $\mathbf{x}_I$ و d_I شعاع دامنة تأثير است.

۲-۲- فرمول بندي MLPG

براي مسائل الاستواستاتيك دو بعدي، معادلة تعادل و شرايط مرزي روي دامنة Ω كه با مرز Γ احاطه شده است به صورت معادلات (۷) تا (۹) بيان مي شود.

$$\nabla.\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=0 \tag{۷}$$

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}} \quad \text{on} \quad \Gamma_u \qquad \text{شرط مرزي اساسي} \tag{۸}$$

$$\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}=\bar{\mathbf{t}} \quad \text{on} \quad \Gamma_t \qquad \text{شرط مرزي طبيعي} \tag{۹}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ تانسور تنش و $\mathbf{b}$ بردار نيروهاي حجمي است. $\bar{\mathbf{u}}$ و $\bar{\mathbf{t}}$ به ترتيب بردارهاي جابجايي و تنش سطحي معلوم روي مرز اساسي Γ_{u} و مرز طبيعي Γ_{t} هستند. همچنين $\mathbf{n}$ بردار واحد عمود بر مرز Γ به سمت خارج است. فرم ضعيف محلي معادلة تعادل (۷) در غياب نيروهاي حجمي بر اساس روش باقيماندة وزني روي دامنة Ω_{Q} كه با مرز Γ_{Q} احاطه شده عبارت است از:

$$\int_{\Omega_{\mathrm{Q}}} \nabla.\boldsymbol{\sigma}\, W_I\, d\Omega=0 \tag{۱۰}$$

معادلة (۱۰) را مي توان با استفاده از قضية ديورژانس به شكل زير نوشت:

$$\int_{\Omega_{\mathrm{Q}}} \mathbf{V}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_{\mathrm{Q_u}}} \mathbf{W}_I\,\mathbf{t}\,\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma_{\mathrm{Q_t}}} \mathbf{W}_I\,\bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{۱۱}$$

كه در آن، $\boldsymbol{\sigma}$ و $\mathbf{t}$ به صورت زير تعريف مي شوند:

$$\boldsymbol{\sigma}=\left\{\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۱۲}$$

$$\mathbf{t}=\left\{t_x,t_y\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۱۳}$$

مرز دامنة تربيع Γ_{Q} مطابق شكل۱ سه قسمت دارد: Γ_{Qi} مرز دروني است، Γ_{Qu} مرزي است كه منطبق بر مرز اساسي مسأله است و Γ_{Qt} مرزي است كه با منطبق بر مرز طبيعي مسأله است. $\mathbf{W}_I$ ماتريس تابع وزن و $\mathbf{V}_I$ ماتريس مشتق توابع وزن است كه عبارتند از:

$$\mathbf{W}_I=\begin{bmatrix} W_I & 0\\ 0 & W_I\end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

$$\mathbf{V}_I = \begin{bmatrix} W_{I,x} & 0 \\ 0 & W_{I,y} \\ W_{I,y} & W_{I,x} \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

با استفاده از قانون هوك براي مادة الاستیک خطي نتیجه مي شود:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{c}\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \sum_j^N \boldsymbol{\Phi}_j \mathbf{u}_j = \mathbf{c}\sum_j^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \tag{۱۶}$$

که $\boldsymbol{\varepsilon}$ برابر است با:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۱۷}$$

ماتریس $\mathbf{c}$ براي مواد همگن ایزوتروپیک بصورت رابطة (۱۸) تعریف مي شود.

$$\mathbf{c} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}}\begin{bmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1\text{-}\nu^*)/2 \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

توابع مدول الاستیسیته E^* و نسبت پواسون ν^* در رابطة فوق، عبارتند از:

(۱۹) تنش صفحه ای $E^* = E, \quad \nu^* = \nu$

کرنش صفحه اي $E^* = \frac{E}{1\text{-}\nu^2}, \quad \nu^* = \frac{\nu}{1\text{-}\nu}$

بردار تنش سطحي نیز عبارت است از:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}\mathbf{c}\sum_j^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \tag{۲۰}$$

که $\mathbf{n}$ بردار واحد عمود بر مرز Γ_{Q} به سمت بیرون است:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

با جاگذاري معادلة (۱٦) در معادلة (۱۱) و استفاده از رابطة (۲۰) معادلات خطي گسستة سیستم براي گرة I ام تولید مي‌شود:

$$\int_{\Omega_{\mathrm{Q}}} \mathbf{V}_I^{\mathrm{T}} \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{\mathrm{Qu}}} \mathbf{w}_I \mathbf{n}\mathbf{c} \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \,\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_{\mathrm{Qt}}} \mathbf{w}_I \,\bar{\mathbf{t}} \,\mathrm{d}\Gamma \tag{۲۲}$$

معادلة (۲۲) را مي توان به فرم ماتریسي زیر بیان کرد:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{K}_{Ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_I \tag{۲۳}$$

که $\mathbf{K}_{Ij}$ و $\mathbf{f}_I$ از روابط زیر حاصل مي شوند:

$$\mathbf{K}_{Ij} = \int_{\Omega_{\mathrm{Q}}} \mathbf{V}_I^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_j \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{\mathrm{Qu}}} \mathbf{w}_I \mathbf{n}\mathbf{c}\mathbf{B}_j \,\mathrm{d}\Gamma \tag{۲۴}$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_{\mathrm{Qt}}} \mathbf{w}_I \,\bar{\mathbf{t}} \,\mathrm{d}\Gamma \tag{۲۵}$$

در تحقيق حاضر، بردار چند جمله اي هاي پايه از درجة ۲ در نظر گرفته شده است. همچنين براي تمامي گره ها از دامنة تأثير به شعاع ۳ استفاده شده است تا از وجود تعداد گره هاي کافي در دامنة تأثير، اطمينان حاصل شود. ناحية انتگرال گيري نيز براي همة گره ها به شکل دايره به شعاع واحد فرض شده است.

۳- استفاده از روش **MLPG** در حل مسايل مکانيک شکست الاستيک خطي

براي حل مسالة داراي ترک بايد تعداد گره ها را در اطراف نوک ترک افزايش داد که موجب افزايش حجم محاسبات مي شود. يکي از روشهاي رفع اين مشکل، اصلاح تابع وزن بر اساس شکل ميدان تنش و جابجايي اطراف ترک است. در اين روش که توسط دوفلات[1] [۴] ارائه شده است از توابع وزن زير به جاي تابع وزن رابطة (۶) استفاده شده است:

$$\begin{aligned} w_1(\mathbf{x}) &= \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) w_I(\mathbf{x}) \\ w_2(\mathbf{x}) &= \sqrt{r}\left[1+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] w_I(\mathbf{x}) \\ w_3(\mathbf{x}) &= \sqrt{r}\left[1-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] w_I(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{۲۶}$$

$w_I(\mathbf{x})$ تابع وزن تعريف شده در رابطة (٦) است. r فاصله از نوک ترک وθ زاويه نسبت به امتداد ترک در جهت پادساعتگرد ($\theta \in [-\pi,\pi]$) است. توابع وزن معرفی شده باعث منفرد شدن میدان تنش حاصل در نوک ترک می شوند. به علاوه توابع w_2 و w_3 در $\theta = \pm\pi$ دو مقداري بوده و ناپيوستگی تابع شکل و ميدان جابجايي در طول ترک را نتيجه می دهند. بنابراين تابع w_1 در نقاط جلويی ترک، تابع w_2 در نقاط بالايی ترک و تابع w_3 در نقاط پايينی ترک قابل استفاده هستند. همچنين با توجه نامحدود بودن مشتق توابع فوق در محل دقيق نوک ترک، از سه گره در جلو، بالا و پايين ترک و در نزديکی نوک ترک استفاده شده است. توابع شکل حاصل از هر يک از توابع وزن (۲۶) به ترتيب با ϕ_1،ϕ_2وϕ_3 نشان داده شده و فرم کلي آنها در شکل۲ رسم شده است.

۴- تعيين خواص ترمومکانيکي مواد هدفمند

با توجه به توزيع غير يکنواخت عناصر تشکيل دهندة مواد هدفمند نمي توان خـواص ثـابتي را بـراي آنهـا در نظر گرفت. بنابراين استفاده از اين مواد، نيازمند بررسي ارتباط خواص با نحوة توزيع فازها اسـت. غالبـاً بـرای توضيح تغيير پيوستة خواص در اين مواد، نسبت پواسون ثابت فرض شده و مدول الاستيسيته با توابع نمـايی (e^x) مطابق رابطة (۲۷) يا توانی ($\mathbf{x}^n$) تعريف می شود، زيرا اين توابع، دستيابی به پاسخ دقيق حل تحليلـي را آسان مي کنند. لذا نمي توان به طور دقيق، تغيير فيزيکی خواص ماده را نشان داد.

$$E = E_1 \exp(\beta V_2), \qquad \beta = \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \tag{۲۷}$$

که E_1 و E_2 به ترتيب، مدول الاستيسيتة فازهاي ۱و ۲ و V_2 جزء حجمي فاز ۲ است.

[1] Duflot

ساده ترین مدل براي تعیین خواص کامپوزیتها، قانون مخلوطها است که خواص مؤثر کامپوزیت دو فازي را به شکل زیر بیان مي کند:

$$P = P_1\ V_1 + P_2\ V_2 \tag{۲۸}$$

که P_1 و P_2 به ترتیب، خواص فازهاي ۱و ۲ و V_1 و V_2 به ترتیب، جزء حجمي فازهاي ۱و ۲ هستند. با توجه به اینکه توزیع فازهاي کامپوزیت در مقیاس میکرو، نامنظم است روش قانون مخلوطهـا از دقـت کـافي بـراي مدلسازي کامپوزیتها برخوردار نیست. روش موري- تاناکا[1] [۵] یکي از روشهاي میکرومکانیکی ساده و دقیـق براي تعیین خواص مواد ناهمگن است که غالباً براي مدلسازي مواد هدفمند مورد استفاده قرار مي گیـرد. در این روش فرض مي شود فاز ماتریس مادة هدفمند که با اندیس ۱ مشخص مي شود با دانه هـای کـروی فـاز دانه ای که با اندیس ۲ مشخص مي شود تقویت شده است. مدول بالک مؤثر و مدول برشی مؤثر طبـق روش موري- تاناکا از روابط (۲۹) بدست مي آیند.

$$\frac{\kappa-\kappa_1}{\kappa_2-\kappa_1}=\frac{V_2}{1+\left(1-V_2\right)\left(\kappa_2-\kappa_1\right)/\left(\kappa_1+4\mu_1/3\right)}$$

$$\frac{\mu-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}=\frac{V_2}{1+\left(1-V_2\right)\dfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+f_1}}\ ,\quad f_1=\mu_1\left(9\kappa_1+8\mu_1\right)/6\left(\kappa_1+2\mu_1\right) \tag{۲۹}$$

تمام مدل هاي میکرومکانیکی نیازمند یک فرض براي توزیع فازهاي تشکیل دهندة مـاده هسـتند. بـا توجه به شکل۳ با فرض یک صفحه به ضخامت h و گرادیان ماده از فاز فلزي در سطح بالايي به فاز سرامیکي در سطح پاییني در جهت x_2 مي توان نسبت حجمي فاز سرامیکي را به فرم تواني (۳۰) در نظر گرفت.

$$V_2=\left(0.5+\frac{x_2}{h}\right)^n ,\quad \left(-h/2\le x_2\le h/2,\quad 0\le n\le\infty\right) \tag{۳۰}$$

براي $n=0$، مادة هدفمند تنها شامل فاز سرامیکي و براي $n\rightarrow\infty$ تنها شامل فاز فلزي مـي شـود. شـکل۴ تغییر تابع نسبت حجمي را بر حسب ضخامت بدون بعد براي توان هاي مختلـف n نشـان مـي دهـد. نتـایج روش موري- تاناکا براي یک مادة هدفمند شامل نیکل و اکسید آلومینیوم با خـواص منـدرج در جـدول۱ در شکلهاي ۵ و۶ نشان داده شده است.

۵- شکست مواد هدفمند

۵-۱- تعیین ضرایب شدت تنش

با توجه به فرض پیوستگي خواص در مواد هدفمند در بخش قبل مي توان از روابط ترموالاستیسیتة محیطهاي پیوسته براي تحلیل این مواد استفاده کرد. لذا مدول الاستیسیته E و نسبت پواسون ν به فرم توابع کلی (۳۱) فرض می شود.

$$E=E\left(\mathbf{x}\right)$$
$$\nu=\nu\left(\mathbf{x}\right) \tag{۳۱}$$

[1] Mori-Tanaka

به طوری که $E(\mathbf{x}) \geq 0$ و $-1 < \nu(\mathbf{x}) \leq 1/2$ توابع پیوسته ، محدود و حداقل یک مرتبه مشتق پذیر تکه ای روی دامنهٔ مسأله می باشند. لذا معادلهٔ متشکله مادهٔ هدفمند به صورت معادلهٔ (۳۲) می باشد.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu^*(\mathbf{x})}{E^*(\mathbf{x})}\sigma_{ij} + \frac{\nu^*(\mathbf{x})}{E^*(\mathbf{x})}\sigma_{kk}\delta_{ij}\ , \qquad i,j=1,2,3 \tag{۳۲}$$

که $E^*(\mathbf{x})$ و $\nu^*(\mathbf{x})$ در حالت تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای از رابطهٔ (۱۹) بدست مي آیند.

تابع تنش ایری φ براي مواد ناهمگن تحت تغییر شکل دو بعدي الاستیک خطی در حالت تنش و یا کرنش صفحه ای و در غیاب نیروهای حجمی، معادلهٔ (۳۳) را ارضا می کند[۶].

$$\nabla^2\left(\frac{\nabla^2\varphi}{E^*(\mathbf{x})}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{1+\nu^*(\mathbf{x})}{E^*(\mathbf{x})}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{1+\nu^*(\mathbf{x})}{E^*(\mathbf{x})}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{1+\nu^*(\mathbf{x})}{E^*(\mathbf{x})}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \tag{۳۳}$$

جین و نودا[۱] [۷] نشان دادند در صورتي که $E(\mathbf{x})$ و $\nu(\mathbf{x})$ توابع پیوسته و مشتق پذیر تکه اي باشند مي توان از روابط مکانیک شکست الاستیک خطي براي بررسي شکست این مواد استفاده کرد. لذا پارامترهاي تعیین کنندهٔ میدان تنش اطراف نوک ترک، ضرایب شدت تنش مود اول و دوم هستند که به عنوان معیار شکست و تعیین جهت رشد ترک استفاده مي شوند. همچنین با حل معادلهٔ (۳۳) نشان دادند میدان تنش و جابجایی اطراف نوک ترک، مشابه مواد همگن است. از طرف دیگر تغییرات نسبت پواسون، تأثیر ناچیزي بر ضرایب شدت تنش داشته و فرض ثابت بودن آن موجب ساده سازي مسایل شکست مواد ناهمگن مي شود[۷].

معمولاً براي محاسبهٔ ضرایب شدت تنش از روش انتگرال J استفاده مي شود. با توجه به شکل۷ انتگرال مستقل از مسیر J براي مادهٔ الاستیک همگن به صورت (۳۴) تعریف مي شود[۸]:

$$J = \lim_{\Gamma_\varepsilon \to 0}\left\{\int_{\Gamma_0}\left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}\right)\mathrm{d}\Gamma\right\}\ , \qquad i,j=1,2 \tag{۳۴}$$

که n_j مؤلفهٔ j ام بردار واحد عمود بر مسیر بستهٔ Γ و به سمت خارج مسیر است.

انتگرال J در مورد مواد ناهمگن مستقل از مسیر نیست و لذا نمي توان از آن استفاده کرد[۶]. انتگرالهاي مستقل از مسیر J^* که در ادامه معرفي مي شوند شکل توسعه یافتهٔ انتگرال J براي مواد ناهمگن هستند که توسط ایسکن[۲] [۶] فرمول بندي شده اند و امکان محاسبهٔ ضرایب شدت تنش مودهاي اول و دوم را فراهم مي کنند. ایسکن با فرض عدم تنش سطحي بر روي ترک، انتگرال هاي مستقل از مسیر J^* را برای مودهای اول و دوم شکست به صورت (۳۵) و (۳۶) بدست آورد.

$$J_1^* = \lim_{\Gamma_\varepsilon \to 0}\left\{\int_{\Gamma}\left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}\right)\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_0}\left(W_{,1}\right)_{\text{صریح}}\mathrm{d}\Omega\right\} \qquad (k=1)\ \text{مود اول} \tag{۳۵}$$

$$J_2^* = \lim_{\Gamma_\varepsilon \to 0}\left\{\int_{\Gamma}\left(Wn_2 - \sigma_{ij}n_j u_{i,2}\right)\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_0}\left(W_{,2}\right)_{\text{صریح}}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_c}\left[W^+ - W^-\right]n_2^+\mathrm{d}\Gamma\right. \qquad (k=2)\ \text{مود دوم} \tag{۳۶}$$

که W چگالی انرژی کرنشی مواد الاستیک در حالت دو بعدی بوده و برای مواد الاستیک خطی همگن با توجه به (۱۲)، (۱۷) و (۱۸) به صورت زیر بدست می آید.

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{۳۷}$$

---

[1] Jin and Noda
[2] Eischen

مشتق صریح تابع چگالی انرژی کرنشی نسبت به مختصات محلی نوک ترک عبارت است از:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_{\text{صریح}} = \frac{\partial}{\partial x_k} W\left(\varepsilon_{ij}, x_i\right) \;, \quad i, j = 1,2 \,\Big|_{\varepsilon_{ij}=\text{ثابت}} \tag{۳۸}$$

که x_i مختصات محلي تعريف شده در شكل۷ است. ايسكن با حل معادلة (۳۳) ميدان تنش و جابجايي اطراف ترک در مادة ناهمگن را مشابه مادة همگن بدست آورد. سپس با جاگذاري ميدان تنش و جابجايي در (۳۵) و (۳۶) روابط (۳۹) و (۴۰) را بين انتگرالهاي J_k^* و ضرایب شدت تنش مودهای اول و دوم بدست آورد.

$$J_1^* = \frac{K_{\text{I}}^2 + K_{\text{II}}^2}{E_{\text{tip}}^*} \tag{۳۹}$$

$$J_2^* = \frac{-2K_{\text{I}} K_{\text{II}}}{E_{\text{tip}}^*} \tag{۴۰}$$

که E_{tip}^* مقدار مدول یانگ در محل نوک ترک بوده و از رابطة (۱۹) قابل محاسبه است.

۳-۵- معیار شکست مواد هدفمند

با توجه به شباهت ميدان تنش اطراف نوک ترک در مواد همگن و ناهمگن، ژو و آسارو [۹] مفهوم همگن سازي محلي در نزديک نوک ترک را تعريف كردند. لذا استفاده از معيارهاي شكست كه براي مواد همگن ارائه شده اند در مورد مواد هدفمند بلامانع است. در اين تحقيق از معيار نرخ رهايي انرژي ماكزيمم كه توسط هاسين[۱] [۱۰] براي مواد همگن ارائه شده استفاده شده است. طبق اين معيار، ترک در جهتي رشد مي كند كه مقدار نرخ رهايي انرژي داراي بيشترين مقدار است و رشد ترک زماني آغاز مي شود كه اين مقدار به حد بحراني برسد. نرخ رهايي انرژي در حالت مود تركيبي بر اساس حل هاسين به صورت معادلة (۴۱) بدست آمده است.

$$G(\theta) = \frac{4}{E_{\text{tip}}^*}\left(\frac{1}{3+\cos(\theta)}\right)^2 \left(\frac{1-\pi/\theta}{1+\pi/\theta}\right)^{\theta/\pi} \Big[\left(1+3\cos(\theta)\right)K_{\text{I}}^2 + 8\sin(\theta)\cos(\theta)K_{\text{I}}K_{\text{II}} + \left(9-5\cos(\theta)\right)K_{\text{II}}^2\Big] \tag{٤١}$$

زاویة رشد ترک طبق معيار نرخ رهايي انرژي ماكزيمم از (۴۲) بدست مي آيد:

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \;, \;\; \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} < 0 \;\Rightarrow \theta = \theta_0 \tag{۴۲}$$

پس از تعيين زاوية رشد ترک، معادلة زير شرط رشد ترک را ارضاء مي كند.

$$G\left(\theta_0\right) = G_{\text{cr}}\left(\mathbf{x}_{\text{tip}}\right) \tag{۴۳}$$

٦- مثال هاي عددي

٦-١- نوار شامل ترک لبه اي تحت تنش كششي يكنواخت

[1] Hussain

یک صفحة مستطيلي به عرض W و طول L با نسبت طول به عرض۴ تحت تنش کششی یکنواخت σ_0 در دو انتها و شامل یک ترک لبه ای افقي به طول a مطابق شکل۸ در نظر گرفته مي شود. به منظور تعيين ضريب شدت تنش در نوار ترکدار، نسبت طول به عرض صفحه، به اندازة کـافي بـزرگ در نظـر گرفتـه شـده اسـت. صفحه با استفاده از ۱۱ گره در جهت عرض و ۴۱ گره در جهت طول مدل شـده اسـت. از آنجـا کـه راسـتاي تغيير خواص موازي با امتداد ترک است مسـأله داراي تقـارن و تحـت مـود اول شکسـت مـي باشـد. نسـبت پواسون، ثابت و تغيير افقي مدول الاستيسيته مطابق رابطة (۲۷) فرض شده و مسـأله تحـت شـرايط کـرنش صفحه اي حل شده است. ضريب شدت تنش مود اول نرماليزه با مقدار تحليلي [۲] و [۱۱] به ازاي طولهـاي مختلف ترک و نسبت هاي E_2 / E_1 متفاوت در جدول۲ مقايسه شده است. با توجه به نتـايج، مقـدار خطـاي حداکثر برابر با ۱/۷درصد است. همچنين افزايش شدت تغييـرات مـدول الاستيسـيته نسـبت بـه x موجـب کاهش ضريب شدت تنش مي شود و برعکس.

۶-۲- بررسي تأثير گراديان خواص موازي با ترک بر ضريب شدت تنش

یک صفحة مستطيلي با ابعاد، شرايط مرزي و گره بندي مشابه مثال قبل، مطابق شکل۸۷ در نظر گرفته مي شود. مادة هدفمند از دو فاز اکسيد آلومينيوم و نيکل با مشخصات مندرج در جدول۱ تشکيل شده است. براي بررسي تأثير گراديان خواص بر ضريب شدت تنش مود اول، نسبت حجمي فازهاي تشکيل دهنده مطابق رابطة (۳۰) در نظر گرفته شده است. براي محاسبة مدول الاستيسيته و نسبت پواسون در هر نقطه از روش موري تاناکا استفاده شده است. شکل۹ ضريب شدت تنش مود اول نرماليزه را بر حسب طول ترک براي مقادير مختلف n نشان مي دهد.

۶-۳- بررسي تأثير گراديان خواص عمود بر ترک بر ضريب شدت تنش

یک صفحة مستطيلي با ابعاد، شرايط مرزي و گره بندي مشابه مثال قبل، در نظر گرفته مي شود. جنس صفحه مشابه مثال قبل است، با اين تفاوت که خواص مکانيکي در جهت عمود بر ترک تغيير مي کنند. مدول الاستيسيته و نسبت پواسون در هر نقطه با استفاده از روش موري تاناکا محاسبه مي شوند. مطابق شکل۱۰ موقعيت ناحية دو فازي در وسط صفحه فرض شده است ($\alpha + \beta = L$). به دليل عدم تقارن مسأله، صفحه تحت شکست مود ترکيبي قرار دارد. بنابراين جهت بررسي شکست مادة هدفمند، از معيار نرخ رهايي انرژي ماکزيمم استفاده مي شود. شکل هاي۱۱ تا ۱۵ نرخ رهايي انرژي را براي طولهاي مختلف ترک بر اساس نحوة توزيع فازها نشان مي دهند. همچنين زاوية اولية رشد ترک با طولهاي مختلف در شکل هاي ۱۶ تا ۲۰ نشان داده شده است.

۷- نتيجه گيري

در اين مقاله، روش MLPG براي تحليل ترک در مادة هدفمند فرمول بندي شد و تأثير گراديان خواص بر ضريب شدت تنش و نرخ رهايي انرژي مورد بررسي قرار گرفت. همانطور که در مثال ۱-۶ نشان داده شد با استفاده از روش MLPG بدون نياز به مش بندي ريز در اطراف ترک، مقدار ضريب شدت تنش با دقت بالايي

قابل محاسبه است. پاسخ بدست آمده نشان مي دهد افزايش نرخ تغييرات مدول الاستيسيته موجب كاهش ضريب شدت تنش مي شود، اين امر به ويژه در مورد ترک هاي بزرگتر اهميت بيشتري مي يابد و مي تواند در طراحي مواد هدفمند مورد استفاده قرار گيرد.

در مثال ۲-۶ گراديان ماده، به فرم تواني و موازي با امتداد ترک فرض شده است. با توجه به شكل ۵ به دليل نزديكي شيب منحني هاي مدول الاستيسيته به يكديگر در محدودة $0.2 \le x / L \le 0.6$ مقدار n تأثير قابل توجهي بر ضريب شدت تنش ندارد. لذا مي توان ضريب شدت تنش را با استفاده از پاسخ تحليلي مثال ۱-۶ به ازاي نسبت $E_2 / E_1 = 375 / 207$ با دقت قابل قبول محاسبه كرد.

مثال ۳-۶ داراي هندسه و خواص مشابه مثال قبل است. با اين تفاوت كه گراديان خواص عمود بر امتداد ترک فرض شده است. همانطور كه در شكل هاي۱۱ تا ۱۵ مشاهده مي شود با كاهش ضخامت ناحية دوفازي و در نتيجه افزايش شدت گراديان خواص، نرخ رهايي انرژي ماكزيمم افزايش مي يابد. شكل هاي ۱۶ تا ۲۰ نيز نشان دهندة افزايش زاوية اولية رشد ترک هستند.

منابع و مراجع

[1] Ching, H.K., and Yen, S.C., "Meshless Local Petrov-Galerkin Analysis for 2D Functionnally Graded Elastic Solids under Mechanical and Thermal Loads", Composites: Part B, Vol. 36, pp. 223-240, (2005).

[2] Erdogan F., "Fracture Mechanics of Functionally Graded Materials", Composites Eng., Vol. 5, pp. 753-770, (1995).

[3] Atluri, S.N., and Zhu, T.L., "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics", Comp. Mech., No. 22, pp. 117-127, (1998).

[4] Duflot, M., "A Meshless Method with Enriched Weight Functions for Three-dimensional Crack Propagation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 65, pp. 1970–2006, (2006).

[5] Mori, T., and Tanaka, K., "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", Acta Metallurgica, Vol. 21, pp. 571–574, (1973).

[6] Eischen, J.W., "Fracture of Nonhomogeneous Materials", Int. J. Fract. Vol. 34, pp. 3–22, (1987).

[7] Jin, Z.H., and Noda, N., "Crack-tip Singular Fields in Nonhomogeneous Materials", J. Appl. Mech. Vol. 61, pp. 738-740, (1994).

[8] Rice, J.R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", J. Appl. Mech. Vol. 35, pp. 379–386, (1968).

[9] Gu, P., and Asaro, R.J., "Crack Deflection in Functionally Graded Materials", Int. J. Solids. Struct., Vol. 34, pp. 3085-3098, (1997).

[10] Hussain, M.A., Pu, S.L., and Underwood, J., "Strain Energy Release Rate for a Crack under Combined Mode I and Mode II, "Fracture Analysis, ASTM STP 560, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 2-28, (1974).

[11] Anderson, T.L., "*Fracture Mechanics: Fundamentals and Application*", CRC Press, (1995).

فهرست نمادهاي انگليسي

$\mathbf{u}_I$: پارامتر گره اي در گرهٔ Iام

$\mathbf{u}^{\mathrm{h}}$: متغير ميدان آزمايشي

w_I : تابع وزن گرهٔ Iام

$\mathbf{f}_I$: بردار نيروي گرهٔ Iام

$\mathbf{c}$: ماتريس نرمي

$\mathbf{K}_I$: ماتريس سختي گرهٔ Iام

W : چگالی انرژی کرنشی

K_{I} : ضريب شدت تنش مود اول

K_{II} : ضريب شدت تنش مود دوم

G : نرخ رهايي انرژي

$G_{\mathrm{cr}}\left(\mathbf{x}_{\mathrm{tip}}\right)$: حد بحراني نرخ رهايي انرژي در محل نوک ترک

فهرست نمادهاي يوناني

φ : تابع تنش ایری

ϕ_I : تابع شکل گرهٔ Iام

μ : مدول برشي

κ : مدول بالک

∇^2 : عملگر دو بعدی لاپلاس

θ_0 : زاويهٔ شروع رشد ترک

جدولها

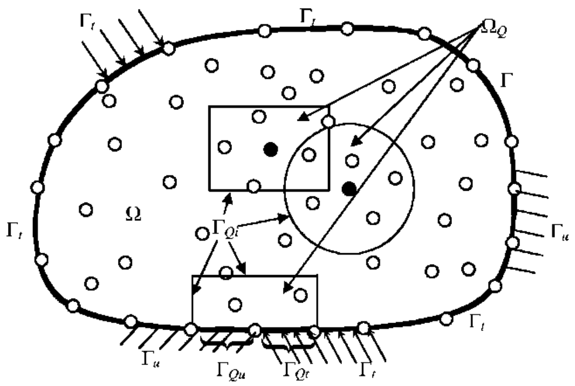
جدول۱- خواص مكانيكي اكسيد آلومينيوم و نيكل

ماده	مدول یانگ E (GPa)	نسبت پواسون ν	چقرمگي شكست K_{Ic} $(\mathrm{GPa}\sqrt{\mathrm{m}})$
اكسيد آلومينيوم	360	0.2	4
نيكل	200	0.33	100

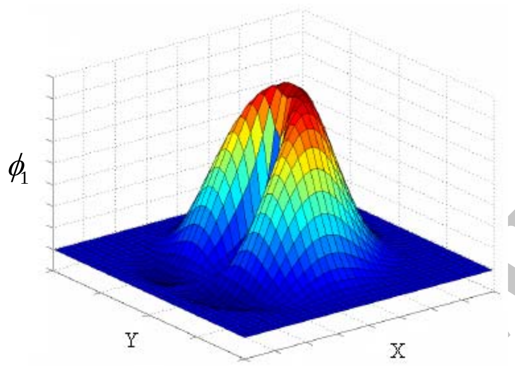
جدول۲- ضریب شدت تنش نرماليزة مود اول ترک لبه اي در نوار تحت تنش كششي يكنواخت

روش	E_2/E_1	$\frac{K_I}{\sigma_0\sqrt{\pi a}}$				
		$a/w=0.5$	$a/w=0.4$	$a/w=0.3$	$a/w=0.2$	$a/w=0.6$
حاضر	0.1	1.3034	1.8522	2.5534	3.5576	5.1205
	0.2	1.3880	1.8290	2.4339	3.3333	4.7729
	1	1.3742	1.6688	2.0894	2.8087	4.0482
	5	1.1390	1.3818	1.7676	2.3878	3.4836
	10	1.0192	1.2507	1.6172	2.2097	3.2702
تحليلي [۲و۱۱]	0.1	1.2965	1.8581	2.5699	3.5701	5.1880
	0.2	1.3956	1.8395	2.4436	3.3266	4.7614
	1	1.3734	1.6628	2.1066	2.8298	4.0302
	5	1.1318	1.3697	1.7483	2.3656	3.4454
	10	1.0019	1.2291	1.5884	2.1762	3.2124

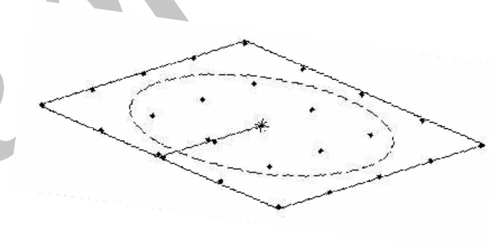
شکلها



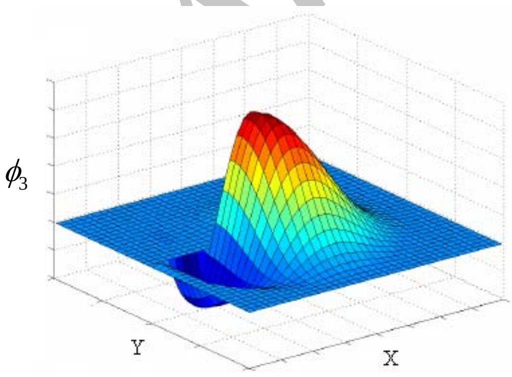
شکل ۱- دامنه و مرزها در روش MLPG : Ω دامنة مسأله، Γ_u مرز اساسي، Γ_t مرز طبيعي، Ω_Q دامنة تربيع و محدود به مرز Γ_Q، Γ_{Qu} قسمتي از مرز اساسي كه با مرز Ω_Q تلاقي دارد، Γ_{Qt} قسمتي از مرز طبيعي كه با دامنة Ω_Q تلاقي دارد.



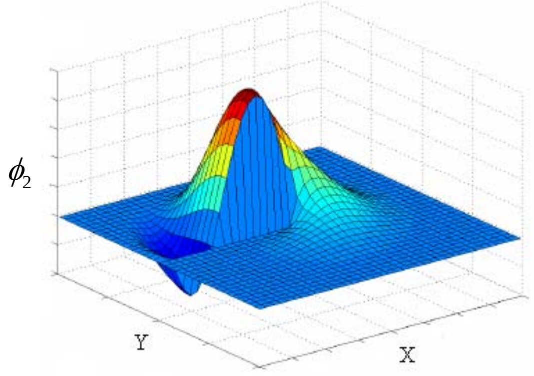
(ب)



(الف)

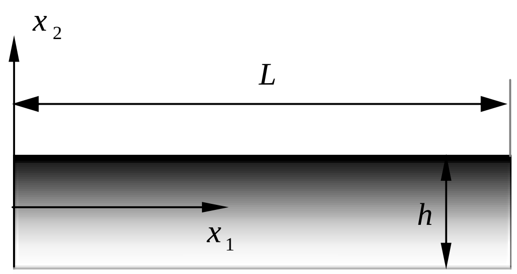


(ت)

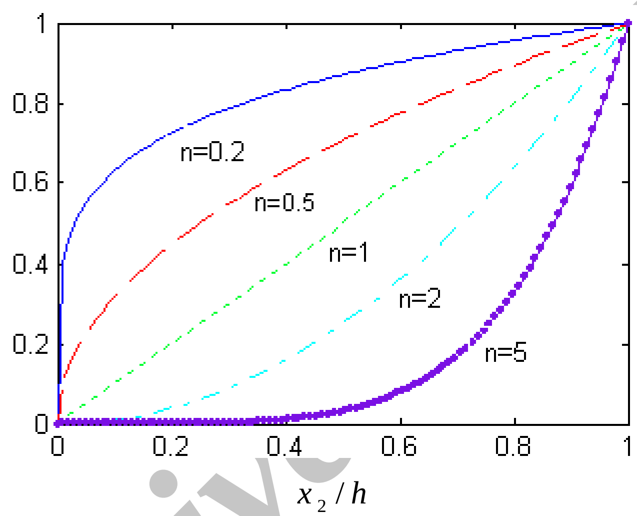


(پ)

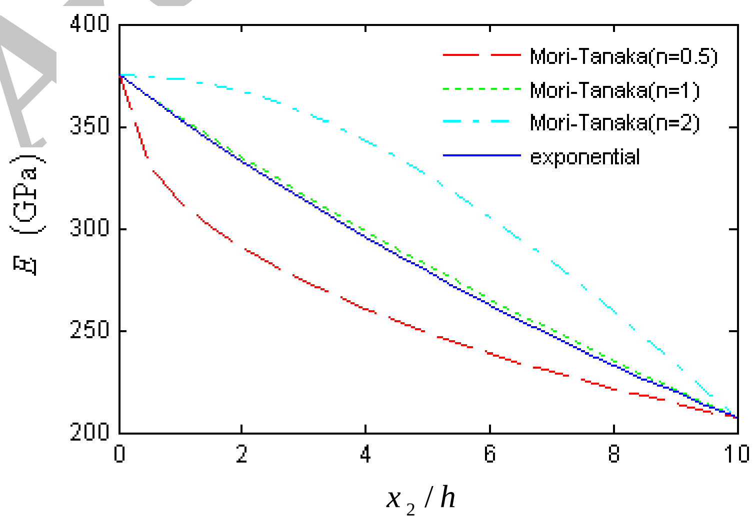
شکل ۲- توابع شکل بدست آمده از توابع وزن رابطة (۲٦): (الف) صفحة تركدار، ب) Φ_1، پ) Φ_2 ، ت) Φ_3



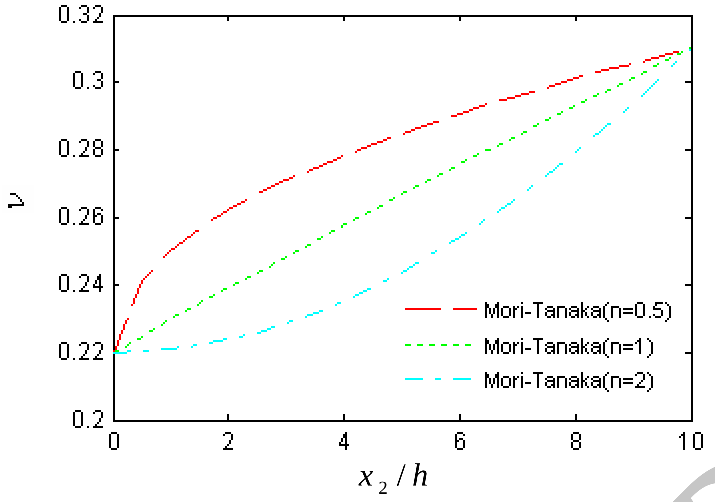
شكل٣- مدل دو بعدي مادة هدفمند



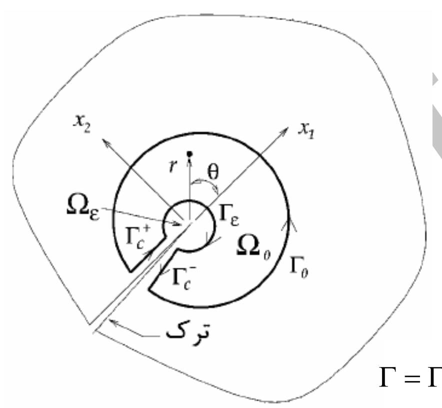
شكل٤- تغيير نسبت حجمي فاز سراميكي بر حسب ضخامت بدون بعد براي مقادير مختلف n



شكل٥- تغيير مدول الاستيسيتة بدست آمده از روش موري- تاناكا و تابع نمايي (٢٧) بر حسب ضخامت بدون بعد

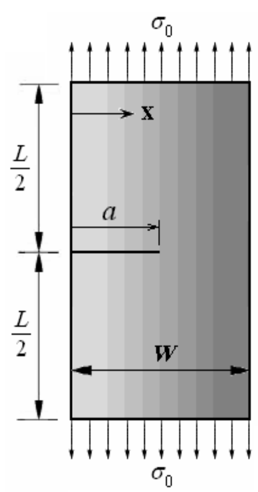


شکل٦- تغییر نسبت پواسون بدست آمده از روش موري- تاناکا بر حسب ضخامت بدون بعد

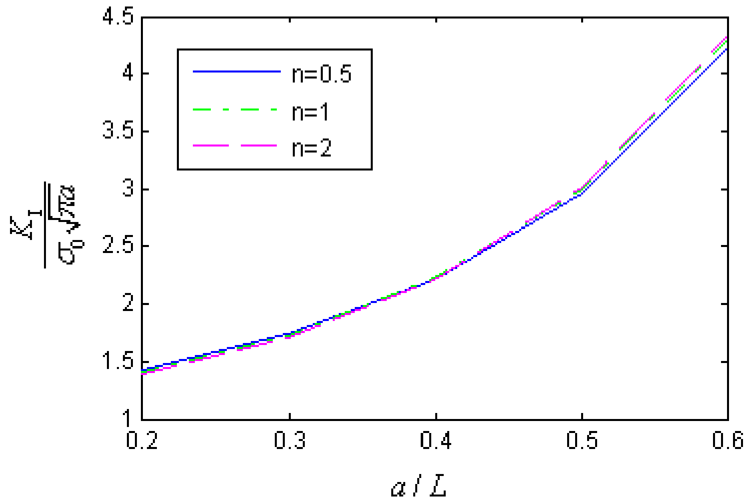


$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_c^+ + \Gamma_\varepsilon + \Gamma_c^-$$
$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_\varepsilon$$

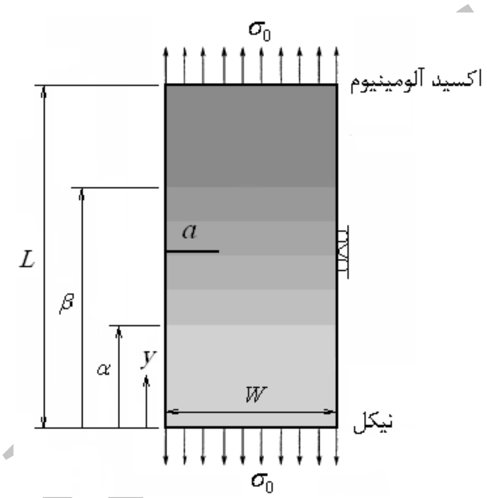
شکل ٧- الگوي استفاده از روش انتگرال J



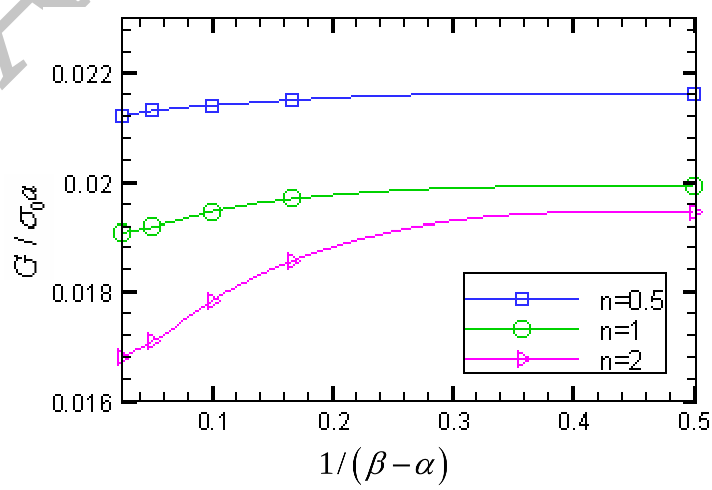
شکل ٨- هندسه و بارگذاري نوار از جنس مادة هدفمند با گراديان موازي با ترک لبه اي



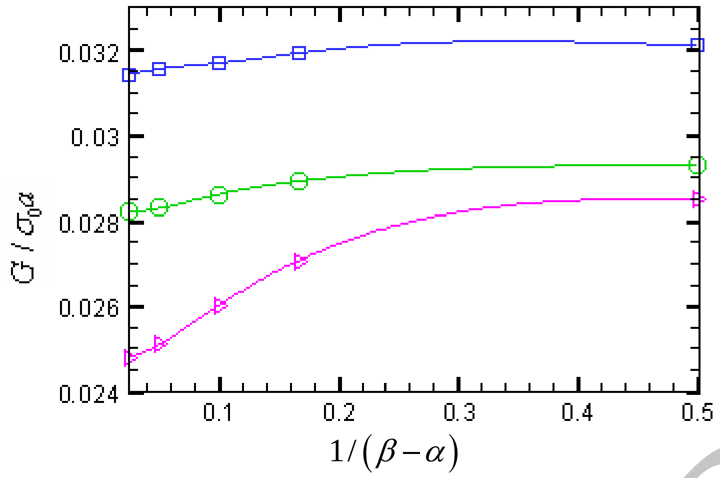
شکل ۹- ضريب شدت تنش نرماليزة مود اول ترک لبه اي بر اساس روش موري تاناکا براي مقادير مختلف n



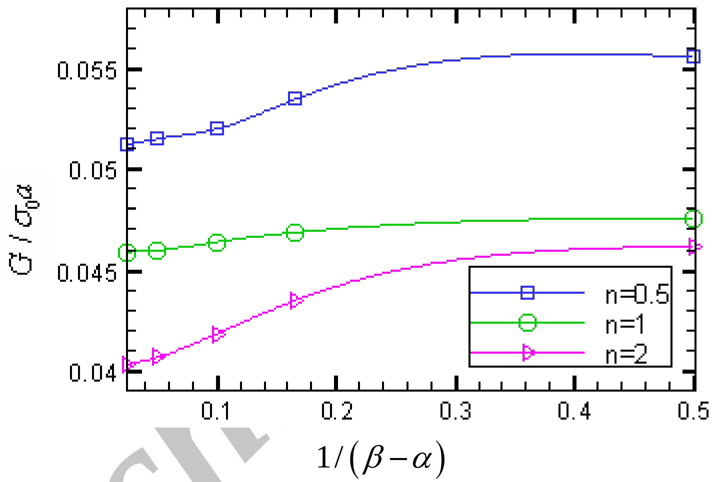
شکل ۱۰- هندسه و بارگذاري نوار هدفمند با گراديان عمود بر ترک لبه اي



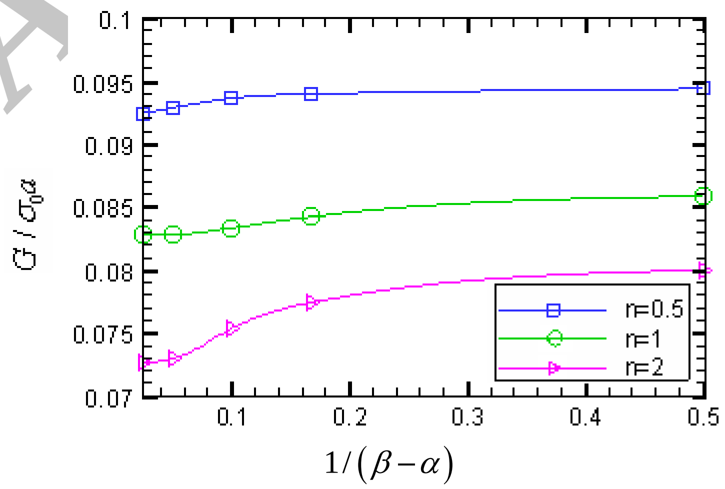
شکل ۱۱- نرخ رهايي انرژي نرماليزة ترک لبه اي به طول $a = 0.2\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



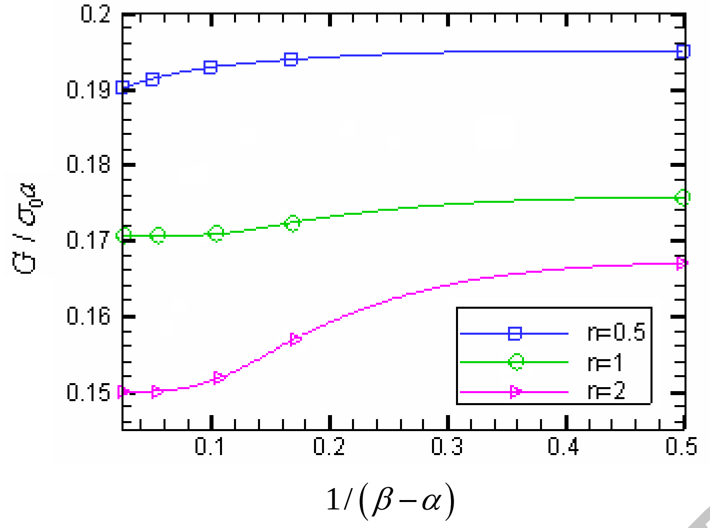
شکل ۱۲- نرخ رهایي انرژي نرماليزة ترک لبه اي به طول $a = 0.3\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



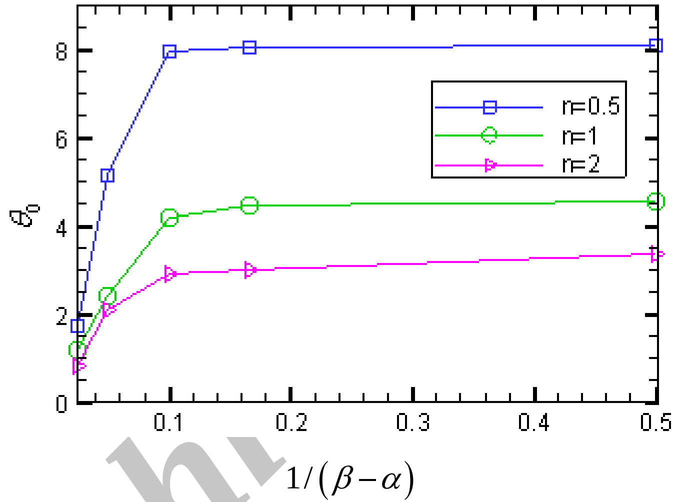
شکل ۱۳- نرخ رهایي انرژي نرماليزة ترک لبه اي به طول $a = 0.4\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



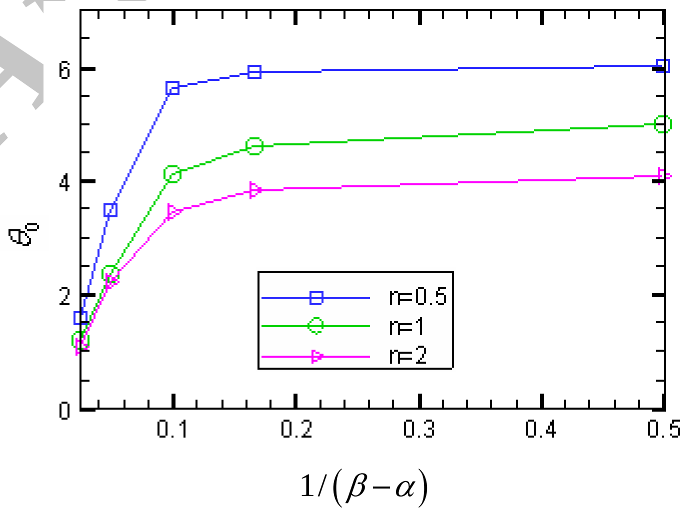
شکل ١٤- نرخ رهایي انرژي نرماليزة ترک لبه اي به طول $a = 0.5\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



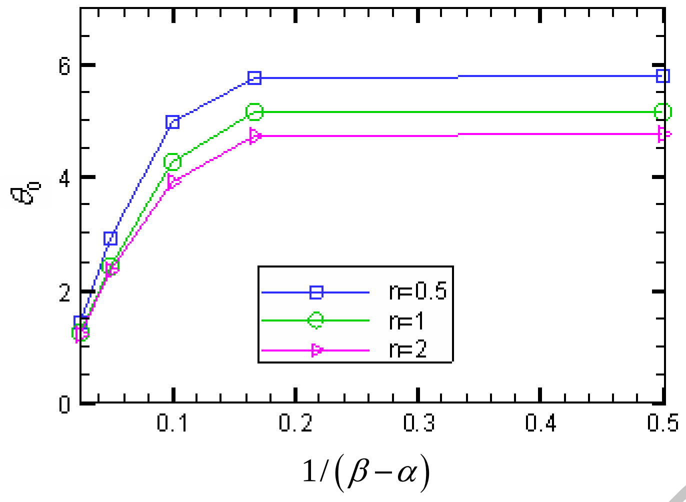
شکل ١٥- نرخ رهايي انرژي نرماليزة ترک لبه اي به طول $a = 0.6\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



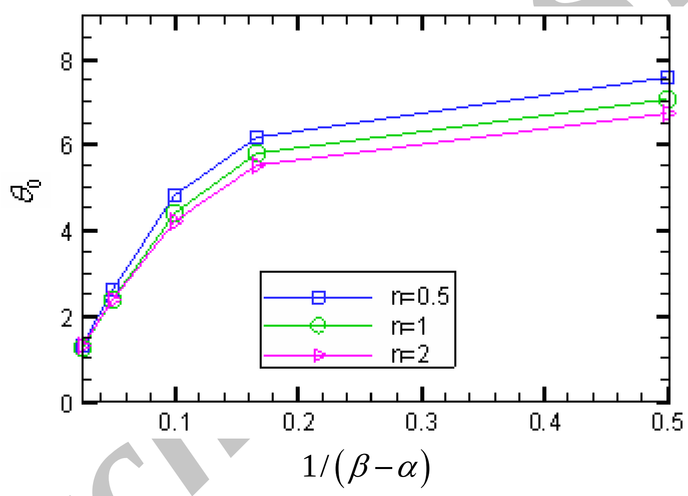
شکل ١٦- زاوية اولية رشد ترک لبه اي به طول $a = 0.2\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



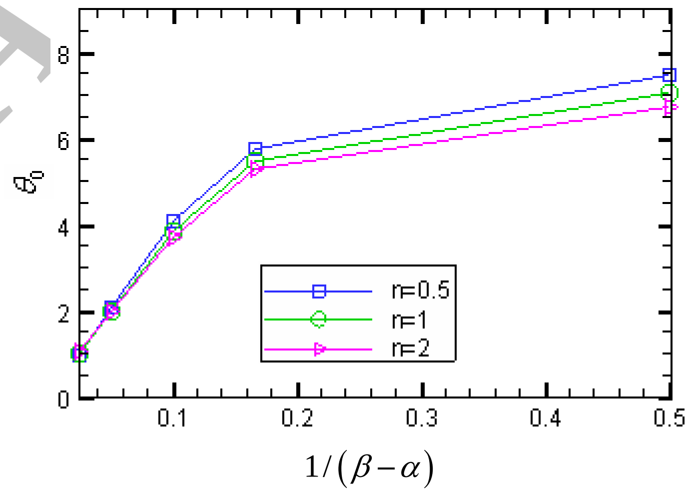
شکل ١٧- زاوية اولية رشد ترک لبه اي به طول $a = 0.3\ W$ بر حسب شدت گراديان براي مقادير مختلف n



شکل ۱۸- زاویة اولیة رشد ترک لبه اي به طول $a = 0.4\ W$ بر حسب شدت گرادیان براي مقادیر مختلف n



شکل ۱۹- زاویة اولیة رشد ترک لبه اي به طول $a = 0.5\ W$ بر حسب شدت گرادیان براي مقادیر مختلف n



شکل ۲۰- زاویة اولیة رشد ترک لبه اي به طول $a = 0.6\ W$ بر حسب شدت گرادیان براي مقادیر مختلف n

Abstract

This paper presents crack analysis in a finite Functionally Graded plate using one of mesh-free methods called the Meshless Local Petrove-Galerkin (MLPG). Shape functions are obtained by Moving Least Squares approximation method. In order to solve fracture problems without need to any additional nodes, the weight function is modified. The path independent *J* integrals developed for non-homogeneous materials are used to calculate the stress intensity factors (SIFs) in mixed-mode problems. Assuming that the crack is parallel to the material gradient, an example including an edge-cracked plate is presented to evaluate the accuracy of numerical method. A good agreement is obtained between the results of the presented method and the reference solutions. Then the effect of direction and intensity of material gradient on SIFs and energy release rate is considered by solving some examples. The results reveal the inverse relation between the intensity of elastic modulus gradient and SIF in mode-I fracture condition. Also the energy release rate and the crack initiation angle increase with increasing the intensity of compliancy gradient normal to crack direction.