ISME

بررسی تنش تماسی و تغییر مکان کشسان بین ورق FGM با سنبه صلب تخت به کمک حل تحلیلی و عددی

محمدحسین جلائی [1]
کارشناس ارشد

رضا اکبری آلاشتی [2]
استادیار

محمد افتاری [3]
کارشناس ارشد

در این مقاله، یک مدل چند لایه‌ای ورق FGM ای که به عنوان روکش استفاده شده و تحت شرایط کرنش صفحه‌ای قرار دارد, به منظور تحلیل تماس بدون اصطکاک با سنبه تخت مورد بررسی قرار داده شده است. مساله به کمک دو روش حل تحلیلی و عددی بررسی شده است. در حل تحلیلی، با استفاده از قانون هوک، روابط تعادل و تبدیل معکوس فوریه، مقدار فشار تماسی بی‌بعد بر روی سطح ورق و فشارعمودی بی‌بعد در زیرلایه‌های آن بدست آمده، اثر نسبت سختی و اندازه ناحیه تماس بر روی فشار تماسی مورد بررسی قرار گرفته است. حل عددی به کمک روش اجزای محدود و با استفاده از نرم افزار تجاری ANSYS انجام شده است و علاوه بر مقادیر بالا، چگونگی توزیع تغییر مکان کشسان نیز بررسی شده است. همچنین به منظور بررسی اعتبار مدل اجزای محدود، نتایج به دست آمده از این روش با نتایج حاصل از حل تحلیلی مقایسه شده است. با مقایسه نتایج بدست آمده از حل تحلیلی با حل عددی، می‌توان دقت بالای هردو روش را مشاهده کرد. تحقیقات نشان می‌دهد که تغییرات تدریجی مدول برشی، می‌تواند بطور چشمگیری تنش‌ها را در ناحیه تماس بهینه نماید.

واژه های راهنما: مواد FGM ، فشار تماسی، تغییر مکان کشسان، تبدیل معکوس فوریه

۱ – مقدمه

یکی از اصلی‌ترین روش‌های انتقال نیرو بین اجسام، تماس است. اگر دو جسم با سطوح خمیده به یکدیگر فشرده شود، نقطه یا خط تماس بر اثر اعمال فشار تبدیل به سطح تماس می‌شود و تنش‌های سه بعدی در دو جسم به وجود می‌آورد که پیدا کردن میزان این تنش‌ها و کرنش‌ها از قوانین معمولی مکانیک میسر نیست و باید از تئوری‌هایی که در علم مکانیک تماسی [4] وجود دارد، استفاده نمود. تاریخچه مکانیک تماسی به هرتز [5] بر می‌گردد. او یک توزیع بیضوی از فشار، در ناحیه تماسی مدور بین دو کره را نشان داد. تنش‌های تماسی در محدوده وسیعی از مسایل مهندسی مانند تماس چرخ یک واگن با ریل، بادامک‌های سوپاپ

[1] کارشناس ارشد مهندسی مکانیک ، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، کارشناس مکانیک سازمان صنایع دریایی
Mohammad_j2430@yahoo.com

[2] استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

[3] نویسنده مسئول، کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، باشگاه پژوهشگران جوان، تهران، ایران
Mohammad.eftari@gmail.com

[4] Contact mechanics
[5] Hertz

خودروها، دنده‌های درگیر چرخ دنده‌ها و یاتاقان‌های غلتشی کاربرد دارند. بنابراین نتایج تحلیل تنش‌های تماسی نقش مهمی در طراحی قطعات مهندسی نظیر بادامک‌ها، چرخ دنده‌ها، بلبرینگ‌ها و ... دارد [۱].

اولین کسی که مکانیک تماسی بین دو جسم کشسان را مورد بررسی قرار داد و تحقیقات خود را در این زمینه منتشر کرد، هرتز بود [۲].

با توسعه اکثر فناوری‌ها به سمت مقیاس‌های کوچک میکرو و نانو، توصیف مشخصه‌های مکانیکی در چنین ابعادی بسیار پیچیده شده است. علاوه بر این، با افزایش استفاده از مواد دارنده ساختارهای بسیار کوچک، فیلم‌های نازک، مواد FGM[1] ، نانو کامپوزیت‌ها، نانو مواد بیولوژیکی و سایر مواد نامتجانس جدید در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی، تحلیل و ارزیابی دقیق تنش و تغییر شکل چنین موادی به منظور پیش بینی رفتار نهایی آنها، بسیار احساس می‌شود.

مواد تابعی (FGM) از نظر میکروسکپی غیر همگن بوده و خواص مکانیکی آنها به‌طور پیوسته از یک سمت سازه تا سمت دیگر تغییر می‌کند. این تغییرات مواد به‌صورت تدریجی با تغییر نسبت حجمی دو ماده ساختاری ایجاد می‌شود. تاریخچه مواد FGM به سال ۱۹۸۴ بر می‌گردد که توسط مهندسین مواد در منطقه سندایی[2] ژاپن معرفی گردید. اغلب FGM های رایج کامپوزیت‌های فلز/ سرامیک هستند. ماده ساختاری سرامیک به‌علت ضریب انتقال حرارت کم و مقاومت زیاد در مقابل گرما، درجات حرارت بسیار بالا را تحمل کرده و ماده ساختاری فلز انعطاف پذیری لازم را فراهم می‌کند به‌علت تغییرات پیوسته خواص مکانیکی مشکلات عدم پیوستگـی که در سازه‌های کامپوزیت وجود دارد در مواد FGM به‌وجود نمی‌آید. . مزیت استفاده از این مواد آن است که قادر به تحمل درجات حرارت بسیار بالا بوده و در مقابل خوردگی و ساییدگی مقاوم هستند و مقاومت بالایی در مقابل شکست دارند. از نکات بسیار برجسته این مواد بهینه‌نمودن تغییرات تنش در آنها با تغییر مناسب پروفیل تغییرات مواد ساختاری است [۳].

قبل از ساخت ماده FGM باید مشخص شود که فلز و سرامیک به چه صورتی توزیع شده است، در بعضی مقاله‌ها هدف یافتن یک پروفیل با توجه به کمینه کردن یک کمیت است.

هدف نهایی از تحقیق مواد FGM، در کاربردهایی از قبیل هوافضا، انرژی هسته ای، میکروالکترونیک، ساخت صفحات و پوسته های مخازن راکتورها و توربین‌ها و صنایع حمل و نقل، توسعه مواد جدیدی است که بتواند در چنین محیط‌هایی سازگار باشد [۴].

بسیاری از کاربردهای موجود مواد FGM، مربوط به مسایل تماسی است. در سال‌های اخیر این مواد در سه گروه از کاربردهای عملی، از نقطه نظر مکانیک تماسی به کار می‌روند. اولین کاربرد این مواد در اجزای انتقال بار از قبیل یاتاقان‌ها، چرخدنده‌ها و بادامک‌ها است. دومین کاربرد این مواد در دیسک‌های ترمز، محفظه سیلندر و دیگر اجزای اتومبیل به منظور بهبود مقاومت در برابر سایش است. سومین کاربرد روکش FGM در زمینه مکانیک تماسی، طراحی آب بندهای سایشی در توربین‌های گازی ثابت است. در همه این

[1] Functionally Graded Materials
[2] Sendai

سه کاربرد، ممکن است مساله مکانیکی مربوطه توسط یک مساله مکانیک تماسی شبه استاتیکی برای یک سنبه صلب با پروفیل معلوم در حال حرکت روی لایه در حضور اصطکاک تقریب زده شود [۴].

ثابت شده است که تغییرات تدریجی مناسب مدول کشسان، می تواند تنش‌های اطراف سنبه را تغییر داده و باعث توقف ترک هرتزی در لبه ناحیه تماسی شود [۵].

در سال‌های اخیر، بعضی از محققان توجه زیادی به مساله تماسی مواد FGM کرده اند. مسایل تقارن محوری نیم صفحه روکش شده توسط FGM تحت بار متمرکز با فرورونده‌های تخت، کروی و مخروطی توسط جیانکوپولوس و سورش مورد ملاحظه قرار گرفته است [۷-۶]. گولر و اردوگان، مدلی را که خواص مکانیکی ورق FGM آن بصورت نمایی تغییر می‌کند بررسی کرده و مساله تماسی را در حالت دو بعدی حل کرده‌اند [۸]. وانگ و کی یک مدل چند لایه‌ای بدون اصطکاک و با اصطکاک، را برای تحلیل تماس ماده FGM که مدول کشسان در آن بطور دلخواه تغییر یافته و تحت شرایط کرنش صفحه‌ای قرار دارد را تحقیق کرده‌اند. ماده FGM به چندین زیر لایه تقسیم شده و در هر زیر لایه مدول برشی تابع نمایی فرض شده است در حالی که ضریب پواسان ثابت فرض می‌شود. با این مدل، مساله تماس بدون اصطکاک نیم صفحه همگنی که توسط FGM روکش شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. به کمک روش ماتریس تبدیل[1] و تکنیک تبدیل انتگرال فوریه[2]، مساله به یک معادله انتگرالی تکین کوشی[3] کاهش پیدا کرده است. آنها به بررسی سنبه های تخت، دایره ای، مثلثی و گوه ای شکل صلب بر روی ورق پرداختند [۱۰-۹].

وانگ و هوانگ، جزئیات محاسبات را برای مسایل ترک و شکاف در دو حالت تغییر شکل صفحه‌ای و غیر صفحه‌ای بیان می‌کنند [۱۲-۱۱].

لیو و وانگ، به بررسی تماس سنبه‌های صلب مسطح متقارن (تخت، کروی و مخروطی) بر روی نیم صفحه همگنی که توسط FGM روکش شده است، پرداخته‌اند. با فرض اینکه مدول برشی ورق بصورت نمایی تغییر کند و ضریب پواسان ثابت فرض شود. با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرال هانکل[4] مساله تماسی اصطکاک دار متقارن، به یک معادله انتگرالی تکین کوشی کاهش پیدا کرده است [۱۳]. لیو، وانگ و ژانگ، نیز به بررسی تماس بدون اصطکاک متقارن بر روی ورق FGM که روی نیم صفحه همگن قرار دارد پرداخته‌اند [۱۴]. تفاوت کار آنها با کار انجام شده توسط لیو و وانگ [۱۱]، آن است که این بار ورق FGM را به چندین زیر لایه تقسیم کرده و مساله را بررسی کرده‌اند.

قابل ذکر است که در تمامی کارهای قبلی انجام شده ، مقدار فشار فقط در سطح تماسی بدست آورده شده و چگونگی فشار در زیر لایه‌ها محاسبه نشده است.

در کار حاضر، به بررسی مکانیک تماسی بدون اصطکاک بین سنبه صلب تخت با نیم صفحه همگنی که تحت روکش ماده FGM ای که مدول برشی آن بصورت نمایی تغییر کرده ، پرداخته شده است. مساله به کمک دو روش حل تحلیلی و عددی بررسی شده است. در حل تحلیلی با استفاده از قانون هوک، روابط تعادل و تبدیل معکوس فوریه، علاوه بر سطح تماس، اندازه فشار تماسی بی بعد و چگونگی رفتار آن در زیر

---

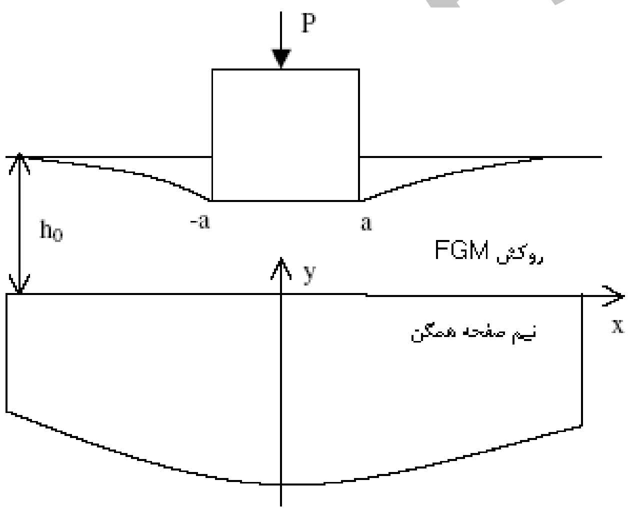
[1] Transfer matrix
[2] Fourier integral transform
[3] Cauchy singular integral
[4] Hankel integral transform

لایه‌های ورق محاسبه شده، همچنین تاثیر نسبت سختی، اندازه ناحیه تماس و تعداد بهینه ورق بر روی فشار تماسی مورد بررسی قرار گرفته است. حل عددی به کمک روش اجزای محدود انجام گرفته و با مقایسه نتایج بدست آمده با مقادیر محاسبه شده توسط وانگ [۱۰] ، می‌توان دقت بالای این روش‌ها را مشاهده کرد.

همچنین یادآور می‌شویم که، کار حاضر دارای کاربردهای بسیاری در ژئو مکانیک، بایو مکانیک، فیلم‌های نازک، روکش‌ها و دیگر مواد مهندسی می‌باشد.

۲- حل تحلیلی

شکل ۱، هندسه تماس سنبه تخت صلبی که در تماس با ورق FGM ای که به عنوان روکش نیم صفحه است، را نشان می‌دهد. نیم صفحه، همگن بوده که مدول برشی آن μ^* است. مدول برشی ماده FGM در سطح تماس برابر μ_0 می‌باشد (a نشان دهنده نصف ناحیه تماس است). در این تحقیق، فرض شده که ضریب پواسان برای هر دو سطح نیم صفحه و ورق یک مقدار ثابتی است. مساله برای حالت دو بعدی و بدون اصطکاک حل شده و بدلیل ناچیز بودن طول ورق در قیاس با سطح مقطع آن، حالت کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته می‌شود.



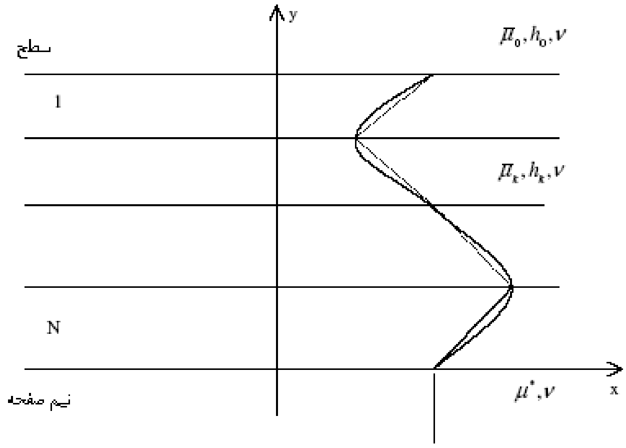
شکل ۱- هندسه مکانیک تماسی سنبه تخت [۹]

با ملاحظه این حقیقت که یک منحنی دلخواه می‌تواند توسط یکسری از توابع خطی تکه ای پیوسته تقریب زده شود، یک مدل چند لایه‌ای همانند شکل (۲) توسعه داده شده است.

مدول برشی روکش در جهت y تغییر می‌کند. این تغییرات توسط تابع نمایی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(y) = \mu^* e^{\beta(y/h_0)} \qquad (۱)$$

که $\beta = \log(\mu_0/\mu^*)$ و h_0 پهنای ورق FGM می‌باشد.



شکل ۲- مدل چند لایه برای ورق FGM [۹]

حال به بررسی معادلات هوک در حالت کرنش صفحه‌ای پرداخته شده که بر این اساس بدست می‌آیند [۱۵]:

$$\sigma_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\sigma_y = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (۲)$$
$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

با قرار دادن این معادلات در معادلات تعادل و ساده سازی، نتایج زیر حاصل می‌شوند:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-\nu)+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(1-2\nu)=0$$
$$2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(1-\nu)+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1-2\nu)=0 \qquad (۳)$$

که u و v به ترتیب، مؤلفه های تغییر مکان در دو راستای x و y هستند.

شرایط مرزی زیر برای حل مساله مکانیک تماسی بالا در نظر گرفته می‌شود:

$$\sigma_{yy0}(x,h_0)=\sigma_{xy0}(x,h_0)=0, \quad -\infty<x<-a,\ a<x<\infty, \qquad (۴)$$

$$\sigma_{yy0}(x,h_0)=-\delta(x)P, \sigma_{xy0}(x,h_0)=0, \quad -a<x<a, \qquad (۵)$$

$$\frac{\partial u_{y0}(x)}{\partial x}=f(x), \quad -a<x<a, \qquad (۶)$$

که $\delta(0)$ تابع دلتا است و $f(x)$ تابع شناخته شده‌ای است که به پروفیل سنبه بستگی دارد که این مقدار برای سنبه تخت برابر صفر می‌باشد (چون تغییر مکان عمودی در راستای y ثابت است).

مؤلفه های تغییر مکان با به کار گیری تبدیلات فوریه از معادله (۳) بدست می‌آیند. با استفاده از تبدیلات فوریه و حل نتایج سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE[1]) مؤلفه‌های تغییر مکان بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,y)e^{isx}\,ds,\qquad v(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(s,y)e^{isx}\,ds, \tag{۷}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,y)=F&=\left(A_{11}(s)+A_{12}(s)y\right)e^{|s|y}\\&+\left(A_{13}(s)+A_{14}(s)y\right)e^{-|s|y},\\ \tilde{v}(x,y)=G&=\left(B_{11}(s)+B_{12}(s)y\right)e^{|s|y}\\&+\left(B_{13}(s)+B_{14}(s)y\right)e^{-|s|y}\end{aligned} \tag{۸}$$

که توابع $A_{1j}(s)$ و $B_{1j}(s)$ توابعی مجهول و وابسته هستند.

با استفاده از تبدیل انتگرال فوریه نسبت به x :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=is\,\tilde{u}=is\,F,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=is\frac{\partial u}{\partial x}=is(isF)=-s^2F\\&\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=is\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}=is\frac{\partial G}{\partial y}\end{aligned} \tag{۹}$$

با قرار دادن معادلات (۹) در معادلات (۳)، نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{xy\,j}&=\mu_j\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+is\tilde{v}\right)=\mu_j\left(\frac{\partial F}{\partial y}+isG\right)\\ \tilde{\sigma}_{yy\,j}&=\lambda\left(is\tilde{u}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)+2\mu_j\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\\&=\frac{2\mu_j}{(1-2\nu)}\left(is\,\nu F+(1-\nu)\frac{\partial G}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{۱۰}$$

با استفاده از معادلات (۳) و (۹) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&-2s^2F(1-\nu)+is\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(1-2\nu)=0\\&2\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(1-\nu)+is\frac{\partial F}{\partial y}-s^2G(1-2\nu)=0\end{aligned} \tag{۱۱}$$

ماتریس S_j که بیان کننده تبدیلات فوریه تغییر مکان و تنش است بصورت زیر تعریف می‌شود:

---

[1] Ordinary Differential Equation

$$S_j = \left(\tilde{u}_{xj}, \tilde{u}_{yj}, \tilde{\sigma}_{xyj}, \tilde{\sigma}_{yyj}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} T_{j11} & T_{j12} & T_{j13} & T_{j14} \\ T_{j21} & T_{j22} & T_{j23} & T_{j24} \\ T_{j31} & T_{j32} & T_{j33} & T_{j34} \\ T_{j41} & T_{j42} & T_{j43} & T_{j44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ A_{j3} \\ A_{j4} \end{pmatrix} \tag{۱۲}$$

که بالا نویس " T " بیانگر ترانهاده ماتریس[1] می‌باشد.

که با استفاده از روابط (۸) و (۱۱) و مقایسه آنها با رابطه (۱۲) می‌توان درایه‌های ماتریس T را بیان کرد:

$$\begin{gathered}
\begin{cases} T_{j11} = e^{|s|y}, \; T_{j12} = y e^{|s|y}, \\ T_{j13} = e^{-|s|y}, \; T_{j14} = y e^{-|s|y} \end{cases} \\
\begin{cases} T_{j21} = -\dfrac{i|s|}{s} e^{|s|y}, \; T_{j22} = (-\dfrac{i|s|}{s} y + \dfrac{ik}{s}) e^{|s|y}, \\ T_{j23} = \dfrac{i|s|}{s} e^{-|s|y}, \; T_{j24} = (\dfrac{i|s|}{s} y + \dfrac{ik}{s}) e^{-|s|y} \end{cases} \\
\begin{cases} T_{j31} = \mu_j \left(\dfrac{\partial T_{j11}}{\partial y} + i s T_{j21} \right), \; T_{j32} = \mu_j \left(\dfrac{\partial T_{j12}}{\partial y} + i s T_{j22} \right), \\ T_{j33} = \mu_j \left(\dfrac{\partial T_{j13}}{\partial y} + i s T_{j23} \right), \; T_{j34} = \mu_j \left(\dfrac{\partial T_{j14}}{\partial y} + i s T_{j24} \right) \end{cases} \\
\begin{cases} T_{j41} = \dfrac{2\mu_j}{(1-2\nu)} \left(is\nu \, T_{j11} + (1-\nu) \dfrac{\partial T_{j21}}{\partial y} \right), \\ T_{j42} = \dfrac{2\mu_j}{(1-2\nu)} \left(is\nu \, T_{j12} + (1-\nu) \dfrac{\partial T_{j22}}{\partial y} \right) \\ T_{j43} = \dfrac{2\mu_j}{(1-2\nu)} \left(is\nu \, T_{j13} + (1-\nu) \dfrac{\partial T_{j23}}{\partial y} \right), \\ T_{j44} = \dfrac{2\mu_j}{(1-2\nu)} \left(is\nu \, T_{j14} + (1-\nu) \dfrac{\partial T_{j24}}{\partial y} \right) \end{cases}
\end{gathered} \tag{۱۳}$$

برای حالت کرنش صفحه ای، $k = 3-4\nu$ می‌باشد.

در ابتدا محاسبات برای تک لایه انجام می‌شود. با توجه به رابطه (۸)، وقتی $y \to -\infty$ ضرایب A_{13}, A_{14} باید برابر صفر باشند.

---

[1] Transposition of matrix

ابتدا ماتریس $[T_1]_{y=0}$، که ماتریس T روی سطح ورق می‌باشد به کمک معادلات (۱۳) بدست می‌آید. با به کارگیری معادلات (۵) و (۱۲)، ضرایب A_{11}, A_{12} را به کمک نرم افزار Maple حل کرده و با جایگذاری آن در معادلات (۸) و (۱۱) ضرایب B_{11}, B_{12} بدست می‌آیند.

با گرفتن مشتق از معادله (۸) نسبت به x، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} i\,s\,G\; e^{is(x-t)}\,ds \tag{۱۴}$$

با استفاده از رابطه زیر کمیت‌های بی بعدی معرفی می‌شوند:

$$t=a\eta,\ x=a\varsigma\ \ ,-a<(t,x)<a,-1<(\eta,\varsigma)<1 \tag{۱۵}$$

با استفاده از رابطه بالا کمیت‌های x , t نرمالیزه می‌گردند:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\int_{-1}^{1}\left[\frac{-0.1p(\eta)\left(-7\varsigma^3+21\varsigma^2\eta-21\eta^2\varsigma+7\eta^3\right)}{a\mu\pi\left(\varsigma^4-4\eta\varsigma^3+6\varsigma^2\eta^2-4\varsigma\eta^3+\eta^4\right)}\right]d\eta \tag{۱۶}$$

با توجه به اینکه تغییر مکان عمودی در راستای y ثابت است، عبارت بالا نسبت به x برابر صفر خواهد بود. معادله دیگری که باید ارضا شود معادله تعادل استاتیکی است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{-a}^{a} p(t)\ dt = P \tag{۱۷}$$

به کمک نرمالیزه کردن، معادله بالا تبدیل می‌شود به:

$$\int_{-1}^{1} p(\eta)\ d\eta = P/a \tag{۱۸}$$

می‌توان معادلات (۱۶) و (۱۸) را توسط روش‌های اردوگان و گوپتا حل نمود. توجه شود که تابع $p(\eta)$ در $\eta=\pm1$ از نظر انتگرال پذیری تکین[1] است و می تواند بصورت زیر بیان شود [۱۶]:

$$p(\eta)=\frac{f(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \tag{۱۹}$$

از روش اردوگان و گوپتا خواهیم داشت [۱۶]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta\cong\frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M} f(\eta) \tag{۲۰}$$

حال به کمک رابطه (۲۰) و جایگذاری آن در معادلات (۱۶) و (۱۸) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{M}\left(\frac{-0.1}{a\mu}\right)\sum_{l=1}^{M} f(\eta_l)\left(\frac{7\eta_l^3-21\varsigma_r\eta_l^2+21\varsigma_r^2\eta_l-7\varsigma_r^3}{\eta_l^4-4\varsigma_r\eta_l^3+6\varsigma_r^2\eta_l^2-4\varsigma_r^3\eta_l+\varsigma_r^4}\right)=0 \tag{۲۱}$$

$$\frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M} f(\eta_l)=\frac{P}{a\pi} \tag{۲۲}$$

---

[1] Singular

که $\eta_l = \cos\left[\frac{(2l-1)\pi}{2M}\right], \varsigma_r = \cos(\frac{\pi r}{M}), r = 1,2,\ldots,M-1$ و M تعداد تمام نقاط ناپیوسته از تابع $f(\eta_l)$ در بازه (۱و۱-) می‌باشد [۱۶]. معادلات (۲۱) و (۲۲) سیستمی از M معادله برای پیدا کردن M مجهول $f(\eta_1),\ldots, f(\eta_M)$ را تشکیل می‌دهند.

با بدست آوردن $f(\eta)$ و قرار دادن آن در رابطه (۱۹) مقدار $p(\eta) = p$ بدست آمده و با جایگذاری آن در رابطه $p_f = \frac{p}{(P/2a)}$ مقدار فشار تماسی بی بعد در روی سطح ورق بدست می‌آید.

حال محاسبات، برای تعداد لایه‌های بیشتر انجام می‌شود.

با توجه به اینکه تنش‌ها و تغییر مکان‌ها در سطح مشترک لایه‌ها پیوسته هستند، بدست می‌آید:

$$\{S_j\} - \{S_{j+1}\} = 0, \quad y = h_j \tag{۲۳}$$

همچنین به کمک رابطه زیر:

$$\{S_j\} = [T_j(y)]\{A_j\} \tag{۲۴}$$

و با توجه به پیوستگی درسطح مشترک لایه‌ها و رابطه‌های (۲۳) و (۲۴) نتیجه می‌شود:

$$[T_1]_{y=-h_0} A_1 = [T_2]_{y=-h_0} A_2 \tag{۲۵}$$

$$[C_1][T_1]_{y=0} A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}, \qquad [C_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲۶}$$

ابتدا از رابطه بالا، ضریب A_1 ، محاسبه شده و با قرار دادن آن در رابطه (۲۵) مقدار A_2 بدست می‌آید. سپس B_{11} , B_{21} را محاسبه کرده. با بدست آوردن ضرایب A و B، تغییر مکان‌های افقی و عمودی F و G را بدست آورده و با استفاده از رابطه (۱۰) تنش تبدیل یافته فوریه در راستای عمود $(\tilde{\sigma}_{yy})$، محاسبه می‌شود. حال با استفاده از تبدیل معکوس فوریه مقدار تنش در راستای عمود بدست می‌آید.

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}_{yy}\, e^{isx}\, ds \tag{۲۷}$$

با استفاده از روابط (۱۰) و (۲۷) ، می‌توان تنش در لایه‌های مشترک را بدست آورد.

۳- حل عددی

حل عددی به روش اجزای محدود و به کمک نرم افزار ANSYS [۱۷]، انجام شده و نتایج حاصل، با نتایج بدست آمده از حل تحلیلی مقایسه می‌شود.

ورق مورد نظر از دو قسمت فلز / سرامیک تشکیل شده که جنس فلزی آن فولاد و سرامیک آن Si_3N_4 و ZrO_2 می‌باشد. در جدول (۱)، اطلاعات مربوط به جنس و خواص مکانیکی این نوع مواد نشان داده شده است [۱۸]:

جدول ۱- جنس و خواص مکانیکی قطعات تماسی مورد بررسی

شماره مطالعه موردی	جنس	ماده	مدول کشسانی (GPa)	ضریب پواسان
۱	فلز	فولاد	۲۰۰	۰,۳
۲	سرامیک	Si_3N_4	۱۹۲*	۰,۲۵
۳		ZrO_2	۲۴**	۰,۲۵

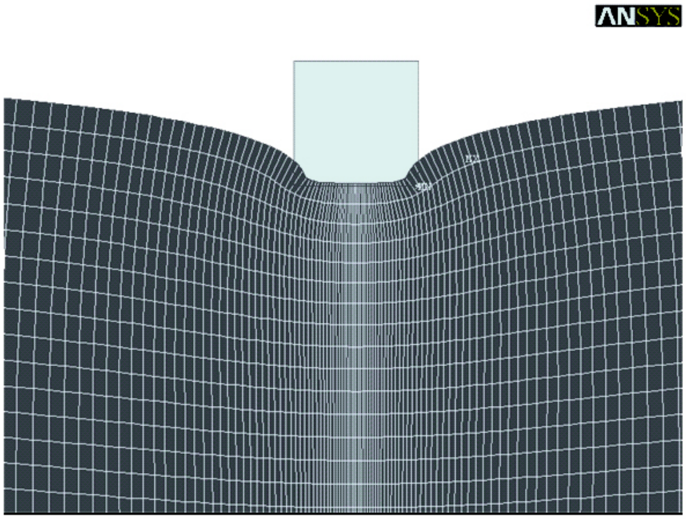
* در دمای ۱۴۰۰ درجه سانتی گراد ** در دمای ۱۱۰۰ درجه سانتی گراد

در این مساله، خط بالایی ورق FGM به عنوان سطح تماس و خط پایینی سنبه به عنوان سطح هدف انتخاب شده است. در کلیه مدل‌های حاضر، دو جسم تحت یک نیروی مشخص در تماس با یکدیگر قرار داده می‌شوند. برای رسیدن به این مهم از بارگذاری چند مرحله‌ای استفاده می‌شود. در مرحله اول ابتدا دو جسم، با یک نفوذ اولیه در هم درگیر می‌شوند تا المان‌های هدف و تماس همدیگر را درک کنند و مساله از لحاظ شرایط مرزی معین گردد. در بارگذاری بعدی پس از حل تماس و معین شدن مساله، قیود جابجایی برداشته شده و به جای آن نیروی خارجی اعمال می‌شود.

برای مدل سازی اجزای محدود در حالت دو بعدی از جزء ۸ گره ای PLANE82 استفاده می‌شود. قابل ذکر است که برای مدل سازی تماس از اجزای CONTA172 برای سطح تماس، TARGE169 برای سطح هدف به کار گرفته می‌شود.

شکل (۳) چگونگی مش بندی مساله تماسی تحقیق را نشان می‌دهد. مش بندی از نوع دستی[1] و شکل مش از نوع مربعی می‌باشد. مش‌ها در نزدیکی ناحیه تماس ریزتر و در نواحی دورتر درشت‌تر می‌باشند. چون سنبه جسمی صلب است نیاز به شبکه بندی ندارد.

در این تحلیل تقریبا از ۶۲۰۰ جزء ۸ گره ای PLANE82 استفاده شده است.



شکل ۳- چگونگی مش بندی برای حل عددی مساله تماسی

[1] Mapped

برای اعمال شرایط قیدی، کلیه گره‌های واقع بر خط عمودی ورق و ماده همگن در راستای x مقید می‌شوند. خط افقی ماده همگن نیز در دو راستای x و y مقید می‌شود.

برای تحلیل کشسان- مومسان این مدل، نیاز به دو پارامتر تنش تسلیم و مدول مماسی می‌باشد که مقادیر آنها در جدول(۲) ارایه شده است.

جدول ۲- ثوابت حقیقی مورد استفاده در تحلیل کشسان- مومسان

نام پارامتر	*مقدار* (MPa)
تنش تسلیم	۲۷۵
مدول مماسی	۱۳۸۰

۴- نتایج

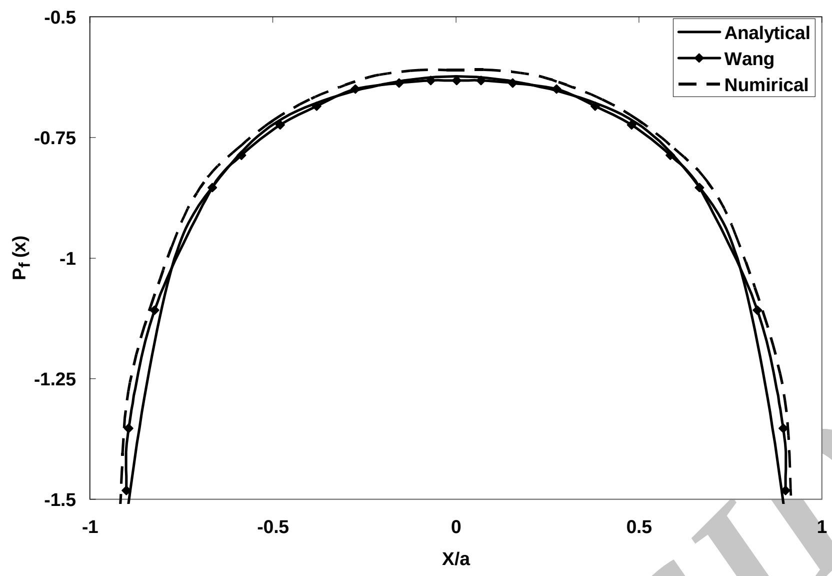
۴-۱- تعیین تعداد زیر لایه بهینه

برای استفاده از مدل حاضر، ابتدا باید تعداد زیر لایه‌هایی که برای بدست آوردن دقت مناسب جواب‌ها لازم است، تعیین شود. جدول۳، مینیمم فشار تماسی بی بعد بدست آمده در تعداد لایه‌های مختلف را در حالت μ^*/μ_0=۸ و a/h_0 = ۰٫۱ نشان می‌دهد. همانطور که نشان داده شده است با افزایش تعداد لایه‌ها، نتایج به طور افزاینده ای به یکدیگر نزدیک می‌شوند. و نتایج با $N=6$ یا $N=8$ ممکن است دقت خوبی داشته باشد. می‌توان دید که وقتی که از لایه ۶ به لایه ۸ می‌رویم میزان اختلاف بین فشارها کمتر می‌شود بنابراین می‌توانیم $N=6$ را به عنوان تعداد لایه بهینه انتخاب کرده و ورق به ۶ زیر لایه تقسیم شود.

جدول ۳- مینیمم فشار تماسی بی بعد بدست آمده در تعداد لایه‌های مختلف
برای حالت ۸ = μ^*/μ_0 و ۰٫۱= a/h_0

تعداد زیر لایه(N)	مینیمم فشار تماسی بی بعد	میزان اختلاف
۲	-۰٫۵۶۲۶۶	-
۴	-۰٫۶۹۸۳	۰٫۱۳۵۶۴
۶	-۰٫۷۱۵۲	۰٫۰۱۶۹
۸	-۰٫۷۲۱۲۲	۰٫۰۰۶۰۲
۱۰	-۰٫۷۲۷۳۳	۰٫۰۰۶۱۱

حال پس از مشخص کردن تعداد زیر لایه‌ها، ابتدا توزیع فشار بر روی سطح تماس به کمک معادلات (۲۱) و (۲۲) بدست می‌آید. قابل ذکر می‌باشد که تعداد نقاط برابر ۷، $(M=7)$ در نظر گرفته شده است. سپس از روی پروفیل تنش روی سطح، نیرو در هر نقطه را بدست آورده و توزیع تنش راستای عمود مربوط به این نیرو را در لایه بعدی بدست آورده و از برهم نهی تنش در هر نقطه، تنش کل در لایه بدست می‌آید.

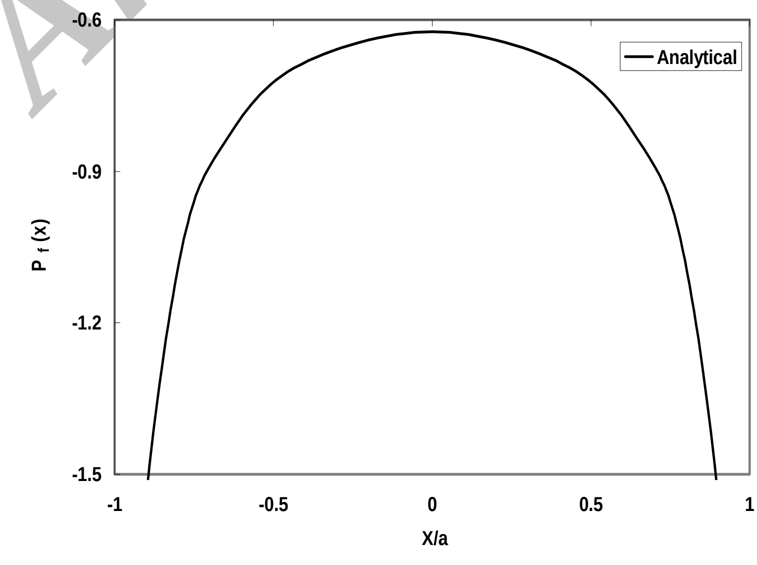


شکل ۴– مقایسه بین توزیع تنش تماسی بی بعد روش اجزای محدود و تحلیلی با مقادیر بدست آمده از وانگ
برروی سطح تماس ورق با سنبه تخت در شرایط $a/h_0 = ۰٫۱$ و $\mu^*/\mu_0 = ۱$

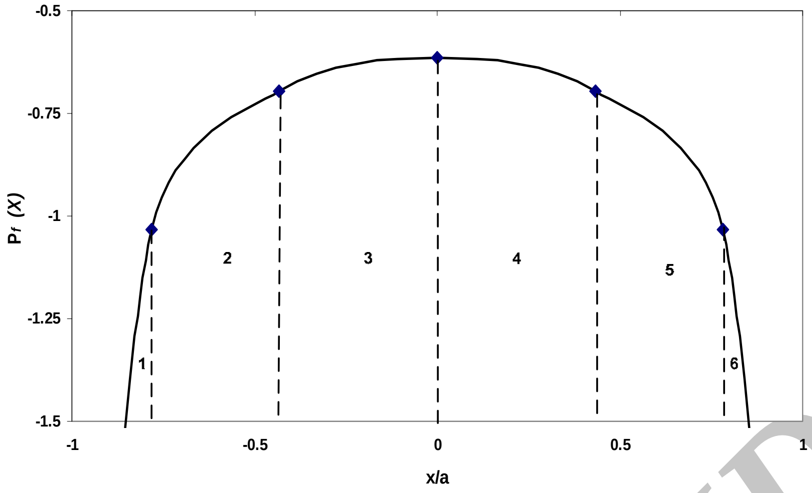
شکل(۴)، مقایسه ای بین مقادیر بدست آمده از تنش‌های تماسی بی بعد به کمک حل عددی و تحلیلی را که با نتایج وانگ [۱۰]، مقایسه شده است نشان می‌دهد. با توجه به شکل می توان به دقت بالای حل تحلیلی و حل عددی پی برد. مشاهده می‌شود که بر روی سطح تماس ، بیشترین فشار در لبه تماسی سنبه اتفاق افتاده و کمترین فشار در مرکز سنبه رخ می‌دهد.

۴-۲- محاسبه فشار در لایه مشترک اول

در مرحله اول، پروفیل تنش در سطح تماس به کمک معادلات (۲۱) و (۲۲) بدست می‌آید (شکل۵). سپس با مشخص کردن ۷ نقطه روی سطح تماس، نمودار به ۶ قسمت تقسیم می‌شود (شکل۶).

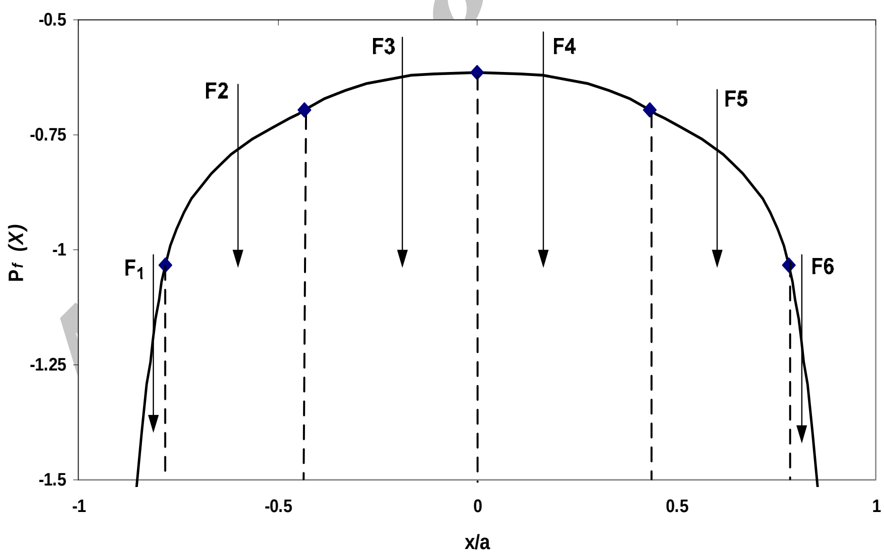


شکل ۵– توزیع تنش عمودی بدست آمده از حل تحلیلی در سطح تماس سنبه تخت با ورق



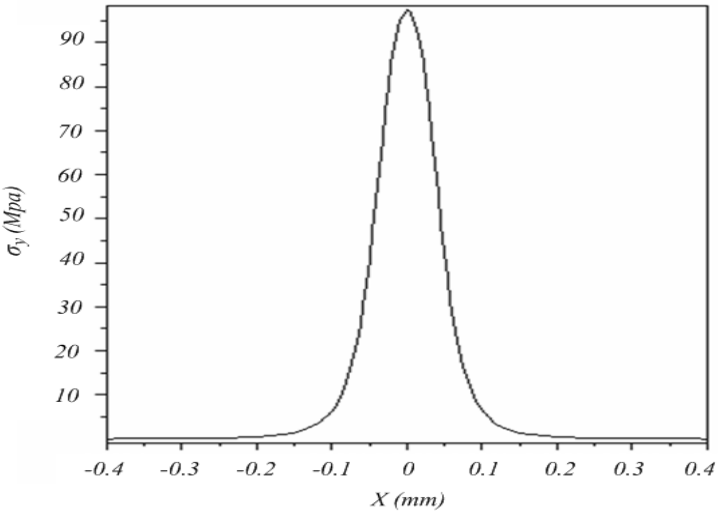
شکل ۶– چگونگی تقسیم بازه نمودار تنش در سطح تماس

نیروی متمرکز ناشی از تنش تماسی در سطح تماس را برای هر قسمت بدست آورده و در نقطه وسط آن اعمال می‌شود (شکل۷). می‌توان توزیع تنش مرتبط با این تک نیرو را به کمک معادلات (۱۰) و (۲۷) در لایه بعدی بدست آورد. تنش کل در هر نقطه از لایه بعدی از برهم نهی تنش آن نقطه به ازای هر کدام از نیروهاست.



شکل ۷– چگونگی توزیع بار متمرکز ناشی از تنش در سطح تماس

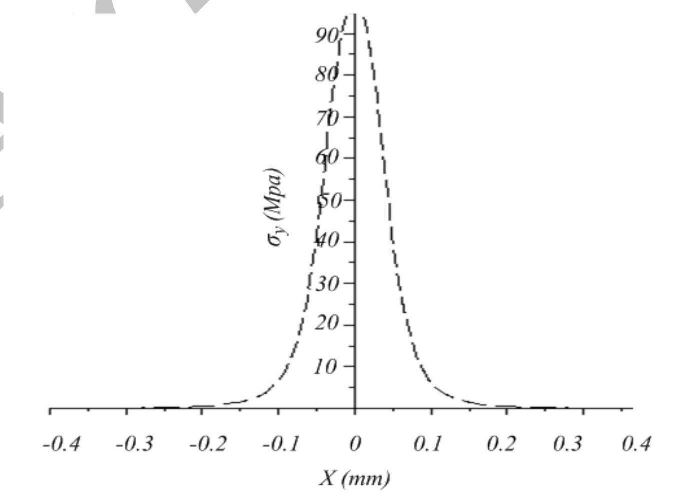
به کمک برهم نهی نمودارهای بدست آمده می‌توان نمودار تنش کل در راستای عمود را برای لایه مشترک اول در شرایط ۱ = μ^*/μ_0 و ۰.۱ = a/h_0 ، بدست آورد که در شکل (۸) نشان داده شده است.



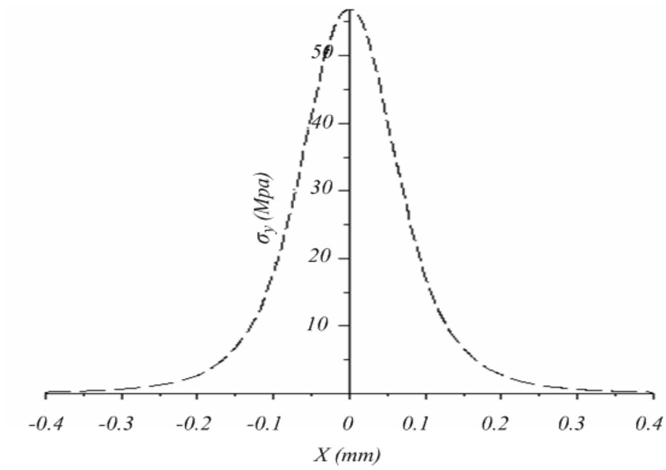
شکل ۸- توزیع تنش در راستای عمود در لایه مشترک اول ورق در تماس با سنبه تخت به کمک حل تحلیلی

به کمک نمودار تنش عمودی رسم شده در شکل (۸) می‌توان مقدار نیرو را در هر بازه بدست آورد و با قرار دادن آن در معادله (۲۷) مقدار تنش در لایه بعدی را محاسبه و به همین ترتیب نمودار تنش در لایه‌های بعدی و مقدار فشار تماسی در هر زیر لایه را می‌توان بدست آورد. مقدار نیروی کل در هر زیر لایه، از گرفتن انتگرال سطح زیر نمودار تنش کل بدست می‌آید.

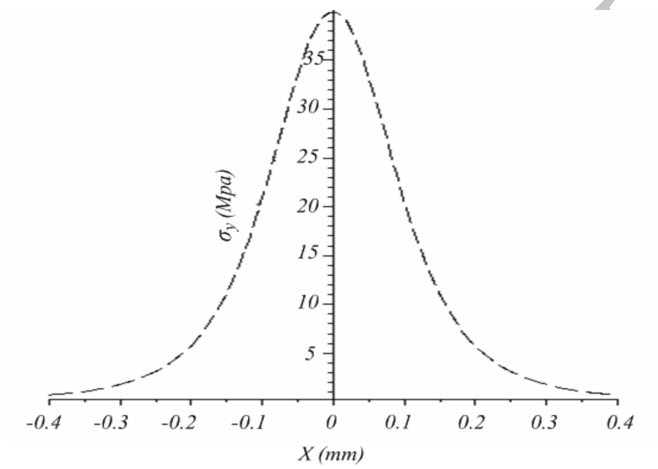
شکل‌های (۹-۱) تا (۹-۶) ، توزیع تنش‌های عمودی در لایه مشترک‌های مختلف را در شرایط ۱ = μ^*/μ_0 و ۰.۱ = a/h_0 نشان می‌دهند. با توجه به نمودارها، هرچه به سمت لایه پایین‌تر می‌رویم مشاهده می‌شود که تنش بسیار کم شده و با توجه به اینکه مقدار نیروی عمودی باید ثابت باشد پس نمودارها پهن‌تر خواهد شد.



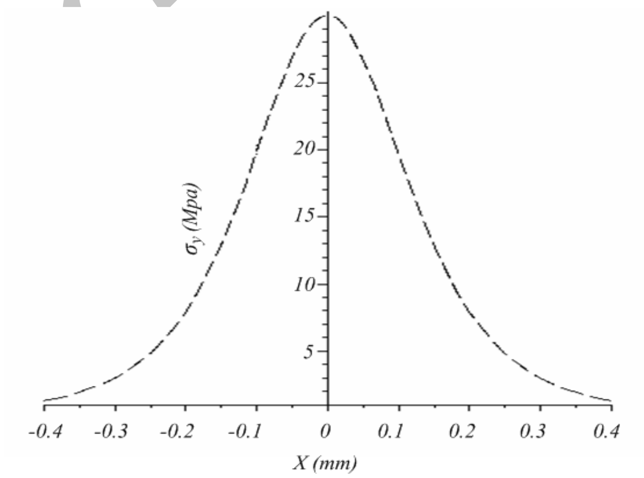
شکل ۹- ۱- تنش عمودی در لایه مشترک اول به کمک حل تحلیلی



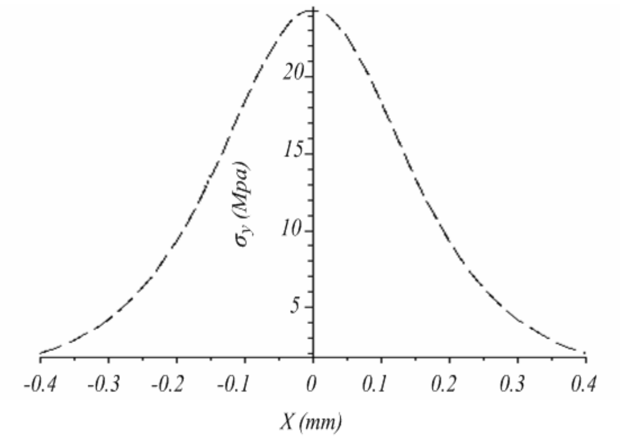
شکل ۹- ۲- تنش عمودی در لایه مشترک دوم به کمک حل تحلیلی



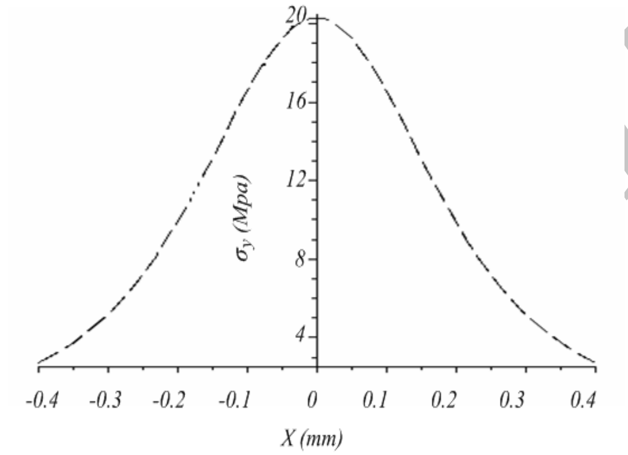
شکل ۹-۳- تنش عمودی در لایه مشترک سوم به کمک حل تحلیلی



شکل ۹- ۴- تنش عمودی در لایه مشترک چهارم به کمک حل تحلیلی

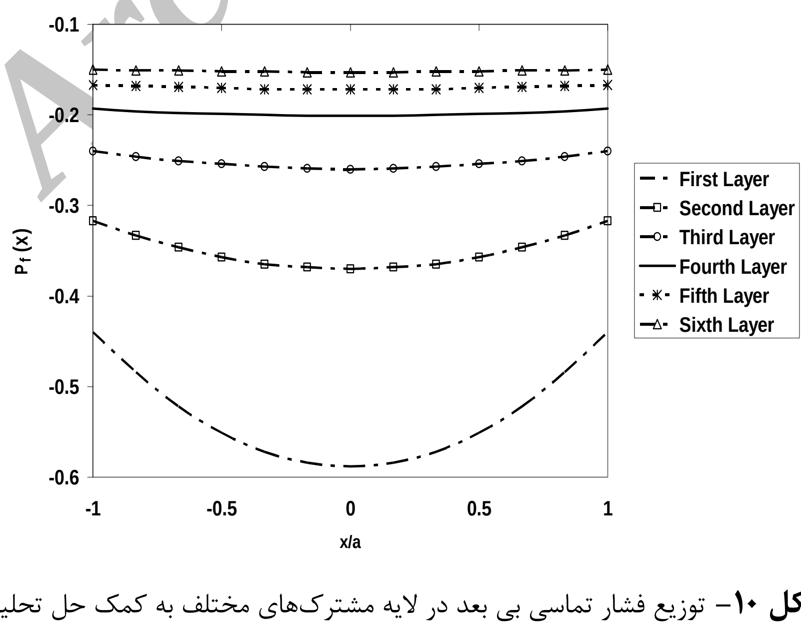


شکل ۹- ۵- تنش عمودی در لایه مشترک پنجم به کمک حل تحلیلی



شکل ۹- ۶- تنش عمودی در لایه مشترک ششم به کمک حل تحلیلی

شکل(۱۰)، چگونگی توزیع فشار تماسی بی بعد در لایه مشترک‌های مختلف ورق که توسط حل تحلیلی انجام شده است و تحت شرایط ۱ = μ^*/μ_0 و ۰.۱ = a/h_0 است را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰- توزیع فشار تماسی بی بعد در لایه مشترک‌های مختلف به کمک حل تحلیلی
تحت شرایط ۱ = μ^*/μ_0 و ۰.۱= a/h_0

همانطور که از شکل مشاهده می‌شود :

در همه لایه ها بیشترین فشار در وسط ورق وجود دارد در حالی که چنانچه در شکل ۴ نشان داده شد در روی سطح ورق (محل تماس) ماگزیمم فشار در لبه‌های سنبه رخ می‌دهد.

در لایه‌های پایینی (جایی که از محل اعمال فشار دور شود)، اختلاف فشار بین لایه‌ها کمتر می‌شود که طبق اصل سنت و نان[1] می‌باشد.

توزیع فشار در لایه‌های پایینی یکنواخت‌تر می‌باشد (گرادیان فشار در امتداد طول کاهش می‌یابد).

جدول (۴)، مقادیر ماکزیمم فشار تماسی بی بعد بدست آمده به روش تحلیلی با توجه به شکل ۱۰ و نتایج اجزای محدود در لایه مشترک‌های مختلف را در شرایط $\mu^*/\mu_0 = ۱$ و $a/h_0 = ۰.۱$ نشان می‌دهد.

جدول۴– ماکزیمم فشار تماسی بی بعد بدست آمده از حل تحلیلی وعددی در لایه‌های مختلف در شرایط $\mu^*/\mu_0 = ۱$ و $a/h_0 = ۰.۱$

موقعیت	ماکزیمم فشار تماسی بی بعد (روش تحلیلی)	ماکزیمم فشار تماسی بی بعد (روش عددی)
لایه مشترک اول	-۰,۵۷۰۶	-۰,۵۸۴
لایه مشترک دوم	-۰,۳۳۹	-۰,۳۵۷
لایه مشترک سوم	-۰,۲۳۹۸	-۰,۲۵۳
لایه مشترک چهارم	-۰,۱۸۵۷	-۰,۱۹۶
لایه مشترک پنجم	-۰,۱۵۳	-۰,۱۶۲۵
لایه مشترک ششم	-۰,۱۲۵	-۰,۱۳۴

با تغییر دادن نسبت سختی, نتایج برای حالت $\mu^*/\mu_0 = ۱/۸$ محاسبه می‌شود که در جدول (۵)، بیان شده است.

جدول۵– ماکزیمم فشار تماسی بی بعد بدست آمده ازحل تحلیلی وعددی در لایه های مختلف در شرایط $\mu^*/\mu_0 = ۱/۸$ و $a/h_0 = ۰.۱$

موقعیت	ماکزیمم فشار تماسی بی بعد (روش تحلیلی)	ماکزیمم فشار تماسی بی بعد (روش عددی)
لایه مشترک اول	-۰,۴۹۶۹	-۰,۵۱۸۵
لایه مشترک دوم	-۰,۲۸۵۲	-۰,۳۰۳
لایه مشترک سوم	-۰,۱۸۴۷	-۰,۱۹۳۳
لایه مشترک چهارم	-۰,۱۳۶۲	-۰,۱۴۳
لایه مشترک پنجم	-۰,۱۰۸۷	-۰,۱۱۴۹
لایه مشترک ششم	-۰,۰۹۲۲	-۰,۰۹۹۴

[1] Saint-Vanant

همانطور که مشاهده می‌شود حداکثر فشار در گذر از لایه مشترک اول به دوم بیشترین اختلاف وجود دارد. به منظور دستیابی به جواب‌های دقیق‌تر می‌توان شبکه بندی به کار برده شده را ریزتر کرد. با ریزتر کردن شبکه‌ها به میزان دو برابر، مشاهده شد که زمان حل به شدت افزایش می‌یابد، به طوری که با سیستم-های رایانه ای موجود به دست آوردن جواب بسیار طولانی خواهد بود که از لحاظ وقت و هزینه به صرفه نخواهد بود. پس با توجه به محدودیت‌های سخت افزاری و نیز دقت تقریبا مطلوب جواب‌های موجود، از ریزتر کردن شبکه خودداری می‌شود.

۴-۳- بررسی تاثیر نسبت سختی (μ^*/μ_0) و ناحیه تماسی (a/h_0) بر روی فشار تماسی سطح ورق

شکل (۱۱)، چگونگی توزیع فشار تماسی بی بعد یعنی $p_f(x)$ مربوط به سنبه تخت را برای مقادیر مختلف نسبت سختی μ^*/μ_0 با مقدار ثابت a/h_0 را نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل مشخص است، فشار تماسی در هر دو انتها $x=\pm a$ دارای نقاط تکین می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که وقتی a/h_0 ثابت است، با افزایش μ^*/μ_0، فشار تماسی در اغلب ناحیه تماسی سنبه تخت افزایش ولی در ناحیه نزدیک دو انتها کاهش می‌یابد.

جدول(۶)، حداقل فشار تماسی بی‌بعد در مرکز سنبه را برای دو حالت a/h_0 و در دو نسبت سختی مختلف بیان می‌کند.

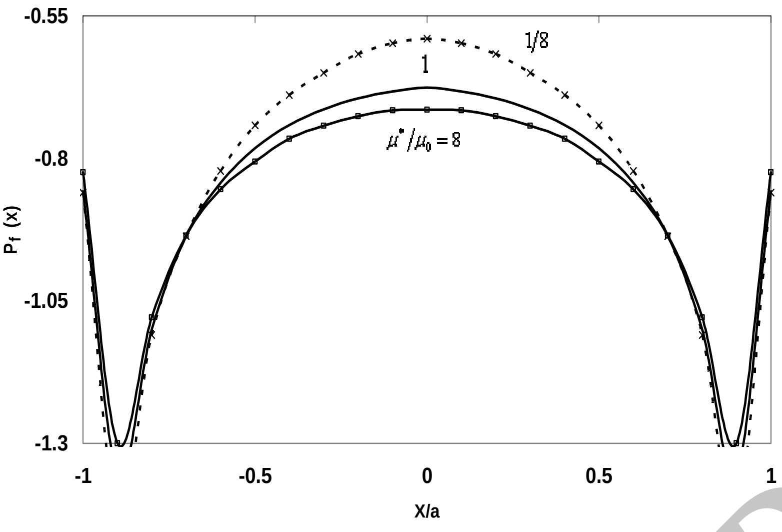
همانطور که مشاهده می‌شود در نسبت سختی ۸ = μ^*/μ_0، یعنی حالتی که سطح همگن سفت‌تر از ورق FGM است، با افزایش a یا کاهش h_0 ، فشار تماسی بی بعد افزایش می‌یابد ولی در حالت ۱/ ۸ = μ^*/μ_0، یعنی حالتی که سطح ورق سفت‌تر از سطح همگن است، با افزایش a یا کاهش h_0 ، فشار تماسی بی بعد کاهش می‌یابد.

۴-۴- بررسی مقدار تغییر مکان کشسان در لایه‌های مختلف ورق FGM

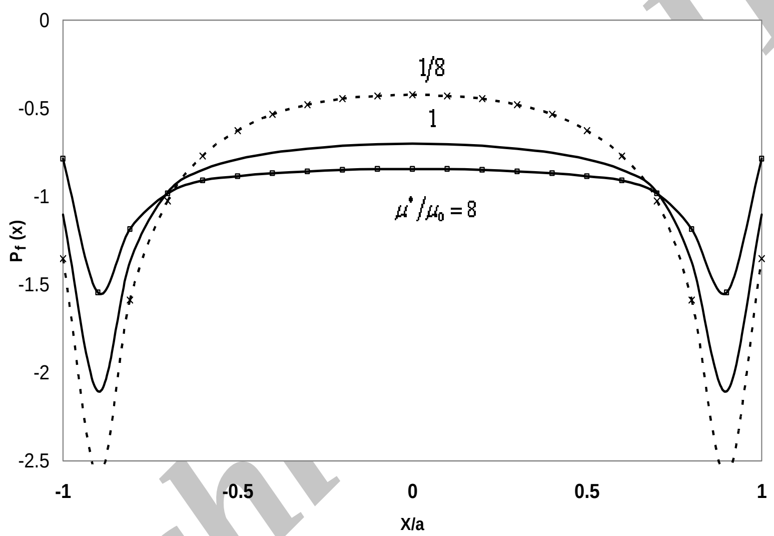
شکل (۱۲) چگونگی توزیع تغییر مکان درراستای عمودی را درسطح ورق و زیرلایه‌های آن در شرایط μ^*/μ_0=۸

و ۰،۱ = a/h_0 نشان می‌دهد که تحت نیروی ۲۰ کیلو نیوتن قرار گرفته و در حالت کشسان قرار دارد.

با توجه به شکل، بیشترین تغییر مکان در وسط سنبه و کمترین در لبه‌های سنبه رخ می‌دهد. هرچه به محل اعمال فشار که همان سطح ورق است، نزدیک می‌شویم تغییر مکان‌ها زیاد و هرچه دورتر شویم تغییر مکان کم می‌شود. هرچه از سطح ورق دور شویم (زیر لایه ششم)، توزیع تغییر مکان یکنواخت‌تر شده و وسط سنبه و لبه‌ها به یک میزان تغییر شکل پیدا می‌کنند.



(الف)

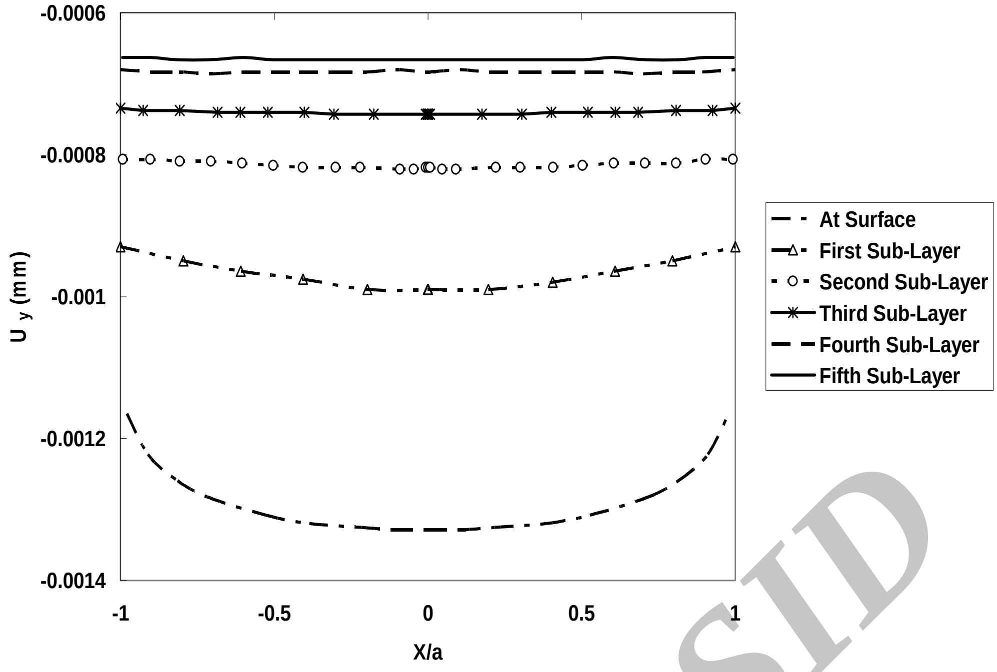


(ب)

شکل ۱۱– توزیع فشار تماسی بی بعد در سطح ورق تحت فشار سنبه تخت برای مقادیر مختلف μ^*/μ_0
(الف) a/h_0 =۰,۱ و (ب) a/h_0 =۰,۵

جدول۶– تاثیر نسبت سختی و اندازه ناحیه تماسی برروی فشار تماسی بی‌بعد

نسبت سختی(μ^*/μ_0)	*فشار تماسی بی بعد* p_f(۰)	
	a/h = ۰,۱	a/h = ۰,۵
۸	-۰,۷۱۴۵	-۰,۸۴۴۰۷
۱/۸	-۰,۵۸۹۸	-۰,۴۲۲۵



شکل ۱۲– توزیع تغییر مکان عمودی کشسان در سطح و زیر لایه‌های ورق
تحت شرایط ۸ = μ^*/μ_0 و ۰,۱= a/h_0

جدول (۷)، به بررسی تأثیر نسبت سختی بر روی تغییر مکان عمودی کشسان تحت شرایط ۰,۱ a/h_0 = و نیروی ۲۰ کیلو نیوتن در زیر لایه‌ها می‌پردازد. همانطور که نشان داده شده است در حالتی که μ^*/μ_0=۱/۸ ،
یعنی حالتی که سطح ورق سفت‌تر از سطح ماده همگن است، تحت نیروی اعمالی برابر، مقدار تغییر مکان کشسان، کمتر از حالتی است که سطح ماده همگن سفت‌تر از سطح ورق می‌باشد.

جدول ۷– تأثیر نسبت سختی بر روی مقدار تغییر مکان عمودی کشسان
در شرایط ۰,۱= a/h_0 و نیروی ۲۰ کیلو نیوتن

موقعیت	مقدار حداکثر تغییر مکان عمودی کشسان (میکرومتر)	
	μ^*/μ_0 = ۸	μ^*/μ_0 = ۱/۸
روی سطح	-۱,۳۲۹۱	-۰,۹۹۰۳۳
لایه مشترک اول	-۰,۹۸۷۵۵	-۰,۹۲۰۴۲
لایه مشترک دوم	-۰,۸۳۶۹	-۰,۷۷۵۳۸
لایه مشترک سوم	-۰,۷۴۰۲۶	-۰,۶۸۵۷۴
لایه مشترک چهارم	-۰,۷۰۱۵۵	-۰,۶۴۶۴۷
لایه مشترک پنجم	-۰,۶۸۰۱۴	-۰,۶۱۴۲۱

نتیجه گیری

در مقاله حاضر، یک مدل چند لایه‌ای برای تحلیل تماس بدون اصطکاک روکش ماده FGM که تحت تغییر شکل کرنش صفحه‌ای قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است. با ملاحظه این حقیقت که یک منحنی دلخواه می تواند توسط یکسری از توابع خطی تکه ای پیوسته تقریب زده شود، یک مدل چند لایه‌ای توسعه داده شده است. برای بررسی درستی مدل، تماس بدون اصطکاک سنبه صلب تخت را به کمک حل عددی و با استفاده از روش اجزای محدود بدست آورده و نتایج با حل تحلیلی مقایسه گردیده است. این مقایسه‌ها دقت بالای این دو روش را نشان می‌دهند. با استفاده از بررسی‌های انجام شده، نتایج زیر، حاصل بدست آمده است:

۱) مدل حاضر در حل مساله تماسی مواد FGM بسیار کارآمد می‌باشد. بطور کلی تعداد ۶ یا ۸ لایه می‌تواند مناسب بوده و دقت مسله را افزایش دهد.

۲) با تغییر مناسب مدول برشی می‌توان توزیع فشار تماسی را کنترل کرد.

۳) با توجه به نتایج بدست آمده، بر روی سطح تماس، بیشترین فشار تماسی در لبه‌های سنبه تخت و کمترین فشار در وسط سنبه رخ می‌دهد. این در حالی است که در لایه‌های زیرین ورق، بیشترین فشار تماسی در امتداد مرکز سنبه و کمترین فشار در امتداد لبه‌های سنبه اتفاق می‌افتد.

۴) بیشترین تغییر مکان در وسط سنبه و کمترین در لبه‌های سنبه رخ می‌دهد. هرچه به محل اعمال فشار که همان سطح ورق است، نزدیک می‌شویم تغییر مکان‌ها زیاد و هرچه دورتر شویم تغییر مکان کم می‌شود. در حالتی که نسبت سختی ۸ می‌باشد، یعنی سطح ورق سفت‌تر از سطح ماده همگن است، تحت نیروی اعمالی برابر، مقدار تغییر مکان کشسان ، کمتر از حالتی است که نسبت سختی ۱/۸ می‌باشد.

مراجع

[1] Shigley, J.E., "*Mechanical Engineering Design*", 5th Edition, McGraw-Hill, New York, (2003).

[2] Hertz, H., "On the Contact of Elastic Solids", J. Reine Angew, Math. Vol. 92, pp. 156-171, (1882).

[3] Shoita, I., and Miyamoto, Y., "*Functionaly Graded Materials*", Japan, Elsevier, Septamber, (1996).

[4] Guler, M.A., "Contact Mechanics of FGM Coating, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering", University of Lehigh, (2000).

[5] Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., and Alcala, J., "Spherical Indentation of Compositionally Graded Materials: Theory and Experiments", Acta Mater, Vol. 45, pp. 1307-1321, (1997).

[6] Giannakopoulos, A.E., and Suresh, S., "Indentation of Solids with Gradients in Elastic Properties: Part I. Point Force Solution", International Journal of Solids and Structures, Vol. 34, pp. 2357-2392, (1997).

[7] Giannakopoulos, A.E., and Suresh, S., "Indentation of Solids with Gradients in Elastic Properties: Part II. Axisymetric Indenters", International Journal of Solids and Structures, Vol. 34, pp. 2392-2428, (1997).

[8] Guler, M A., and Erdogan, F., "Contact Mechanics of Graded Coatings", International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 3865-3889, (2004).

[9] Ke, L.L., and Wang, Y.S., "Two-dimensional Contact Mechanics of Functionally Graded Materials with Arbitrary Spatial Variations of Material Properties", International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, pp. 5779-5798, (2006).

[10] Ke, L.L., and Wang, Y.S., "Two-dimensional Soliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials," European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 26, pp. 171-188, (2007).

[11] Huang, G.Y., Wang, Y.S., and Gross, D., "Fracture Analysis of a Functionally Graded Coating: Plane Deformation", European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 22, pp. 535-544, (2003).

[12] Huang, G.Y., Wang, Y.S., and Yu, S.W., "Fracture Analysis of a Functionally Graded in Interfacial Zone under Plane Deformation", International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 731-743, (2004).

[13] Liu, T.J., and Wang, Y.S., "Axisymmetric Frictionless Contact Problem of a Functionally Graded Coating with Exponentially Varying Modulus", Acta Mechanica, Vol. 199, pp. 151-165, (2008).

[14] Liu, T.J., Wang, Y.S., and Zhang, C., "Axisymmetric Frictionless Contact of Functionally Graded Materials", Archive of Applied Mechanics, Vol. 78, pp. 267-282, (2008).

[15] Thimoshenko, S., and Goodier, J.N., "*Theory of Elasticity*", 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, (1951).

[16] Erdogan, F., and Gupta, G.D., "On the Numerical Solution of Singular Integral Equations", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 29, pp. 525-534, (1972).

[17] ANSYS V10.0, user’s Manual, Houston Swanson Analysis System Inc., (2005).

[18] James, E., Shackelford, F., and Alexander, W., "*Mechanical Properties of Materials*", Materials Science and Engineering Handbook, Boca Ration: CRC Press LLC, (2001).

فهرست نمادهای انگلیسی

a: طول ناحیه تماس

h_0 : ضخامت ورق

N : تعداد کل زیر لایه ها

P : بار عمودی اعمالی

$p(x)$: فشار تماسی عمودی

$p_f(x)$: فشار تماسی بی بعد برای سنبه تخت، $p(x)/(P/2a)$

$p_f(0)$: کمترین فشار تماسی بی بعد برای سنبه تخت در $x=0$

$[S_j]$: ماتریس تبدیل فوریه تنش و تغییر مکان

T : ترانهاده ماتریس

$u(x,y)$: تابع تغییر مکان در راستای افقی

$v(x,y)$: تابع تغییر مکان در راستای عمودی

نمادهای یونانی

$\delta(x)$: تابع دلتا

$\overline{\mu}_i$: مدول برشی در لایه مشترک ها

μ_0 : مدول برشی در سطح ورق

μ^* : مدول برشی نیم صفحه همگن

υ : ضریب پواسان

σ : تنش عمودی

σ_{xy} : تنش برشی

λ, μ : ثابت های لامه

Abstract

In this article, in order to analyze the frictionless contact with flat stamp, a multi-layered FGM that has been used as coating and has been under plane strain condition has been investigated.
In this study, analytical and numerical methods are used. In analytical solution, non-dimensional contact pressure at the contact surface and in each sub-layer is obtained using Hooke's law, equilibrium equation and inverse Fourier transform. The effect of stiffness ratio and geometrical parameters on the contact pressure is investigated. The numerical solution has been performed using the finite element (FE) commercial software package, ANSYS version 10 and in addition to above mentioned values, distribution of elastic displacement is studied. In order to validate the results of numerical simulation, results are compared with those of analytical method. The comparisons of the results generated by the analytical technique to those computed by the finite element method demonstrate the high level of accuracy attained by both methods. It is observed that gradual variation of the shear modulus can significantly alter the stresses in the contact zone.