

آنالیز ترموالاستیک سیلندر جدار ضخیم FG

تحت فشار با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول

محمد عارفی^۱

دانشجوی دکترا

در این مقاله به بررسی تئوری برشی مرتبه اول برای یک سیلندر جدار ضخیم مدرج^۲ تحت فشارهای داخلی و خارجی و همچنین بار حرارتی پرداخته می شود. معادلات تنش کرنش در حالت کلی در دستگاه مختصات استوانه ای و با در نظر گرفتن کرنش حرارتی بازنویسی می شود. تنش ها و کرنش های بدست آمده در معادله انرژی قرار داده می شود. با وریشن گرفتن از رابطه انرژی نسبت به چهار متغیر در نظر گرفته شده، روابط مورد نیاز برای بررسی رفتار ترموالاستیک سیلندر استخراج می شود. نتایج برای دو حالت بررسی می شود. در حالت اول افزایش دما و در حالت دوم افزایش دما همراه با فشار داخلی در نظر گرفته می شود. نتایج بدست آمده از این مقاله با نتایج تئوری الاستیسیته مستوی مقایسه می شود. نتایج بدست آمده نشان می دهد که در یک فشار معین، افزایش دما باعث کاهش شیب تغییر شکل شعاعی و یکنواخت شدن آن می شود.

غلامحسین رحیمی^۲

دانشیار

واژه های راهنما: ترموالاستیک، دما، فشار، سیلندر، تئوری برشی مرتبه اول، انرژی

۱ - مقدمه

یکی از پرکاربردترین دسته سازه ها در حیطه مهندسی مکانیک، پوسته ها می باشند. پوسته ها سازه هایی می باشند که نسبت ضخامت به شعاع انحنایشان کوچک باشد. با بررسی کتابها و متون مربوط به پوسته ها می توان فهمید که پوسته ها در حالت کلی دارای دو دسته می باشند. دسته اول پوسته جدار نازک می باشد که برای تحمل بارهای داخل صفحه یا غشایی (membrane force) بکار می روند. در این دسته از پوسته ها از تئوری غشایی برای تحلیل استفاده می شود. این تحلیل برای پوسته، یک کرنش یا تغییر مکان و در نتیجه یک نیروی یکنواخت در راستای عمود بر ضخامت پوسته در نظر می گیرد. دسته دوم پوسته های جدار ضخیم می باشد. در این نوع پوسته، تغییر شکل ها شامل تغییر شکل های محوری و خمشی می باشد، بنابراین این نوع پوسته ها برای تحمل خمش بکار می روند. در این مقاله به بررسی دسته دوم پوسته ها یعنی پوسته های جدار ضخیم پرداخته می شود.

یکی از پرکاربردترین هندسه برای پوسته ها، پوسته های استوانه ای می باشد. این دسته از پوسته ها در مخازن، راکتورها، مبدلها و سایر تجهیزات شیمیایی، هسته ای و نظامی کاربرد دارد. بنابراین انجام این

^۱ دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، Arefi 63@ gmail.com

^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، Rahimi_gh@modares.ac.ir

^۳ Graded

تحقیق می تواند راهگشای ادامه تحقیقات بر روی بهینه سازی تجهیزات نظامی و شیمیایی و افزایش مقاومت آنها با کاربرد مواد FG باشد. در این مقاله اثر حرارت و فشار که دو موضوع بسیار مهم در تحلیل مخازن می باشند، بطور همزمان مورد بررسی قرار گرفته است.

بنابر موارد مذکور برای تحلیل پوسته ها ابتدا باید نوع تحلیل و کاربرد آن تعیین شود. پوسته جدار نازک که در آن نیروهای داخل صفحه (membrane force) مهم است و پوسته جدار ضخیم که در آن هم نیروهای داخل صفحه و هم ممان های خمشی دارای اهمیت می باشد.

اولین بار، لامی یک حل الاستیسیته را برای سیلندر جدار ضخیم متقارن محوری تحت فشار داخلی و ساخته شده از مواد ایزوتروپیک انجام داد [1]. نقدی و همکاران در سال ۱۹۵۶ با در نظر گرفتن تغییر شکل های برشی، پیشرفت موج در یک سیلندر را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند [2]. میرسکی و هرمان در سال ۱۹۵۸، با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، مسئله بالا را مورد بررسی قرار دادند [3]. در دهه ۱۹۸۰ میلادی، یک گروه دانشمند ژاپنی به سرپرستی یامانوجی و کویزومی، دسته ای از مواد را در آزمایشگاه ایجاد کردند که خاصیت آنها به طور پیوسته بر حسب مختصات تغییر می کرد. پس از این ابداع، تحقیقات بر روی آنالیز های حرارتی و ارتعاشی این دسته از مواد از اواسط دهه ۱۹۹۰ و ابتدای قرن ۲۱ شکلی کاملاً منسجم به خود گرفت [4].

توتونچو و ازترک در سال ۲۰۰۱، حل دقیقی را برای مخازن استوانه ای و کروی جدار ضخیم ساخته شده از مواد FG ارائه کردند [5]. آنها با اعمال فشار داخلی بر سیلندر و کره، تغییر مکان و تنش ایجاد شده در سیلندر و کره را محاسبه و نتایج حاصل را با نتایج سیلندر و کره ایزوتروپیک مقایسه کردند. جباری و همکاران در سال ۲۰۰۲، به آنالیز ترموالاستیک سیلندر جدار ضخیم FGM تحت بارهای حرارتی و مکانیکی پرداختند [6]. آنها تغییر خواص مواد بر حسب تغییر مکان را به صورت آکسی سیمتریک و تابعی از مختصات شعاعی در نظر گرفتند. آنها در ادامه معادله انتقال حرارت را حل کرده و جواب بدست آمده را در معادله ناویر قرار دادند. معادله ناویر غیر هموزن بدست آمده با یافتن جوابهای خصوصی و عمومی به طور کامل حل شد.

پایداری الاستیک سیلندر ساخته شده از مواد FG در سال ۲۰۰۴ توسط وو و همکاران مورد بررسی قرار گرفت [7]. روابط کرنش تغییر مکان را با استفاده از تئوری پوسته دونل و در ادامه روابط تنش کرنش را در حضور بار حرارتی بازنویسی کردند. آنها در ادامه با بدست آوردن مولفه های نیرو و ممان در سیلندر و با قرار دادن مولفه های منتهجه در روابط تعادل غیر خطی دونل، سه رابطه تعادل نهایی را بر حسب سه مولفه تغییر مکان عمومی سیلندر بدست آوردند. سپس با ترکیب ۳ رابطه، رابطه نهایی را بر حسب مولفه شعاعی سیلندر بدست آوردند. با اعمال شرایط قبل از کمانش و حدس یک تابع برای مسئله، جواب نهایی را نسبت با پارامتر مسئله مینیمایز کردند. آنها در ادامه بار بحرانی را برای افزایش یکنواخت دما بررسی کردند.

شائو در سال ۲۰۰۵، به بررسی ترموالاستیک سیلندر جدار ضخیم تحت بار مکانیکی و حرارتی پرداخت [8]. آنها سیلندر را به تعداد زیادی لایه هموزن تقسیم کردند و معادلات حاکم را برای هر لایه، جداگانه حل کرده و سپس شرایط مرزی را بین هر دو لایه و همچنین برای لایه های داخلی و خارجی بازنویسی کردند.

در سال ۲۰۰۷، قناد و همکاران به آنالیز عمومی سیلندر جدار ضخیم تحت فشار داخلی پرداختند. آنها در مقاله خود، سیلندر با سه نمونه شرایط کرنش صفحه ای، تنش صفحه ای و دو سر بسته را مورد بررسی قرار دادند [9]. آنها در ادامه به آنالیز سیلندر FGM تحت فشار داخلی و بر حسب ضرائب ناهمگنی مختلف پرداختند. بدین منظور، تئوری برشی مرتبه اول مورد استفاده قرار گرفت [10].

جباری و همکاران در سال ۲۰۰۸، به بررسی رفتار ترموالاستیک سیلندر FGM تحت بار حرارتی و مکانیکی پرداختند [11]. آنها در ابتدا توزیع حرارت حاکم بر سیلندر FGM را برای شرایط حرارتی مختلف در یک میدان دو بعدی متقارن در سیلندر ارائه کردند. سپس با اعمال توزیع حرارت در دو رابطه تعادل حاکم، دو معادله ناویر نهایی بر حسب دو متغیر تغییر مکان بدست آمد. دو معادله دیفرانسیل جزئی ناویر غیر همگن با یافتن حل های خصوصی و عمومی حل شدند.

۲- فرمولبندی

در اینجا از تئوری میرسکی-هرمان استفاده می شود. با الگو گرفتن از حل لابی می توان به حل مسئله و تعیین فرم جوابها پرداخت. در این روش متغیر Z فقط در ضرائب ظاهر خواهد شد و از جمع معادلات خارج خواهد شد. در تئوری لابی، تغییر مکانها به شکل معادله (۱) می باشد.

$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (1)$$

که r فاصله هر لایه سیلندر از محور می باشد. این فاصله را می توان به صورت حاصل جمع شعاع لایه میانی R و فاصله هر لایه نسبت به لایه میانی Z به صورت رابطه (۲) نوشت:

$$r = R + Z \quad (2)$$

با جایگذاری فرمول بالا در فرمول (۱) و بسط تیلور خواهیم داشت (۳)

$$u = c_1 (R + Z) + \frac{c_2}{R + Z} = c'_0 + c'_1 Z + \dots \quad (3)$$

این فرمولبندی به عنوان تئوری برشی مرتبه اول میرسکی-هرمان شناخته می شود. بنابراین هر میدان تغییر مکانی را می توان بر اساس تئوری تغییر شکل برشی با در نظر گرفتن دو متغیر نمایش داد. برای یک استوانه با یک میدان دو متغیره تغییر مکان شامل تغییر مکان محوری و شعاعی، میدان کلی تغییر مکان را به صورت رابطه ۴ می توان نشان داد.

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ w_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

که مولفه اول تغییر مکان محوری و مولفه دوم تغییر مکان شعاعی می باشد. دقت شود که کلیه توابع در نظر گرفته شده فقط تابع X می باشند. با داشتن توابع تغییر مکان، می توان مولفه های کرنش را بر اساس رابطه ۵ محاسبه کرد.

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w_z}{\partial z} = \phi_z \\ \varepsilon_t &= \frac{w_z}{r} = \frac{w + z \phi_z}{R + z} \\ \gamma_{xz} &= 2 \times \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

در ادامه به روابط تنش کرنش پرداخته می شود. این معادلات در حضور دما بررسی می شود. (۶)

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_t + \sigma_z)}{E} + \alpha T \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_t + \sigma_x)}{E} + \alpha T \\ \varepsilon_t &= \frac{\sigma_t - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} + \alpha T \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

با انجام عملیات جبری، می توان مولفه های تنش را بر حسب کرنش و به شکل رابطه ۷ نمایش داد:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_t + \varepsilon_z) \right\} - \frac{\alpha TE}{1-2\nu} \\ \sigma_t &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)\varepsilon_t + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right\} - \frac{\alpha TE}{1-2\nu} \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_t) \right\} - \frac{\alpha TE}{1-2\nu} \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \gamma_{xz} \right\} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

با داشتن مولفه های متناظر تنش و کرنش، عبارت انرژی کرنشی بر واحد حجم از رابطه ۸ قابل محاسبه خواهد بود:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2} \{ \varepsilon \}^T \{ \sigma \} = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_t \varepsilon_t + \tau_{xz} \gamma_{xz} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_t^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_t + \varepsilon_t \varepsilon_z) + \frac{1-2\nu}{2} \gamma_{xz}^2 \right] \\ &\quad - \frac{\alpha TE}{2(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_t + \varepsilon_z) \end{aligned} \quad (8)$$

این انرژی را می توان به دو قسمت تقسیم کرد. ترم اول انرژی ناشی از کرنش ها و تنش های مکانیکی است. ترم دوم انرژی ناشی از ترم های حرارتی می باشد. انرژی کل سیستم با انتگرال گیری از عبارت بالا در حجم مورد نظر از رابطه ۹ بدست می آید.

$$dV = 2\pi(R+z)dzdx \rightarrow U = \iiint_V \bar{u} dV$$

$$U = \pi \int_0^l \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_t^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_t + \varepsilon_t \varepsilon_z) + \frac{1-2\nu}{2} \gamma_{xz}^2 \right] (R+z) dz dx \quad (9)$$

$$-\pi \int_0^l \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{dTE}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_t + \varepsilon_z)(R+z) dz dx = \int_0^1 [U_S(x) - U_T(x)] dx$$

با قرار دادن مولفه های کرنش بر حسب تغییر مکان در رابطه بالا، عبارتهای انرژی کرنش مکانیکی و حرارتی به ترتیب زیر و بر اساس رابطه ۱۰ قابل محاسبه خواهد بود.

$$U_S = \sum_{i=1}^9 A_i(x) f_i(x) \rightarrow f_i(x) = f_i(u, w, \phi_x, \phi_z) \quad (10-1)$$

$$U_T = \sum_{i=1}^4 B_i(x) g_i(x) \rightarrow g_i(x) = g_i(u, w, \phi_x, \phi_z) \quad (10-2)$$

به دلیل طولانی بودن عبارتهای بدست آمده، توابع $A_i(x), f_i(x), B_i(x), g_i(x)$ در ضمیمه نشان داده می شود.

۲-۱ - محاسبه کار ناشی از فشارهای داخلی و خارجی

انرژی ناشی از فشار داخلی و خارجی برابر با حاصلضرب مقدار فشار در تغییر مکان می باشد. علامت منفی که در روابط فشار خارجی ایجاد می شود به علت اینست که فشار داخلی در جهت تغییر مکان w عمل می کند. در حالیکه فشار خارجی در جهت عکس تغییر مکان عمل می کند و بنابراین یک علامت منفی احتیاج دارد. روابط ۱۱ کار ناشی از فشار یکنواخت داخلی و خارجی را نشان می دهد.

$$W = \int_0^l [C_1 w + C_2 \phi_z] dx \quad (11-1)$$

$$C_1 = 2\pi(P_i(R - \frac{h}{2}) - P_0(R + \frac{h}{2})) \quad (11-2)$$

$$C_2 = 2\pi \frac{h}{2} (-P_i(R - \frac{h}{2}) - P_0(R + \frac{h}{2})) \quad (11-3)$$

۲-۲ - وریشن^۱ گرفتن از رابطه انرژی

انرژی کل سیستم برابر با تفاضل انرژی ناشی از فشار داخلی و خارجی از انرژی کرنشی حرارتی و مکانیکی سیستم می باشد. (۱۲)

¹ Variation

$$U = \int_0^l (U_S - U_T) dx - \int_0^l W' dx = \int_0^l F(u, w, x, \phi_x, \phi_z, u_x, w_x) dx$$

$$U_S = \sum_{i=1}^9 A_i(x) f_i(x), \quad U_T = \sum_{i=1}^4 B_i(x) g_i(x) \quad (12)$$

$$W' = C_1 w + C_2 \phi_z, \quad C_1 = 2\pi(P_i(R - \frac{h}{2}) - P_0(R + \frac{h}{2})), \quad C_2 = 2\pi \frac{h}{2} (-P_i(R - \frac{h}{2}) - P_0(R + \frac{h}{2}))$$

همانطور که در قبل هم بیان شد، مسئله شامل ۴ متغیر می باشد. رابطه اولر را به شکل رابطه (۱۳) می توان اعمال کرد.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_x} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \phi_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \phi_z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right)} \right) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

که تابع F به صورت رابطه (۱۴) نشان داده می شود.

$$F = U_S - U_T - W = \sum_{i=1}^9 A_i(x) f_i(x) - \sum_{i=1}^4 B_i(x) g_i(x) - C_1 w - C_2 \phi_z \quad (14)$$

عبارتهای بدست آمده را می توان بر حسب منتهای نیرو و ممان نمایش داد. (۱۵) با این کار حجم زیادی از فرمولها کاسته می شود.

$$N_x = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad N_t = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \sigma_t dz, \quad N_z = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

$$M_x = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz, \quad M_\theta = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \sigma_\theta z dz, \quad M_{xz} = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} z \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (15)$$

$$Q_z = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \tau_{xz} dz$$

روابط اساسی که بر رفتار ترموالاستیک سیلندر جدار ضخیم تحت فشارهای داخلی و خارجی حاکم است، با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر قابل بیان می باشد.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= 0 \\ N_x - \frac{\partial}{\partial x} [RQ_z] + \frac{1}{2\pi} B_3(x) &= [P_i(R - \frac{h}{2}) - P_o(R + \frac{h}{2})] \\ Q_z - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} [RM_x + \frac{B_2(x)}{2\pi}] &= 0 \\ [RN_z + \frac{B_1(x)}{2\pi}] + [M_\theta + \frac{B_4(x)}{2\pi}] - \frac{\partial}{\partial x} [RM_{zx}] &= \frac{h}{2} [-P_i(R - \frac{h}{2}) - P_o(R + \frac{h}{2})] \end{aligned} \right. \quad (۱۶)$$

که توابع $B_i(x)$ به صورت رابطه ۱۷ قابل تعریف می باشد.

$$\left\{ \begin{aligned} B_1(x) &= \pi \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\alpha(x,z)(R+z)E(x,z)T(x,z)}{1-2\nu} dz \\ B_2(x) &= \pi \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} z \frac{\alpha(x,z)(R+z)E(x,z)T(x,z)}{1-2\nu} dz \\ B_3(x) &= \pi \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\alpha(x,z)E(x,z)T(x,z)}{1-2\nu} dz \\ B_4(x) &= \pi \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} z \frac{\alpha(x,z)E(x,z)T(x,z)}{1-2\nu} dz \end{aligned} \right. \quad (۱۷)$$

همانطور که در رابطه ۱۷ ملاحظه می شود برای یک سیلندر که اثرات دمایی مساوی صفر قرار داده شود (افزایش دما برابر با صفر باشد) و فشار خارجی برابر با صفر باشد دستگاه معادلات بدست آمده همان دستگاه معادلات مقاله مرجع [10] می باشد. سیستم معادلات بالا را می توان بر حسب چهار متغیر در نظر گرفته شده نمایش داد. با این کار یک سیستم معادلات مرتبه دوم چهار متغیره خواهیم داشت که برای یک سیلندر که توزیع خواص آن تابع X نباشد، به صورت رابطه ۱۸ قابل نمایش خواهد بود.

$$[G_1] \frac{d^2}{dx^2} \{X\} + [G_2] \frac{d}{dx} \{X\} + [G_3] \{X\} = \{F\} \rightarrow \{X\} = [u \quad \phi_x \quad w \quad \phi_z]^T \quad (۱۸)$$

با مقداری عملیات جبری بر روی ماتریس ها، می توان آنها را به شکل زیر نمایش داد.

$$G_1 = \begin{bmatrix} (1-\nu)A_1 & (1-\nu)A_2 & 0 & 0 \\ (1-\nu)A_2 & (1-\nu)A_3 & \frac{(1-2\nu)}{2}A_1 & \frac{(1-2\nu)}{2}A_2 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2}A_2 & \frac{(1-2\nu)}{2}A_3 \end{bmatrix} \quad (۱۹-۱)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \nu A_4 & \nu (A_6 + A_1) \\ 0 & 0 & -\frac{(1-2\nu)}{2} A_1 + \nu A_6 & -\frac{(1-2\nu)}{2} A_2 + \nu (A_2 + A_9) \\ -\nu A_4 & -\nu A_6 + \frac{(1-2\nu)}{2} A_1 & 0 & 0 \\ -\nu (A_1 + A_6) & -\nu (A_2 + A_9) + \frac{(1-2\nu)}{2} A_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19-2)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(1-2\nu)}{2} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\nu)A_5 & -(1-\nu)A_7 - \nu A_4 \\ 0 & 0 & -(1-\nu)A_7 - \nu A_4 & -(1-\nu)(A_8 + A_1) - 2\nu A_6 \end{bmatrix} \quad (19-3)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial B_1(x)}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial B_2(x)}{\partial x} \\ \frac{-B_3(x) - C_1(x)}{2} \\ \frac{B_1(x) + B_4(x)}{2} + \frac{-C_2(x)}{2} \end{bmatrix} \quad (19-4)$$

معادلات و ماتریس های بالا کامل ترین معادلات حاکم استخراج شده برای بررسی رفتار سیلندرهای FG می باشد. برای مقایسه نتایج حاضر با نتایج قبلی یکی از ماتریس های بالا و ماتریس نیرو برای یک استوانه ایزوتروپیک محاسبه می شود.

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(1-2\nu)}{2} Rh & -(1-\nu) \ln \frac{r_0}{r_i} & -h - (1-\nu)R \ln \frac{r_0}{r_i} \\ 0 & 0 & -h - (1-\nu)R \ln \frac{r_0}{r_i} & -(1-\nu)R^2 \ln \frac{r_0}{r_i} \end{bmatrix} \quad (20-1)$$

$$F = F_T + F_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\alpha ET}{2(1-2\nu)} h \\ -\frac{\alpha ET}{2(1-2\nu)} Rh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(P_i(R - \frac{h}{2}) - P_o(R + \frac{h}{2})) \\ -\frac{h}{2} [-P_i(R - \frac{h}{2}) - P_o(R + \frac{h}{2})] \end{bmatrix} \quad (20-2)$$

همانطور که ملاحظه می شود با صفر قرار دادن افزایش دما و فشار خارجی، معادلات بدست آمده همان معادلات مقاله مرجع [10] خواهد بود.

۳- نتایج عددی و مقایسه

در این قسمت نتایج آنالیز ترمو الاستیک در حالت‌های مختلف بررسی می شود و نتایج بدست آمده با نتایج قبلی مقایسه می شود. در این مقاله فرض می شود که فقط مدول الاستیسیته در جهت شعاعی مدرج^۱ شده باشد.

$$E = E_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^n \xrightarrow{r=R+z} E = \frac{E_i}{r_i^n} (R+z)^n \quad (21)$$

شعاع داخلی و خارجی و میانی به ترتیب برابر است با:

$$a = r_i = 0.04m, b = r_o = 0.06m, R = 0.05 \quad (22)$$

سایر مقادیر عددی به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$E_i = 2 \times 10^{11}, \alpha = 5 \times 10^{-6}, \nu = 0.3 \quad (23)$$

۳-۱- بررسی نتایج فقط در حضور دما

در این قسمت فشار داخلی و خارجی برابر با صفر در نظر گرفته می شود. تنها اثر دما در این قسمت مد نظر قرار می گیرد. به عنوان مثال برای $n=1$ نمودار تغییر مکان شعاعی در راستای ضخامت سیلندر ترسیم شده است. (شکل ۲) این نمودار برای افزایش دمای ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ درجه سانتی گراد ترسیم شده است. همانطور که در نمودار ۲ ملاحظه می شود، افزایش دما اثر خطی بر تغییر مکان شعاعی دارد یعنی با ۲ برابر شدن افزایش دمای یکنواخت، تغییر مکان شعاعی نیز به همان ضریب افزایش می یابد. نمودار ۳ اثر ضریب ناهمگنی را برای یک افزایش دمای یکسان نشان می دهد.

۳-۲- بررسی نتایج در حضور دما و فشار داخلی

در این قسمت، تغییر مکان شعاعی سیلندر به ازای n های مختلف و برای دو مقدار افزایش دمای ۱۰ و ۱۰۰ درجه محاسبه می شود. شکل های ۴ و ۵ تغییر مکان شعاعی سیلندر در راستای ضخامت را به ترتیب برای افزایش دمای یکنواخت ۱۰ و ۱۰۰ درجه سانتیگراد و با فشار داخلی ۸۰ مگا پاسگال را نشان می دهد. با مقایسه دو نمودار می توان اثر افزایش یکنواخت دما را بر روی تغییر مکان شعاعی یافت. همانگونه که ملاحظه می شود، با افزایش دما از ۱۰ به ۱۰۰ درجه سانتیگراد، تغییر مکان شعاعی در لایه خارجی به مراتب بیشتر از لایه داخلی سیلندر می باشد. در نتیجه از شیب منفی نمودار تغییر مکان شعاعی با افزایش دما کاسته می شود.

در نمودار شماره ۶ تغییر مکان شعاعی در سیلندر FG فقط تحت فشار داخلی نشان داده می شود. این نمودار با نمودار مرجع [10] کاملاً یکسان می باشد.

^۱Graded

۳-۳ - برآورد نتایج با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی^۱

به منظور مقایسه نتایج مقاله حاضر با نتایج بدست آمده از تئوری الاستیسیته مستوی، در این قسمت نتایج مقاله مرجع ارائه می شود. [6] رابطه دیفرانسیلی حاکم و حل آن برای رفتار یک سیلندر مدرج با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی به صورت معادلات ۲۴ می باشد

$$u'' + \frac{1+m_1}{r}u' + \left(\frac{\nu m_1}{1-\nu} - 1\right)u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha m_1 T}{r} \quad (24-1)$$

$$u = u_g + u_p = B_1' r^{n_1} + B_2' r^{n_2} + u_p \quad (24-2)$$

که ثابت های انتگرال گیری اند. n_1, n_2 ریشه های رابطه مشخصه^۲ می باشد. با اعمال شرایط مرزی بر تغییر شکلها به صورت رابطه ۳-۲۴ جواب مسئله قابل ترسیم و مقایسه می باشد.

$$B.C \begin{cases} \sigma_r = -P_i & r=r_i \\ \sigma_r = 0 & r=r_o \end{cases} \quad (24-3)$$

با محاسبه ثابت انتگرال گیری نتایج بدست آمده از تئوری الاستیسیته مستوی با نتایج حاضر (تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول) مقایسه می شود. شکل شماره ۷ نتایج دو تئوری را برای یک سیلندر کاملاً مشابه نشان می دهد. شکل ۸ درصد اختلاف بین دو نتیجه را نشان می دهد. این شکل نشان می دهد که بیشترین درصد اختلاف بین دو تئوری حدود ۵,۸۸ درصد و در میانه دیواره سیلندر اتفاق می افتد. اختلاف بوجود آمده بین نتایج حاصل از دو تئوری ناشی از فرض تغییر شکل اعمال شده در رابطه ۴ می باشد. در تئوری تغییر شکل برشی، فرض می شود که تغییر شکل تابعی خطی از موقعیت شعاعی می باشد. در حالیکه در تئوری الاستیسیته مستوی، تغییر شکل از حل رابطه تعادل بدست می آید. همانطور که ملاحظه می شود اختلاف بین نتایج در دو انتها به حداقل می رسد.

۴- بحث و نتیجه گیری

نتایجی که از این مقاله قابل استخراج می باشد را می توان به صورت زیر دسته بندی کرد.

۱- در این مقاله فرمولبندی ترموالاستیک سیلندر جدار ضخیم تحت فشار و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول میرسکی هرمان ارائه شد. در مقالات قبلی اثر بار حرارتی بر رفتار الاستیک در نظر گرفته نشده بود و در این مقاله برای اولین بار اینکار انجام شد.

۲- در قسمت اول به یافتن یک فرمولبندی کلی برای بررسی رفتار ترموالاستیک سیلندر تحت فشار پرداخته شد. در نهایت، معادلات بدست آمده شامل یک دستگاه ۴ معادله و ۴ مجهول از مرتبه ۲ بدست آمد. معادلات حاصل با معادلات مرجع [10] مقایسه شد و درستی نتایج حاضر تایید شد. برای بررسی بیشتر و دقیقتر و مقایسه، این نتایج با نتایج قبلی (تئوری الاستیسیته مستوی) مقایسه شد. [10]

۳- معادلات بدست آمده در دو حالت مورد بررسی قرار گرفت. در حالت اول فقط اثر افزایش دما بر تغییر شکلها مطالعه شد. در حالت دوم علاوه بر افزایش دما، فشار داخلی نیز بر سیلندر اعمال شد. نتایج

⁶ Plane Elasticity Theory

⁷ Characteristic equation

حاصل نشان می دهد که افزایش دما در یک فشار معین، شیب تغییر شکل شعاعی را کاهش می دهد و برای بعضی مقادیر ضرایب ناهمگنی، تغییر شکل کاملاً یکنواخت می شود.

مراجع

- [1] Timoshenko, S.P., "*Strength of Materials*", Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed, New York, Van Nostrand Reinhold Co, (1976).
- [2] Naghdi, P.M., and Cooper, R.M., "Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Shells Including the Effects of Transverse Shear and Rotary Inertia", *J. Acoustical Sc. America*; Vol. 28, No. 1, pp. 56-63, (1956).
- [3] Mirsky, I., and Hermann, G., "Axially Motions of Thick Cylindrical Shells", *J. Appl. Mech*, Vol. 25, pp. 97-102, (1958).
- [4] Yamanouchi, M., Koizumi, M., and Shiota, I., *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Graded Materials*, Sendai, Japan, (1990).
- [5] Tutuncu, N., and Ozturk, M., "Exact Solution for Stresses in Functionally Graded Pressure Vessels Composites", Part B, (Engineering), Vol. 32, pp. 683-686, (2001).
- [6] Jabbari, M., Sohrabpour, S., and Eslami, M.R., "Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Radially Symmetric Loads", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, pp. 493-497, (2002).
- [7] Lanhe, W., Zhiqing, J., and Jun, L., "Thermoelastic Stability of Functionally Graded Cylindrical Shells", *Composite Structures*, Vol. 70, pp. 60-68, (2005).
- [8] Shao, Z.S., "Mechanical and Thermal Stresses of a Functionally Graded Circular Hollow Cylinder with Finite Length", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, pp. 155-163, (2005).
- [9] مهدی قناد و غلامحسین رحیمی و سیامک اسماعیل زاده، حل عمومی استوانه های جدار کلفت متقارن محوری از مواد FG بر مبنای تئوری الاستیسیته مستوی، *مجله فنی و مهندسی مدرس*، (۱۳۸۷).
- [10] مهدی قناد و غلامحسین رحیمی و سیامک اسماعیل زاده، حل عمومی استوانه های جدار کلفت متقارن محوری از مواد FG بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، *مجله فنی و مهندسی مدرس*، (۱۳۸۷).
- [11] Jabbari, M., Bahtui, A., and Eslami, M.R., "Axisymmetric Mechanical and Thermal Stresses in Thick Short Length FGM Cylinders", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, pp. 296-306, (2009).

فهرست نمادهای انگلیسی

- I : شعاع هر لایه سیلندر
 Z : موقعیت هر لایه سیلندر نسبت به لایه میانی
 R : شعاع لایه میانی سیلندر
 u_x : مولفه محوری تغییر شکل
 w_z : مولفه شعاعی تغییر شکل
 u : مولفه انتقالی (جابجایی) تغییر شکل محوری
 w : مولفه انتقالی (جابجایی) تغییر شکل شعاعی
 T : افزایش دما
 U : انرژی کل
 \bar{u} : انرژی بر واحد حجم
 dV : دیفرانسیل حجم (المان حجمی)
 $h(x)$: ضخامت سیلندر
 $U_s(x)$: ترم مکانیکی انرژی کرنشی
 $U_T(x)$: ترم حرارتی انرژی کرنشی
 $f_i(x)$: تابع عمومی از مولفه های تغییر شکل و چرخش در ترم مکانیکی انرژی
 $A_i(x)$: تابع خواص عمومی در ترم مکانیکی انرژی
 $g_i(x)$: تابع عمومی از مولفه های تغییر شکل و چرخش در ترم حرارتی انرژی
 $B_i(x)$: تابع خواص عمومی در ترم حرارتی انرژی
 G : مدول برشی
 E : مدول الاستیسیته
 P_i : فشار داخلی
 P_0 : فشار خارجی
 W : کار خارجی در اثر فشار های خارجی
 C_1 : نیروی عمومی
 C_2 : ممان عمومی
 F : تابع پتانسیل عمومی
 N_x : نتیجه نیروی محوری
 N_t : نتیجه نیروی مماسی
 N_z : نتیجه نیروی شعاعی
 M_x : نتیجه ممان محوری
 M_θ : نتیجه ممان مماسی
 M_{xz} : نتیجه ممان برشی

Q_z : منتهجه تنش های برشی
 $\{X\}$: بردار عمومی تغییر شکل
 $[G_1]$: ماتریس 4×4 خواص مکانیکی
 $[G_2]$: ماتریس 4×4 خواص مکانیکی
 $[G_3]$: ماتریس 4×4 خواص مکانیکی
 $\{F\}$: بردار نیروی عمومی مکانیکی و حرارتی
 E_i : مدول الاستیسیته در سطح داخلی سیلندر
 a و r_i : شعاع داخلی سیلندر
 b و r_o : شعاع خارجی سیلندر
 n, m_1 : اندیس نا همگنی

فهرست نمادهای یونانی

ϕ_x : مولفه چرخشی تغییر شکل محوری
 ϕ_z : مولفه چرخشی تغییر شکل شعاعی
 ε_x : کرنش محوری
 ε_z : کرنش شعاعی
 ε_t : کرنش مماسی
 ε_{xz} : کرنش برشی
 σ_x : تنش محوری
 σ_z : تنش شعاعی
 σ_t : تنش محوری
 τ_{xz} : تنش برشی
 α : ضریب انبساط حرارتی

Archive of SID

ضمیمه ۱:

در این قسمت توابع یاد شده در متن اصلی ارائه می شود. این روابط به دلیل طولانی بودن در متن اصلی ارائه نشده است.

$$A_1(x) = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\pi E(x, z)(R+z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} dz, \quad f_1 = (1-\nu)[\phi_z^2 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2] + 2\nu[\phi_z \times (\frac{\partial u}{\partial x})] + \frac{1-2\nu}{2}[\phi_x^2 + (\frac{\partial w}{\partial x})^2 + 2\phi_x \frac{\partial w}{\partial x}]$$

$$A_2(x) = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\pi E(x, z)z(R+z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} dz, \quad f_2 = (1-\nu)[2\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + 2\nu[\phi_z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}] + \frac{1-2\nu}{2}[2\phi_x \frac{\partial \phi_z}{\partial x} + 2\frac{\partial \phi_z}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}]$$

$$A_3(x) = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\pi E(x, z)z^2(R+z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} dz, \quad f_3 = (1-\nu)[(\frac{\partial \phi_x}{\partial x})^2] + \frac{1-2\nu}{2}[(\frac{\partial \phi_z}{\partial x})^2]$$

$$A_4(x) = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\pi E(x, z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} dz, \quad f_4 = 2\nu[w\phi_z + w\frac{\partial u}{\partial x}]$$

$$A_5(x) = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\pi E(x, z)}{(R+z)(1+\nu)(1-2\nu)} dz, \quad f_5 = (1-\nu)[w^2]$$

$$A_6(x) = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\pi E(x, z)z}{(1+\nu)(1-2\nu)} dz, \quad f_6 = 2\nu[\phi_z^2 + w\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \phi_z \frac{\partial u}{\partial x}]$$

$$A_7(x) = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\pi E(x, z)z}{(R+z)(1+\nu)(1-2\nu)} dz, \quad f_7 = (1-\nu)[2\phi_z w]$$

$$A_8(x) = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\pi E(x, z)z^2}{(R+z)(1+\nu)(1-2\nu)} dz, \quad f_8 = (1-\nu)[\phi_z^2]$$

$$A_9(x) = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\pi E(x, z)z^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} dz, \quad f_9 = 2\nu[\phi_z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}]$$

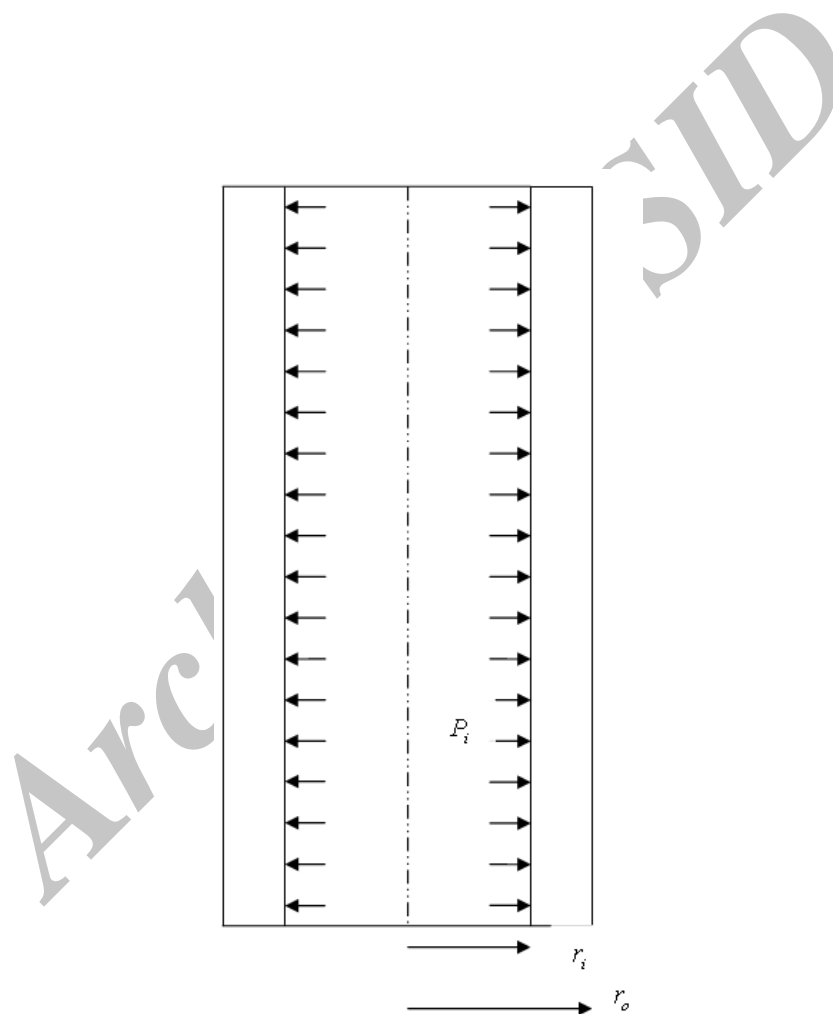
$$B_1(x) = \pi \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\alpha(x, z)(R+z)E(x, z)T(x, z)}{1-2\nu} dz, \quad g_1 = \phi_z + \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$B_2(x) = \pi \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} z \frac{\alpha(x, z)(R+z)E(x, z)T(x, z)}{1-2\nu} dz, \quad g_2 = \frac{\partial \phi_x}{\partial x}$$

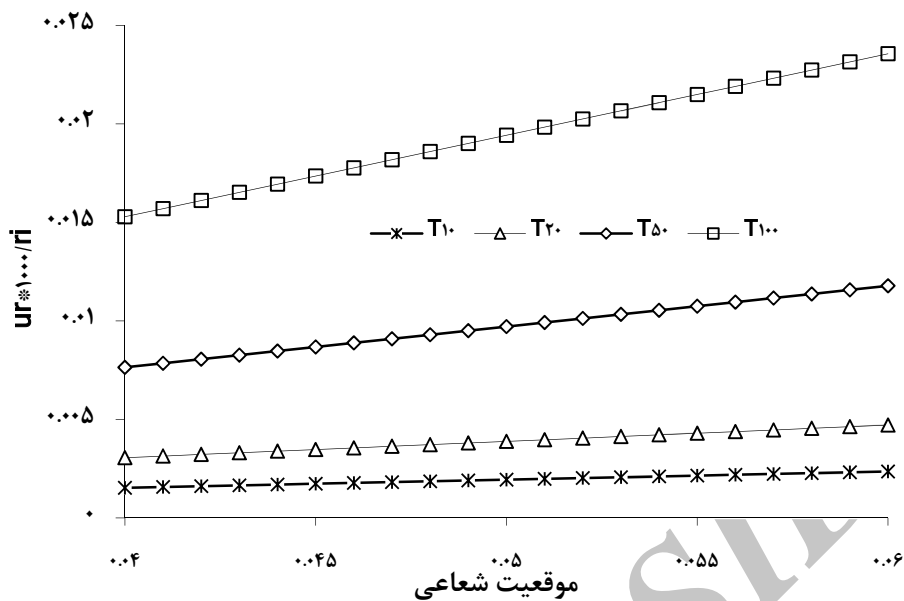
$$B_3(x) = \pi \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \frac{\alpha(x, z)E(x, z)T(x, z)}{1-2\nu} dz, \quad g_3 = w$$

$$B_4(x) = \pi \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} z \frac{\alpha(x, z)E(x, z)T(x, z)}{1-2\nu} dz, \quad g_4 = \phi_z$$

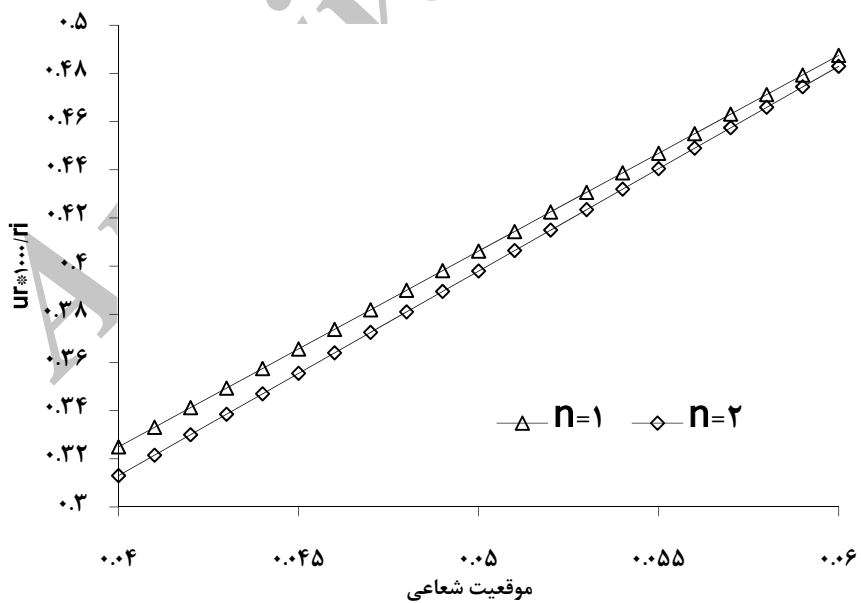
شکلها



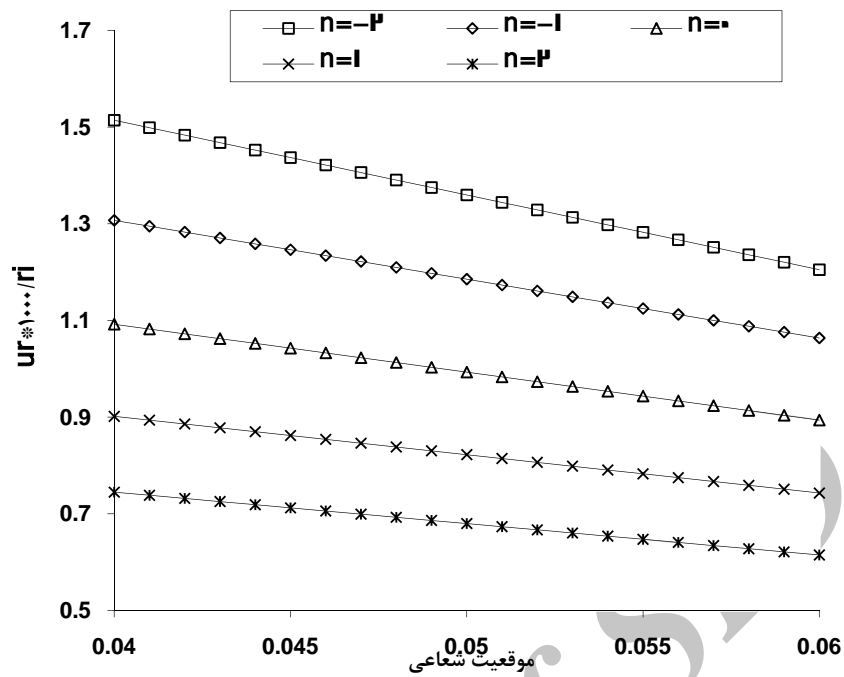
شکل ۱- نمونه شماتیک یک سیلندر جدار ضخیم تحت فشار داخلی



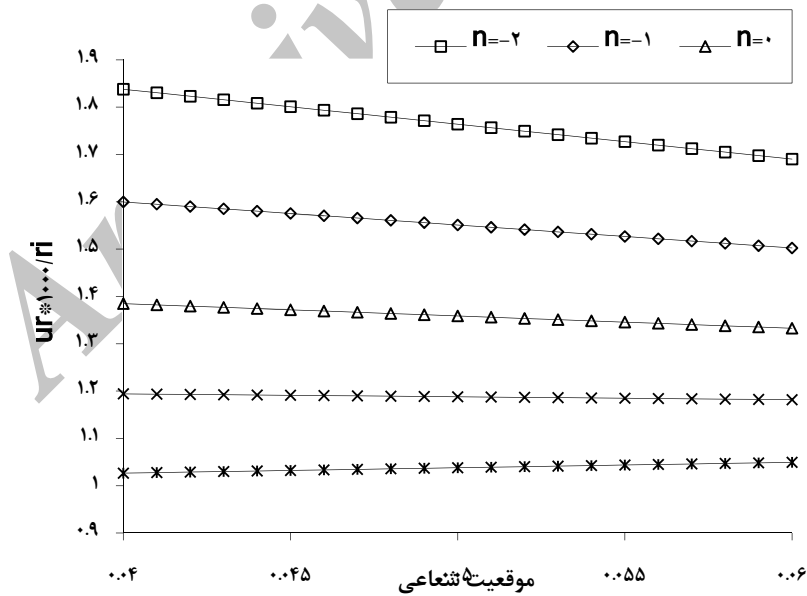
شکل ۲ - تغییر شکل شعاعی سیلندر برای ضریب ناهمگنی ۱ و بر حسب افزایش دمای مختلف



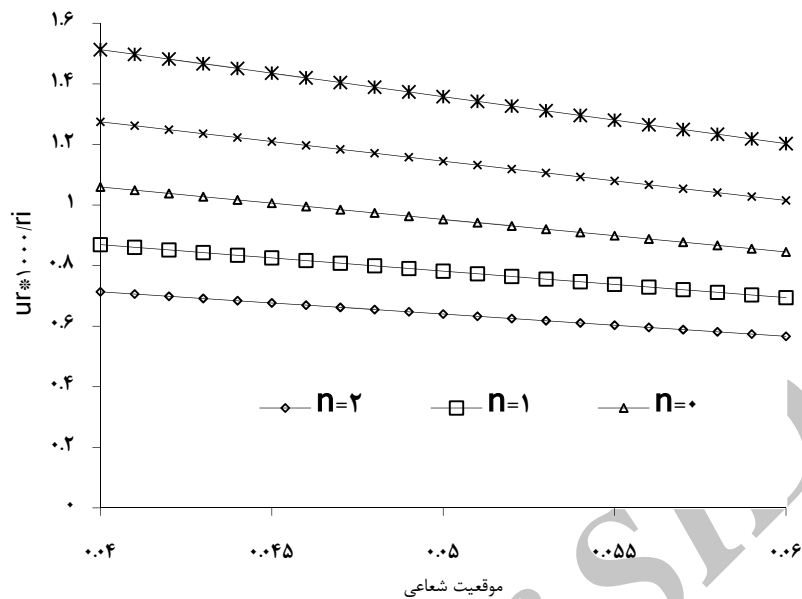
شکل ۳ - مقایسه تغییر شکل های شعاعی برای افزایش دمای ۱۰۰ درجه و بر حسب دو ضریب ناهمگنی مختلف



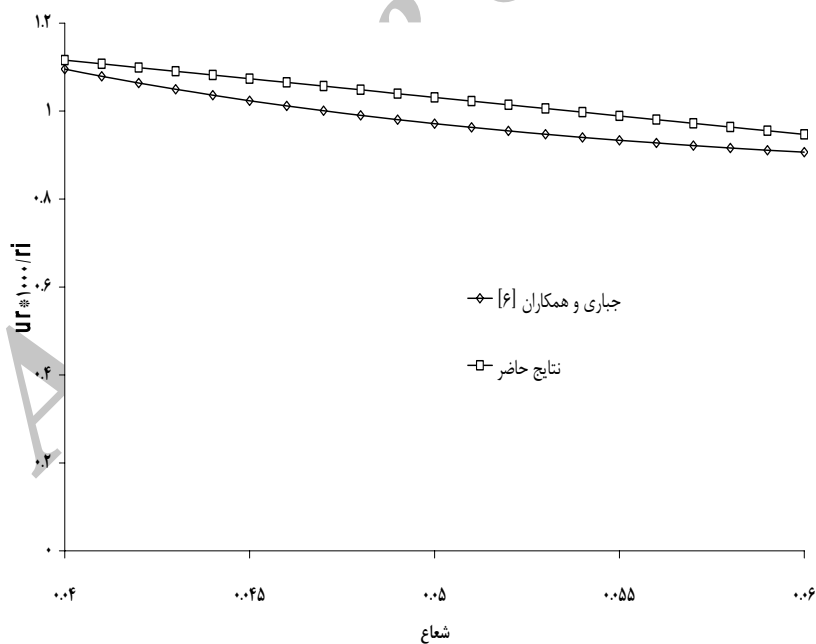
شکل ۴- توزیع تغییر شکل شعاعی برای افزایش دمای ۱۰ درجه و فشار داخلی ۸۰ مگاپاسگال برای ضرایب مختلف ناهمگنی



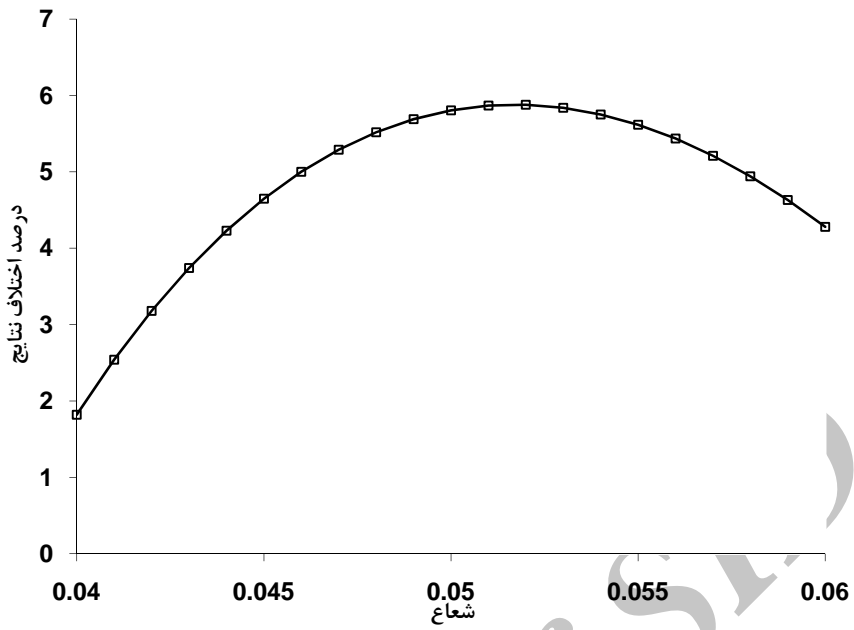
شکل ۵- توزیع تغییر شکل شعاعی برای افزایش دمای ۱۰۰ درجه و فشار داخلی ۸۰ مگاپاسگال برای ضرایب مختلف ناهمگنی



شکل ۶ - توزیع تغییر شکل شعاعی بدون افزایش دما و همراه فشار داخلی ۸۰ مگاپاسگال برای ضرایب مختلف ناهمگنی



شکل ۷ - مقایسه نتایج حاضر با نتایج الاستیسیته مستوی (جباری و همکاران)



شکل ۸- درصد اختلاف نتایج حاضر با نتایج مرجع [6]

Archive of SID

Abstract

Thermo elastic analysis of a functionally graded cylinder under internal pressure using the first order shear deformation theory (FSDT) is investigated analytically in the present paper. Energy method is employed to derive four differential equations of order two. The distribution of the displacement for different values of non-homogenous index (n) is investigated in the present paper. The obtained results can be classified in two states (the first state includes the temperature rising only and the second state includes the concurrent temperature and pressure). Simultaneously effect of the temperature rising and the inner pressure are studied on the deformation of cylinder. The obtained results are compared with the results of the plane elasticity theory. This comparison shows that the difference between two methods is about 6%.

Archive of SID