

## کمینه کردن تولید آنتروپی در یک تیر تحت بارگذاری ترکیبی محوری - خمشی و متناوب در تئوری ترموالاستیسیته

در این مقاله از روش کمینه کردن تولید آنتروپی (EGM) در بارگذاریهای ترکیبی محوری و خمشی و بارگذاری متناوب یک تیر همگن با ضخامت  $h$  و طول  $L$  استفاده شده است. این تیر در دمای یکنواخت اولیه و تحت شرایط مرزی و شرایط اولیه مختلف قرار دارد. پایین بودن بارگذاری و یا بالا بودن ضریب هدایت گرمایی، پارامتر مؤثر در کاهش تولید آنتروپی می باشد همچنین در بارگذاری ترکیبی متناوب نشان می دهیم که به ازای بارگذاری خاصی، میزان تولید آنتروپی ماکزیمم می شود که جهت کمینه کردن آن بایستی بارگذاری کوچکتر و یا بزرگتر از مقدار ماکزیمم باشد. در این پژوهش نقش پارامترهای هندسی  $h$  و  $L$  را در کمینه کردن تولید آنتروپی مورد بحث و بررسی قرار می دهیم.

مهدی فتحی پور<sup>۱</sup>  
کارشناس ارشد

خسرو جعفر پور<sup>۲</sup>  
دانشیار

مجتبی محزون<sup>۳</sup>  
دانشیار

واژه های راهنما: کمینه کردن تولید آنتروپی - ترموالاستیسیته - بارگذاری ترکیبی - بارگذاری متناوب - مکانیک جامدات

### ۱- مقدمه

روش EGM روش بهینه سازی سیستم های واقعی است که شامل فرآیندهای برگشت ناپذیر، ناشی از انتقال حرارت، انتقال جرم و جریان سیال در سیستم های ترمودینامیکی سیالاتی و انتقال حرارت و اتلاف داخلی انرژی مکانیکی در سیستم های ترمودینامیکی جامداتی می باشند. روش کمینه کردن تولید آنتروپی یک روش مهندسی برای استفاده کاربردی تر، قابل فهم تر و موثرتر از اصول ترمودینامیک و انتقال حرارت می باشد. روش کمینه کردن تولید آنتروپی در جریانهای متلاطم [۱]، در جابجایی طبیعی فیلم چگالش روی یک سیلندر بیضی [۲]، در بهینه کردن آهستگی جریان بخار اشباع و چگالیده شدن روی لوله افقی همدم [۳]، در پیدا کردن رابطه بین عدد رینولدز بهینه با پارامترهای دبی جرمی و... یک کانال سینوسی که در آن جریان آرام و... با انتقال حرارت جابجایی اجباری است [۴]، در جهت بهینه سازی طراحی نیروگاه خورشیدی شیراز [۵] و در مکانیک جامدات [۶] مورد بررسی قرار گرفته است.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز fathipour\_mahdi@yahoo.com

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز  
<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

نتایج حاصل از داده های بدست آمده از آزمایش بر روی مواد جامد را می توان بر اساس وابستگی نمودار تنش- کرنش ب نرخ بارگذاری ، به دو دسته مستقل از نرخ و وابسته به نرخ تقسیم کرد. تئوری الاستیسیته به توصیف رفتار مستقل از نرخ بدون اثرات هیسترسسی می پردازد.

## ۲- تئوری ترموالاستیسیته

جسم جامدی که خصوصیات مکانیکی آن توسط معادله زیر تعریف می شود را جسم جامد الاستیک خطی آیزوتروپیک می گویند [۷]:

$$\tilde{T} = 2\mu \left( \tilde{E} + \frac{\nu}{1+\nu} (tr\tilde{E})\tilde{I} \right) \quad (1)$$

که در آن  $\tilde{T}$  تانسور تنش و  $\tilde{E}$  تانسور کرنش و ضرایب  $\mu$  و  $\nu$  پارامترهای مادی برای مدول برشی و نسبت پواسون می باشد این معادله را به شکل زیر نیز می توان نوشت :

$$\tilde{E} = \frac{1}{2\mu} \left( \tilde{T} - \frac{\nu}{1+\nu} (tr\tilde{T})\tilde{I} \right) \quad (2)$$

رابطه بین مدول الاستیسیته یانگ  $E$  و مدول حجمی  $K$  با ضرایب  $\mu$  و  $\nu$  بصورت زیر است [۷]:

$$E = 2\mu(1+\nu), K = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \quad (3)$$

برای یک جسم آیزوتروپیک در تئوری الاستیسیته خطی ، معادله انرژی بصورت زیر تعریف می شود [۷]:

$$\rho c_d \theta + 3K\alpha\theta_0 (tr\tilde{E}) = k \cdot div(grad\theta) + \rho r \quad (4)$$

که  $k$  ضریب هدایت گرمایی و  $\alpha$  ضریب انبساط خطی و  $C$  ضریب گرمایی ویژه می باشد. میزان تولید آنتروپی ناشی از فرآیند برگشت ناپذیر هدایت گرما در داخل جسم ترمو الاستیک بصورت رابطه زیر می باشد [۷]:

$$\rho\theta_0\xi = \dot{D}_{cond}''' = \frac{k}{\theta} \left( \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 \right) \quad (5)$$

در این رابطه  $\xi$  نرخ آنتروپی ،  $\rho$  چگالی و  $D$  تولید آنتروپی می باشد همچنین نشان می دهد که همه فرآیند های بارگذاری در محدوده الاستیک ، برگشت پذیرند مگر اینکه گرادیان دما وجود داشته باشد. هنگامیکه آنتروپی تولید می شود ، لزوماً بخشی از انرژی مکانیکی به انرژی گرمایی تبدیل می شود. جهت کمینه کردن مقدار کار تلف شده بایستی به سوی کاهش نرخ تولید آنتروپی حرکت کنیم.

## ۳- معادلات متشکله ترموالاستیسیته

شکل کلی معادلات تعادل انرژی و تولید آنتروپی بصورت زیر می باشد [۸]:

$$k \theta_{,ii} + u(x_i, y_i, t) = \rho c \dot{\theta} \quad (6)$$

$$\rho\theta\xi = \dot{D}''' = \dot{D}_{int}''' + \dot{D}_{cond}''' \quad (7)$$

در معادله انرژی ترم  $u$  منبع ذخیره انرژی ناشی از بارگذاری مکانیکی می باشد و معادله (۷) تولید آنتروپی ناشی از تلفات داخلی و انتقال حرارت هدایت می باشد و با توجه به اینکه همه فرآیندهای بارگذاری در محدوده الاستیک، برگشت پذیرند مگر اینکه گرادیان دما داشته باشد [۹] پس مقدار تولید آنتروپی ناشی از تلفات داخلی صفر می باشد.

معادله تعادل انرژی و تولید آنتروپی برای جامد ترموالاستیسیته خطی ایزوترپیک و همگن به شکل زیر می باشد:

معادله انرژی:

$$k \theta_{,ii} - \frac{E \alpha \theta_0}{1-2\nu} \frac{\partial e_{kk}}{\partial t} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (8)$$

معادله تولید آنتروپی:

$$\rho \theta \xi = \dot{D}''' = \dot{D}'''_{cond} = \frac{k}{\theta_0} \theta_{,i} \theta_{,i} \quad (9)$$

با پارامترهای بی بعد زیر:

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{y} = \frac{y}{h}, \quad \hat{t} = \frac{k}{\rho c L^2} t, \quad \hat{\theta} = \frac{\theta - \theta_0}{\Delta \theta_0} \quad (10)$$

$$\Delta \theta_0 = \frac{\alpha}{\rho c} E \varepsilon_0 \theta_0 \quad \text{که}$$

با استفاده از پارامترهای بدون بعد بالا معادلات انرژی و آنتروپی به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} + \left(\frac{L}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{y}^2} - \frac{1}{\hat{\varepsilon}_0} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} \quad (11)$$

$$\dot{D}'''_{cond} = \frac{k \Delta \theta_0^2}{\theta_0} \left( \frac{1}{L^2} \left( \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right) \quad (12)$$

با توجه به اینکه یک منبع انرژی داریم دما هم در جهت  $x$  و هم در جهت  $y$  توزیع می شود ولی چون منبع انرژی تابعی از پارامتر  $y$  می باشد توزیع دما در جهت  $y$  محسوس تر می باشد، همچنین شرایط مرزی هم باعث توزیع دما در جهت  $x$  می شود، به همین دلایل معادلات توزیع دما را دو بعدی در نظر گرفته شده است.

#### ۴- تعریف و تحلیل مسأله

برای اینکه بهتر بتوانیم اثر بارگذاریهای ترکیبی و متناوب متوجه شویم به تشریح دو مسأله می پردازیم: مسأله اول-ملاحظه می شود یک تیر ایزوترپیک و همگن با ضخامت  $2h$  و طول  $2L$  که در دمای یکنواخت اولیه  $\theta_0$  قرار دارد و تحت بارگذاری ترکیبی محوری و خمشی همزمان قرار می گیرد و باعث ایجاد کرنش های محوری و خمشی که نسبت به زمان بصورت نمایی بر طبق رابطه زیر تغییر می کند قرار دارد:

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{y}{h} \right) (1 - e^{-wt}) \quad (13)$$

وقتی جسم الاستیک تحت نیرویی ثابت قرار گیرد میزان کرنش ابتدا صفر و سپس با گذشت زمان افزایش می یابد تا در بینهایت به مقداری ثابت برسد. این رابطه از مجموع کرنش محوری و کرنش خمشی تشکیل شده است که  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 - e^{-wt})$  کرنش محوری می باشد زیرا در بارگذاری محوری، کرنش در تمام مقطع یکسان و با گذشت زمان مقدار کرنش افزایش می یابد تا اینکه در بینهایت ثابت می ماند و بعد شکست قطعه اتفاق می افتد و  $\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 \left( \frac{y}{h} \right) (1 - e^{-wt})$  کرنش خمشی می باشد و تابعی از پارامتر  $y$  می باشد و در مرکز مقطع کرنش صفر و در سطح بالایی و پایینی قطعه بیشترین کرنش وجود دارد و با گذشت زمان مقدار کرنش افزایش می یابد و در بینهایت به مقدار ثابت می رسد. با توجه به اینکه کرنش ها خیلی کوچک فرض شده است می توان کرنش محوری و خمشی را با هم جمع کرد. در صنعت و طبیعت کرنش ها بیشتر بصورت خطی یا تناوبی می باشد، به همین دلیل در این مقاله کرنش ها بصورت خطی و تناوبی فرض شده است.

با استفاده از پارامترهای بدون بعد، تابع تغییر فرم می توان بصورت زیر نوشت :

$$\varepsilon(\hat{y}, \hat{t}) = \varepsilon_0 (1 + \hat{y}) (1 - e^{-w\hat{t}}) \quad (14)$$

که  $\hat{w} = \frac{\rho ch^2}{k} w$  فرکانس بارگذاری بی بعد می باشد.

مسئله دوم- تیر مذکور تحت بارگذاری ترکیبی محوری و خمشی متناوب همزمان قرار می گیرد و باعث ایجاد کرنش های محوری و خمشی متناوب که بر طبق رابطه زیر تغییر می کند قرار دارد:

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{y}{h} \right) \sin(wt) \quad (15)$$

برای سهولت در حل معادله انرژی، شکل تابع کرنش را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{y}{h} \right) \exp(iwt) \quad (16)$$

با استفاده از پارامترهای بدون بعد، تابع تغییر فرم را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\varepsilon(\hat{y}, \hat{t}) = \varepsilon_0 (1 + \hat{y}) (e^{i\hat{w}\hat{t}}) \quad (17)$$

در هر دو حالت بالا شرایط مرزی و اولیه بصورت زیر تعریف می شود :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}}(-1, \hat{y}, \hat{t}) = 0, \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}}(1, \hat{y}, \hat{t}) = 0 \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, -1, \hat{t}) = 0, \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, 1, \hat{t}) = 0 \end{aligned} \quad (18) \text{ شرایط مرزی ۱ (B.C1)}$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}}(0, \hat{y}, \hat{t}) = 0; \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{x}}(1, \hat{y}, \hat{t}) + H_2 \cdot \theta(1, \hat{y}, \hat{t}) = 0 \quad (19) \text{ شرایط مرزی ۲ (B.C2)}$$

$$\theta(\hat{x}, 0, \hat{t}) = 0; \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, 1, \hat{t}) + H_4 \cdot \theta(1, \hat{y}, \hat{t}) = 0.$$

که  $H_2$  و  $H_4$  ضرایب انتقال حرارت همرفت می باشند. شرط مرزی اول مدل کاملاً عایق و شرط مرزی دوم جسم تحت انتقال حرارت همرفت می باشد.

شرایط اولیه (I.C) بصورت زیر تعریف می شوند، این شرایط بیشتر در صنعت با آن مواجه هستیم:

$$1) \hat{\theta}(\hat{x}, \hat{y}, 0) = 0 \quad (20)$$

$$2) \hat{\theta}(\hat{x}, \hat{y}, 0) = \hat{y} \quad (21)$$

$$3) \hat{\theta}(\hat{x}, \hat{y}, 0) = \sin\left(\frac{h}{L} v_n \hat{y}\right) \quad (22)$$

$$4) \hat{\theta}(\hat{x}, \hat{y}, 0) = \hat{y} \sin\left(\frac{h}{L} v_n \hat{y}\right) \quad (23)$$

هدف، محاسبه تولید آنتروپی ناشی از بارگذاری ترکیبی و بررسی اثر پارامترهای مختلف بر مقدار تولید آنتروپی می باشد.

از حل معادله انرژی ترموالاستیسیته (۱۱) با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۱ در حالت اول یعنی معادله کرنش (۱۴)، معادله توزیع دما بدست می آید:

$$\hat{\theta}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_m \hat{x} \cdot \sin \frac{h}{L} v_n \hat{y} \cdot \left( \frac{4\hat{w}}{\lambda_m v_n} \right) \left( \frac{L}{h} \pm \left( \frac{L}{h} \right)^2 \frac{1}{v_n} \sin \frac{h}{L} v_n - 2 \frac{L}{h} \cos \frac{h}{L} v_n \right) \cdot \left( \frac{e^{-\hat{w}\hat{t}} - e^{-(v_n^2 + \lambda_m^2)\hat{t}}}{(v_n^2 + \lambda_m^2) - \hat{w}} \right) \quad (24)$$

$$\text{که: } \lambda_m = (2m-1) \frac{\pi}{2}, v_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{L}{h}$$

و از حل معادله انرژی در حالت دوم یعنی بارگذاری ترکیبی متناوب با همین شرایط مرزی و اولیه توزیع دما بدست می آید:

$$\hat{\theta}_p(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = -4i\hat{w} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_m \hat{x} \cdot \sin \frac{h}{L} v_n \hat{y} \cdot \left( \frac{1}{\lambda_m v_n} \right) \left( \frac{L}{h} \pm \left( \frac{L}{h} \right)^2 \frac{1}{v_n} \sin \frac{h}{L} v_n - 2 \frac{L}{h} \cos \frac{h}{L} v_n \right) \cdot \left( \frac{e^{i\hat{w}\hat{t}} - e^{-(v_n^2 + \lambda_m^2)\hat{t}}}{v_n^2 + \lambda_m^2 + i\hat{w}} \right) \quad (25)$$

علامت  $\pm$  به معنی نیمه بالایی و پایینی مدل می باشد که علامت مثبت برای نیمه بالایی و علامت منفی برای نیمه پایینی می باشد.

نمودار توزیع دمای بدون بعد، رابطه (۲۴)، در شکل (۱) قابل مشاهده است. همانطور که رابطه (۲۴) نشان می دهد و در این شکلها قابل ملاحظه است، تابع توزیع دما، یک تابع فرد نسبت به مکان می باشد. نیمه بالایی محور  $y$  که تحت تنش کششی می باشد، دارای تغییرات دمایی منفی و نیمه پایینی که تحت تنش فشاری قرار دارد، دارای تغییرات دمایی مثبت می باشند. همانطور که در این نمودار مشاهده می شود، پس از گذشت مدت زمان کافی، دمای بدون بعد در همه نقاط به صورت یکنواخت در آمده و برابر دمای اولیه می شوند. توزیع دما در نیمه بالایی و پایینی بدلیل توزیع غیر یکنواخت بار در سطح مقطع، یکسان نمی

باشند چرا که در نیمه بالایی تنش فقط کششی ناشی از نیروی محوری کششی و نیروی خمشی تحت کشش و نیمه پایینی ناشی از نیروی محوری کششی و نیروی خمشی تحت فشار می باشد. در شکل (۲) مشاهده می شود که با افزایش  $L$  دما کاهش می یابد. شکل (۳) تا (۶) توزیع دما در شرایط اولیه دیگر مشاهده می شود که بدلیل شرایط اولیه، مقدار اولیه از دمای بالا یا پایین نسبت به نمودار دما شروع می شود. شکل (۷) و (۸) و (۹) توزیع دما رابطه (۲۵) را نشان می دهد مشاهده می شود که با افزایش  $L$  و کاهش فرکانس بارگذاری میزان دما کاهش می یابد همچنین در نیمه بالایی بدلیل بارگذاری بیشتر دما بیشتر می باشد. شکل (۱۰) - (۱۲) نمودار توزیع دما در شرایط اولیه دیگر را نمایش می دهد.

با مشتق گیری از رابطه توزیع دما و جایگذاری در رابطه (۱۲) معادله تولید آنتروپی بدست می آید:

$$\frac{\partial \hat{\theta}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})}{\partial \hat{y}} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_m \hat{x} \cdot \cos\left(\frac{h}{L} v_n \hat{y}\right) \cdot \left[\frac{4\hat{w} \cdot h}{L \cdot \lambda_m}\right] \quad (26)$$

$$\left[\frac{L}{h} \pm \left(\frac{L}{h}\right)^2 \frac{1}{v_n} \sin\left(\frac{h}{L} v_n\right)\right] \cdot \left[\frac{1}{(v_n^2 + \lambda_m^2) - \hat{w}}\right] \left(e^{-\hat{w}i} - e^{-(v_n^2 + \lambda_m^2)i}\right)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})}{\partial \hat{x}} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_m \hat{x} \cdot \sin\left(\frac{h}{L} v_n \hat{y}\right) \cdot \left[\frac{4\hat{w}}{v_n}\right] \quad (27)$$

$$\left[\frac{L}{h} \pm \left(\frac{L}{h}\right)^2 \frac{1}{v_n} \sin v_n\right] \cdot \left[\frac{1}{(v_n^2 + \lambda_m^2) - \hat{w}}\right] \left(e^{-\hat{w}i} - e^{-(v_n^2 + \lambda_m^2)i}\right)$$

جهت محاسبه نرخ تولید آنتروپی به توان دوم مشتق مکانی نیاز داریم سپس در رابطه (۱۲) قرار داده که بصورت زیر در می آید:

$$\dot{D}_{cond}'' = \frac{k\Delta\theta^2}{\theta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{\sin^2 \lambda_m \hat{x}}{\lambda_m^2} \cos^2\left(\frac{h}{L} v_n \hat{y}\right) + \cos^2 \lambda_m \hat{x} \frac{\sin^2\left(\frac{h}{L} v_n \hat{y}\right)}{v_n^2} \right] \cdot \left[\frac{16\hat{w}^2}{L^2}\right] \right. \quad (28)$$

$$\left. \left[ \frac{L}{h} \pm \left(\frac{L}{h}\right)^2 \frac{1}{v_n} \sin\left(\frac{h}{L} v_n\right) - 2\frac{L}{h} \cos\left(\frac{h}{L} v_n\right) \right]^2 \cdot \left[\frac{1}{(v_n^2 + \lambda_m^2) - \hat{w}}\right]^2 \left(e^{-\hat{w}i} - e^{-(v_n^2 + \lambda_m^2)i}\right)^2 \right\}$$

همچنین میزان ماکزیمم کل کار انجام شده در طی فرآیند بارگذاری را می توان به شکل زیر نوشت :

$$W'' = \int_0^{\infty} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \hat{t}} \right) d\hat{y} d\hat{x} \right) d\hat{t} = \frac{4E\varepsilon_0^2}{3} \quad (29)$$

با انتگرالگیری نسبت به مکان و زمان از رابطه (۲۸) و رابطه (۲۹)، نسبت میزان کل اتلاف ناشی از تولید آنتروپی به کل کار انجام شده طی فرآیند بارگذاری بصورت زیر بدست می آید:

$$\psi = \frac{D''_{cond}}{W''} = \frac{3\alpha^2 E \theta_0}{\rho c} \left( \frac{16\hat{w}^2}{L^2} \right) \left( \frac{1}{2\hat{w}} + \frac{1}{2(v_n^2 + \lambda_m^2)} - \frac{2}{(v_n^2 + \lambda_m^2) + \hat{w}} \right) \left( \frac{1}{(v_n^2 + \lambda_m^2) - \hat{w}} \right)^2 \left( \left( \frac{L}{h} \pm \left( \frac{L}{h} \right)^2 \frac{1}{v_n} \sin\left(\frac{h}{L} v_n\right) - 2 \frac{L}{h} \cos\left(\frac{h}{L} v_n\right) \right)^2 \left( \left( 1 + \frac{L}{2hv_n} \sin\left(\frac{2h}{L} v_n\right) \right) \cdot \frac{1}{\lambda_m^2} \left( 1 - \frac{L}{2\lambda_m} \sin(2\lambda_m) \right) + \left( 1 + \frac{L}{2\lambda_m} \sin(2\lambda_m) \right) \cdot \frac{1}{v_n^2} \left( 1 - \frac{L}{2hv_n} \sin\left(\frac{2h}{L} v_n\right) \right) \right) \right) \quad (30)$$

که پارامتر بدون بعد  $\psi_0 = \frac{3\alpha^2 E \theta_0}{\rho c}$  را دمپینگ مشخصه (Characteristic Damping) می نامیم. خصوصیات ترمومکانیکی و مقدار دمپینگ مشخصه بعضی از مواد جامد در جدول (۱) نشان داده شده است. نسبت  $\frac{\psi_{cond}}{\psi_0}$  فقط تابعی از  $\hat{w}$  است که ترکیبی از خصوصیات مواد و خصوصیات ساختاری و فرکانس بارگذاری می باشد. همچنین این نسبت برای حالت دوم یعنی بارگذاری متناوب بصورت زیر بدست می آید:

$$\psi_{periodic} = \frac{D''_{cond}}{W''} = \frac{3\alpha^2 E \theta_0}{\rho c} \left( \frac{16\hat{w}}{(v_n^2 + \lambda_m^2)^2} \right) \left( \pi(v_n^2 + \lambda_m^2)^2 - \hat{w} \frac{(v_n^2 + \lambda_m^2)}{2} \left( e^{\frac{-4\pi(v_n^2 + \lambda_m^2)}{\hat{w}}} - 1 \right) + \pi\hat{w}^2 \right) \left( \frac{L}{h} \pm \left( \frac{L}{h} \right)^2 \frac{1}{v_n} \sin\left(\frac{h}{L} v_n\right) - 2 \frac{L}{h} \cos\left(\frac{h}{L} v_n\right) \right)^2 \left( \left( 1 + \frac{L}{2hv_n} \sin\left(\frac{2h}{L} v_n\right) \right) \cdot \frac{1}{\lambda_m^2} \left( 1 - \frac{L}{2\lambda_m} \sin(2\lambda_m) \right) + \left( 1 + \frac{L}{2\lambda_m} \sin(2\lambda_m) \right) \cdot \frac{1}{v_n^2} \left( 1 - \frac{L}{2hv_n} \sin\left(\frac{2h}{L} v_n\right) \right) \right) \quad (31)$$

#### ۴- نتایج و بحث

نمودارهای (۱۳) - (۲۶) نسبت  $\psi_{cond} / \psi_0$  به  $\hat{w}$  یعنی تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده در بارگذاری ترکیبی محوری-خمشی نشان می دهد. نمودارها نشان می دهد که بالا بودن ضریب هدایت گرمایی و یا پایین بودن بارگذاری دو عامل مؤثر در کاهش گرادیان دما می باشد. در نتیجه باعث کاهش میزان تولید آنتروپی می شود زیرا مقدار  $\hat{w} = \rho c h^2 w / k$  برای کاهش میزان تولید آنتروپی بایستی مقدار دو پارامتر  $\hat{w}$  و  $\psi_0$  را تا حد امکان کوچک انتخاب کرد. همچنین نشان داده شده که با افزایش میزان پارامتر  $L$  میزان تولید آنتروپی کاهش می یابد و افزایش پارامتر  $h$  چندان در کاهش یا افزایش میزان تولید آنتروپی مؤثر نمی باشد. شکل‌های (۱۳)، (۱۴)، (۱۵) اثرات  $\hat{w}$  و  $L$  و  $h$  را در تولید آنتروپی ناشی از انتقال حرارت هدایت برای حالت اول نشان می دهد. با افزایش  $L$  مقدار تولید آنتروپی کاهش می یابد همچنین وقتی  $h$  افزایش می یابد تولید آنتروپی به مقدار جزئی افزایش می یابد و تولید آنتروپی در بارگذاریهای کوچک و یا ضریب هدایت حرارتی بالا، کاهش می یابد. بایستی توجه داشت در صورتی که شرایط اولیه می تواند در مقدار اولیه تولید آنتروپی اثر بگذارد و مقدار آنرا کم و زیاد کند. شکل‌های (۱۶) - (۲۱) اثرات  $\hat{w}$  و  $L$  را در تولید آنتروپی ناشی از انتقال حرارت هدایت در حالت اول با شرایط مرزی اول و شرایط اولیه مختلف نشان می دهد. وقتی  $L$  افزایش می یابد میزان تولید آنتروپی افزایش می یابد همچنین

در بارگذاریهای کوچک و در ضریب انتقال حرارت هدایت بزرگتر میزان تولید آنتروپی افزایش می یابد. مشاهده می شود در ابتدای نمودار میزان تولید آنتروپی بیشترین مقدار را دارد که این بدلیل نوع شرایط اولیه می باشد در واقع شرایط اولیه هم می تواند عاملی مؤثر در کاهش تولید آنتروپی باشد. شکل‌های (۲۲)- (۲۶) اثرات  $\hat{w}$  و  $L$  را در تولید آنتروپی ناشی از انتقال حرارت هدایت در حالت اول با شرایط مرزی دوم و شرایط اولیه مختلف نشان می دهد. با افزایش  $L$  میزان تولید آنتروپی افزایش می یابد همچنین در بارگذاری های کوچک و در ضریب انتقال حرارت هدایت بزرگتر میزان تولید آنتروپی افزایش می یابد.

نمودارهای (۲۷)-(۳۴) نسبت  $\frac{\psi_{cond}}{\psi_0}$  به فرکانس بی بعد بار را نشان می دهد این نمودارها در حالت دوم یعنی بارگذاری ترکیبی و متناوب برای هر دو شرایط مرزی با شرایط اولیه مختلف می باشد. مشاهده می شود که میزان تولید آنتروپی در فرکانس  $\hat{w}$  خاصی ماکزیمم است و در  $\hat{w}$  کوچکتر و بزرگتر از آن کاهش می یابد این نقاط یک نقطه بحرانی برای بارگذاری های ترمومکانیکی در شرایط مرزی و اولیه خاص می باشد. این فرکانس شبیه فرکانس طبیعی در سیستم های ارتعاشاتی می باشد. افزایش  $\hat{w}$  از یک سو به معنای افزایش نرخ بارگذاری و یا کاهش ضریب هدایت گرمایی می باشد که هر دو عامل باعث ایجاد گرادیان دمایی گسترده تری در جسم می شوند و از سوی دیگر به معنای افزایش ظرفیت گرمایی جسم می باشد که باعث کوچکتر شدن تغییرات دما و در نتیجه کاهش گرادیان دما در جسم می شود.

## ۵ - نتیجه گیری

در این مقاله میزان تولید آنتروپی در بارگذاری ترکیبی محوری - خمشی و متناوب در شرایط مرزی و اولیه مختلف محاسبه شده و اثر پارامترهای مؤثر در کاهش میزان تولید آنتروپی در تیر نشان داده شد. نتایج نشان می دهد که با کاهش طول تیر تحت بارگذاری میزان تولید آنتروپی کاهش می یابد همچنین بارگذاری کوچک و ضریب انتقال حرارت بالا دو عامل مؤثر دیگر در کاهش میزان تولید آنتروپی می باشد. در بارگذاری ترکیبی متناوب افزایش  $\hat{w}$  از یک سو به معنای افزایش نرخ بارگذاری و یا کاهش ضریب هدایت گرمایی می باشد که هر دو عامل باعث ایجاد گرادیان دمایی گسترده تری در جسم می شوند و از سوی دیگر به معنای افزایش ظرفیت گرمایی جسم می باشد که باعث کوچکتر شدن تغییرات دما و در نتیجه کاهش گرادیان دما در جسم می شود در واقع در چنین بارگذاری یک نقطه بحرانی وجود دارد که میزان تولید آنتروپی در این نقطه ماکزیمم می باشد، جهت کاهش تولید آنتروپی بایستی فرکانس بارگذاری بیشتر یا کمتر از این مقدار انتخاب شود. در بارگذاریهای استاتیکی، هیچ نقطه بهینه یا بحرانی را از نظر میزان تولید آنتروپی نمی توان مشخص کرد. در این مسائل، پارامترهای بدون بعد در تمام گستره تغییرات خود، دارای اثرات یکنواخت بر روی میزان تولید آنتروپی می باشند. برای بارگذاری متناوب می توان مقادیر بحرانی را برای برخی از پارامترهای بدون بعد، مشخص کرد. نقاط بحرانی، نقاطی هستند که در آنها، بیشینه میزان تولید آنتروپی اتفاق می افتد. جهت کاهش میزان تولید آنتروپی در این گروه مسائل، مقادیر پارامترهای بدون بعد را بایستی تا حد امکان، دورتر از نقاط بحرانی انتخاب کرد.



## مراجع

- [1] Balaji, C., Hölling, M., and Herwig, H., " Entropy Generation Minimization in Turbulent Mixed Convection Flows", International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 34, Issue 5, pp. 544-552, (2007).
- [2] Guan-Cyun, Li., and Sheng-An, Yang, " Entropy Generation Minimization of Free Convection Film Condensation on an Elliptical Cylinder", International Journal of Thermal Sciences, Vol. 46, Issue 4, pp. 407-412, (2007).
- [3] Ko, T.H., "Analysis of Optimal Reynolds Number for Developing Laminar Forced Convection in Double Sine Ducts Based on Entropy Generation Minimization Principle", Energy Conversion and Management, Vol.47, Issue 6, pp. 655-670, (2006).
- [4] Shi-Chin, D., and Sheng-An, Y., " Second Law Based Optimization of Free Convection Film-wise Condensation on a Horizontal Tube", International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 33, Issue 5, pp. 636-644, (2006).
- [5] Yaghoubi, M., Azizian, K., and Kenary, A., "Simulation of Shiraz Power Plant for Optimal Assessment", Renewable Exergy , Vol. 28, Issue 12, pp. 1985-1998, (2003).
- [6] Baneshi, M., Jafarpur, K., and Mahzoon, M., "Application of Intropy Generation Minimization (EGM) Method in Solid Mechanics", Applied Physics A: Materials Science & Processing, Vol. 97, No. 4, pp. 777-789, (2009).
- [7] Haupt, P., "*Continuum Mechanics and Theory of Materials*", Germany, Springer, Verlag Berlin, Heidelberg, (2000).
- [8] Kestin, J., "*A Course in Thermodynamics*", U.S.A, New York, Blaisdell, (1968).

### فهرست نمادهای انگلیسی

- C: حرارت ویژه  
 D: تولید آنتروپی  
 E: مدول الاستیسیتة  
 h: ضخامت مدل  
 k: ضریب هدایت گرمایی  
 L: طول مدل  
 W: کار انجام شده

### فهرست نمادهای یونانی

- $\alpha$  : ضریب پخش حرارتی  
 $\hat{\epsilon}$  : کرنش بدون بعد

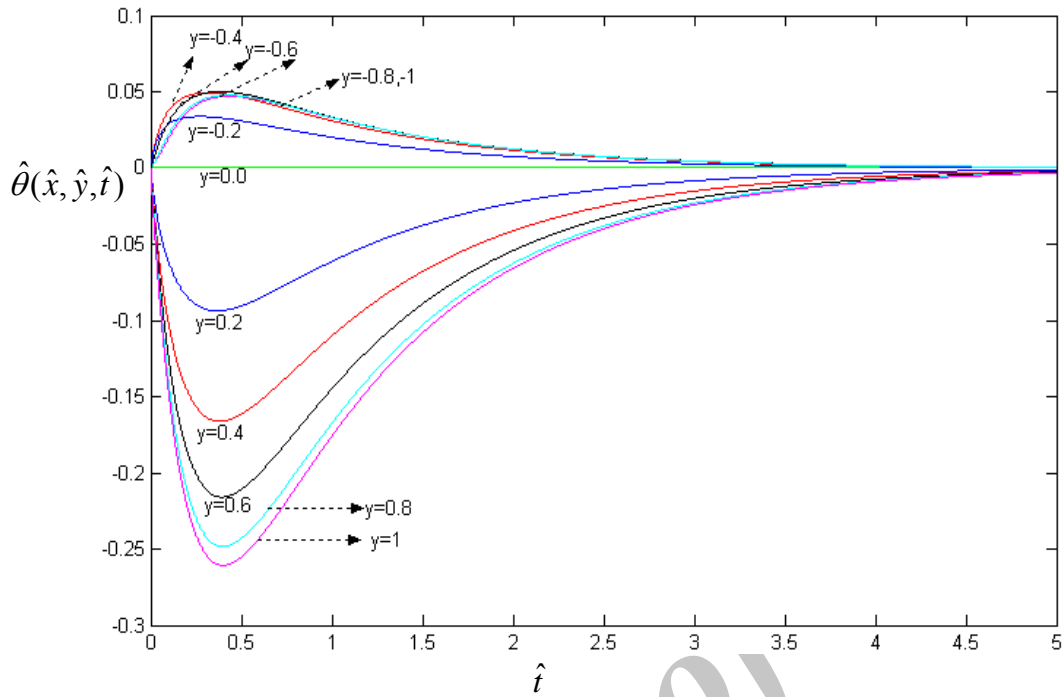
$\rho$ : چگالی $\theta$ : دمای بدون بعد $\xi$ : نرخ تولید آنتروپی $\hat{\sigma}$ : تنش بدون بعد $\hat{t}$ : زمان بدون بعد $\hat{w}$ : فرکانس بارگذاری

## جدولها

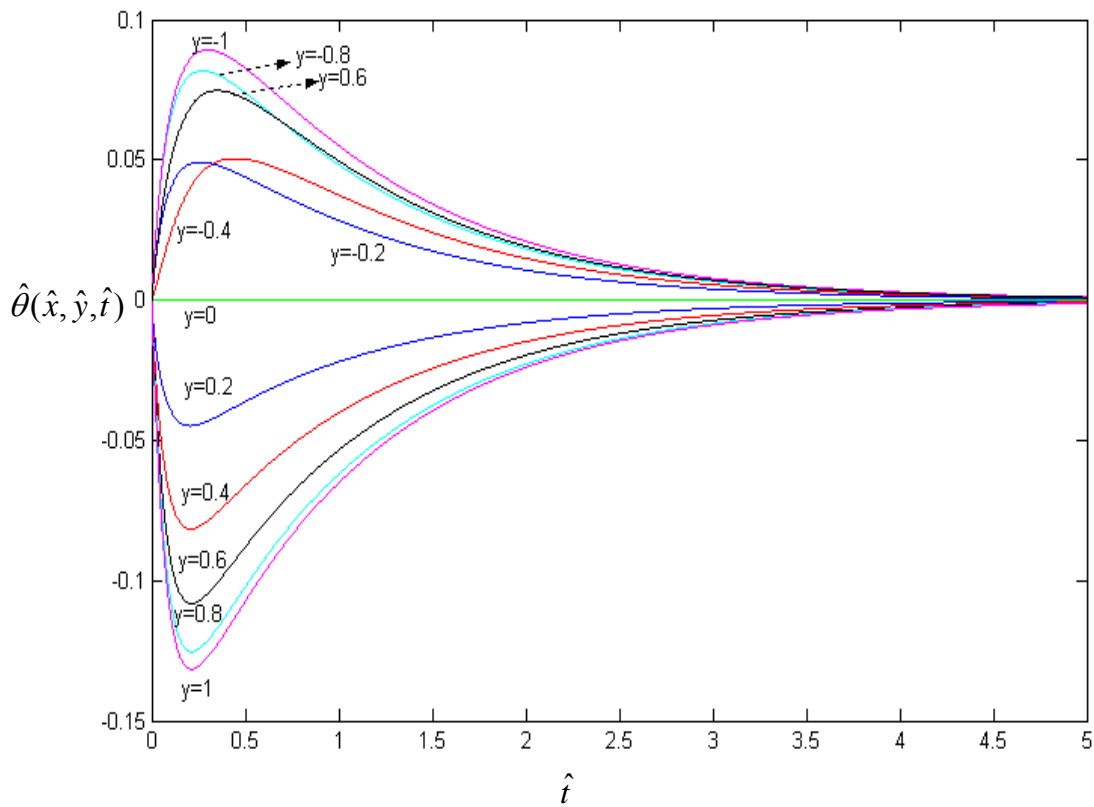
جدول (۱) - خصوصیات ترمومکانیکی بعضی از مواد جامد

	آلومینیم	مس	آهن
$\alpha(1/K)$	$23.1 \times 10^{-6}$	$16.5 \times 10^{-6}$	$11.8 \times 10^{-6}$
$E(Pa)$	$70 \times 10^9$	$110 \times 10^9$	$211 \times 10^9$
$\rho(kg/m^3)$	2700	8960	7874
$c(J/(kgK))$	900	385	450
$k(W/(mK))$	237	401	80.4
$\psi_0 = \frac{3\alpha^2 E \theta_0}{\rho c}$	0.0138	0.0078	0.0074

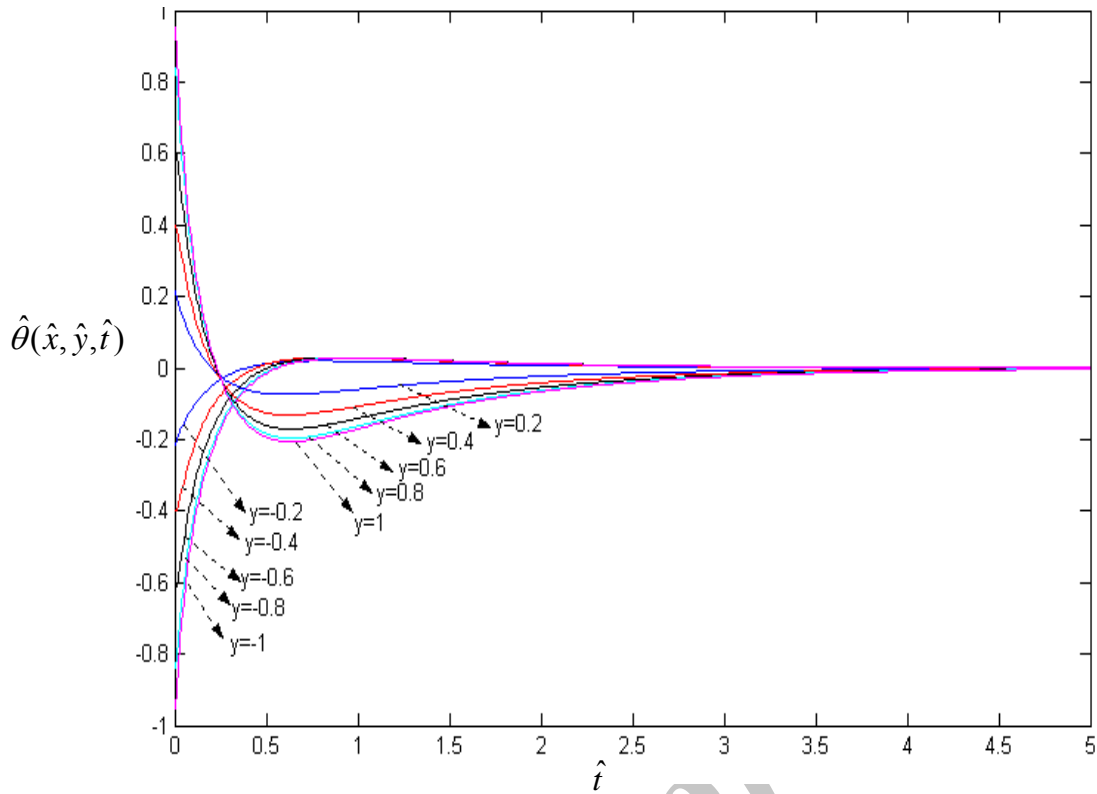
شکلها



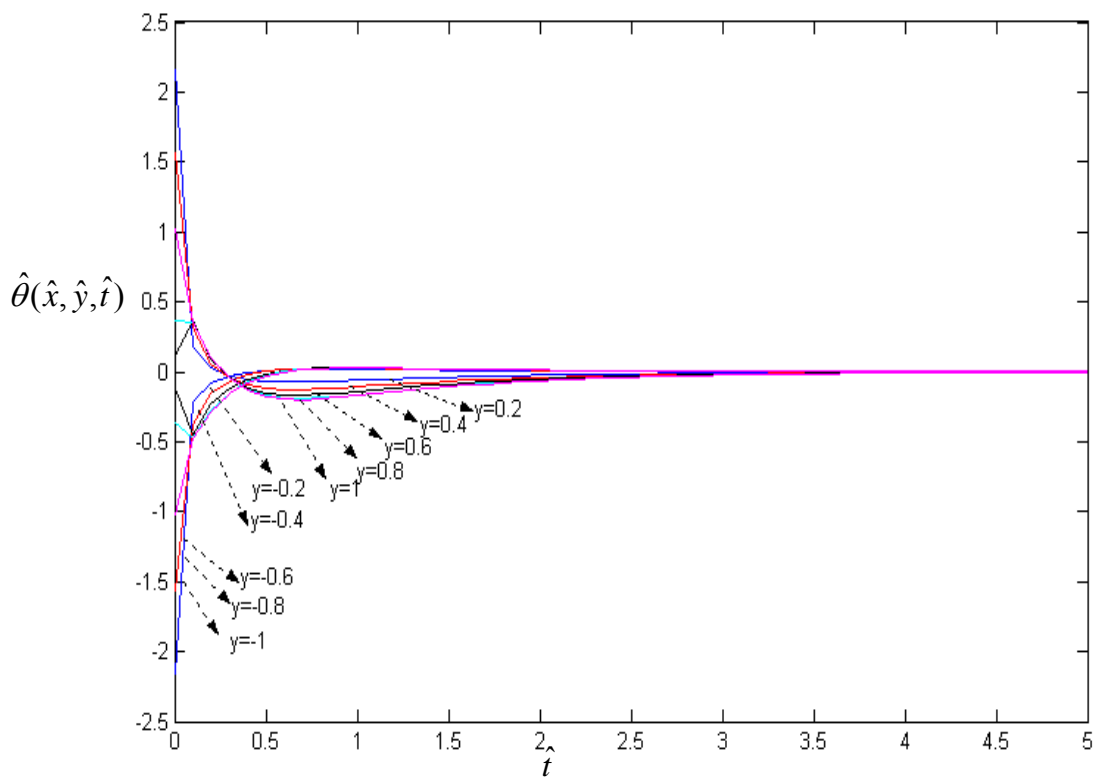
شکل ۱- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی در مسأله اول B.C1-I.C1 ،  $x=0.5, L=1$



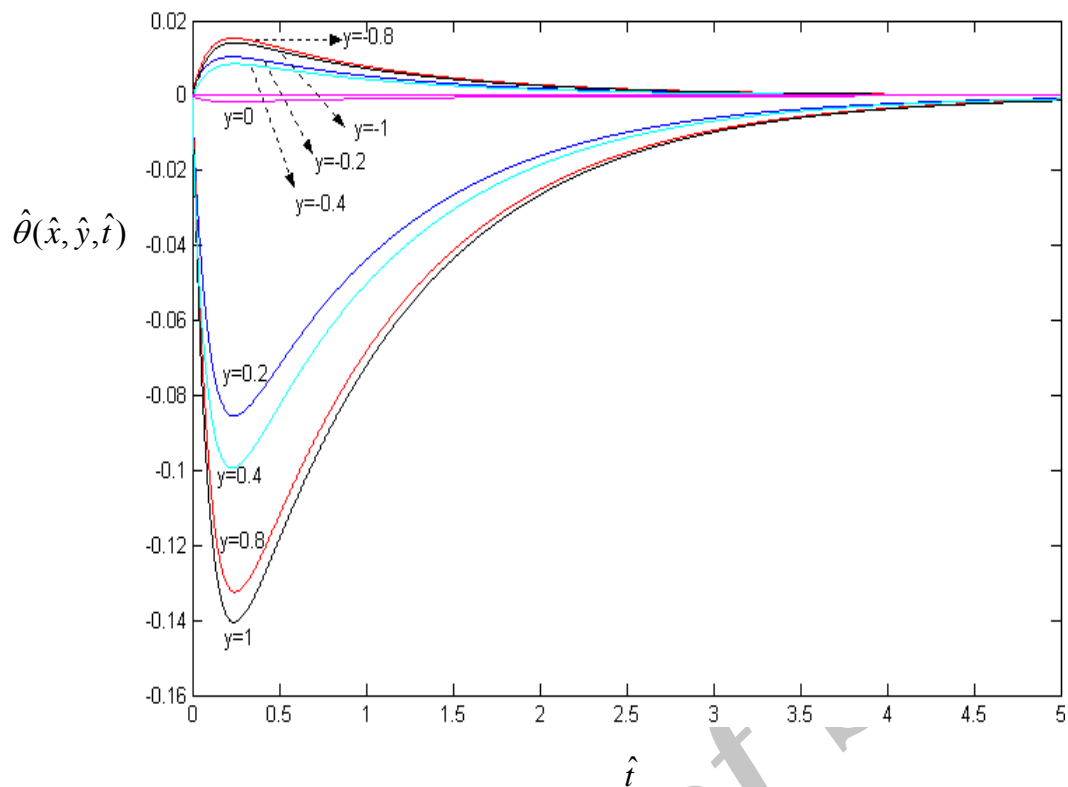
شکل ۲- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی در مسأله اول B.C1-I.C1 ،  $x=0.5, L=2$



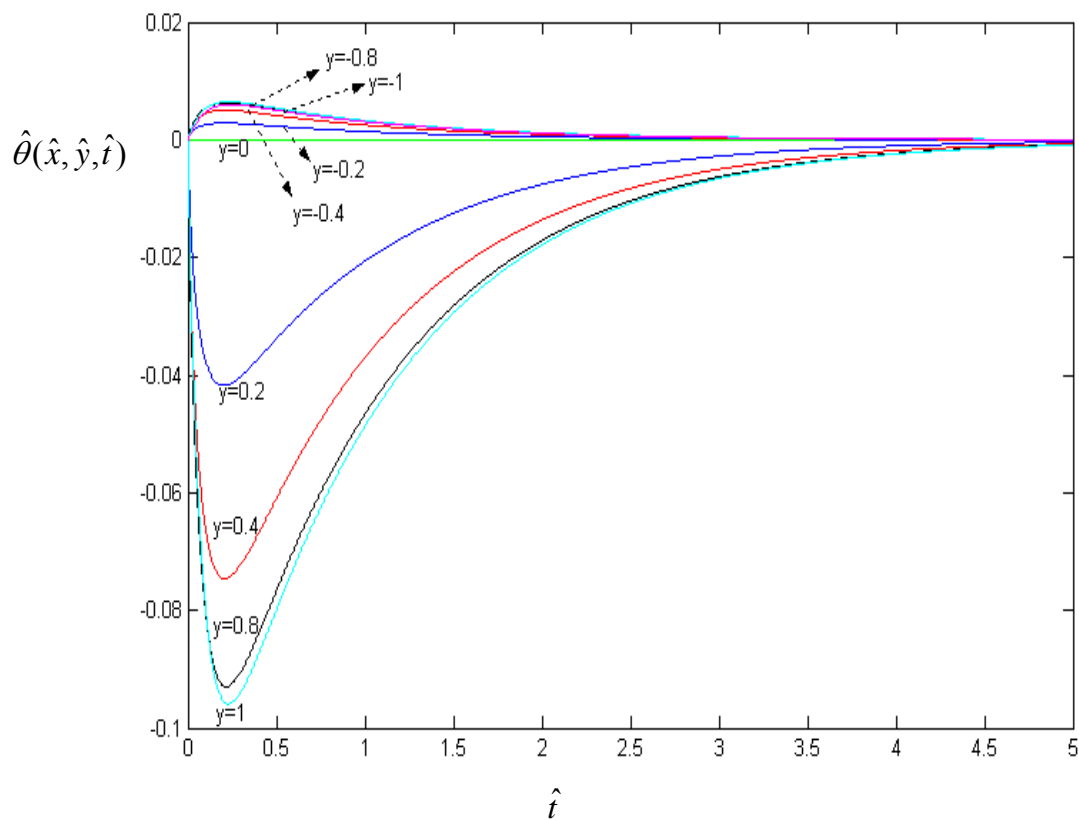
شکل ۳- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی در مسأله اول B.C1-I.C2 ،  $x=0.5, L=1$



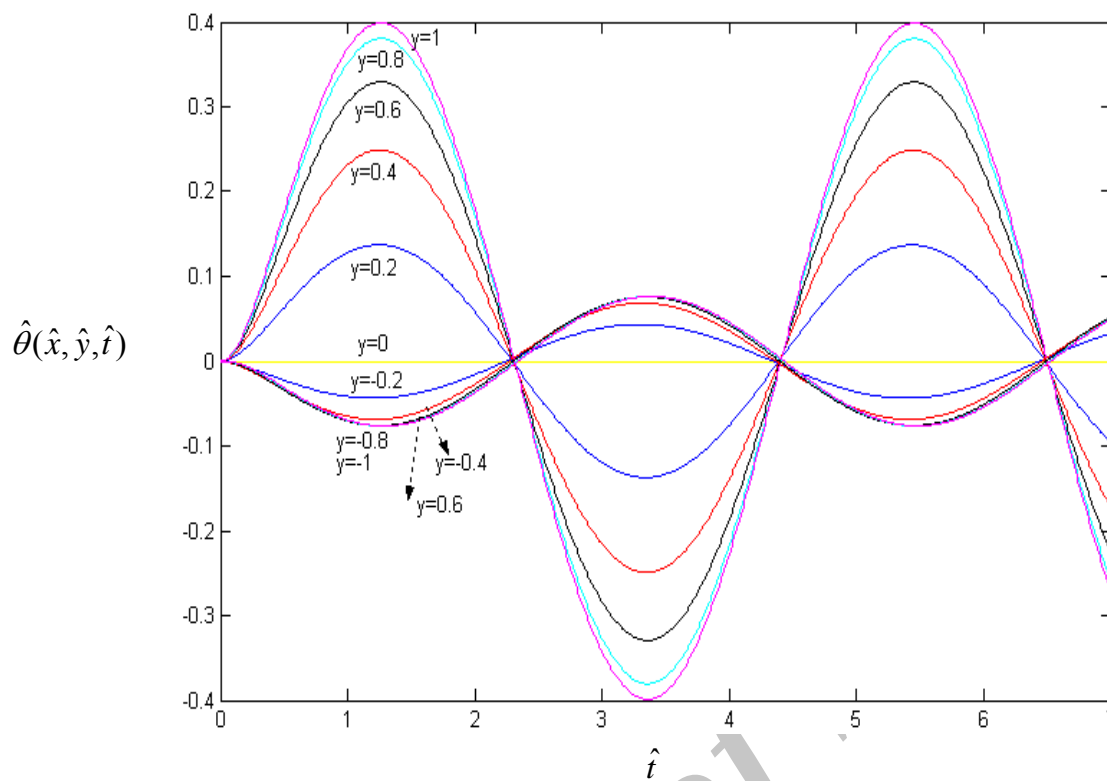
شکل ۴- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی در مسأله اول B.C1-I.C3 ،  $x=0.5, L=1$



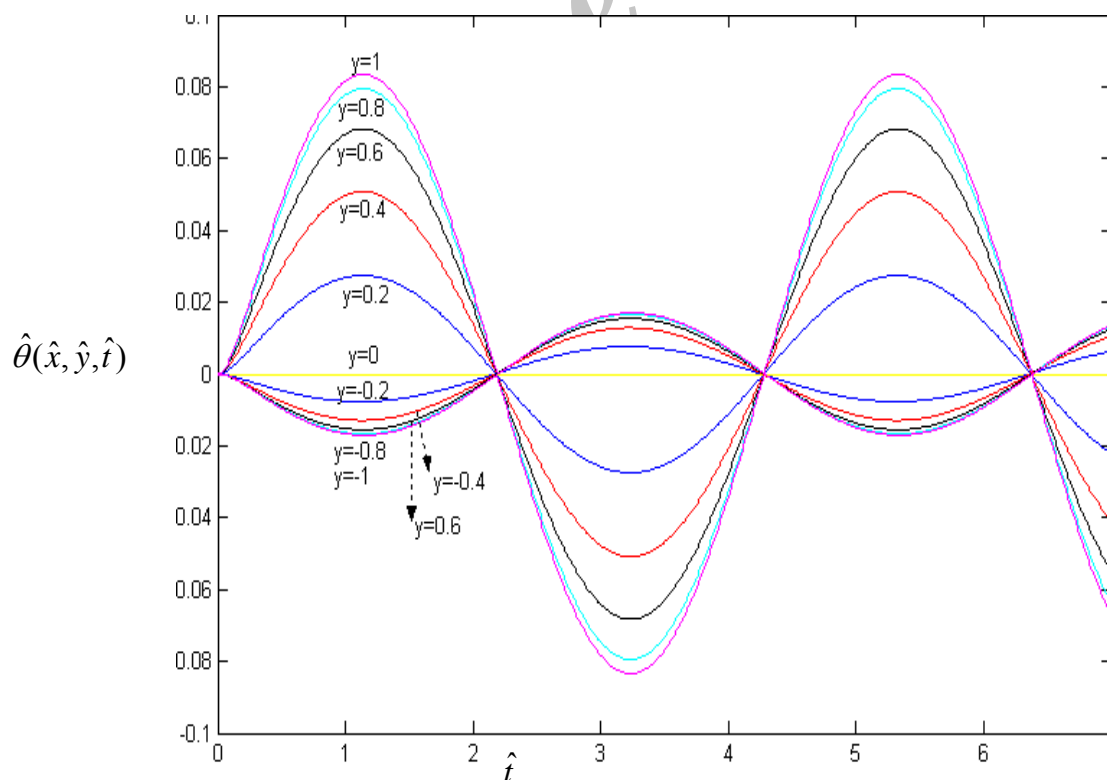
شکل ۵- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی در مسئله اول B.C2-I.C1 ،  $x=0.5, L=1$



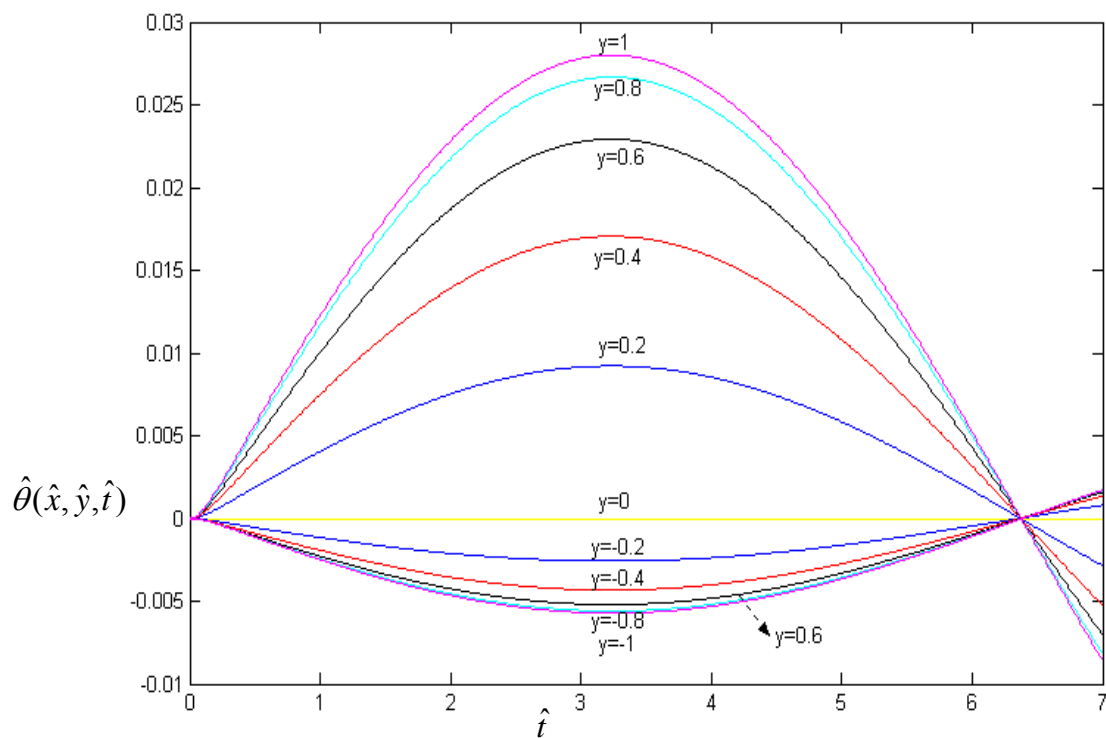
شکل ۶- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی در مسئله اول B.C2-I.C1 ،  $x=0.5, L=2$



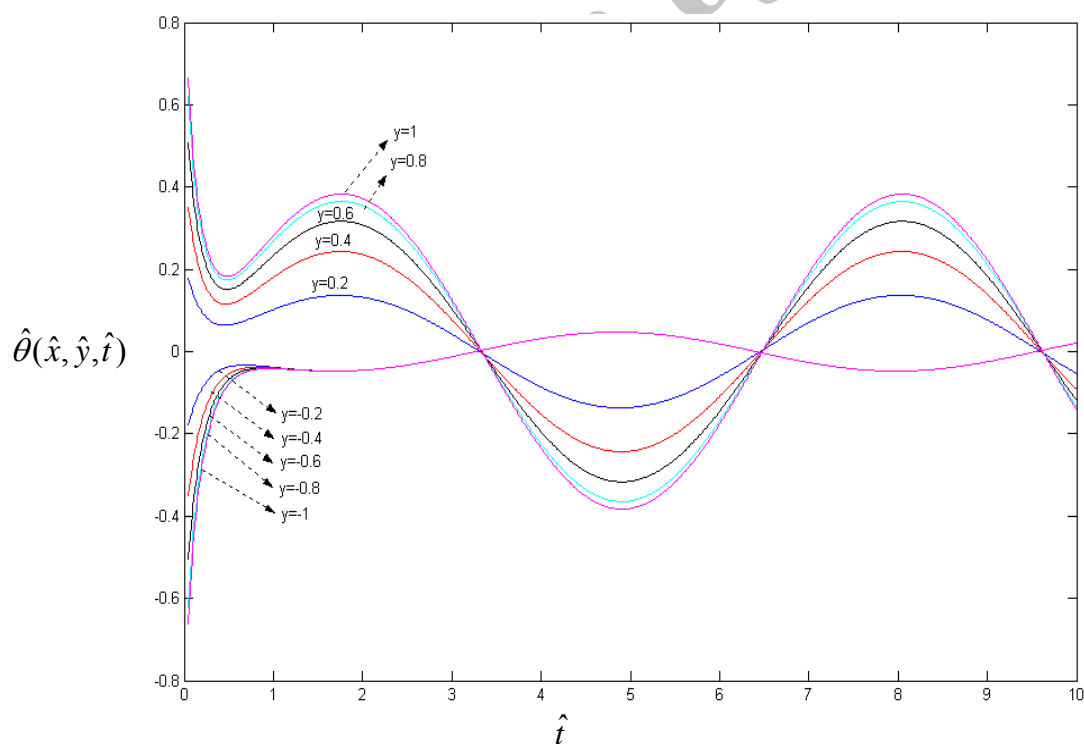
شکل ۷- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی و متناوب در مسأله دوم  
 $w=1.5, L=1, x=0.5, B.C2-I.C1$



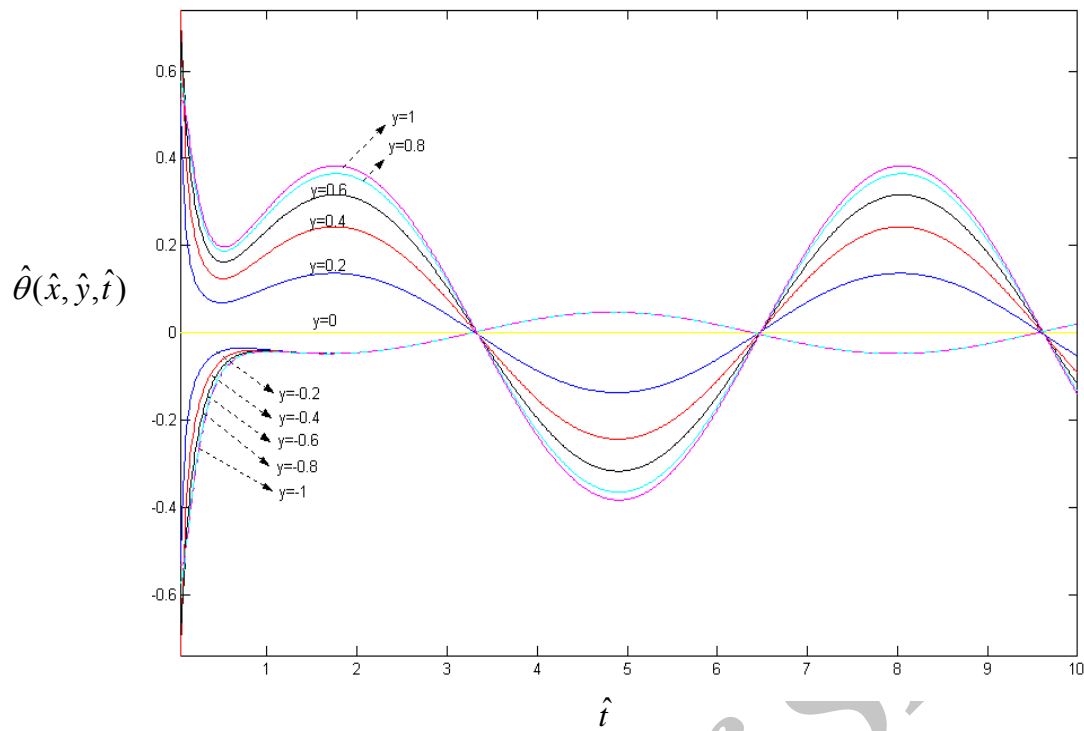
شکل ۸- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی و متناوب در مسأله دوم  
 $w=1.5, L=2, x=0.5, B.C2-I.C1$



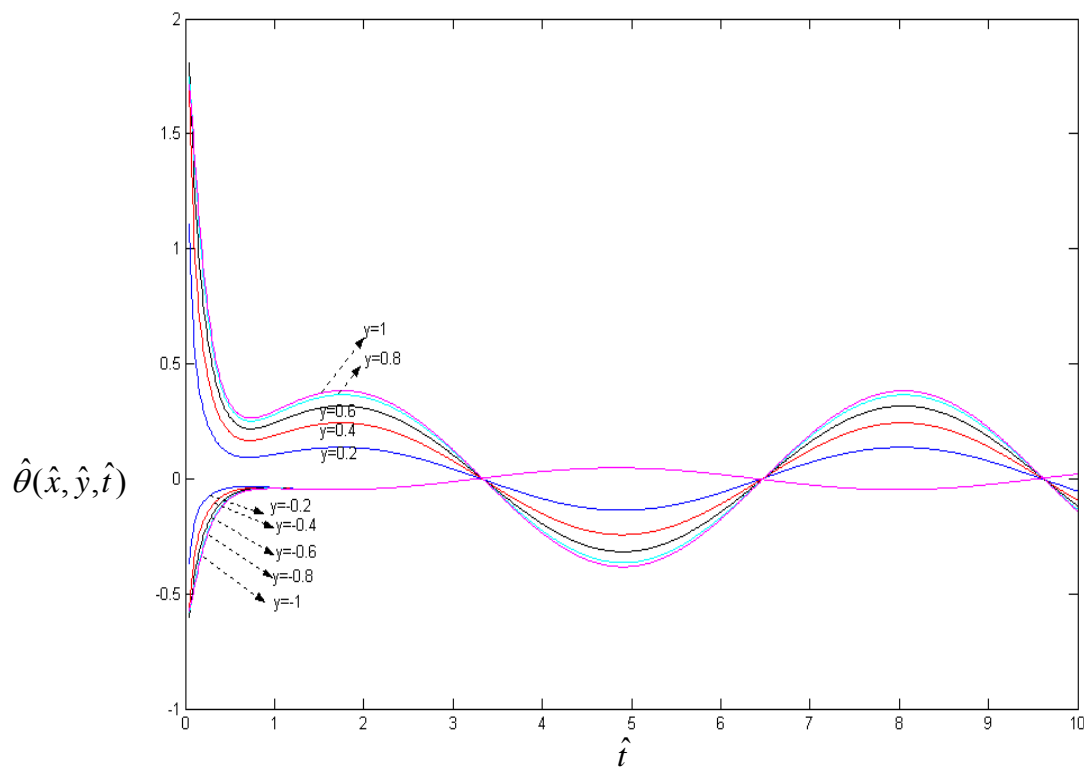
شکل ۹- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی و متناوب در مسأله دوم  
 $x=0.5$  و  $L=2$  و  $w=0.5$  و B.C2-I.C1



شکل ۱۰- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی و متناوب در مسأله دوم  
 $x=0.5$ ،  $w=1$ ،  $L=1$ ، B.C2-I.C2

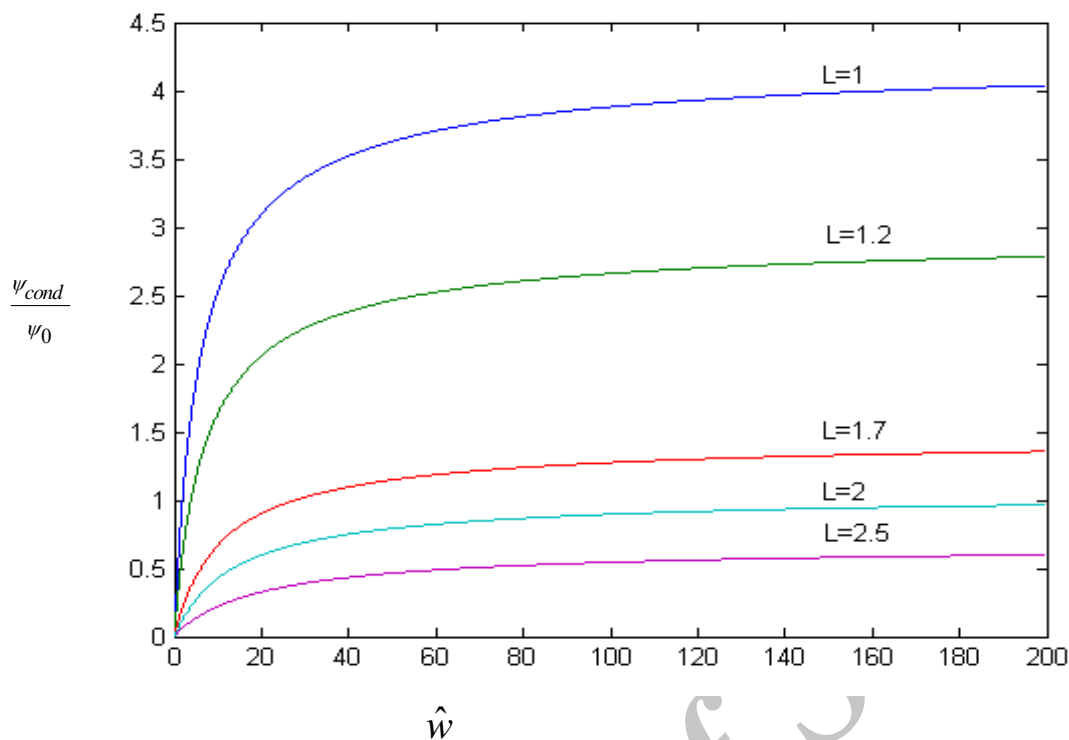


شکل ۱۱- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی و متناوب در مسأله دوم  
 $x=0.5, w=1, L=1, B.C2-I.C3$

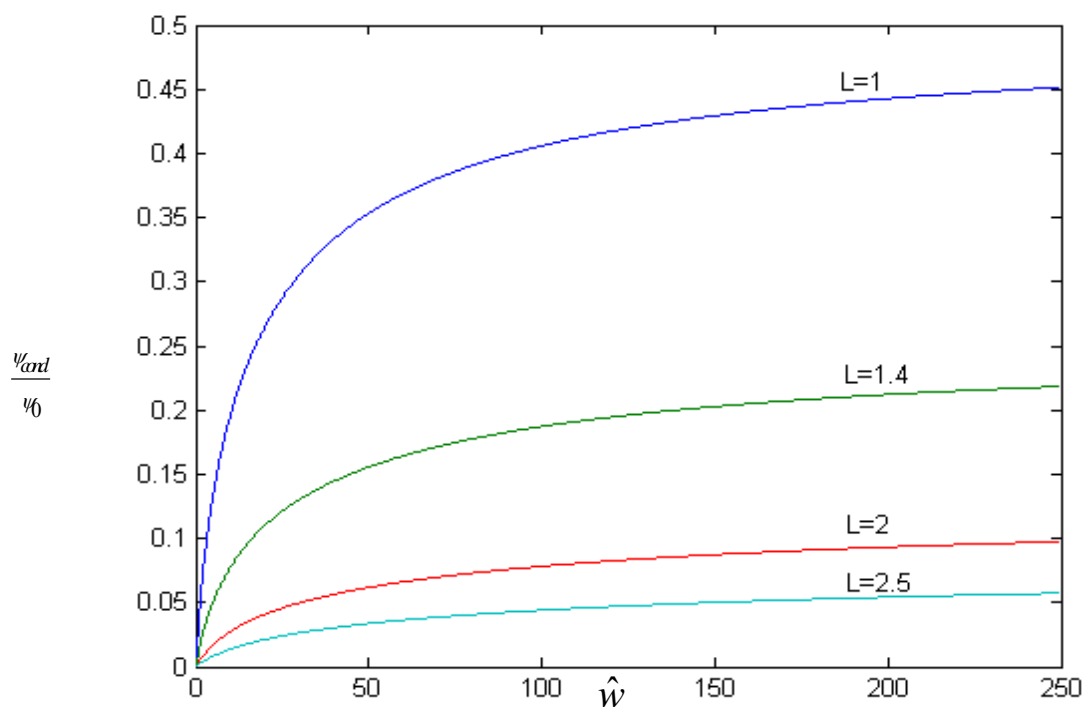


شکل ۱۲- نمودار تغییرات دمای بدون بعد با زمان در بارگذاری ترکیبی و متناوب در مسأله دوم  
 $x=0.5, w=1, L=1, B.C2-I.C4$

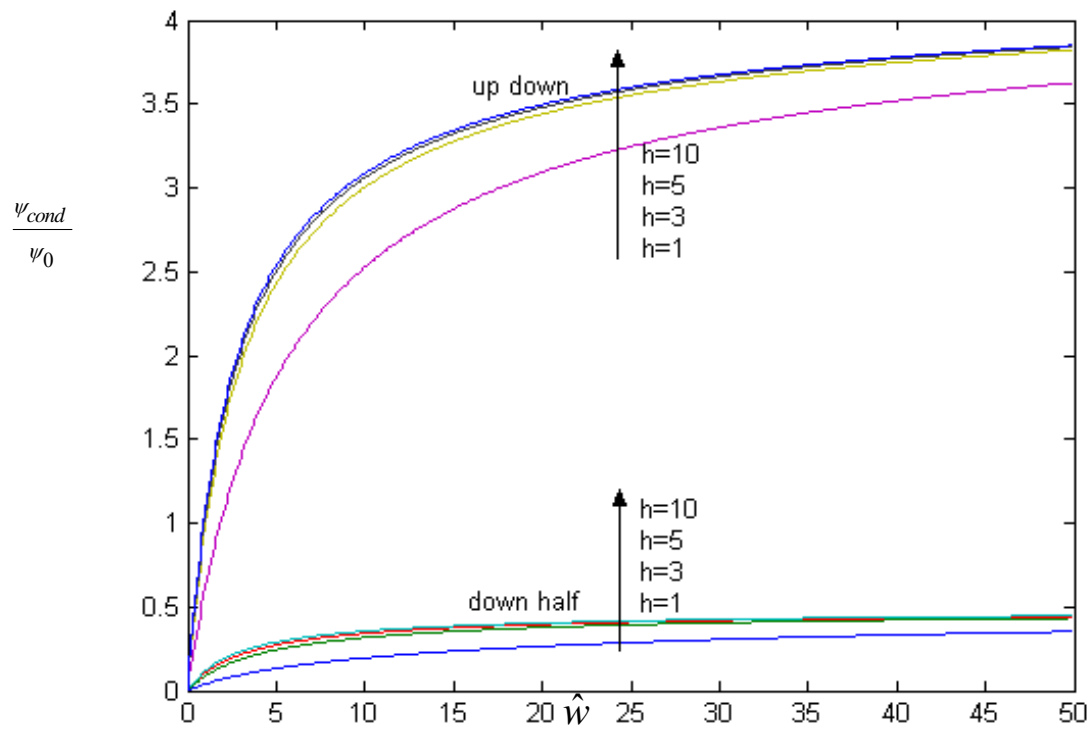




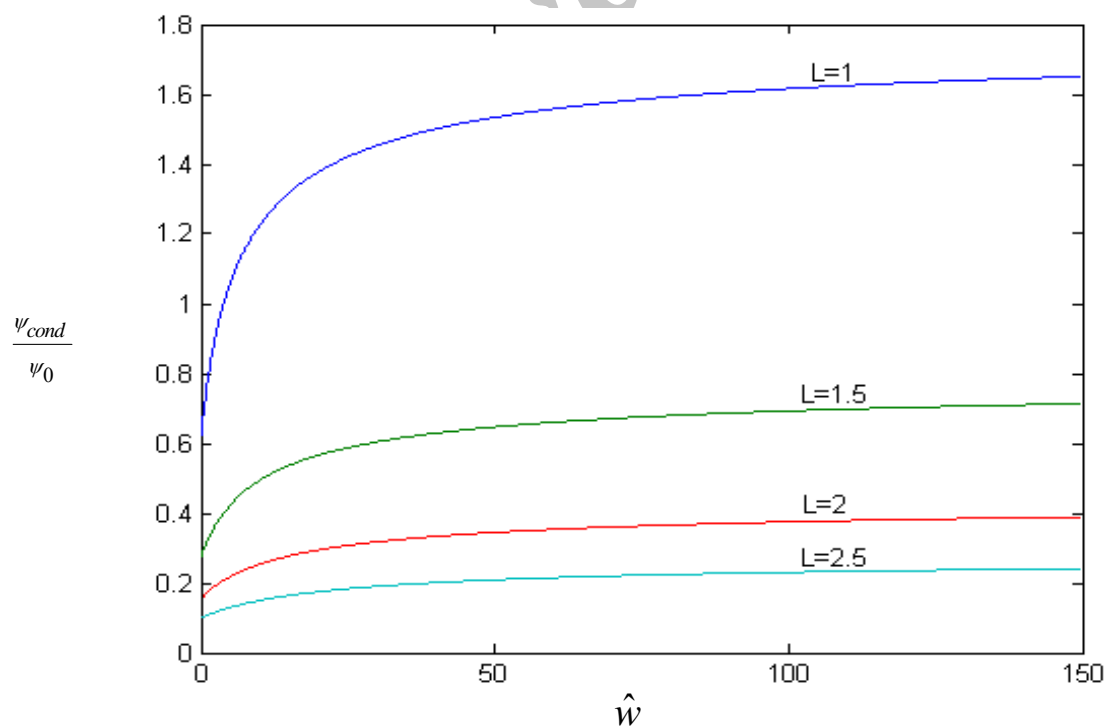
شکل ۱۳- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیتیه در مسأله اول با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۱ (نیمه بالایی)



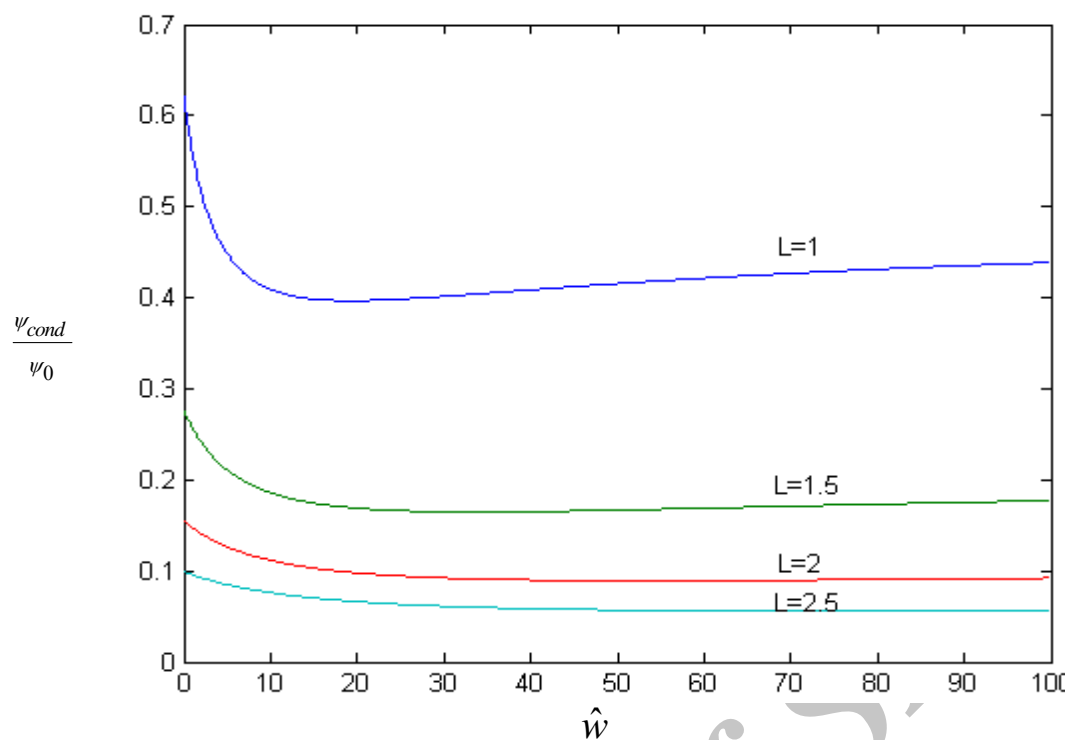
شکل ۱۴- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیتیه در مسأله اول با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۱ (نیمه پایینی)



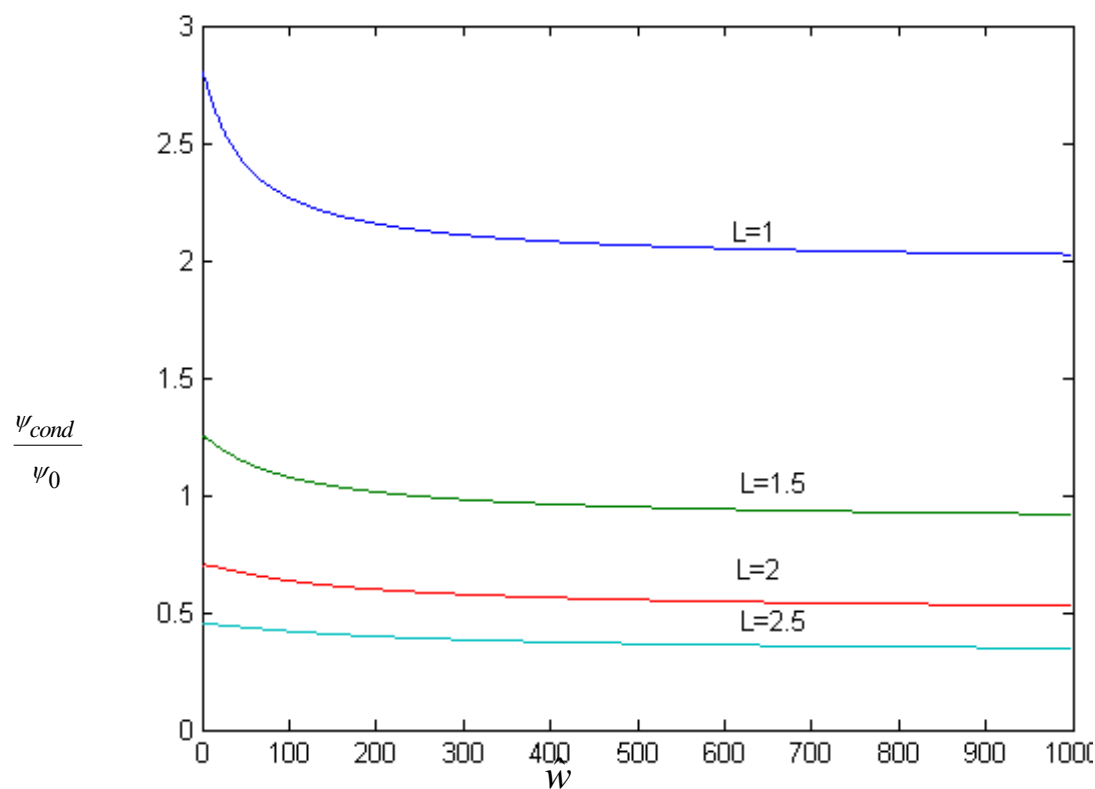
شکل ۱۵- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $h$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیته در مسأله اول با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۱



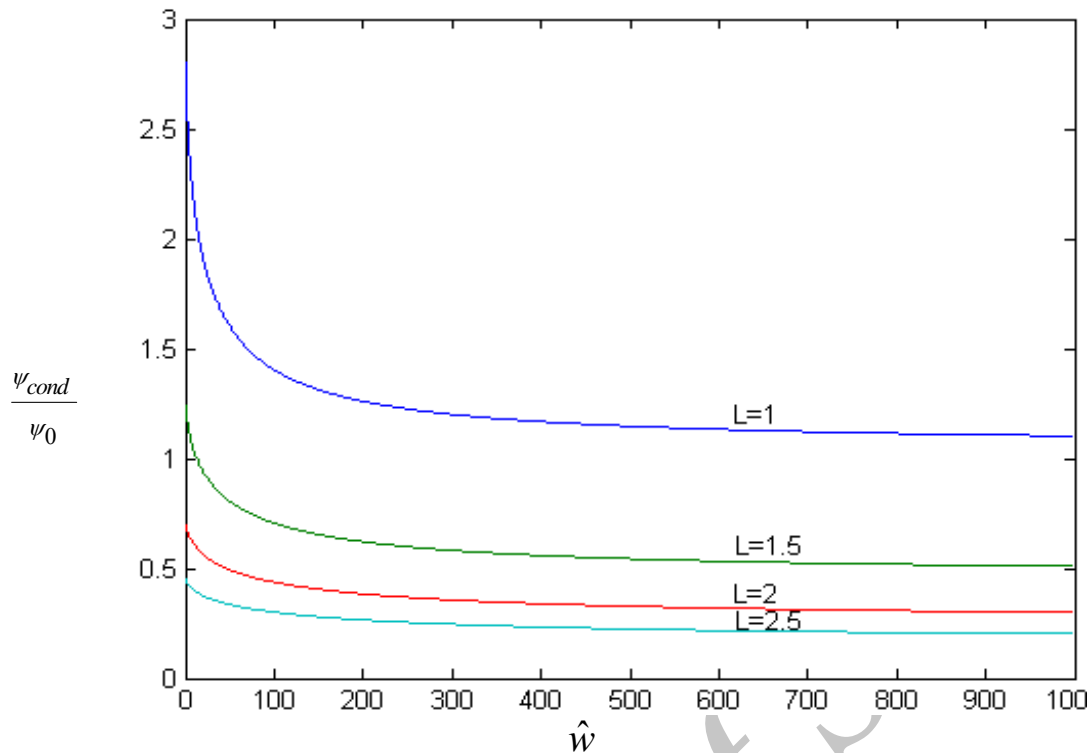
شکل ۱۶- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیته در مسأله اول با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۲ (نیمه بالایی)



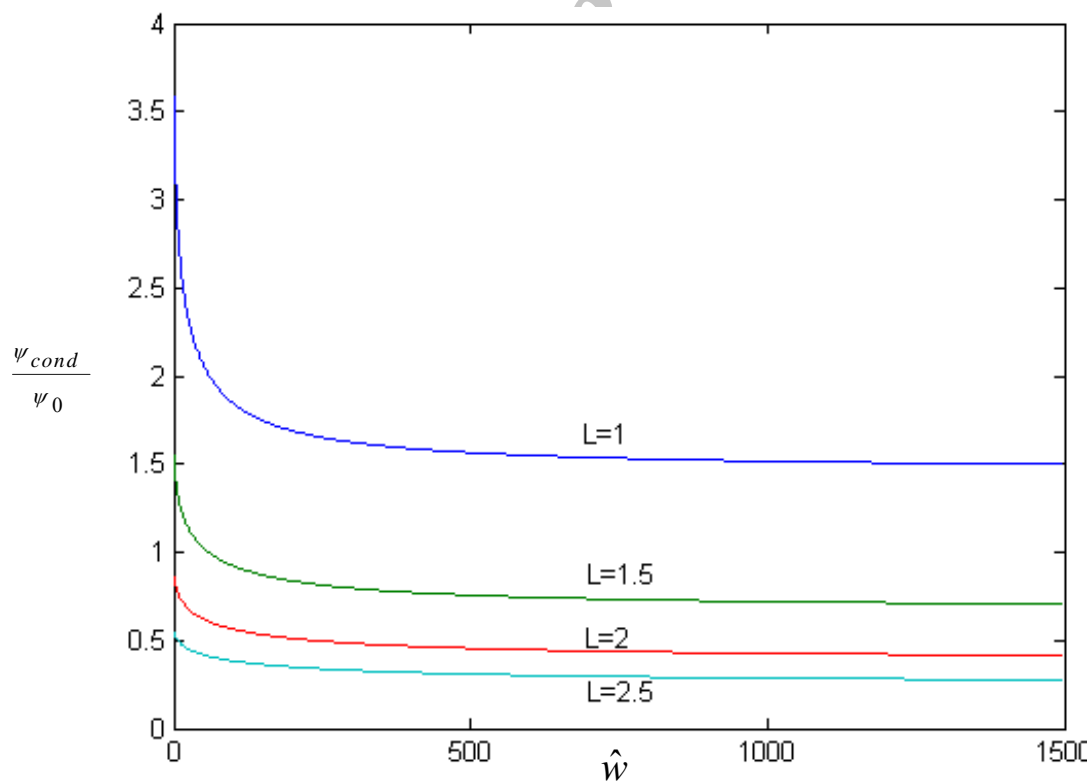
شکل ۱۷- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیتیه در مسأله اول با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۲ (نیمه پایینی)



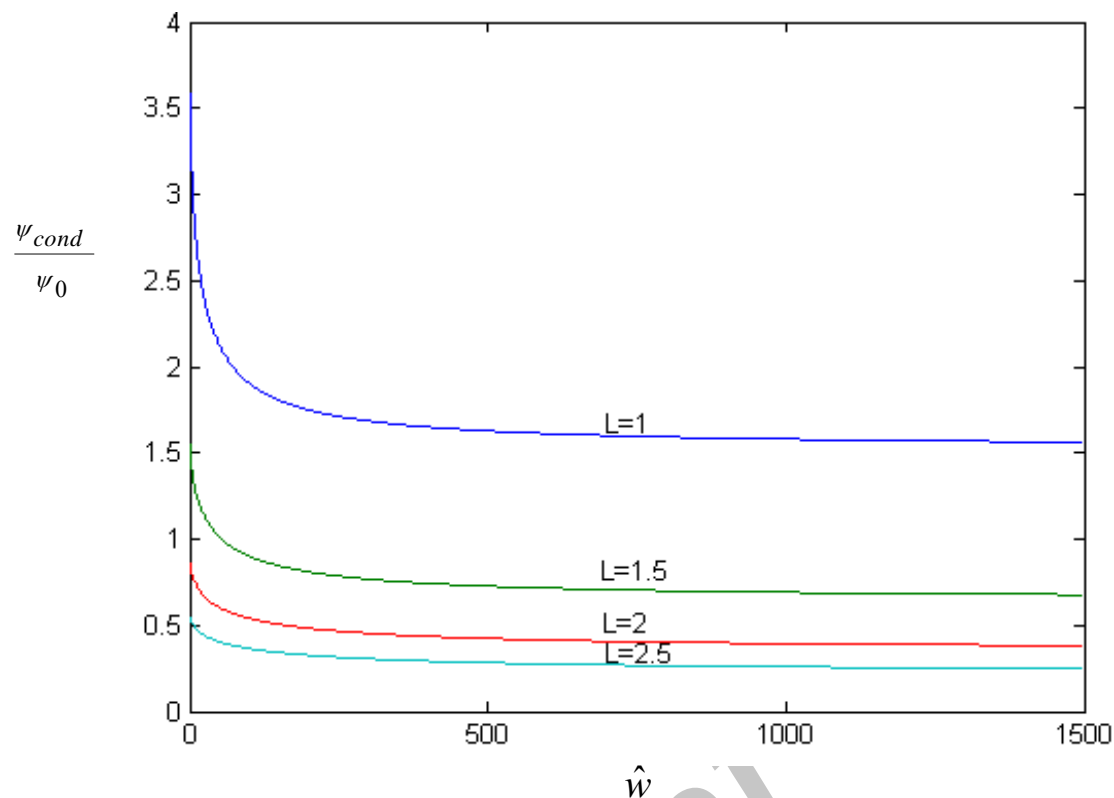
شکل ۱۸- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $w$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیتیه در مسأله اول با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۳ (نیمه بالایی)



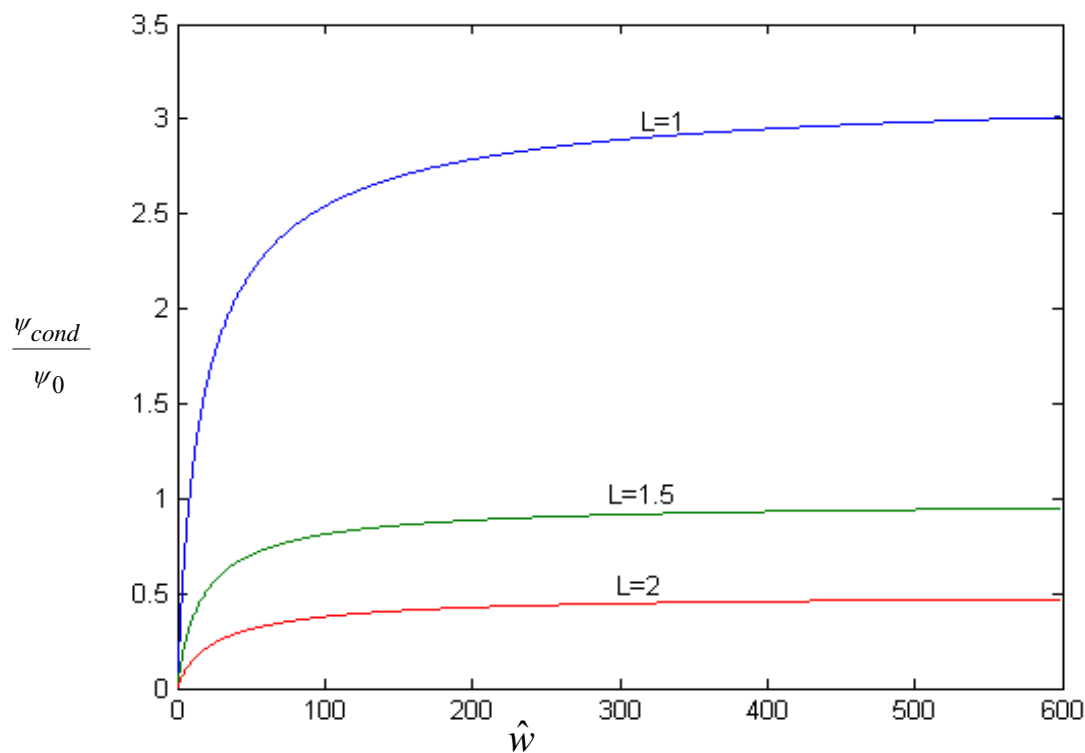
**شکل ۱۹-** نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیته در مسأله اول با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۳ (نیمه پایینی)



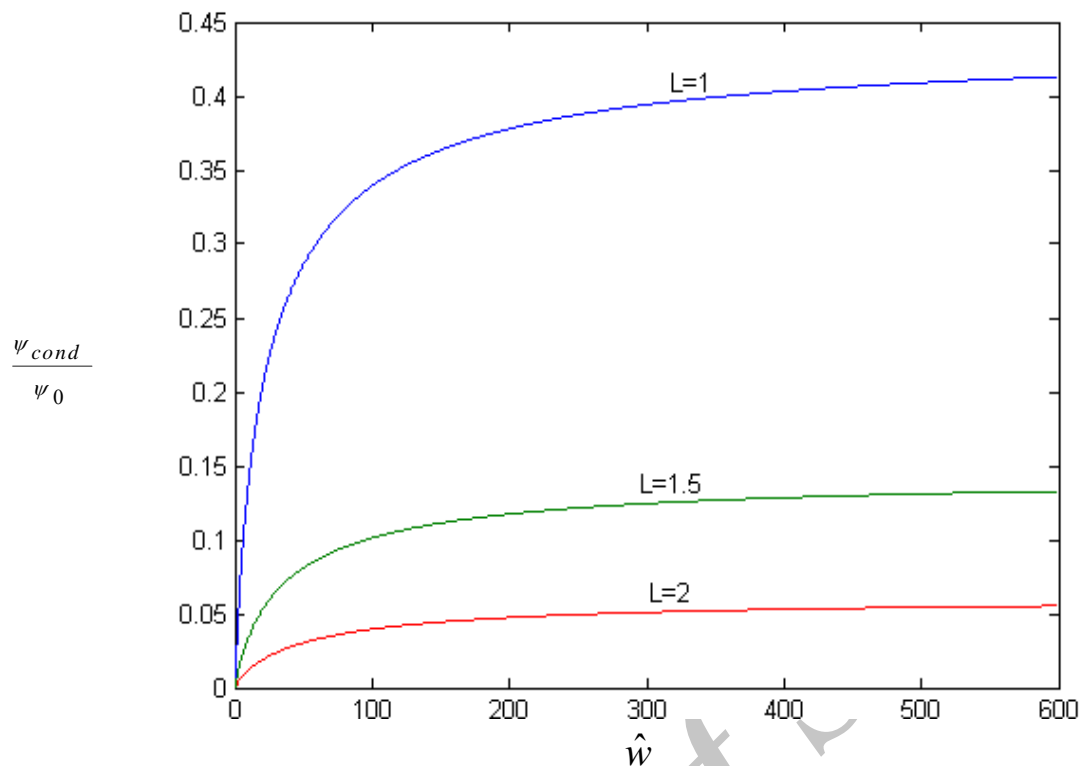
**شکل ۲۰-** نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیته در مسأله اول با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۴ (نیمه بالایی)



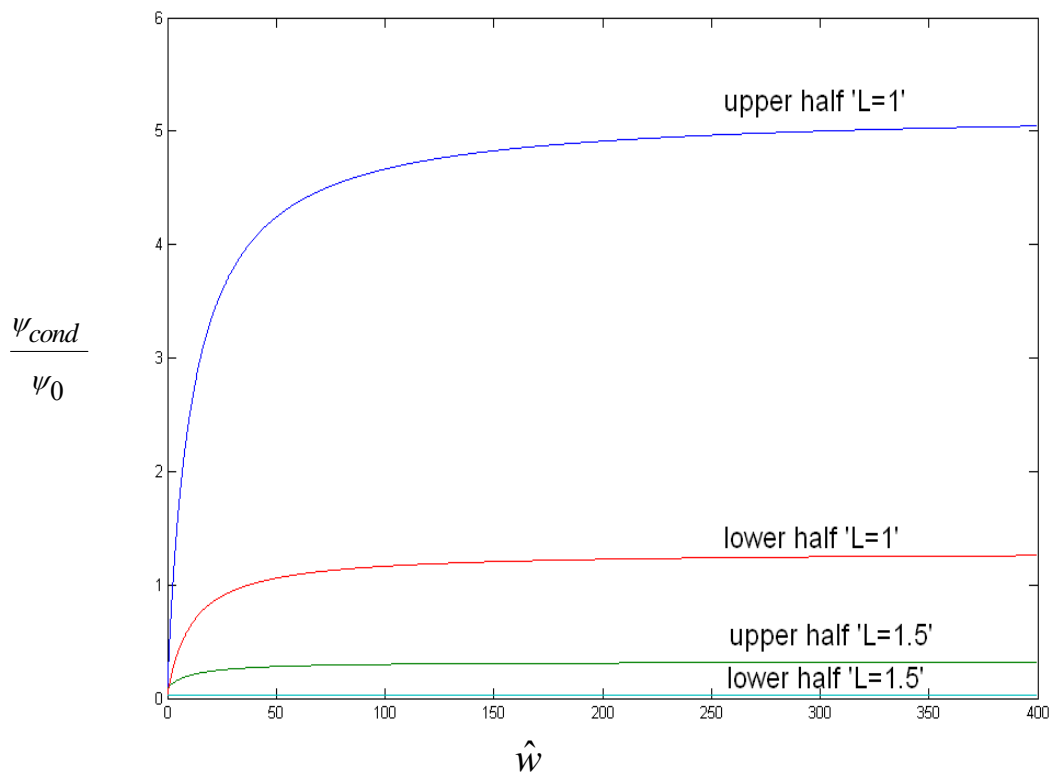
شکل ۲۱- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیتیه در مسأله اول با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۴ (نیمه پایینی)



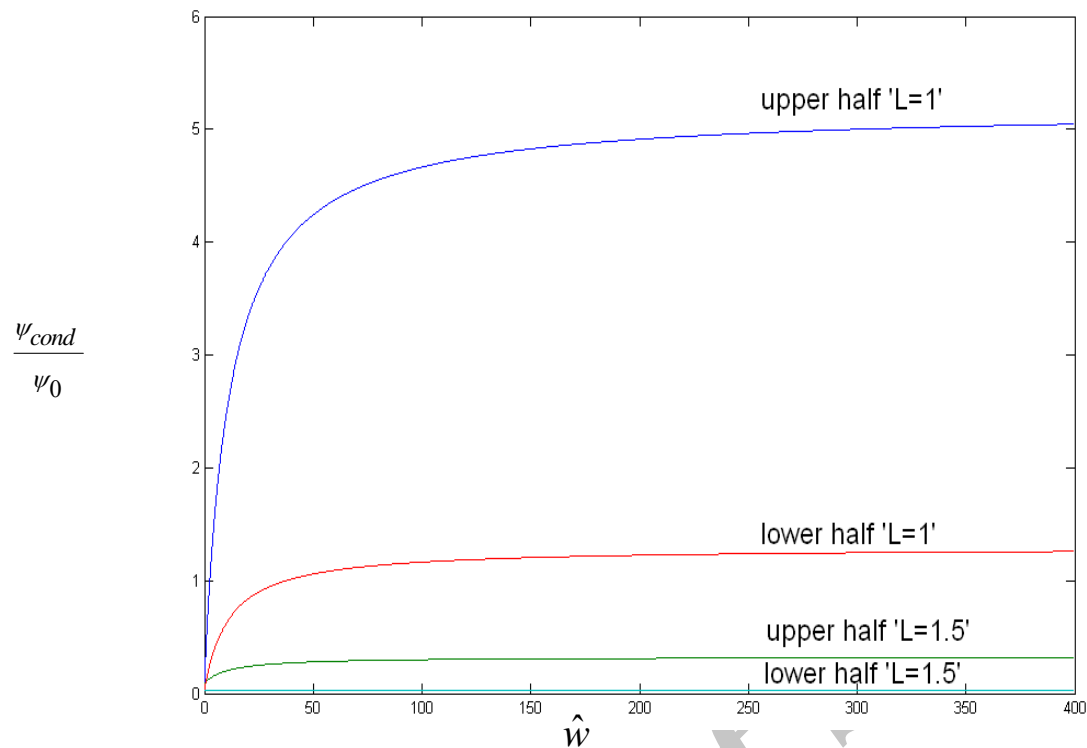
شکل ۲۲- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیتیه در مسأله اول با شرایط مرزی ۲ و اولیه ۱ (نیمه بالایی)



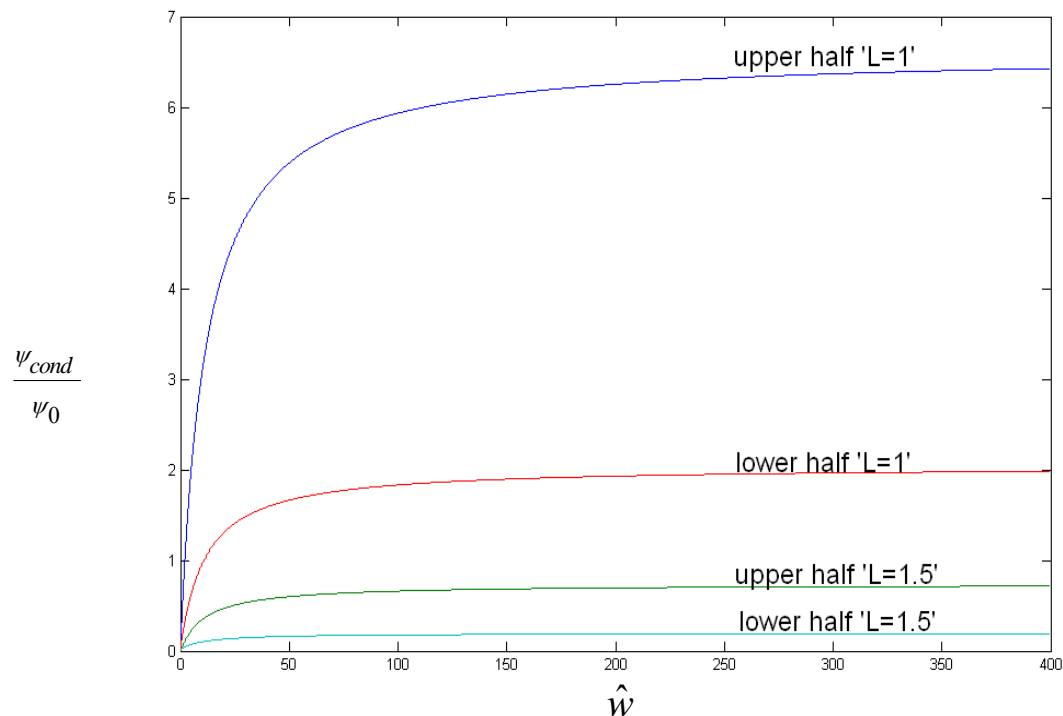
شکل ۲۳- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیته در مسأله اول با شرایط مرزی ۲ و اولیه ۱ (نیمه پایینی)



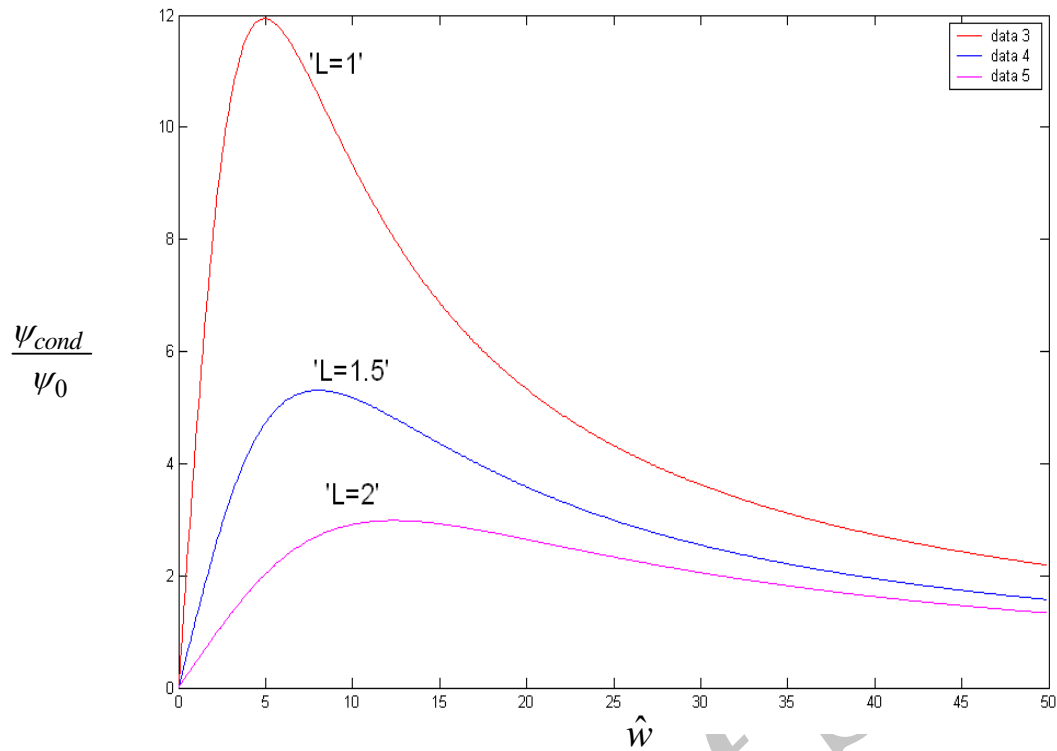
شکل ۲۴- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیته در مسأله اول با شرایط مرزی ۲ و اولیه ۲



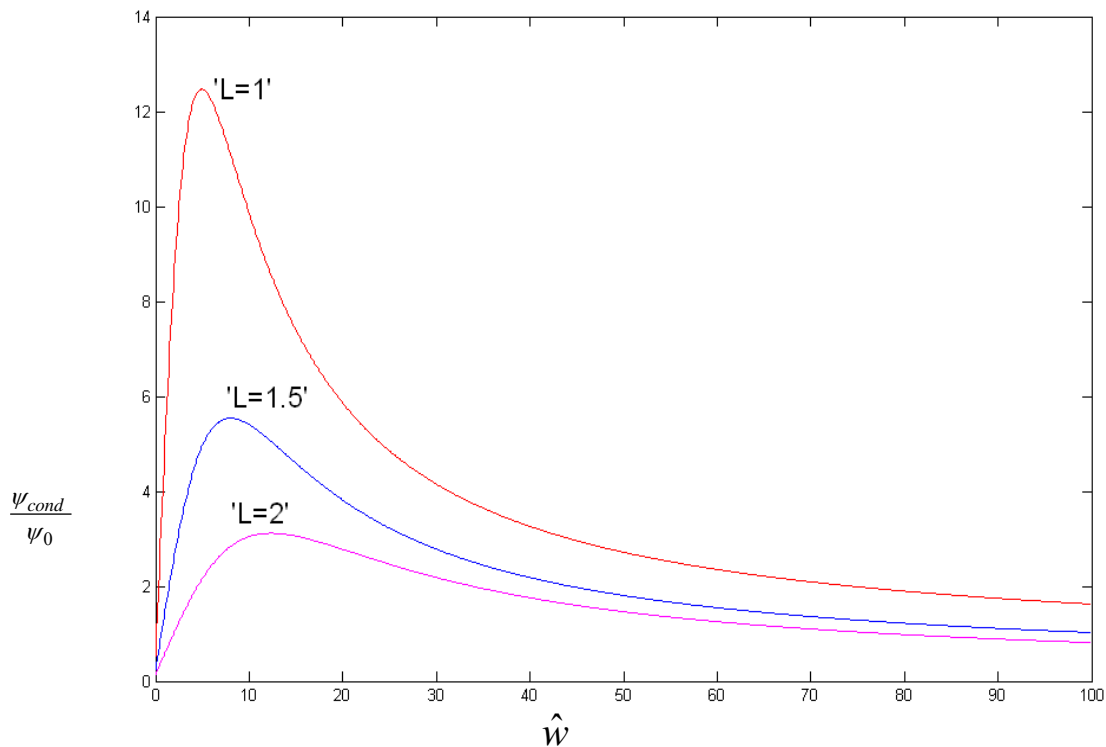
شکل ۲۵- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیتیه در مسأله اول با شرایط مرزی ۲ و اولیه ۳



شکل ۲۶- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی در ترموالاستیسیتیه در مسأله اول با شرایط مرزی ۲ و اولیه ۴

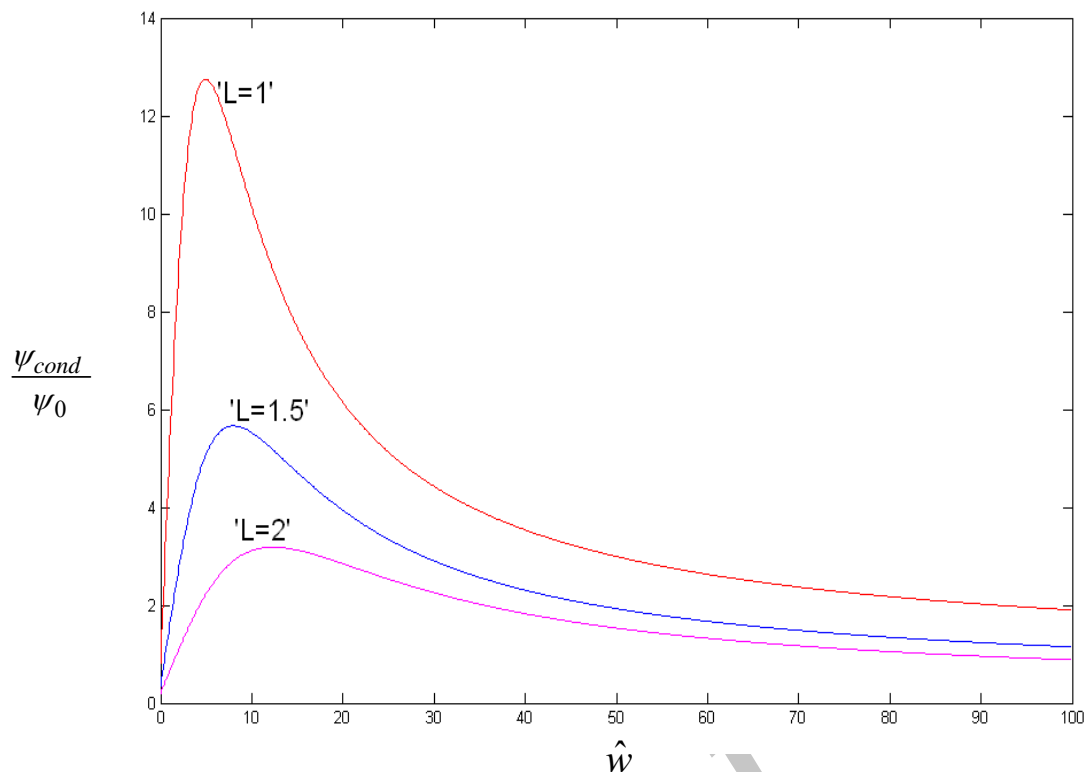


شکل ۲۷- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی متناوب در ترموالاستیسیتنه در مسأله دوم با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۱

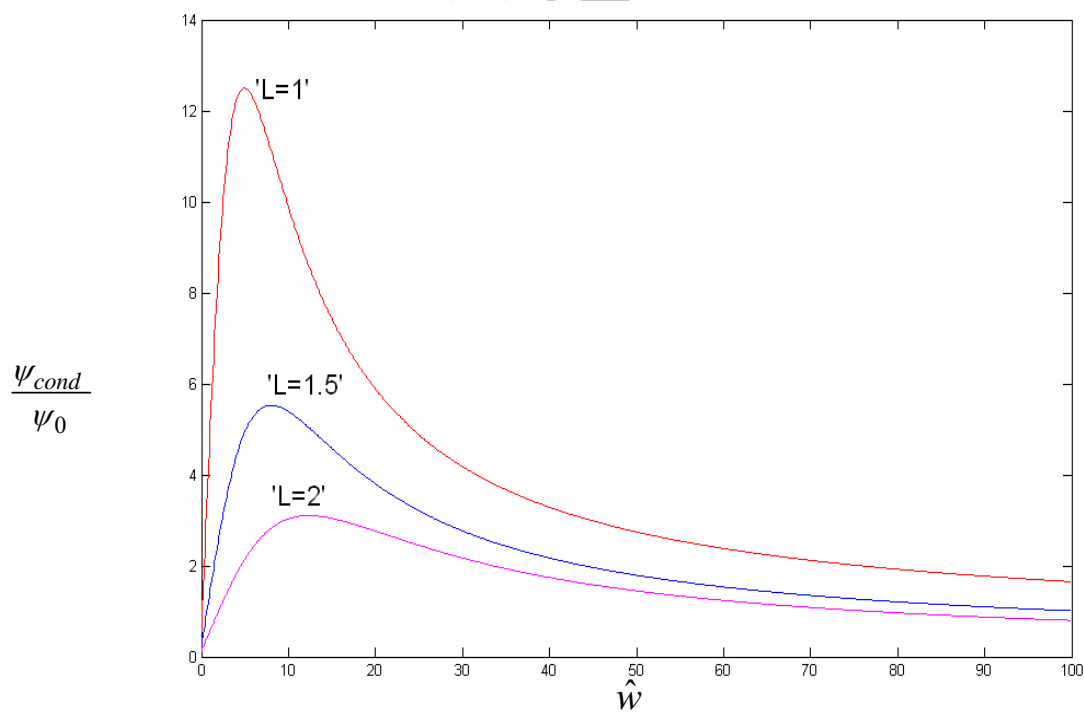


شکل ۲۸- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی متناوب در ترموالاستیسیتنه در مسأله دوم با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۲

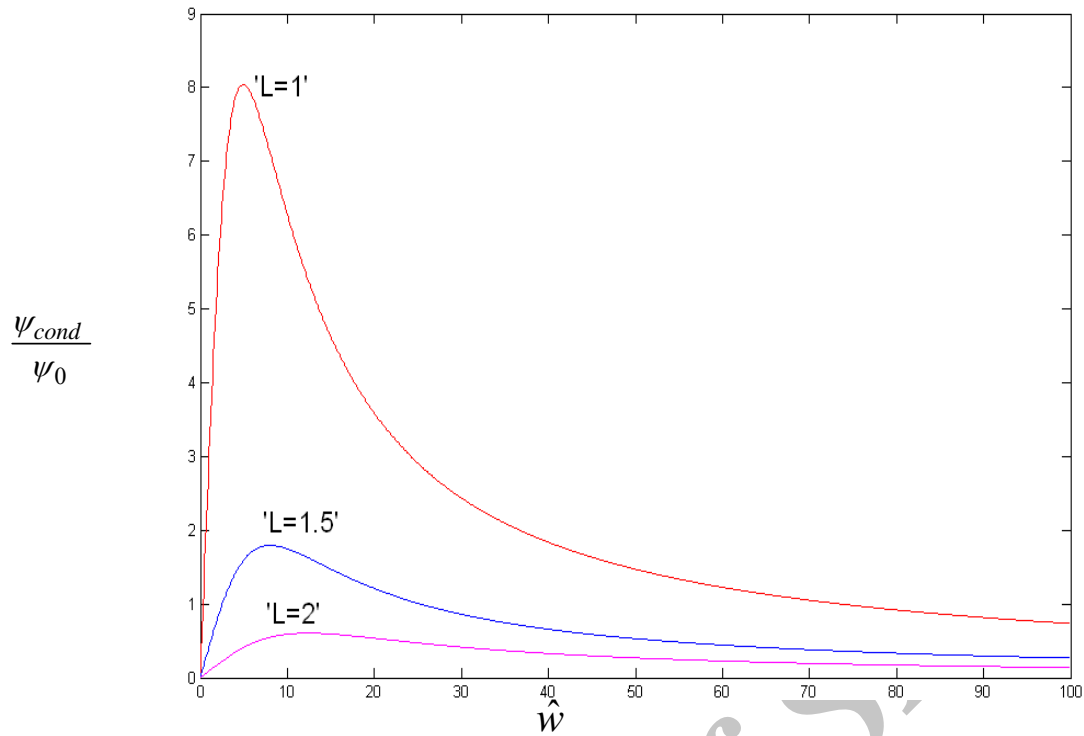




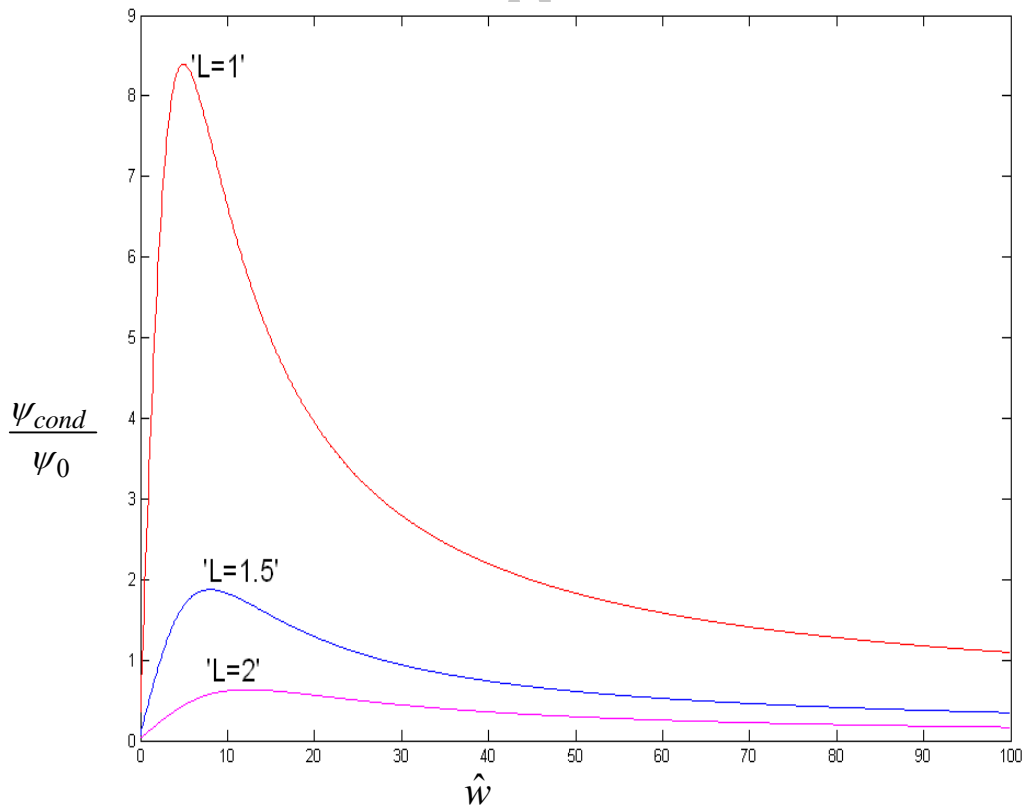
شکل ۲۹- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی متناوب در ترموالاستیسیتیه در مسأله دوم با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۳



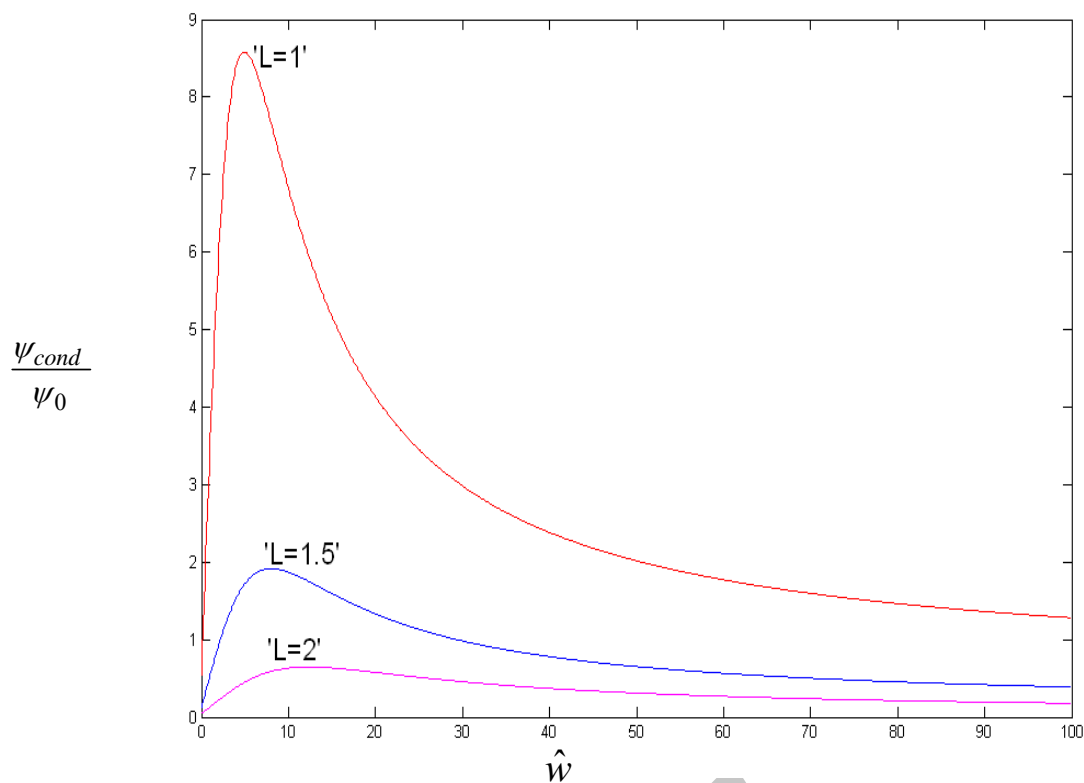
شکل ۳۰- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی متناوب در ترموالاستیسیتیه در مسأله دوم با شرایط مرزی ۱ و اولیه ۴



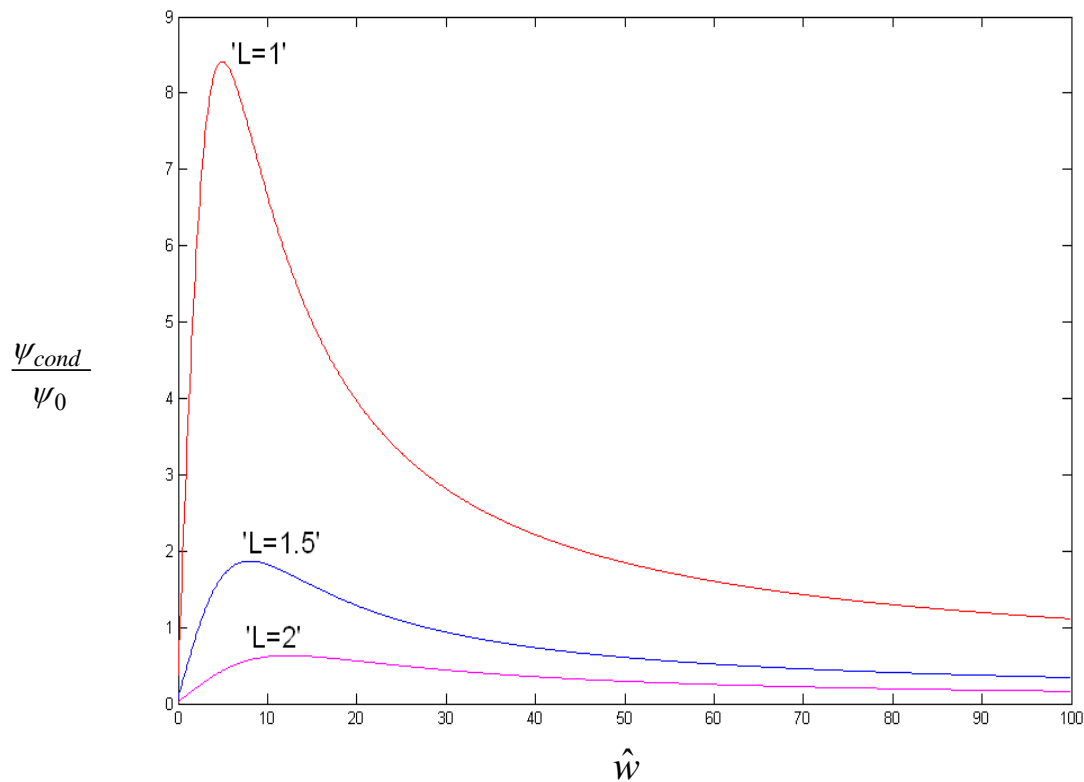
شکل ۳۱- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی متناوب در ترموالاستیسیته در مسأله دوم با شرایط مرزی ۲ و اولیه ۱



شکل ۳۲- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی متناوب در ترموالاستیسیته در مسأله دوم با شرایط مرزی ۲ و اولیه ۲



شکل ۳۳- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی متناوب در ترموالاستیسیته در مسأله دوم با شرایط مرزی ۲ و اولیه ۳



شکل ۳۴- نمودار تغییرات نسبت تولید آنتروپی ناشی از گرادیان دما به کل کار انجام شده با پارامتر  $\hat{w}$  و  $L$  در بارگذاری ترکیبی متناوب در ترموالاستیسیته در مسأله دوم با شرایط مرزی ۲ و اولیه ۴

## Abstract

Entropy generation minimization (EGM) method is used for compound loading (axial-bending) and periodic loading of a homogenous beam with thickness  $2h$  and length  $2L$ . The beam is subjected to initial uniform temperature and different boundary and initial conditions. Entropy generation is shown to decrease for small loading or high heat conduction coefficient. Also in periodic compound loading it is shown that for a particular loading the entropy generation maximizes. In order to decrease the entropy, the loading should be very less or very more than that particular value. The role of geometric parameters  $h$  and  $L$  in EGM is also discussed and it is shown when  $L$  increases entropy generation decreases.

Archive of SID