

## فرمولبندی عمومی برای آنالیز ترموپیزوالکتریک یک سازه ساخته شده از مواد مدرج الکتریکی با استفاده از روش انرژی

غلامحسین رحیمی<sup>۱</sup>

دانشیار

محمد عارفی<sup>۲</sup>

کارشناس ارشد

محمد جواد خوش گفتار<sup>۳</sup>

کارشناس ارشد

مقاله حاضر به مطالعه ترموالاستیک یک سازه ساخته شده از مواد مدرج الکتریکی با استفاده از روش انرژی می پردازد. سازه مورد نظر تحت بار حرارتی، خارجی و جسمی<sup>۴</sup> می باشد. کاربرد روش انرژی در آنالیز عمومی سازه های پیزوالکتریک برای اولین بار در این مقاله مورد بررسی قرار می گیرد. عبارت انرژی با ترم های کلاسیک توانایی پیش بینی رفتار ترموالاستیک یک سازه دلخواه را مانند روش های قبلی مانند روش تعادل ندارد. روش حاضر ترم جدیدی را برای پیش بینی صحیح رفتار ترموالاستیک سازه های مدرج پیزوالکتریک بنام ترم انرژی افزوده<sup>۵</sup> ارائه می کند. این ترم بیانگر انرژی لازم برای افزایش دمای آن قسمت از سازه است که در اثر بارهای مکانیکی و حرارتی افزایش پیدا کرده است. سایر ترمهای انرژی مانند قبل در نظر گرفته می شود. معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از روابط اویلر استخراج می شود. معادلات نهایی سیستم شامل معادلات تعادل و ماکسول خواهد بود. فرآیند استخراج معادلات نهایی سیستم نشان می دهد که معادله ماکسول که در مقالات قبلی بصورت معادله ای مستقل در نظر گرفته می شد از فرم عمومی فانکشنال سیستم قابل استخراج می باشد. درستی کاربرد روش جدید با ترم در نظر گرفته شده با بررسی یک نمونه کاربردی مورد بررسی قرار می گیرد.

واژه های راهنما: پیزوالکتریک، سیلندر جدار ضخیم، مواد مدرج، روش انرژی، فانکشنال

### ۱- مقدمه

مردمان هند در زمانهای دور متوجه وجود موادی شدند که در اثر گرم شدن توانایی جذب ذرات بسیار ریز را داشتند. این مواد پس از انتقال به اروپا توسط تجار اروپایی به مغناطیس سیلان<sup>۶</sup> معروف شدند. بررسی ها نشان می دهد که مواد پیزوالکتریک به صورت مستند توسط پیر و ژاکوس کوری در پاریس و در سال ۱۸۸۰ کشف شدند. لغت پیزو از لغت یونانی پیزن<sup>۷</sup> به معنای فشار گرفته شده است که در واقع لغت پیزوالکتریک به

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مکانیک دانشگاه تربیت مدرس [rahimi\\_gh@modares.ac.ir](mailto:rahimi_gh@modares.ac.ir)

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس [arefi63@gmail.com](mailto:arefi63@gmail.com)

<sup>۳</sup> دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس [mj.khoshgoftar@gmail.com](mailto:mj.khoshgoftar@gmail.com)

<sup>۴</sup> Body Force

<sup>۵</sup> Additional Energy

<sup>۶</sup> Ceylon Magnet

<sup>۷</sup> Piezen

موادی اطلاق می شود که تقابل فشار (کرنش مکانیکی) و الکتریسیته را نشان می دهد. مواد پیزوالکتریک کاربردهای صنعتی فوق العاده ای به خصوص در صنایع و تجهیزات اندازه گیری دارند. این مواد می توانند در ساختارهای مختلفی نظیر دیسک، سیلندر و پوسته ساخته شوند. به این دلیل، مقاله حاضر به بررسی روابط بین بار خارجی (حرارتی و مکانیکی و جسمی)، تغییر مکان و پتانسیل الکتریکی برای یک سازه دلخواه ساخته شده از مواد مدرج الکتریکی می پردازد.

در حالت کلی روش حل مسایل به سه دسته تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی تقسیم بندی می شود. در بین این سه روش، روش تحلیلی بهترین روش برای تحلیل پارامتری مسایل و پدیده های فیزیکی خواهد بود. روش تحلیلی در اکثر اوقات به سیستم معادلات دیفرانسیلی تقلیل می یابد. معادلات دیفرانسیل سیستم مستقیماً با کاربرد معادلات تعادل برای مولفه های فیزیکی و یا سایر اصول فیزیکی حاصل می شود. (به عنوان مثال، معادلات تعادل برای مولفه های تنش در یک سازه جامد الاستیک). از طرف دیگر استخراج معادلات سیستم با کاربرد روش انرژی نیز امکانپذیر خواهد بود. معادلات تعادل به بررسی تعادل بین مولفه های تنش و نیروی جسمی در یک المان از سازه مورد نظر می پردازد. به علت پیچیدگی المان در یک سازه با ضخامت متغیر، معادلات تعادل در این سیستم ها قابل کاربرد نمی باشد. روش انرژی توانایی استخراج معادلات برای یک سازه با ضخامت ناهمگن را نیز دارد. بنابراین روابط تعادل برای دسته زیادی از سازه های با ضخامت متغیر قابل کاربرد نخواهد بود. مطالعه حاضر فرمولبندی عمومی برای آنالیز ترموپیزوالکتریک یک سازه دلخواه ساخته شده از مواد مدرج الکتریکی را ارائه می کند. به عنوان یک نمونه عملی و کاربردی، آنالیز یک سیلندر دوار ساخته شده از مواد مدرج الکتریکی مورد بررسی قرار می گیرد.

لامی در سال ۱۸۵۲ حل دقیق یک سیلندر جدارضخیم تحت فشار داخلی و خارجی را ارائه کرد [۱]. او از معادلات تعادل در دستگاه مختصات استوانه ای بهره برد. سیلندر مورد نظر به صورت ایزوتروپیک و متقارن محوری در نظر گرفته شده بود. حل ارائه شده در ادامه و در حال حاضر به منظور حل سریع و ساده مخازن تحت فشار مورد استفاده قرار می گیرد و بهمین دلیل در هندبوک های طراحی مورد استفاده قرار می گیرد. آنالیز پیزوالکتریک یک کره جدارضخیم بر اساس معادلات تعادل در فضای سه بعدی در سال ۲۰۰۲ توسط چن مورد بررسی قرار گرفت [۲]. پنگ فی و همکاران آنالیز دینامیک یک سیلندر پیزوالکتریک را در سال ۲۰۰۴ مورد بررسی قرار دادند [۳]. آنها سیلندر را در حالت کلی با در نظر گرفتن تمام مولفه های تنش مورد بررسی قرار دادند. آنالیز انجام گرفته یک ابزار مناسب برای پیش بینی ارتباط بین میدان الکتریکی و بار مکانیکی ایجاد کرد. آنالیز ترموپیزوالاستیک یک سیلندر توخالی توسط چن و شای در سال ۲۰۰۵ انجام گرفت [۴]. آنالیز الکترومگنتوالاستیک سیلندر و کره ساخته شده از مواد مدرج توسط دای در سال ۲۰۰۷ ارائه شد. او نشان داد که با اعمال بار مکانیکی و الکتریکی مشخص می توان توزیع تنش، پتانسیل الکتریکی و بردار مغناطیسی را در یک سازه ساخته شده از مواد مدرج الکتریکی کنترل کرد [۵]. کانگ فرمولبندی عمومی برای یک پوسته متقارن محوری با انحنا و ضخامت متغیر را ارائه داد [۶]. او از روش تعادل برای رسیدن به معادلات نهایی سیستم بهره برد. در واقع او از اثر ضخامت متغیر بر سازه صرف نظر کرد چرا که با معادلات تعادل نمی توان به معادلات حاکم بر سیستم رسید و باید از روش انرژی بهره برد. بابایی و چن حل دقیق مگنتوالاستیک یک سیلندر با طول بی نهایت و دوار را که از مواد ارتوتروپیک ساخته شده بود، ارائه

کردند [۷]. سیلندر در جهت شعاعی مغناطیس شده بود. آنها به مطالعه اثر سرعت زاویه ای بر تنش های شعاعی و مماسی پرداختند. شایک داوود مدل سه بعدی و خطی برای یک المان پیزوالکتریک با ۸ گره مکعبی را در سال ۲۰۰۸ توسعه داد [۸]. او مدل را ایزوتروپیک در نظر گرفت و با انجام یک حل عددی ظرفیت الکتریکی و تحریک پذیری یک عملگر را مورد بررسی قرار داد. خوش گفتار و همکاران آنالیز ترموالاستیک سیلندر مدرج را در سال ۲۰۰۹ ارائه کردند. آنها تمام خواص مکانیکی و الکتریکی را به صورت متغیر و بر اساس یک تابع توانی در نظر گرفتند [۹].

مطالعه کارهای گذشته نشان می دهد که هنوز هیچ گزارش مستند و همه جانبه پیرامون کاربرد روش انرژی برای آنالیز ترموالاستیک یک سازه ساخته شده از مواد مدرج الکتریکی ارائه نشده است. بر این اساس تحقیق حاضر به آنالیز ترموالاستیک یک سازه ساخته شده از مواد مدرج می پردازد. به عنوان یک نمونه کاربردی، آنالیز ترموالاستیک یک سیلندر مدرج الکتریکی مورد بررسی قرار می گیرد و نتایج بدست آمده با نتایج قبلی مقایسه می شود.

## ۲- آنالیز پیزوترموالاستیک یک سازه دلخواه با استفاده از روش انرژی

بر اساس روابط مکانیک محیط های پیوسته، ابتدایی ترین روابط، بررسی روابط تغییر مکان و در ادامه روابط کرنش-تغییر مکان می باشد. در حالت کلی سه مولفه تغییر مکان در فضای سه بعدی موجود می باشد. بر اساس روابط عمومی مکانیک محیط های پیوسته، تانسور کرنش بر اساس رابطه (۱-۱) ارائه می شود [۱۰].

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2} \{ \bar{\nabla} u + (\bar{\nabla} u)^T \} \quad (1-1)$$

که  $u$  بردار تغییر مکان است که در حالت کلی دارای سه مولفه می باشد. مولفه های تانسور کرنش در دستگاه مختصات کارتزین به صورت رابطه (۱-۲) نمایش داده می شود.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\} \quad (1-2)$$

سازه مورد نظر از جنس مواد پیزوالکتریک می باشد. بنابراین با اعمال یک میدان پتانسیل الکتریکی، سازه دچار تغییر شکل مکانیکی می شود. میدان الکتریکی  $\bar{E}$  از منفی دیورژانس تابع پتانسیل الکتریکی  $\phi$  بدست می آید. در نتیجه رابطه کلی بین میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به صورت رابطه (۲-۱) و این رابطه در دستگاه مختصات کارتزین به صورت رابطه (۲-۲) بیان می شود.

$$\{E\} = -\bar{\nabla} \phi \quad (2-1)$$

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (2-2)$$

علامت منفی بر این نکته تاکید می کند که جهت میدان الکتریکی در جهت کاهش مقدار پتانسیل الکتریکی است. در یک محیط ترموالکترومکانیکال، بین مولفه های مکانیکی، الکتریکی و حرارتی تنش روابط زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^m + \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^T \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k - \beta_{ij} T \end{aligned} \quad (3)$$

همانطور که اشاره شد، عبارت تنش متشکل از سه دسته مولفه های مکانیکی، الکتریکی و حرارتی است. رابطه (۳) برای هر دستگاه مختصات با قرار دادن مولفه های مناسب در آن دستگاه قابل کاربرد خواهد بود. در رابطه (۳)،  $T$  توزیع حرارت در سازه می باشد.  $C_{ijkl}$  ضرایب الاستیک است که در حالت کلی دارای ۸۱ مولفه می باشد. در حالتی که مولفه های تنش و کرنش به صورت متقارن در نظر گرفته شود تعداد این مولفه ها به ۲۱ کاهش می یابد.  $C_{ijkl}$  اثر کرنش مکانیکی را بر تنش نشان می دهد.  $e_{ijk}$  مولفه های ماتریس ضرایب پیزوالکتریک می باشد که در حالت کلی دارای ۲۷ مولفه می باشد. این مولفه بیانگر اثرات میدان الکتریکی بر تنش می باشد.  $\beta_{ij}$  مولفه های ماتریس ضرایب حرارتی می باشد که در حالت کلی دارای ۹ مولفه می باشد. این ضرایب بیانگر تاثیر توزیع حرارت بر تنش می باشد. این ضرایب از رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود.

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \beta_i = \beta_j = C_{ik}\alpha_k & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

$$\beta_i = C_{ij}\alpha_j \quad j=1,2,3$$

که  $\alpha_i$  ضرایب انبساط حرارتی است. عبارت جابجایی الکتریکی  $D$  که ترکیب خطی کرنش، میدان الکتریکی و توزیع حرارت می باشد، از رابطه (۵) قابل محاسبه خواهد بود.

$$D_i = e_{ijk}\varepsilon_{jk} + \eta_k E_k - p_i T \quad (5)$$

که  $\eta$  ثابت دی الکتریک و  $p$  ثابت پیزوالکتریک است. در این قسمت می توان فرض کرد که پس از اعمال میدان الکتریکی و بار مکانیکی، یک توزیع حرارت نیز بر سازه اعمال شود. تحت تاثیر این بارها، حجم سازه افزایش می یابد. بعلت افزایش حجم سازه، در نظر گرفتن عبارت "انرژی افزوده" برای این حجم اضافه شده در روابط انرژی کل سیستم ضروری می باشد. این انرژی برای افزایش دمای  $T(x_i)$  حجم افزوده شده بر سازه ضروری می باشد. انرژی افزوده ویژه  $Q_T = \left(\frac{J}{m^3 \times ^\circ T}\right)$  بر اساس رابطه (۶) ارائه می شود.

$$Q_T = \sum_{i=1}^3 (\beta_i \varepsilon_{ii} - p E_i) \quad (6)$$

انرژی معادل از ضرب عبارت انرژی ویژه  $Q_T$  در توزیع حرارت  $T$  بر اساس رابطه (۷) حاصل می شود.

$$W_T = T \times Q_T = T \sum_{i=1}^3 (\beta_i \varepsilon_{ii} - p E_i) \quad (7)$$

همانطور که در مقدمه نیز ذکر شد، سازه ممکن است تحت بارهای جسمی<sup>۱</sup> نظیر نیروی گریز از مرکز باشد. بنابراین کار ناشی از نیروی جسمی خارجی که برابر است با حاصلضرب بردار نیروی جسمی در بردار تغییر مکان، از رابطه (۸) حاصل می شود.

$$W_{body} = \{f\}^T \{u\} = f_i u_i \quad (8)$$

که  $f_i$  مولفه های نیروی جسمی خارجی می باشد. پس از محاسبه مولفه های تنش، کرنش، جابجایی الکتریکی، میدان الکتریکی، انرژی افزوده و نیروهای جسمی، عبارت انرژی بر واحد حجم برای سازه تحت بارهای ترموالکترومکانیکی از رابطه (۹) محاسبه می شود.

<sup>1</sup> Body Forces

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \{ \varepsilon^T \sigma - D^T E - Q_T T \} - W_{body} \quad (9)$$

$$U = \int_{\Omega} \bar{u} |J| dpdqds = \int_{\Omega} F(u_1, u_2, u_3, \phi, p, q, s) dpdqds$$

در رابطه (۹)،  $\bar{u}$  انرژی بر واحد حجم و  $U$  انرژی کل سازه می باشد. فانکشنال  $F(u_1, u_2, u_3, \phi, p, q, s)$  مولفه های عمومی و  $|J|$  ژاکوبین سیستم می باشد.  $u_i (i = 1, 2, 3)$  مولفه های تغییر شکل و  $(p, q, s)$  مولفه های دستگاه مختصات است. بنابراین عبارت عمومی فانکشنال برای یک سیستم ترموالکترومکانیکال به صورت رابطه (۱۰) می باشد.

$$F(u_1, u_2, u_3, \phi, p, q, s) = |J| \bar{u} \quad (10)$$

$$F(u_1, u_2, u_3, \phi, p, q, s) = |J| \left\{ \frac{1}{2} (\varepsilon^T \sigma - D^T E - Q_T T) - W_{body} \right\}$$

## ۲-۱- استخراج روابط اساسی سیستم

پس از استخراج عبارت فانکشنال سیستم با استفاده از رابطه (۱۰)، روشهای زیادی برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم وجود دارد. روشهای عددی نظیر المان محدود نیز توانایی حل مسئله را دارد. از بین روشهای مختلف حل مسایل، روش تحلیلی بسیار پرکاربردتر و مفیدتر به خصوص برای حل پارامتریک مسایل است. برای استخراج معادلات نهایی سیستم، رابطه اویلر مورد استفاده قرار می گیرد. به عنوان مثال، برای یک فانکشنال نوعی  $F(u(p), p)$  با تابع  $u(p)$ ، رابطه اویلر به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$F = F(u, p), \quad u = u(p)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u}{\partial p})} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

که  $u(p)$  یک تابع دلخواه نظیر یکی از مولفه های تغییر شکل می باشد. در حالت عمومی و در یک فضای سه بعدی  $(p, q, s)$  و مولفه های تغییر شکل  $(u_1, u_2, u_3)$  و تابع پتانسیل  $\phi$ ، رابطه اویلر به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$F = F(u_1, u_2, u_3, \phi, p, q, s)$$

$$\begin{cases} u_i = u_i(p, q, s) & i = 1, 2, 3 \\ \phi = \phi(p, q, s) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u_1}{\partial p})} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u_1}{\partial q})} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u_1}{\partial s})} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u_2}{\partial p})} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u_2}{\partial q})} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u_2}{\partial s})} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u_3} - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u_3}{\partial p})} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u_3}{\partial q})} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u_3}{\partial s})} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial p})} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial q})} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial s})} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

سه رابطه اول رابطه (۱۲) همان روابط تعادل می باشند. این روابط را می توان با استفاده از روابط تعادل برای سازه های با ضخامت ثابت و بدون اثرات حرارتی استخراج کرد.

### ۳- آنالیز پیزوترموالاستیک یک پوسته استوانه ای با استفاده از روش انرژی

#### ۳-۱- حل معادله انتقال حرارت

در این بخش و قبل از حل معادلات نهایی، معادله انتقال حرارت در دستگاه مختصات استوانه ای به حالت متقارن و دائم مورد بررسی قرار می گیرد. این معادله می تواند با در نظر گرفتن شرایط مرزی حل شود. معادله انتقال حرارت در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت زیر است [۱۲].

$$\frac{1}{r}(rk_T(r)T'(r))' = 0 \quad a \leq r \leq b \quad (13)$$

که  $a, b$  به ترتیب شعاع داخلی و خارجی سیلندر می باشد.  $k_T(r)$  ضریب انتقال حرارت است که فرض می شود تابع شعاع باشد. شرایط مرزی عمومی برای سیلندر مورد نظر به صورت رابطه (۱۴) می باشد [۸].

$$\begin{aligned} C_{11}T(a) + C_{12}T'(a) &= f_1 \\ C_{21}T(b) + C_{22}T'(b) &= f_2 \end{aligned} \quad (14)$$

که  $C_{ij}$  ( $i=1,2; j=1,2$ ) ثابت هایی هستند که به ضریب هدایت حرارتی و جابجایی بستگی دارد.  $f_1$  و  $f_2$  ثابت هایی هستند که در شعاع های داخلی و خارجی برآورد می شوند. توزیع شعاعی  $k_T(r)$  به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$k_T(r) = k_0 r^k \quad (15)$$

حل معادله (۱۳) به صورت معادله (۱۶) در نظر گرفته می شود.

$$T(r) = \frac{-A_1}{k} r^{-k} + A_2 \quad k \neq 0 \quad (16)$$

$A_1, A_2$  ثابت های انتگرال گیری هستند که با رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{C_{21}f_1 - C_{11}f_2}{C_{21}\left(C_{12}r_a^{-(k+1)} - C_{11}\frac{r_a^{-k}}{k}\right) - C_{11}\left(C_{22}r_b^{-(k+1)} - C_{21}\frac{r_b^{-k}}{k}\right)} \\ A_2 &= \frac{\left(C_{12}r_a^{-(k+1)} - C_{11}\frac{r_a^{-k}}{k}\right)f_2 - f_1\left(C_{22}r_b^{-(k+1)} - C_{21}\frac{r_b^{-k}}{k}\right)}{C_{21}\left(C_{12}r_a^{-(k+1)} - C_{11}\frac{r_a^{-k}}{k}\right) - C_{11}\left(C_{22}r_b^{-(k+1)} - C_{21}\frac{r_b^{-k}}{k}\right)} \end{aligned} \quad (17)$$

#### ۳-۲- آنالیز پیزوترموالاستیک

در این قسمت می توان روندی که در قسمت شماره ۲ به تفصیل ارائه شد را برای یک سیلندر استوانه ای جدار ضخیم متقارن محوری اعمال کرد. بر این اساس تنها مولفه غیر صفر تغییر مکان همان مولفه شعاعی می باشد.

$$u_1 = u(r), \quad u_2 = u_3 = 0 \quad (18)$$

بر این اساس دو مولفه شعاعی و مماسی کرنش به صورت رابطه (۱۹) می باشد.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad (19)$$

بر اساس فرض متقارن محوری بودن مسئله، تابع پتانسیل فقط تابع مولفه شعاعی خواهد بود. در نتیجه میدان الکتریکی از رابطه زیر حاصل می شود.

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (20)$$

بر اساس فرض متقارن بودن، دو مولفه تنش شامل مولفه های محوری و مماسی می باشند که از رابطه (۲۱) زیر حاصل می شوند.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{rr}\varepsilon_{rr} + C_{r\theta}\varepsilon_{\theta\theta} - e_{rr}E_r - \beta_r T \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{r\theta}\varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} - e_{r\theta}E_r - \beta_\theta T \end{aligned} \quad (21)$$

$\beta_i$  از رابطه زیر با ضرایب انبساط حرارتی  $\alpha_i (i = r, \theta)$  در ارتباط می باشد.

$$\beta_r = C_{rr}\alpha_r + C_{r\theta}\alpha_\theta, \quad \beta_\theta = C_{r\theta}\alpha_r + C_{\theta\theta}\alpha_\theta \quad (22)$$

جابجایی الکتریکی که شامل کرنش، میدان الکتریکی و دما می باشد از طریق رابطه (۲۳) محاسبه می شود.

$$D_r = e_{rr}\varepsilon_{rr} + e_{r\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \eta E_r - pT \quad (23)$$

مولفه مماسی جابجایی الکتریکی به علت شرایط متقارن مسئله صفر می باشد. در رابطه (۲۳)،  $\eta$  ضریب دی الکتریک و  $p$  ضریب پیروالکتریک می باشد. قبل از جایگذاری میدان الکتریکی در رابطه انرژی، توابع توانی مناسب برای کلیه خواص مکانیکی و الکتریکی به شکل زیر در نظر گرفته می شود.

$$\begin{aligned} C_{ij} &= C_{ij0}r^l, \quad e_{ri} = e_{ri0}r^l, \quad \eta = \eta_0r^l, \quad \rho = \rho_0r^l \\ \alpha &= \alpha_0r^b, \quad \beta = \beta_0r^{b+l}, \quad p = p_0r^{b+l} \end{aligned} \quad (24)$$

در رابطه (۲۴)،  $l$  و  $b$  ضرایب ناهمگنی مواد می باشد. با جایگذاری خواص تعریف شده در رابطه (۲۴)، در روابط (۲۱) و (۲۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{rr0}r^l \frac{\partial u}{\partial r} + C_{r\theta0}r^l \frac{u}{r} + e_{rr0}r^l \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \beta_{r0}r^{b+l}T \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{r\theta0}r^l \frac{\partial u}{\partial r} + C_{\theta\theta0}r^l \frac{u}{r} + e_{r\theta0}r^l \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \beta_{\theta0}r^{b+l}T \\ D_r &= e_{rr0}r^l \frac{\partial u}{\partial r} + e_{r\theta0}r^l \frac{u}{r} - \eta_0r^l \frac{\partial \varphi}{\partial r} - p_0r^{b+l}T \end{aligned} \quad (25)$$

در نهایت با جایگذاری روابط (۷)، (۸)، (۹)، (۱۶)، (۲۰) و (۲۵) در رابطه عمومی فانکشنال، رابطه (۱۰)، این عبارت را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
F(u, \phi, r) = & \pi[r\{C_{rr0}r^l \frac{\partial u}{\partial r} + C_{r\theta0}r^l \frac{u}{r} + e_{rr0}r^l \frac{\partial \phi}{\partial r} - \beta_{r0}r^{b+l}T\} \frac{\partial u}{\partial r} \\
& + r\{C_{r\theta0}r^l \frac{\partial u}{\partial r} + C_{\theta\theta0}r^l \frac{u}{r} + e_{r\theta0}r^l \frac{\partial \phi}{\partial r} - \beta_r r^{b+l}T\} \frac{u}{r} \\
& + r\{e_{rr0}r^l \frac{\partial u}{\partial r} + e_{r\theta0}r^l \frac{u}{r} - \eta_0 r^l \frac{\partial \phi}{\partial r} - p_0 r^{b+l}T\} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\
& - r\{\beta_{r0}r^{b+l} \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_{\theta0}r^{b+l} \frac{u}{r} + p_0 r^{b+l} \frac{\partial \phi}{\partial r}\}T - 2\pi\rho_0 r^l \times r^2 \omega^2
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

روابط حاکم بر رفتار یک سیلندر دوار تحت بار مکانیکی و حرارتی با استفاده از روابط اویلر قابل استخراج خواهد بود.

### ۳-۱- استخراج روابط اساسی یک سیلندر دوار مدرج تحت بار حرارتی

بر اساس توضیحات ارائه شده در قسمت ۲ در مورد معادلات اویلر، معادلات اساسی برای سیستم مورد نظر با فانکشنال داده شده در رابطه (۲۶)، با دو تابع مستقل  $u(r), \phi(r)$  از رابطه زیر می تواند بدست آید:

$$\begin{aligned}
F = F(u, \phi, r), \quad u = u(r), \quad \phi = \phi(r) \\
\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)} \right) = 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{۲۷}$$

با قرار دادن رابطه (۲۶) در رابطه (۲۷)، دو معادله حاکم بر سیستم به شکل زیر استخراج می شود:

$$\begin{aligned}
[C_{rr0}]r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + [C_{rr0}(l+1)]r \frac{\partial u}{\partial r} + [C_{r\theta0}l - C_{\theta\theta0}]u + [e_{rr0}]r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + [e_{rr0}(l+1) - e_{r\theta0}]r \frac{\partial \phi}{\partial r} \\
- A_1[\beta_{r0}(1 - \frac{1}{k}(b+l+1)) + \frac{1}{k}\beta_{\theta0}]r^{b-k+1} + A_2[-\beta_{r0}(b+l+1) + \beta_{\theta0}]r^{b+1} + \rho_0 r^3 \omega^2 = 0 \\
[e_{rr0}]r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + [e_{rr0}(l+1) + e_{r\theta0}]r \frac{\partial u}{\partial r} + [e_{r\theta0}l]u - [\eta_0]r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - [\eta_0(l+1)]r \frac{\partial \phi}{\partial r} \\
+ p_0 A_1[\frac{1}{k}(b+l+1) - 1]r^{b-k+1} - p_0 A_2[b+l+1]r^{b+1} = 0
\end{aligned} \tag{۲۸}$$

معادله (۲۸) نشان می دهد که با فرض  $\omega = 0$ ، معادلات بدست آمده دقیقاً با معادلات (۱-۱۵) و (۲-۱۵) مرجع یکسان می باشد [۹].



**مثال: پوسته استوانه ای دوار مدرج تحت فشار داخلی و بار الکتریکی**

در این قسمت حل دقیق یک پوسته استوانه ای مدرج تحت شرایط مرزی مورد نظر و تحت بار الکتریکی مورد بررسی واقع می شود. شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی به صورت زیر می باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{r=a} = 50 \text{ Mpa} \\ \sigma_{r=b} = 0 \text{ Mpa} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \phi_{r=a} = 0 \\ \phi_{r=b} = 0 \end{array} \right. \quad (29)$$

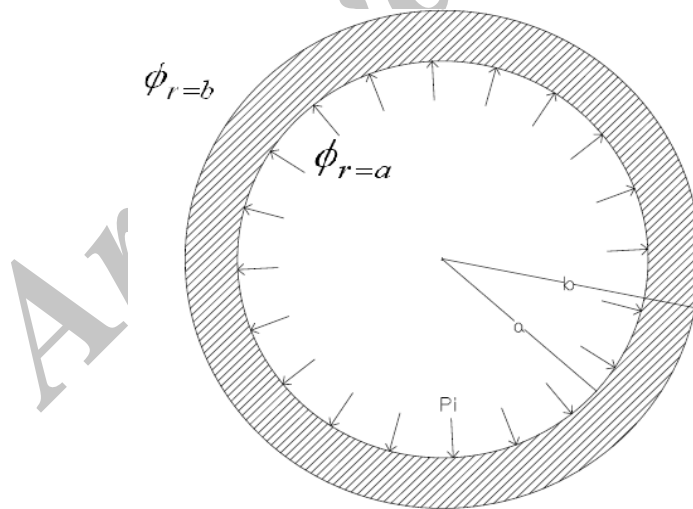
شکل (۱)، نمونه شماتیک یک سیلندر تحت بار الکتریکی و مکانیکی نشان می دهد. با اعمال شرایط مرزی به حل معادلات (۲۸)، توزیع پارامترهای مختلف مکانیکی و الکتریکی قابل استخراج خواهد بود. با تغییر متغیر  $r = e^s$  و با در نظر نگرفتن قسمت دوم معادلات، خواهیم داشت:

$$[C_{rr0}\lambda^2 + C_{rr0}l\lambda + C_{r\theta0}l - C_{\theta\theta0}]u + [e_{rr0}\lambda^2 + (e_{rr0}l - e_{r\theta0})\lambda]\phi = 0 \quad (30)$$

$$[e_{rr0}\lambda^2 + (e_{rr0}l + e_{r\theta0})\lambda + l e_{r\theta0}]u + [-\eta_0\lambda^2 - \eta_0l\lambda]\phi = 0$$

که  $\lambda = \frac{d}{ds}$  می باشد. حل غیر بدیهی این مسئله با صفر قراردادن دترمینان ضرایب به صورت معادله (۳۰) حاصل می شود.

$$(\lambda^4 + 2l\lambda^3 + (l^2 + \gamma)\lambda^2 + l\gamma\lambda) = 0 \quad (31)$$



شکل ۱- نمونه یک سیلندر مدرج تحت بار الکتریکی و مکانیکی

پس از حل معادله بالا، ریشه های معادله یافت می شود. با یافتن چهار ریشه معادله  $\lambda_i$ ، جواب مسئله به صورت زیر بدست می آید.

$$u_h = \sum_{i=j}^4 u_{hi} r^{\lambda_i}, \phi_h = \sum_{i=j}^4 M_i u_{hi} r^{\lambda_i}, M_i = -\frac{C_{rr0}\lambda_i^2 + C_{rr0}l\lambda_i + C_{r\theta0}l - C_{\theta\theta0}}{e_{rr0}\lambda_i^2 + (e_{rr0}l - e_{r\theta0})\lambda_i} \quad (32)$$

که  $u_{hi}$  ( $i=1...4$ ) ثابت های مسئله می باشد که با اعمال شرایط مرزی بدست می آید. حل خصوصی مسئله با در نظر گرفتن طرف دوم معادله بدست می آید. در طرف دوم معادله سه جمله  $r^{b-k+1}$ ,  $r^{b+1}$  و  $r^3$  وجود دارد. در نتیجه حل خصوصی برای دو تابع  $u, \varphi$  به صورت معادله (۳۳) خواهد بود.

$$\begin{aligned} u_p &= X_1 r^{b-k+1} + X_2 r^{b+1} + X_3 r^3 \\ \phi_p &= X_4 r^{b-k+1} + X_5 r^{b+1} + X_6 r^3 \end{aligned} \quad (33)$$

$X_i$  ( $i=1,2,\dots,6$ ) ثابت هایی هستند که با قرار دادن حل معادله (۳۳) در معادله (۲۸) و با یکسان قرار دادن جملات یکسان در دو طرف مسئله بدست می آید. جواب نهایی مسئله از جمع جوابهای عمومی و خصوصی که از معادلات (۳۲) و (۳۳) استخراج می شود، بدست می آید [۹].

$$u = u_h + u_p \quad (34)$$

$$\varphi = \varphi_h + \varphi_p$$

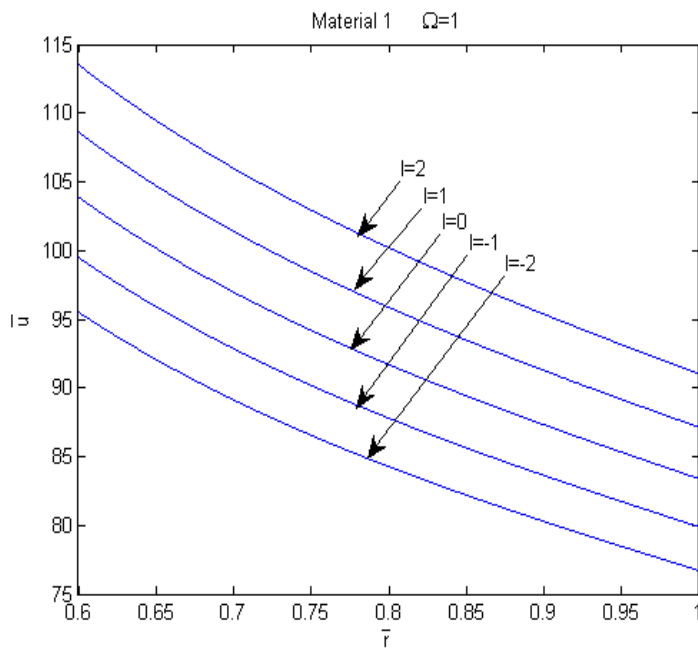
با اعمال شرایط مرزی (۲۹) به معادلات (۳۴)، جواب نهایی مسئله قابل استخراج خواهد بود. با در نظر گرفتن رابطه (۱۶) مربوط به توزیع دما، رابطه (۲۸) قابل حل خواهد بود. سایر خواص مکانیکی و الکتریکی به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} \alpha_{r0} &= 2.458 \times 10^{-6} 1/K, \alpha_{\theta 0} = 4.396 \times 10^{-6} 1/K \\ C_{rr0} &= 83.6 Gpa, C_{\theta\theta 0} = 74.1 Gpa, C_{r\theta 0} = 39.3 Gpa \\ e_{rr0} &= 0.347 C/m^2, e_{r\theta 0} = 0.16 C/m^2 \\ \eta_0 &= 9.03 \times 10^{-11} C^2 / Nm^2, p_0 = 2.94 \times 10^{-6} C/m^2 K \end{aligned} \quad (35)$$

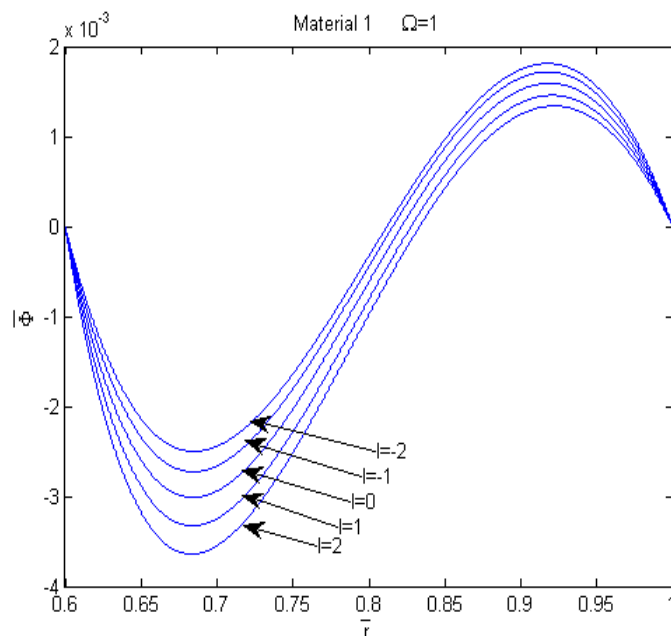
$\Omega$  به عنوان سرعت زاویه ای بدون بعد شده در نظر گرفته می شود. سایر پارامترهای بدون بعد به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۹].

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{\sigma}{\alpha_0 Y_0 T_0} & \bar{\varepsilon} &= \frac{\varepsilon}{\alpha_0 T_0} & \bar{u}_r &= \frac{u_r}{\alpha_0 T_0 r_b} & \bar{e} &= \frac{e}{Y_0 |d_0|} & \bar{\eta} &= \frac{\eta}{Y_0 |d_0|^2} & \bar{p} &= \frac{p}{\alpha_0 Y_0 |d_0|} \\ \bar{D}_r &= \frac{D_r}{\alpha_0 Y_0 T_0 |d_0|} & \bar{\varphi} &= \frac{\varphi |d_0|}{\alpha_0 T_0 r_b} & \bar{E}_r &= \frac{E_r |d_0|}{\alpha_0 T_0} & \bar{T} &= \frac{T}{T_0} & \bar{r} &= \frac{r}{r_b} & \bar{\alpha} &= \frac{\alpha}{\alpha_0} & \bar{C} &= \frac{C_{ij}}{Y_0} \\ \Omega &= \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \omega_0 = \left( \frac{\alpha_0 Y_0 T_0}{\rho_0 r_b^2} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

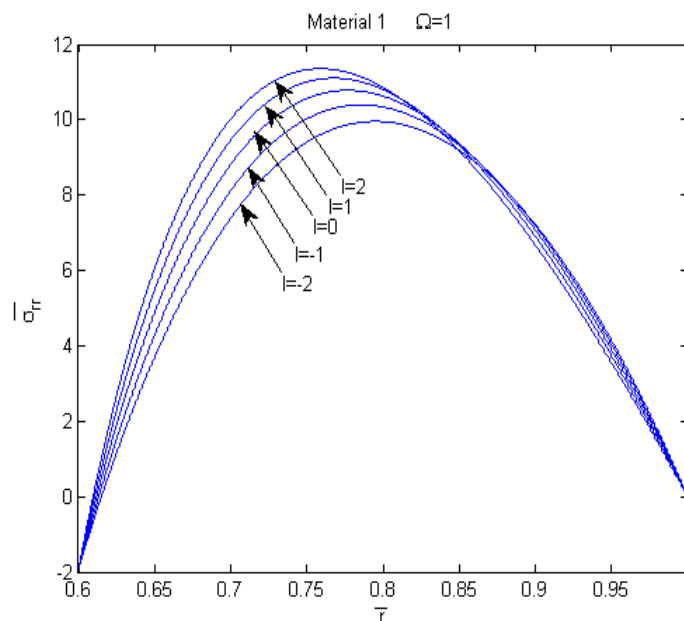
بر این اساس، شکل (۲) توزیع شعاعی تغییر شکل شعاعی را برای یک سیلندر دوار مدرج به ازای  $\Omega=1$  نشان می دهد. ملاحظه می شود که با افزایش ضریب ناهمگنی ماده مدرج، تغییر شکل شعاعی نیز افزایش می یابد.



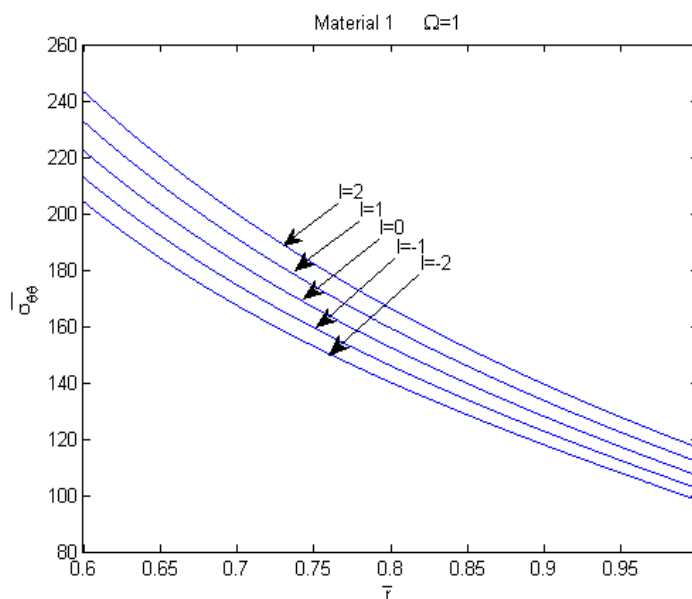
شکل ۲- توزیع شعاعی تغییر شکل شعاعی به ازای ضرایب ناهمگنی مختلف در سرعت زاویه ای  $\Omega = 1$



شکل ۳- توزیع شعاعی پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت به ازای  $\Omega = 1$



شکل ۴- توزیع شعاعی تنش شعاعی در راستای ضخامت به ازای  $\Omega = 1$



شکل ۵- توزیع شعاعی تنش محیطی در راستای ضخامت به ازای  $\Omega = 1$

شکل (۳)، توزیع شعاعی پتانسیل الکتریکی را در راستای ضخامت برای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی برای یک سیلندر دوار مدرج به ازای  $\Omega = 1$  نشان می دهد. این شکل نشان می دهد که پتانسیل الکتریکی علاوه بر دو مرز که به علت اعمال شرایط مرزی صفر می باشد، در میانه جداره سیلندر نیز صفر می باشد. علاوه بر این دو نقطه ماکزیمم پتانسیل الکتریکی در نزدیکی دو مرز داخلی و خارجی وجود دارد که در نزدیکی مرز داخلی منفی و در نزدیکی مرز خارجی مثبت می باشد. از لحاظ عددی، ماکزیمم مقدار در نزدیکی مرز داخلی به ازای کلیه ضرایب ناهمگنی رخ می دهد.

شکل (۴)، توزیع شعاعی تنش شعاعی را به ازای ضرایب مختلف ناهمگنی نشان می دهد. این شکل نشان می دهد که ماکزیمم مقدار تنش شعاعی عددی مثبت بوده که برای ضریب ناهمگنی  $l = -1$  حدود ۵ برابر فشار داخلی می باشد. شکل فوق نشان می دهد که مقدار تنش شعاعی برای شعاع های بزرگتر از ۰.۸۵ تقریباً از مقدار ضریب ناهمگنی مستقل خواهد بود. شکل (۵)، توزیع شعاعی تنش محیطی را به ازای ضرایب مختلف ناهمگنی نشان می دهد. مشاهده می شود که تنش محیطی با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی افزایش می یابد.

#### ۴- نتیجه گیری

نتایج مهم بدست آمده از این مطالعه را می توان به صورت زیر دسته بندی کرد:

۱. در این مقاله، ترم انرژی افزوده که برای تشکیل فانکشنال انرژی در سازه های مدرج تحت بار حرارتی الزامی می باشد، برای اولین بار معرفی شد. کاربرد روش انرژی و عبارت ترم انرژی افزوده برای یک سیلندر دوار ساخته شده از مواد مدرج و تحت بار حرارتی، نتایج حاضر را مورد تایید قرار داد.
۲. نتایج بدست آمده از توزیع پتانسیل الکتریکی نشان می دهد که مقدار پتانسیل الکتریکی علاوه بر دو مرز داخلی و خارجی که بواسطه شرایط مرزی صفر در نظر گرفته می شود در میانه سیلندر نیز صفر می باشد.
۳. توزیع تنش شعاعی در جداره سیلندر نشان می دهد که ماکزیمم مقدار تنش شعاعی در جداره سیلندر برای ضرایب مختلف ناهمگنی به طور متوسط حدود ۵ برابر مقدار فشار داخلی سیلندر می باشد.

#### مراجع

- [1] Timoshenko, S.P., "*Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems)*." 3rd ed, Van Nostrand Reinhold Co, New York, (1976).
- [2] Chen, W. Q., Lu, Y., Ye, J. R., and Cai, J. B., "3D Electroelastic Fields in a Functionally Graded Piezoceramic Hollow Sphere under Mechanical and Electric Loading." *Archive of Applied Mechanics*, Vol.72., pp.39-51, (2002).
- [3] Peng-Fei, H., and Andrew, Y.T.L., "The Transient Responses of Magneto-electro-elastic Hollow Cylinders." *Smart Materials and Structures*, Vol. 13, pp.762-776, (2004).
- [4] Chen, Y., and Shi, Zhi-fei., "Analysis of a Functionally Graded Piezothermoelastic Hollow Cylinder." *Journal of Zhejiang University Science*, Vol. 6A, No. 9, pp. 956-961, (2005).

- [5] Dai, H.L., Fu, Y.M., and Yang, J.H., "Electromagnetoelastic Behaviors of Functionally Graded Piezoelectric Solid Cylinder and Sphere." *Acta Mech. Sin.*, Vol. 23, pp. 55-63, (2007).
- [6] Kang, J. H., "Field Equations, Equations of Motion, and Energy Functionals for Thick Shells of Revolution with Arbitrary Curvature and Variable Thickness from a Three-dimensional Theory", *Acta Mech. Sin.*, Vol. 188, pp. 21-37, (2007).
- [7] Babaei, M. H., and Chen<sup>1</sup>, Z. T., "Exact Solutions for Radially Polarized and Magnetized Magnetoelastic Rotating Cylinders", *Smart Mater. Struct.* Vol. 17, 025035 (11pp), (2008).
- [8] Shaik Dawood, M. S. I., Iannucci, L., and Greenhalgh, E. S., "Three-dimensional Static Shape Control Analysis of Composite Plates using Distributed Piezoelectric Actuators", *Smart Mater. Struct.* Vol. 17, 015035 (10pp), (2008).
- [9] Khoshgoftar, M. J., Ghorbanpour Arani, A., and Arefi, M., "Thermoelastic Analysis of a Thick Walled Cylinder made of Functionally Graded Piezoelectric Material.", *Smart Mater Struct.* Vol. 18, 115007 (8pp), (2009).
- [10] Lai, M., Rubin, D., and Krempl, E., "*Introduction to Continuum Mechanics.*" 3 rd edition, Buttenvorth-Heinemann Press, New York, USA, (1999).
- [11] Boresi, A., "*Advanced Mechanics of Materials*", John Wiley and Sons Press, Fifth Edition, New York, (1993).
- [12] Incropera, F. P., "*Introduction to Heat Ttransfer* ", John-Wiley Press, New York, (1996).

### فهرست نمادهای انگلیسی

a	: شعاع داخلی سیلندر
b	: شعاع خارجی سیلندر
C	: ماتریس ضرایب سفتی
D	: جابجایی الکتریکی
e	: ماتریس ضرایب پیزوالکتریک
E	: میدان الکتریکی
k	: ضریب هدایت حرارتی
p	: ضریب پیروالکتریک
r	: مولفه شعاعی
T	: میدان توزیع حرارت
u	: جابجایی شعاعی
$\bar{u}, U$	: انرژی کل سیستم

$Q_T$ : انرژی افزوده

### نمادهای یونانی

$\sigma$ : تانسور تنش

$\varepsilon$ : تانسور کرنش

$\eta$ : ضریب دی الکتریک

$\varphi$ : تابع پتانسیل الکتریکی

$\alpha$ : ضریب انبساط حرارتی

$\Omega, \omega$ : سرعت زاویه ای

:

Archive of SID

**Abstract**

The present study deals with the thermo elastic analysis of an arbitrary structure using the energy method. The structure is loaded under temperature gradient. This structure can be subjected to external loads such as rotational load and inner and outer pressures. Energy method is employed for the first time in the general analysis of piezoelectric structures. Energy equation with regarding the classic terms cannot predict the thermal behavior of a piezoelectric structure as well as previous method. The present study proposes a novel term that is described as Additional Energy. This term is necessary energy for increasing of temperature of those sections of structure that are expanded due to external loads. The other components of the energy equation are regarded as previously. The governing differential equation of system can be obtained using the Euler equation. Final derived equation includes the Equilibrium and Maxwell's equation. This procedure indicates that the Maxwell's equation can be derived from the energy equation, independently. As an applied problem in the context of the piezoelectric materials, the thermo elastic analysis of a FGP rotating pressure vessel is analyzed using the energy method.

Archive of SID