

تحلیل فرکانسی ورق ساندویچی با هسته انعطاف پذیر وابسته به دما بر اساس فرمولاسیون هیبریدی متحدالشکل

محسن بت شکنان دهکردی^۱
استادیار

یونس محمدی^۲
استادیار

کیوان حسینی صفری^۳
استادیار

در این تحقیق، تحلیل فرکانسی یک ورق ساندویچی با رویه‌های چندلایه کامپوزیتی و هسته انعطاف پذیر برای شرایط مرزی مختلف تحت شرایط دمایی بررسی شده است. بدین منظور اثرات حرارتی و خواص هسته وابسته به دما در نظر گرفته شده است. برای استخراج معادلات حرکت، یک فرمولاسیون المان محدود هیبریدی لایه‌گون- تک لایه با در نظر گرفتن اثرات حرارتی ارائه شده است که در آن تعداد مجهولات مستقل از تعداد لایه‌ها می‌باشد. این فرمولاسیون جدید در چهارچوب کاری فرمولاسیون واحد کررا^۴ (کوف) می‌باشد. در این تحقیق به منظور لحاظ کردن اثرات حرارتی، کرنشها به شکل غیرخطی در نظر گرفته شده‌اند. نتایج حاصل از این مدل سازی با نتایج موجود مقایسه شده که نشان دهنده دقت بالا و حجم محاسباتی کم این مدل است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دما فرکانسهای سازه به دلیل کاهش خواص هسته به شکل چشمگیری کاهش می‌یابند.

واژه‌های راهنما: ورق ساندویچی، خواص وابسته به دما، تحلیل فرکانسی، فرمولاسیون هیبریدی لایه‌گون- تک لایه

۱- مقدمه

سازه‌های ساندویچی با توجه به مزایای متعددی همچون نسبت استحکام به وزن و مقاومت خمشی بالا به طور گسترده و روز افزون در صنایع مختلف هوافضا، حمل و نقل جاده‌ای و دریایی و سازه‌های ساختمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند. چرا که بسیاری از خصوصیات با اهمیت مورد نظر در سازه‌های هوافضایی، دریایی و عمرانی را دارا می‌باشند. در این میان تحلیل دینامیکی و فرکانسی این سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سینک^۵ [۱] در سال (۱۹۹۹) ارتعاشات آزاد پوسته ساندویچی عمیق با لایه‌های نازک و هسته ضخیم را مورد مطالعه قرار داد. فرکانس‌های طبیعی بر اساس روش ریلی-ریتز محاسبه گردیده است.

^۱ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین mbd_dehkordi@yahoo.com

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین u.mohammadi@gmail.com

^۳ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین safari@dena.kntu.ac.ir

^۴ Carrera Unified Formulation (CUF)

^۵ Sing

هندسه پوسته‌های مورد مطالعه استوانه‌ای و کروی فرض گردیده و از معادلات الاستیسیته خطی استفاده گردیده است. کانت و سوامیناتان^۱ [۲] در سال (۲۰۰۱) فرمولاسیون و حل تحلیلی فرکانسی ورقهای کامپوزیتی و ساندویچی را با شرایط مرزی ساده بر اساس تئوری بهبود یافته مرتبه بالا مورد بررسی قرار دادند. در این تئوری، اثرات تغییر شکلهای برشی و تنشها و کرنشهای برشی عرضی و تغییرات غیرخطی جابجائیهای درون صفحه‌ای نسبت به ضخامت، در نظر گرفته شده‌اند. راتو و دسای^۲ [۳] در سال (۲۰۰۴) معادلات حرکت ورقهای کامپوزیتی و همچنین ساندویچی را بر اساس اصل همیلتون و تئوری مرتبه بالای مختلط استخراج کردند و ارتعاشات آزاد آنها را بررسی کردند. موروزو و لوباتین^۳ [۴] در سال (۲۰۱۰) یک حل تحلیلی فرم بسته که قادر به تعیین مقدار فرکانس طبیعی پایه ورقهای ساندویچی کامپوزیتی دارای شرایط مرزی CCCF می‌باشد، ارائه دادند. با توجه به کاربری سازه‌های ساندویچی در دمای بالا، تحلیل دینامیکی و فرکانسی این سازه‌ها با در نظر گرفتن اثرات حرارتی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. ماتسونگا^۴ [۵] در سال (۲۰۰۷) ارتعاشات آزاد و مساله پایداری ورقهای کامپوزیتی Angle ply و ساندویچی را با استفاده از تئوری مرتبه بالای کلی برحسب بسط سری توانی تحت بارهای حرارتی بررسی نمود. او با خواص خطی و مستقل از دما و با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت را استخراج نموده و بعد از آن فرکانسهای طبیعی و دمای بحرانی این سازه‌ها تحت بارهای حرارتی به دست آورد. فروستینگ و تامسون^۵ [۶] در سال (۲۰۰۹) تحلیل ارتعاشات تیرهای ساندویچی با هسته نرم و انعطاف پذیر در جهت عرضی با خواص وابسته به دما را در دو بخش ارائه کردند. آنها مطالعاتی روی کاهش خواص و صلبیت هسته بر اثر بالا بردن دمای هسته و اثرات آن روی ارتعاشات آزاد تیر انجام دادند.

در این تحقیق یک ورق ساندویچی با رویه‌های چند لایه کامپوزیتی و هسته انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شده است. فرض شده است که در اثر بارهای حرارتی، دمای بالا و پایین ورق تغییر کند. خواص هسته نرم، به تغییرات دما بسیار حساس می‌باشد که این تغییرات خواص به شدت روی فرکانسهای طبیعی سازه تاثیر خواهد گذاشت. ضمناً از آنجایی که تعداد لایه‌های کامپوزیتی هر رویه ممکن است زیاد باشد، استفاده از تئوریهای لایه‌گون منجر به حجم بالای محاسبات و استفاده از تئوریهای تک لایه منجر به دقت پایین محاسبات خواهد شد. بنابراین در این پژوهش از یک فرمولاسیون جامع ارتقا یافته مختلط با دقت بالا و حجم محاسبات پایین (که تمام تئوریهای موجود اعم از تک لایه، لایه‌گون و تئوریهای مرتبه بالا را در بر می‌گیرد)، با در نظر گرفتن اثرات حرارتی ارائه شده است. این فرمولاسیون جدید در چهارچوب کاری فرمولاسیون واحد کررا می‌باشد. فرمولاسیون واحد کوف با استفاده از تغییر مرتبه بسط و همچنین تعریف متغیرها در راستای ضخامت، بسیاری از تئوریها را به شکل واحد متحدالشکل می‌سازد. به منظور برقراری پیوستگی تنشهای عرضی بین لایه‌ای از تئوری تغییراتی مختلط رایزنر استفاده شده و همچنین برای جلوگیری از قفل شوندگی برشی^۶ از روش انتگرال گیری کاهش یافته استفاده خواهد شد.

¹ Kant & Swaminathan

² Rao & Desai

³ Morozov & Lopatin

⁴ Matsunaga

⁵ Frostig & Thomsen

⁶ Shear Locking

برای آنکه بتوان معادلات حرکت را برای تمام شرایط مرزی (اعم از شرایط مرزی ساده، گیردار، آزاد) حل نمود، یک فرمولاسیون جدید اجزا محدود استخراج می‌شود و در نهایت برای استخراج نتایج یک کد نویسی در نرم افزار مطلب^۱ صورت خواهد گرفت.

۲- فرمولاسیون متحدالشکل کررا

فرمولاسیون متحدالشکل کررا (کوف) [۱۱]، تکنیکی است که با استفاده از آن می‌توان به دسته بزرگی از مدل‌های ورق و پوسته به شکل واحد دست پیدا کرد. طبق تکنیک CUF معادلات حاکم به شکل چندین سلول بنیادین^۲ نوشته می‌شود که در فرم ظاهر به مرتبه بسط در راستای ضخامت و همچنین نوع تئوری (تک لایه معادل^۳ یا لایه‌گون^۴) وابسته نمی‌باشد. به عبارتی همانطور که در بخش‌های بعدی نشان داده خواهد شد، نحوه اسمبل کردن سلولها، نوع تئوری را مشخص می‌نماید. در فرمولاسیون واحد، با جدا سازی متغیرهای مجهول به یکسری توابع ضخامت که فقط تابعی از راستای z هستند شکل (۳) و یکدسته متغیر که فقط تابعی از راستای درون صفحه‌ای هستند (x,y) ، می‌توان به تئوریهای دو بعدی ورق دسترسی پیدا کرد. متغیر کلی $a(x,y,z)$ و تغییرات آن $\delta a(x,y,z)$ را می‌توان به وسیله بسط کلی زیر بیان کرد [۸]:

$$\mathbf{a}(x, y, z) = F_{\tau}(z)\mathbf{a}_{\tau}(x, y), \quad \delta \mathbf{a}(x, y, z) = F_s(z)\delta \mathbf{a}_s(x, y) \quad (1)$$

with $\tau, s = t, b, r$ and $r = 2, \dots, N$

حروف پر رنگ نشان دهنده آرایه و زیرنویسهای تکراری نشان دهنده قرارداد جمع بندی هستند. حروف t و b به مفهوم بالا^۵ و پایین^۶ می‌باشند. N نشان دهنده مرتبه تئوری می‌باشد که از یک تا چهار بسته به تئوری مورد نظر، در نظر گرفته می‌شود. $F_{\tau}(\zeta_k)$ توابع ضخامت در لایه k ام می‌باشند که به صورت ترکیب خطی از چند جمله‌ای های لژاندر $P_j(\zeta_k)$ از مرتبه j ام تعریف می‌شوند. k مختصات بی بعد است که توسط مختصات محلی ζ_k تعریف می‌شود (شکل (۳)). پنج چندجمله‌ای اول لژاندر به صورت زیر می‌باشند [۸]:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \zeta_k, \quad P_2 = \frac{3\zeta_k^2 - 1}{2}, \quad P_3 = \frac{5\zeta_k^3 - 3\zeta_k}{2}, \quad (2)$$

$$P_4 = \frac{35\zeta_k^4 - 15\zeta_k^2 + 3}{8}$$

ترکیب چند جمله‌ای های لژاندر برای تشکیل توابع ضخامت به شکل زیر است:

$$F_t = \frac{P_0 + P_1}{2}, \quad F_b = \frac{P_0 - P_1}{2}, \quad F_r = P_r - P_{r-2}, \quad r = 2, 3, \dots, N \quad (3)$$

توابع ضخامت فوق دارای ویژگیهای زیر هستند که به راحتی شرط پیوستگی جابجایی ها و تنشهای عرضی را در وجه مشترک دو لایه برقرار می‌کند:

¹ MATLAB

² Fundamental Nuclei

³ Equivalent Single Layer (ESL)

⁴ Layerwise (LW)

⁵ Top

⁶ Bottom

$$\zeta_k = \begin{cases} 1, & F_t = 1, F_b = 0, F_r = 0 \quad \text{at top} \\ -1, & F_t = 0, F_b = 1, F_r = 0 \quad \text{at bottom} \end{cases} \quad (4)$$

این توصیف متغیرها را می‌توان برای هر دوی میدان جابجایی $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ و توزیع تنشهای عرضی $\sigma_n = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ به کار برد. با توجه به بسط متغیرها، توصیف مورد نظر می‌تواند تک لایه معادل (ESL) باشد اگر یک میدان جابجایی برای کل چندلایه در نظر گرفته شوند و یا لایه‌گون (LW) باشد اگر میدان جابه‌جایی برای تک‌تک لایه‌ها جداگانه در نظر گرفته شود. مدل‌های لایه‌گون اجازه می‌دهند که شرایط پیوستگی بین لایه‌های متغیرهای میدانی مورد نظر به شکل زیر ایجاد شوند:

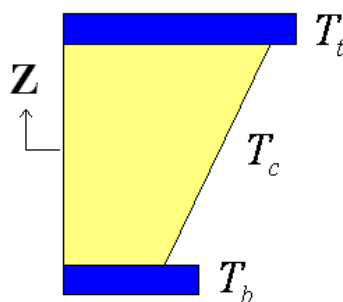
$$\mathbf{a}_t^k = \mathbf{a}_b^{k+1}, \quad k = 1, \dots, N_l - 1 \quad (5)$$

که N_l تعداد لایه‌های کل ورق می‌باشد. برای توصیف توزیع تنشهای عرضی صرفنظر از اینکه تئوری مورد نظر تک‌لایه باشد یا لایه‌گون، توصیف تنشهای عرضی همیشه به فرم لایه‌گون برای تک‌تک لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود.

۳- فرمولاسیون و استخراج معادلات حاکم

در این بخش، فرمولاسیون اجزاء محدود برای یک ورق ساندویچی با هسته نرم وابسته به دما و رویه‌های کامپوزیتی با در نظر گرفتن بارهای حرارتی استخراج خواهد شد. همانطور که در بخشهای بعدی نشان داده خواهد شد، در این پژوهش به علت ضخامت بالای ورق و همچنین انعطاف‌پذیر بودن هسته، استفاده از یک تئوری با دقت بالا ضروری می‌باشد. بنابراین باید از یک تئوری کاملاً لایه‌گون استفاده کرد، که هزینه محاسباتی حل مساله به علت تحلیل اجزاء محدود بسیار بالا خواهد بود.

از طرفی اگر بخواهیم از یک مدل تک لایه استفاده کنیم، حجم محاسبات پایین است ولی خطای آن برای مساله مورد نظر زیاد می‌باشد. بنابراین با توجه به موارد ذکر شده می‌توان گفت که در این تحقیق نیاز به یک تئوری می‌باشد که از یک طرف دقت بالا و از طرف دیگر حجم محاسباتی پایینی داشته باشد. بدین منظور یک تئوری هیبریدی جدید در چهار چوب کاری فرمولاسیون واحد کررا [۱۱] با در نظر گرفتن اثرات حرارتی برای تحلیل ورقهای ساندویچی ارائه خواهد شد.



شکل ۱- توزیع دما در راستای ضخامت ورق ساندویچی

فرض می‌شود که سازه در ابتدا در دمای T_0 قرار دارد. سپس رویه‌های پایین و بالا در اثر بارهای حرارتی به ترتیب به دمای T_b و T_t می‌رسند که این تغییر دما مانند شکل (۲) باعث ایجاد توزیع دما در راستای ضخامت در هسته می‌شود. خواص هسته‌های نرم به شدت تابعی از دما می‌باشد. بنابراین در شرایط دمایی مختلف لازم است که این تغییرات خواص در نظر گرفته شود. به عنوان مثال خواص فوم Devinycell HD به صورت تابعی از دما در شکل (۲) آورده شده است. بنابراین در این پژوهش لازم است که خواص هسته به صورت تابعی از دما در نظر گرفته شود.

ژانگ^۱ و همکارانش [۹] با نتایج آزمایشگاهی نشان دادند که برای دسته وسیعی از فوم‌های خانواده Devinycell HD، خواص بی‌بعد آنها با تابع زیر شکل (۲) با دما تغییر می‌کند:

$$\frac{E(T)}{E(T_0)} = \frac{G(T)}{G(T_0)} = -3.16e - 6T^3 + 4.24e - 4T^2 - 2.27e - 2T + 1.36 \quad (۶)$$

در قسمت‌های بعدی جهت در نظر گرفتن تغییرات خواص هسته با دما از این تابع استفاده خواهد شد.

۳-۱- استخراج معادلات حرکت و فرمولاسیون اجزاء محدود

مساله مورد نظر، ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته انعطاف‌پذیر می‌باشد که تحت بارهای مکانیکی و حرارتی قرار می‌گیرد.

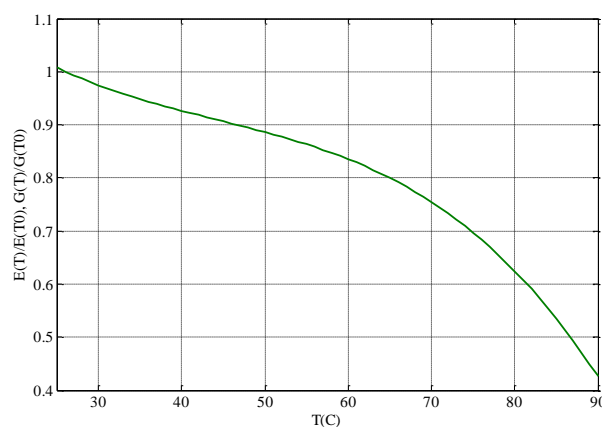
معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون بر اساس فرمولاسیون متحدالشکل به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$\delta L_{int} - \delta L_{F_{in}} - \delta L_{ext} = 0 \quad (۷)$$

در رابطه فوق L_{int} کار داخلی، $L_{F_{in}}$ کار نیروهای اینرسی و L_{ext} کار نیروهای خارجی می‌باشد. کار نیروهای داخلی به دو قسمت، کار مکانیکی و کار حرارتی تقسیم می‌شود:

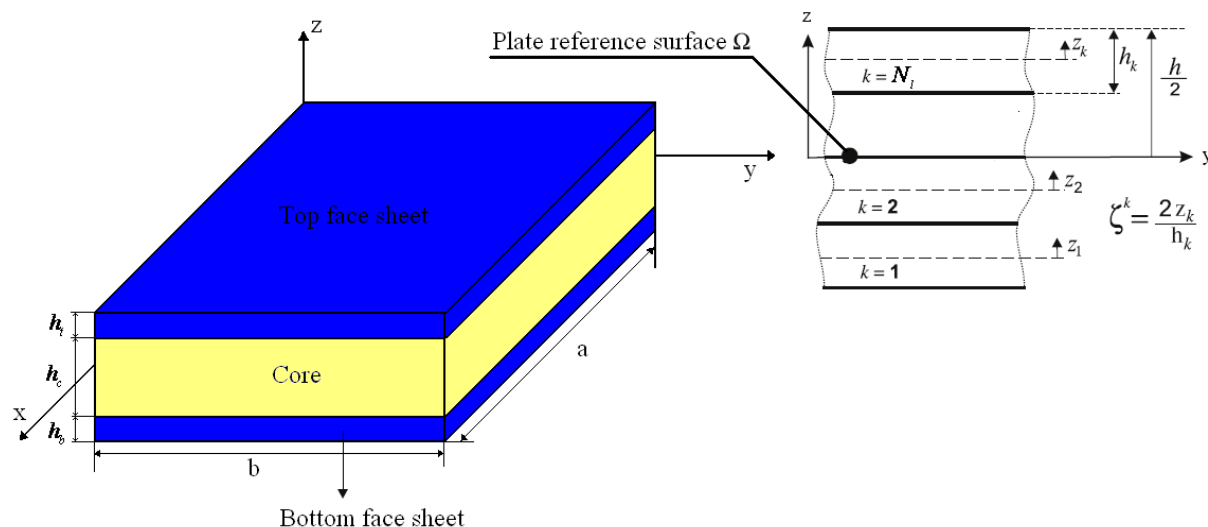
$$L_{int} = L_{intM} + L_{intT} \quad (۸)$$

که در رابطه فوق L_{intM} کار ناشی از تنشهای مکانیکی و L_{intT} کار ناشی از تنشهای حرارتی می‌باشند.



شکل ۲- خواص فوم تابعی از دما [۹]

¹ Zhang



شکل ۳- مشخصات هندسی و دستگاه مختصات برای ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی

در این تحقیق به منظور برقراری پیوستگی تنش‌های عرضی، از فرمولاسیون مختلط (RMVT) برای استخراج معادلات حاکم استفاده می‌شود. بنابراین برای کار تنش‌های مکانیکی و حرارتی می‌توان نوشت:

$$\delta(L_{intM} + L_{intT}) = \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{pG}^{kT} \boldsymbol{\sigma}_{pC}^k + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{nG}^{kT} \boldsymbol{\sigma}_{nM}^k + \delta \boldsymbol{\sigma}_{nM}^{kT} (\boldsymbol{\varepsilon}_{nG}^k - \boldsymbol{\varepsilon}_{nC}^k) \} d\Omega dz_k \quad (9)$$

ترم مختلط سوم در رابطه بالا $(\delta \boldsymbol{\sigma}_{nM}^{kT} (\boldsymbol{\varepsilon}_{nG}^k - \boldsymbol{\varepsilon}_{nC}^k))$ به منظور ایجاد شرایط سازگاری بین کرنش‌های عرضی حاصل از روابط هندسی (G) و معادلات بنیادین (C) می‌باشد. در رابطه فوق زیرنویس‌های (G) و (C) بیانگر روابط هندسی و معادلات بنیادین می‌باشند. همچنین زیرنویس M بیانگر این است که تنش‌های عرضی از ابتدا مدل شده‌اند و از روابط بنیادین به دست نیامده‌اند. زیرنویس‌های p و n به مفهوم متغیر موردنظر در راستای درون صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای، می‌باشند. در رابطه (۹) طبق چهارچوب کاری کوف کرنش‌های درون صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{pG}^k = \{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy} \}^{kT} = \mathbf{D}_p \mathbf{u}^k \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{nG}^k = \{ \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \varepsilon_{zz} \}^{kT} = (\mathbf{D}_{np} + \mathbf{D}_{nz}) \mathbf{u}^k \quad (11)$$

در روابط بالا ماتریس‌های دیفرانسیلی به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{np} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{nz} = \begin{bmatrix} \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

در روابط فوق $\partial_i (i = x, y, z)$ به مفهوم مشتق‌گیری نسبت به i می‌باشد. معادلات بنیادین سه بعدی بین تنش و کرنش و دما به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\boldsymbol{\sigma}_p^k = \mathbf{C}_{pp}^k \boldsymbol{\varepsilon}_p^k + \mathbf{C}_{pn}^k \boldsymbol{\varepsilon}_n^k - \boldsymbol{\lambda}_p^k \theta \quad (13)$$

$$\sigma_n^k = C_{np}^k \varepsilon_p^k + C_{nn}^k \varepsilon_n^k - \lambda_n^k \theta \quad (14)$$

در روابط بالا σ_p^k بردار تنشهای درون صفحه‌ای، σ_n^k بردار تنشهای خارج صفحه‌ای و $C_{ij}^k(i, j = p, n)$ ماتریسهای سفتی مربوط به لایه k ام می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_p^k = \{\sigma_{xx}^k, \sigma_{yy}^k, \sigma_{xy}^k\}, \quad \sigma_n^k = \{\sigma_{xz}^k, \sigma_{yz}^k, \sigma_{zz}^k\} \quad (15)$$

$$C_{pp}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{16}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{26}^k \\ C_{16}^k & C_{26}^k & C_{66}^k \end{bmatrix}, \quad C_{pn}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13}^k \\ 0 & 0 & C_{23}^k \\ 0 & 0 & C_{36}^k \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$C_{np}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{36}^k \end{bmatrix}, \quad C_{nn}^k = \begin{bmatrix} C_{55}^k & C_{45}^k & 0 \\ C_{45}^k & C_{44}^k & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^k \end{bmatrix}$$

در روابط (۱۳) و (۱۴) θ اختلاف دما می‌باشد که با توجه به رابطه (۱) به فرم متحدالشکل زیر بیان می‌شود:

$$\theta^k = F_t \theta_t^k + F_b \theta_b^k + F_r \theta_r^k = F_\tau \theta_\tau^k \quad \tau = t, b, r, \quad r = 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N_l \quad (17)$$

لازم به ذکر است که در اصل اختلاف دما برابر با $\theta - \theta_0$ می‌باشد که از اینجا به بعد به شکل مختصر با θ نشان داده می‌شود. همچنین ضرایب λ_p^k و λ_n^k به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda_p^k = \lambda_{pp}^k + \lambda_{pn}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{16}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{26}^k \\ C_{16}^k & C_{26}^k & C_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \\ \alpha_6^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13}^k \\ 0 & 0 & C_{23}^k \\ 0 & 0 & C_{36}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3^k \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\lambda_n^k = \lambda_{np}^k + \lambda_{nn}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{36}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \\ \alpha_6^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{55}^k & C_{45}^k & 0 \\ C_{45}^k & C_{44}^k & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3^k \end{bmatrix} \quad (19)$$

که $\alpha_i^k (i = 1, 2, 3, 6)$ ضرایب انبساط حرارتی می‌باشند. روابط فوق را می‌توان به شکل فشرده زیر بیان کرد:

$$\lambda_p^k = \lambda_{pp}^k + \lambda_{pn}^k = C_{pp}^k \alpha_p^k + C_{pn}^k \alpha_n^k \quad (20)$$

$$\lambda_n^k = \lambda_{np}^k + \lambda_{nn}^k = C_{np}^k \alpha_p^k + C_{nn}^k \alpha_n^k \quad (21)$$

همانطور که قبلا اشاره شد، در فرمولاسیون مختلط جابجائیها و تنشهای عرضی مجهولات مسئله می‌باشند. بدین منظور معادلات بنیادین (۱۳) و (۱۴) باید به شکل زیر بازنویسی شوند:

$$\sigma_{pC}^k = \tilde{C}_{pp}^k \varepsilon_{pG}^k + \tilde{C}_{pn}^k \sigma_{nM}^k + \tilde{\lambda}_p^k \theta \quad (22)$$

$$\varepsilon_{nC}^k = \tilde{C}_{np}^k \varepsilon_{pG}^k + \tilde{C}_{nn}^k \sigma_{nM}^k + \tilde{\lambda}_n^k \theta \quad (23)$$

که ضرایب جدید به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\tilde{C}_{pp}^k = C_{pp}^k - C_{pn}^k C_{nn}^{k-1} C_{np}^k \quad \tilde{C}_{pn}^k = C_{pn}^k C_{nn}^{k-1} \quad (24)$$

$$\tilde{C}_{np}^k = -C_{nn}^{k-1} C_{np}^k \quad \tilde{C}_{nn}^k = -C_{nn}^{k-1} \quad (25)$$

$$\tilde{\lambda}_p^k = C_{pn}^k C_{nn}^{k-1} \lambda_n^k - \lambda_p^k \quad \tilde{\lambda}_n^k = C_{nn}^{k-1} \lambda_n^k \quad (26)$$

از جایگذاری روابط (۲۲) و (۲۳) در رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$\delta(L_{intM} + L_{intT}) = \sum_{k=1}^{N_I} \iint_{\Omega_k A_k} \{ \underbrace{\delta \epsilon_{pG}^{kT} \tilde{C}_{pp}^k \epsilon_{pG}^k}_I + \underbrace{\delta \epsilon_{pG}^{kT} \tilde{C}_{pn}^k \sigma_{nM}^k}_{II} + \underbrace{\delta \epsilon_{nG}^{kT} \sigma_{nM}^k}_{III} + \underbrace{\delta \sigma_{nM}^{kT} \epsilon_{nG}^k}_{IV} - \underbrace{\delta \sigma_{nM}^{kT} \tilde{C}_{np}^k \epsilon_{pG}^k}_V - \underbrace{\delta \sigma_{nM}^{kT} \tilde{C}_{nn}^k \sigma_{nM}^k}_{VI} + \underbrace{\delta \epsilon_{pG}^{kT} \tilde{\lambda}_p^k \theta^k}_{VII} - \underbrace{\delta \sigma_{nM}^{kT} \tilde{\lambda}_n^k \theta^k}_{VIII} \} d\Omega dz_k \quad (27)$$

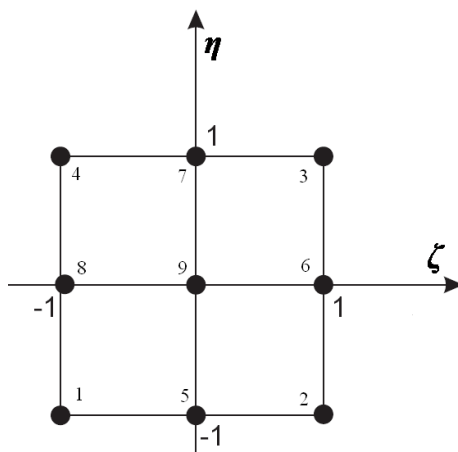
در رابطه بالا ترمهای I تا VI مربوط به کار تنشهای مکانیکی و ترمهای VII و VIII مربوط به کار تنشهای حرارتی می باشند. بنابراین می توان نوشت:

$$\delta L_{intM} = \sum_{k=1}^{N_I} \iint_{\Omega_k A_k} \{ \delta \epsilon_{pG}^{kT} \tilde{C}_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + \delta \epsilon_{pG}^{kT} \tilde{C}_{pn}^k \sigma_{nM}^k + \delta \epsilon_{nG}^{kT} \sigma_{nM}^k + \delta \sigma_{nM}^{kT} \epsilon_{nG}^k - \delta \sigma_{nM}^{kT} \tilde{C}_{np}^k \epsilon_{pG}^k - \delta \sigma_{nM}^{kT} \tilde{C}_{nn}^k \sigma_{nM}^k \} d\Omega dz_k \quad (28)$$

$$\delta L_{intT} = \sum_{k=1}^{N_I} \iint_{\Omega_k A_k} \{ \delta \epsilon_{pG}^{kT} \tilde{\lambda}_p^k \theta^k - \delta \sigma_{nM}^{kT} \tilde{\lambda}_n^k \theta^k \} d\Omega dz_k \quad (29)$$

در این تحقیق به منظور اینکه مساله برای شرایط مرزی مختلف قابل بررسی باشد، برای حل معادلات از روش اجزاء محدود استفاده می شود. بدین منظور از المان لاگرانژی درجه دو (شکل (۴)) که شامل نه گره می باشد، استفاده می شود.

طبق فرمولاسیون واحد (رابطه (۱)) متغیرهای مجهول در راستای ضخامت تفکیک می شوند. بدین منظور توابع ضخامت برحسب توابع لژاندر بیان می شوند که در بخش هی قبلی روابط آن بیان گردید. با استفاده از المان نه گره می توان مجهولات را در راستای درون صفحه ای نیز تفکیک کرد. بنابراین برای مجهولات جابجایی و تنشهای عرضی می توان نوشت:



شکل ۴- نمایی از المان لاگرانژی درجه دو

$$\mathbf{u}^k = F_\tau N_i \mathbf{q}_{\bar{a}}^k \quad \delta \mathbf{u}^k = F_s N_j \mathbf{q}_{sj}^k \quad (i, j = 1, \dots, 9, \quad \tau, s = t, b, r, \quad r = 2, \dots, N) \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{nM}^k = F_\tau N_i \mathbf{g}_{\bar{a}}^k \quad \delta \boldsymbol{\sigma}_{nM}^k = F_s N_j \mathbf{g}_{sj}^k \quad (i, j = 1, \dots, 9, \quad \tau, s = t, b, r, \quad r = 2, \dots, N) \quad (31)$$

در روابط فوق $\mathbf{q}_{\bar{a}}^k$ و $\mathbf{g}_{\bar{a}}^k$ بردار جابجائیها و تنشهای عرضی گرهی می باشند که به صورت زیر بیان می شوند:

$$\mathbf{q}_{\bar{a}}^k = [q_{u,\bar{a}}^k \quad q_{v,\bar{a}}^k \quad q_{w,\bar{a}}^k]^T \quad (32)$$

$$\mathbf{g}_{\bar{a}}^k = [g_{u,\bar{a}}^k \quad g_{v,\bar{a}}^k \quad g_{w,\bar{a}}^k]^T \quad (33)$$

در روابط (30) و (31) توابع شکل لاگرانژی درجه دو می باشند [10]. پس از جایگذاری روابط (10)، (11)، (30) و (31) در رابطه کار تنشهای مکانیکی (28) و یکسری ساده سازهای ریاضی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta L_{intM}^k = & \langle \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} [D_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pp}^{k\tau\tau} D_p^T (N_j \mathbf{I})] \mathbf{q}_{sj}^k \rangle_{\Omega} + \\ & + \langle \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} [D_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pn}^{k\tau\tau} N_j] \mathbf{g}_{sj}^k \rangle_{\Omega} + \\ & + \langle \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} [D_{n\Omega}^T (N_i \mathbf{I}) E_{\tau\tau} N_j + E_{\tau,z} N_i N_j \mathbf{I}] \mathbf{g}_{sj}^k \rangle_{\Omega} + \\ & + \langle \delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} [N_i E_{\tau\tau} D_{n\Omega} (N_j \mathbf{I}) + E_{\tau,z} N_i N_j \mathbf{I}] \mathbf{q}_{sj}^k \rangle_{\Omega} + \\ & - \langle \delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} [N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{np}^{k\tau\tau} D_p (N_j \mathbf{I})] \mathbf{q}_{sj}^k \rangle_{\Omega} + \\ & - \langle \delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} [N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{nn}^{k\tau\tau} N_j] \mathbf{g}_{sj}^k \rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (34)$$

در رابطه فوق علامت $\langle \dots \rangle_{\Omega}$ بیانگر انتگرال گیری در دامنه Ω و \mathbf{I} ماتریس واحد می باشند. همچنین انتگرال گیری سفتی های لایه ای به شکل زیر تعریف می شوند:

$$(\tilde{\mathbf{Z}}_{pp}^{k\tau\tau}, \tilde{\mathbf{Z}}_{pn}^{k\tau\tau}, \tilde{\mathbf{Z}}_{np}^{k\tau\tau}, \tilde{\mathbf{Z}}_{nn}^{k\tau\tau}) = (\tilde{\mathbf{C}}_{pp}^k, \tilde{\mathbf{C}}_{pn}^k, \tilde{\mathbf{C}}_{np}^k, \tilde{\mathbf{C}}_{nn}^k) E_{\tau\tau} \quad (35)$$

در روابط فوق $E_{\tau\tau}$ انتگرال گیری توابع ضخامت در راستای z می باشند که به شکل زیر تعریف می شوند:

$$E_{\tau\tau}, E_{\tau,z}, E_{z,z} = \int_{A_k} (F_\tau F_s, F_{\tau,z} F_s, F_\tau F_{s,z}) dz \quad (36)$$

رابطه (34) را می توان به شکل فشرده زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \delta L_{intM}^k = & \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} [\mathbf{K}_{uu_{mech}}^{k\tau\tau} \mathbf{q}_{sj}^k + \mathbf{K}_{u\sigma}^{k\tau\tau} \mathbf{g}_{sj}^k] + \\ & \delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} [\mathbf{K}_{\sigma u}^{k\tau\tau} \mathbf{q}_{sj}^k + \mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{k\tau\tau} \mathbf{g}_{sj}^k] \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{K}_{uu_{mech}}^{k\tau\tau} = \langle [D_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pp}^{k\tau\tau} D_p^T (N_j \mathbf{I})] \rangle_{\Omega} \quad (38)$$

$$\mathbf{K}_{u\sigma}^{k\tau\tau} = \langle [D_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pn}^{k\tau\tau} N_j + D_{n\Omega}^T (N_i \mathbf{I}) E_{\tau\tau} N_j + E_{\tau,z} N_i N_j \mathbf{I}] \rangle_{\Omega} \quad (39)$$

$$\mathbf{K}_{\sigma u}^{k\tau\tau} = \langle [N_i E_{\tau\tau} D_{n\Omega} (N_j \mathbf{I}) + E_{\tau,z} N_i N_j \mathbf{I} - N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{np}^{k\tau\tau} D_p (N_j \mathbf{I})] \rangle_{\Omega} \quad (40)$$

$$\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{k\tau\tau} = \langle [-N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{nn}^{k\tau\tau} N_j] \rangle_{\Omega} \quad (41)$$

بسط صریح ماتریسهای فوق به شکل زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
 K_{uuxx}^{k\tau ij} &= \triangleleft \tilde{Z}_{pp11}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,x}] \triangleright_{\Omega} + \triangleleft \tilde{Z}_{pp16}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,x}] \triangleright_{\Omega} + \triangleleft \tilde{Z}_{pp16}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} + \\
 &\quad \triangleleft \tilde{Z}_{pp66}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{uuxy}^{k\tau ij} &= \triangleleft \tilde{Z}_{pp12}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} + \triangleleft \tilde{Z}_{pp26}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} + \triangleleft \tilde{Z}_{pp16}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,x}] \triangleright_{\Omega} + \\
 &\quad \triangleleft \tilde{Z}_{pp66}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,x}] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{uuxz}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{uuyx}^{k\tau ij} &= \triangleleft \tilde{Z}_{pp12}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,x}] \triangleright_{\Omega} + \triangleleft \tilde{Z}_{pp16}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,x}] \triangleright_{\Omega} + \triangleleft \tilde{Z}_{pp26}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} + \\
 &\quad \triangleleft \tilde{Z}_{pp66}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{uuyy}^{k\tau ij} &= \triangleleft \tilde{Z}_{pp22}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} + \triangleleft \tilde{Z}_{pp26}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} + \triangleleft \tilde{Z}_{pp26}^{k\tau} [N_{i,y} N_{j,x}] \triangleright_{\Omega} + \\
 &\quad \triangleleft \tilde{Z}_{pp66}^{k\tau} [N_{i,x} N_{j,x}] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{uuyz}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{uuzx}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{uuzy}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{uuzx}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{u\alpha\alpha x}^{k\tau ij} &= E_{\tau,zs} \triangleleft [N_i N_j] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{u\alpha\alpha y}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{u\alpha\alpha z}^{k\tau ij} &= \triangleleft \tilde{Z}_{pn13}^{k\tau} [N_{i,x} N_j] \triangleright_{\Omega} + \triangleleft \tilde{Z}_{pn36}^{k\tau} [N_{i,y} N_j] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{u\alpha\sigma x}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{u\alpha\sigma y}^{k\tau ij} &= E_{\tau,zs} \triangleleft [N_i N_j] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{u\alpha\sigma z}^{k\tau ij} &= \triangleleft \tilde{Z}_{pn23}^{k\tau} [N_{i,y} N_j] \triangleright_{\Omega} + \triangleleft \tilde{Z}_{pn36}^{k\tau} [N_{i,x} N_j] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{u\sigma\alpha x}^{k\tau ij} &= E_{\tau} \triangleleft [N_{i,x} N_j] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{u\sigma\alpha y}^{k\tau ij} &= E_{\tau} \triangleleft [N_{i,y} N_j] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{u\sigma\alpha z}^{k\tau ij} &= E_{\tau,zs} \triangleleft [N_i N_j] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{\sigma i\alpha x}^{k\tau ij} &= E_{\tau,z} \triangleleft [N_i N_j] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{\sigma i\alpha y}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{\sigma i\alpha z}^{k\tau ij} &= E_{\tau,z} \triangleleft [N_i N_j] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{\sigma i\gamma x}^{k\tau ij} &= 0 \\
 K_{\sigma i\gamma y}^{k\tau ij} &= E_{\tau,z} \triangleleft [N_i N_j] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{\sigma i\gamma z}^{k\tau ij} &= E_{\tau} \triangleleft [N_i N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{\sigma u\alpha x}^{k\tau ij} &= - \triangleleft \tilde{Z}_{np13}^{k\tau} [N_i N_{j,x}] \triangleright_{\Omega} - \triangleleft \tilde{Z}_{np36}^{k\tau} [N_i N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{\sigma u\alpha y}^{k\tau ij} &= - \triangleleft \tilde{Z}_{np23}^{k\tau} [N_i N_{j,y}] \triangleright_{\Omega} - \triangleleft \tilde{Z}_{np36}^{k\tau} [N_i N_{j,x}] \triangleright_{\Omega} \\
 K_{\sigma u\alpha z}^{k\tau ij} &= E_{\tau,z} \triangleleft [N_i N_j] \triangleright_{\Omega}
 \end{aligned}
 \tag{۴۲}$$

$$\begin{aligned}
K_{\sigma\alpha x}^{k\tau ij} &= -\langle \tilde{Z}_{nn55}^{k\tau} [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
K_{\sigma\alpha y}^{k\tau ij} &= -\langle \tilde{Z}_{nn45}^{k\tau} [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
K_{\sigma\alpha z}^{k\tau ij} &= 0 \\
K_{\sigma\gamma x}^{k\tau ij} &= -\langle \tilde{Z}_{nn45}^{k\tau} [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
K_{\sigma\gamma y}^{k\tau ij} &= -\langle \tilde{Z}_{nn44}^{k\tau} [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
K_{\sigma\gamma z}^{k\tau ij} &= 0 \\
K_{\sigma\sigma x}^{k\tau ij} &= 0 \\
K_{\sigma\sigma y}^{k\tau ij} &= 0 \\
K_{\sigma\sigma z}^{k\tau ij} &= -\langle \tilde{Z}_{nn33}^{k\tau} [N_i N_j] \rangle_{\Omega}
\end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال‌های فوق از روش انتگرال‌گیری عددی گوسی^۱ استفاده می‌شود. لازم به ذکر است، در حالتی که لایه‌ها نازک باشند، برای جلوگیری از پدیده قفل شوندگی برشی^۲ از تکنیک انتگرال‌گیری انتخابی کاهش یافته^۳ استفاده می‌شود. روابط (۳۸) تا (۴۱)، ماتریسهای سه در سه با نه سلول بنیادی می‌باشند که باید بر حسب اندیسهای $k; \tau; s; i; j$ بسط داده شوند. برای به دست آوردن کار تنشهای حرارتی از کرنشهای غیرخطی استفاده می‌شود. به عبارتی رابطه (۲۹) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\delta L_{intT} = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{pG_{nl}}^k T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_p^k \boldsymbol{\theta}^k - \delta \boldsymbol{\sigma}_{nM}^k T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n^k \boldsymbol{\theta}^k \} d\Omega dz_k \quad (43)$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{\varepsilon}_{pG_{nl}}^k$ کرنشهای درون صفحه‌ای غیرخطی می‌باشند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{pG_{nl}}^k = \{ \varepsilon_{xx_{nl}}, \varepsilon_{yy_{nl}}, \varepsilon_{xy_{nl}} \}^{kT} = \mathbf{D}_{p_{nl}} \mathbf{u}^k \quad (44)$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{D}_{p_{nl}} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \frac{1}{2} \partial^2_{x^2} \\ 0 & \partial_y & \frac{1}{2} \partial^2_{y^2} \\ \partial_y & \partial_x & \partial^2_{xy} \end{bmatrix} \quad (45)$$

در رابطه فوق $\partial^2_{x^2}$ به مفهوم دو بار مشتق‌گیری نسبت به x و یا ∂^2_{xy} به مفهوم مشتق‌گیری نسبت به x و y می‌باشد. از جایگذاری روابط (۴۴)، (۳۰) و (۱۷) در رابطه (۴۳) و یکسری ساده سازی خواهیم داشت:

$$\delta L_{intT} = \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} (\mathbf{P}_{u\theta\bar{a}}^k + \mathbf{K}_{uu_{nT}}^{k\tau ij}) + \delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} \mathbf{P}_{\sigma\theta\bar{a}}^k \quad (46)$$

که در آن

¹ Gaussian quadrature rule

² Shear locking

³ Selective reduced integration

$$\mathbf{P}_{u\theta\bar{a}}^k = \begin{bmatrix} P_{u\theta\bar{a}11}^k \\ P_{u\theta\bar{a}21}^k \\ P_{u\theta\bar{a}31}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{\sigma\theta}^k = \begin{bmatrix} P_{\sigma\theta\bar{a}11}^k \\ P_{\sigma\theta\bar{a}21}^k \\ P_{\sigma\theta\bar{a}31}^k \end{bmatrix} \quad (47)$$

مولفه‌های روابط فوق به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} P_{u\theta\bar{a}11}^k &= E_{\tau\tau} \langle [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p1}^k \theta_{sj}^k + E_{\tau\tau} \langle [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p3}^k \theta_{sj}^k \\ P_{u\theta\bar{a}21}^k &= E_{\tau\tau} \langle [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p2}^k \theta_{sj}^k + E_{\tau\tau} \langle [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p3}^k \theta_{sj}^k \\ P_{u\theta\bar{a}31}^k &= 0 \\ P_{\sigma\theta\bar{a}11}^k &= 0 \\ P_{\sigma\theta\bar{a}21}^k &= 0 \\ P_{\sigma\theta\bar{a}31}^k &= E_{\tau\tau} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{n3}^k \theta_{sj}^k \end{aligned} \quad (48)$$

در رابطه (۴۶) ماتریس سفتی ناشی از اثرات حرارتی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{K}_{uu_{n\theta}}^{k\tau\tau ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{uu_{n\theta}zz}^{k\tau\tau ij} \end{bmatrix} \quad (49)$$

که $K_{uu_{n\theta}zz}^{k\tau\tau}$ به شکل زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$K_{uu_{n\theta}zz}^{k\tau\tau ij} = -E_{\tau\tau} (\langle [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p1}^k + \langle [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p2}^k + \langle [N_{i,x} N_{j,y} + N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p3}^k) \theta^k \quad (50)$$

برای کار نیروهای اینرسی می‌توان نوشت:

$$\delta L_{F_m} = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \rho^k \delta \mathbf{u}^{kT} \ddot{\mathbf{u}}^k \} d\Omega dz_k \quad (51)$$

در رابطه فوق علامت "..." بیانگر دوبار مشتق نسبت به زمان می‌باشد. همچنین ρ^k چگالی لایه k ام می‌باشد. با جایگذاری روابط (۳۰) و (۳۱) در رابطه (۵۱) کار نیروهای اینرسی را در چهار چوب کاری کوف می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\delta L_{F_m}^k = \delta \mathbf{q}_{ti}^{kT} \mathbf{M}^{ksij} \ddot{\mathbf{q}}_{sj}^k \quad (52)$$

که

$$\mathbf{M}^{k\tau\tau si} = \begin{bmatrix} m_{\tau\tau}^k \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\tau\tau}^k \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\tau\tau}^k \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \end{bmatrix} \quad (53)$$

در رابطه فوق $m_{\tau\tau}^k$ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$m_{\tau\tau}^k = \int_{A_k} \rho^k F_{\tau} F_s dz = \rho^k E_{\tau\tau} \quad (54)$$

و اما تکنیک به کار برده شده در چهارچوب کاری کوف ، در این قسمت نیز برای محاسبه کار نیروهای خارجی استفاده می شود. به عنوان مثال فرض کنید که توزیع فشار $P^k(x, y, \zeta_1^k)$ بر روی لایه k ام در فاصله $\zeta_k^1 = \zeta_k^1$ نسبت به صفحه مبنا Ω_k اعمال شود. بنابراین برای کار نیروهای خارجی می توان نوشت:

$$\delta L_{ext}^k = \int_{\Omega_k} \delta \mathbf{u}^{kT}(x, y, \zeta_1^k) \mathbf{P}^k(x, y, \zeta_1^k) d\Omega \quad (55)$$

که در رابطه فوق $\mathbf{u}^k(x, y, \zeta_1^k)$ را می توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\mathbf{u}^k = F_\tau^1 N_i \mathbf{q}_{\bar{a}}^k \quad (i=1,2,\dots, N_n) \quad (56)$$

در رابطه بالا F_τ^1 به مفهوم مقدار تابع ضخامت F_τ به ازای $\zeta_k^1 = \zeta_k^1$ می باشد. توزیع فشار $P^k(x, y, \zeta_1^k)$ را می توان به فرم متحدالشکل زیر بیان کرد:

$$\mathbf{P}^k = F_t^1 \mathbf{P}_t^k + F_r^1 \mathbf{P}_r^k + F_b^1 \mathbf{P}_b^k = F_\tau^1 \mathbf{P}_\tau^k, \quad \tau = t, b, r, \quad r = 2, 3, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N_l \quad (57)$$

که \mathbf{P}_τ^k را نیز می توان به شکل زیر در راستای درون صفحه ای تفکیک کرد:

$$\mathbf{P}_\tau^k = N_i \mathbf{p}_{\bar{a}}^k \quad (i=1,2,\dots,9) \quad (58)$$

در رابطه بالا $\mathbf{p}_{\bar{a}}^k$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{p}_{\bar{a}}^k = \begin{bmatrix} P_{x\bar{a}}^k \\ P_{y\bar{a}}^k \\ P_{z\bar{a}}^k \end{bmatrix} \quad (59)$$

اندیسهای x, y و z در رابطه فوق به مفهوم توزیع فشار در راستاهای مذکور می باشد. بنابراین رابطه (۲-۶۵) را می توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\mathbf{P}^k = F_\tau^1 N_i \mathbf{p}_{\bar{a}}^k \quad (60)$$

از جایگذاری روابط (۲-۶۴) و (۲-۶۸) در رابطه (۲-۶۳) کار نیروهای خارجی به شکل زیر محاسبه می شود:

$$\delta L_{ext}^k = \delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} \mathbf{P}_{\bar{a}}^k \quad (61)$$

که در آن

$$\mathbf{P}_{\bar{a}}^k = (F_\tau^1 F_s^1) \begin{bmatrix} \langle [N_i N_j] \rangle_\Omega P_{x\bar{a}}^k \\ \langle [N_i N_j] \rangle_\Omega P_{y\bar{a}}^k \\ \langle [N_i N_j] \rangle_\Omega P_{z\bar{a}}^k \end{bmatrix} \quad (62)$$

در نهایت معادلات حرکت حاکم بر مساله برای لایه k ام، از قرار دادن روابط (۳۷)، (۴۶)، (۵۲) و (۶۱) در رابطه (۷) به شکل زیر حاصل می شوند:

$$\delta \mathbf{q}_{\bar{a}}^{kT} : \mathbf{K}_{uu}^{k\tau\sigma ij} \mathbf{q}_{sj}^k + \mathbf{K}_{u\sigma}^{k\tau\sigma ij} \mathbf{g}_{sj}^k + \mathbf{M}^{ksij} \ddot{\mathbf{q}}_{sj}^k = \mathbf{P}_{\bar{a}}^k - \mathbf{P}_{u\theta\bar{a}}^k \quad (63)$$

$$\delta \mathbf{g}_{\bar{a}}^{kT} : \mathbf{K}_{ou}^{k\tau\sigma ij} \mathbf{q}_{sj}^k + \mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{k\tau\sigma ij} \mathbf{g}_{sj}^k = -\mathbf{P}_{\sigma\theta\bar{a}}^k \quad (64)$$

در رابطه (۶۳)، $\mathbf{K}_{uu}^{k\tau\sigma ij}$ ماتریس سفتی کل المانی لایه k ام می باشد که به شکل زیر محاسبه می شود:

$$\mathbf{K}_{uu}^{k\tau\sigma ij} = \mathbf{K}_{uu, mech}^{k\tau\sigma ij} + \mathbf{K}_{uu, \theta}^{k\tau\sigma ij} \quad (65)$$

بعد از بسط اندیسهای τ, s, i, j و اسمبل کردن سلولهای بنیادین، مجهولات تنش‌های برشی معادله (۶۴) با استفاده از تکنیک انقباض^۱ بر حسب مجهولات جابجایی حل می‌شود (مجهولات تنش‌های برشی حذف می‌شوند) و معادله (۶۳) به شکل زیر بیان می‌شود:

$$Kq + M\ddot{q} = P \quad (66)$$

که در این رابطه داریم:

$$K = [K_{uu} - K_{u\sigma} K_{\sigma\sigma}^{-1} K_{\sigma u}],$$

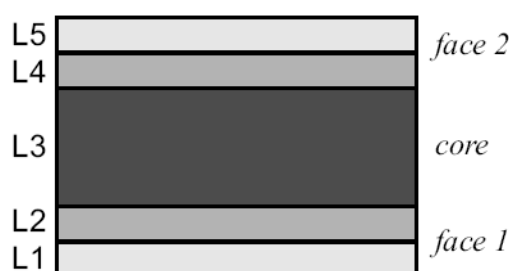
$$P = P + K_{u\sigma} K_{\sigma\sigma}^{-1} P_{\sigma\theta} - P_{u\theta} \quad (67)$$

۳-۲- فرمولاسیون هیبریدی لایه‌گون- تک لایه (LW/ESL)

همانطور که در بخشهای قبلی بیان شد، اینکه به چه طریقی از فرمولاسیون واحد به یک تئوری مورد نظر برسیم، در انتخاب درجه چند جمله‌ای لژاندر و همچنین در نحوه اسمبل کرده سلولهای بنیادین پیاده‌سازی می‌شود. در این پژوهش از آنجایی که با یک مساله المان محدود روبرو هستیم بنابراین باید از تئوری استفاده کرد که هزینه محاسباتی تحلیل مساله پایین باشد.

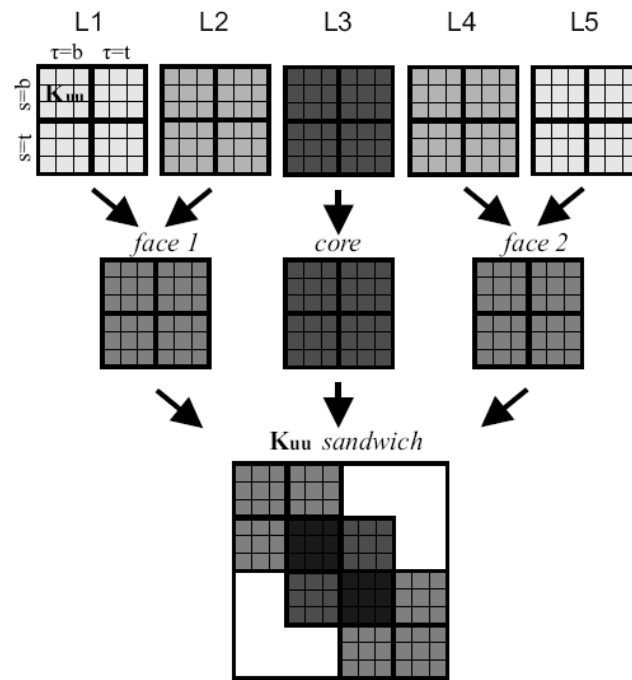
از طرفی به دلیل اینکه ورق مورد نظر، ساندویچی ضخیم با رویه‌های چند لایه و هسته انعطاف‌پذیر می‌باشد استفاده از یک تئوری با دقت بالا ضروری می‌باشد. لکن اگر از تئوری‌های لایه‌گون استفاده شود دقت مورد نظر را دارا می‌باشد ولی عیب آن این است که درجات آزادی آن زیاد است که منجر به حجم محاسباتی بالایی می‌شود.

از طرف دیگر اگر از تئوریهای تک‌لایه استفاده شود، هزینه محاسباتی آن پایین است ولی برای تحلیل ورقهای ساندویچی دقت قابل قبول را ندارد. لذا در این پژوهش از یک مدل هیبریدی لایه‌گون- تک‌لایه بر اساس فرمولاسیون مختلط $RMVT$ که توسط نویسندگان ارائه شده، استفاده می‌شود که دارای دقت بالا و حجم محاسباتی پایین می‌باشد.

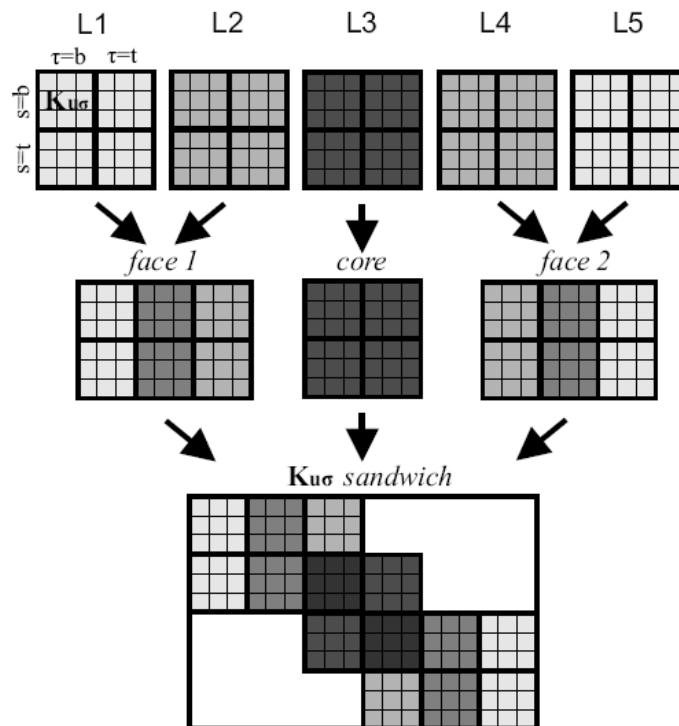


شکل ۵- ورق ساندویچی با رویه‌های دو لایه

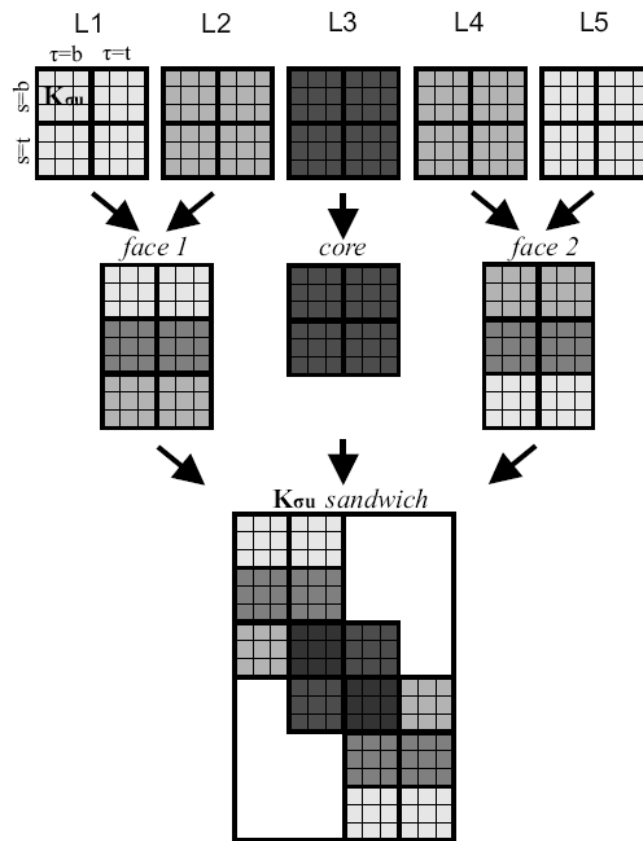
¹ Condensation Technique



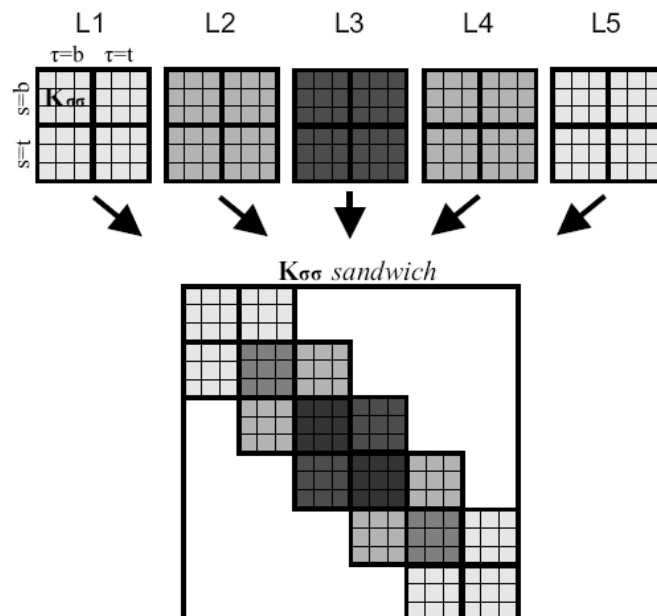
شکل ۶- نحوه اسمبل کردن سلولهای بنیادین K_{uu}^{ks} در فرمولاسیون هیبریدی



شکل ۷- نحوه اسمبل کردن سلولهای بنیادین $K_{u\sigma}^{ks}$ در فرمولاسیون هیبریدی



شکل ۸- نحوه اسمبل کردن سلولهای بنیادین $K_{\sigma u}^{k_{\sigma u}}$ در فرمولاسیون هیبریدی



شکل ۹- نحوه اسمبل کردن سلولهای بنیادین $K_{\sigma \sigma}^{k_{\sigma \sigma}}$ در فرمولاسیون هیبریدی

به عنوان مثال یک ورق ساندویچی را مطابق شکل (۵) در نظر بگیرید که هر کدام از رویه‌های آن از دو لایه تشکیل شده باشد. فرمولاسیون هیبریدی به این صورت است که، یک تئوری تک لایه معادل برای میدان جابجایی کل رویه پایین ($face1$)، یک تئوری تک لایه معادل برای میدان جابجایی هسته و یک تئوری تک لایه معادل برای میدان جابجایی کل رویه بالا ($face2$) در نظر گرفته می‌شود. همچنین به منظور پیوستگی تنش‌های عرضی در سطح مشترک تمام لایه‌ها، یک توزیع کاملاً لایه‌گون بر اساس فرمولاسیون مختلط $RMVT$ برای توزیع تنش‌های عرضی برای تمام لایه‌ها (اعم از لایه‌های رویه‌ها و لایه هسته) در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است همانطور که در بخش اول بیان شد، در فرمولاسیون واحد برای بیان تئوریهای تک‌لایه از بسط تیلور استفاده می‌شود، در حالیکه در فرمولاسیون هیبریدی به منظور ایجاد پیوستگی جابجایی در سطح مشترک رویه‌ها و هسته نمی‌توان از بسط تیلور استفاده کرد بلکه باید از توابع لژاندر که این قابلیت را دارند استفاده شود. نحوه اسمبل کردن سلولهای بنیادین برای فرمولاسیون هیبریدی در اشکال (۶) تا (۹) نشان داده شده است. در این اشکال، برای مثال مدل برشی مرتبه اول ($N=1$) برای تک‌لایه‌ها منظور شده است. در فرمولاسیون مختلط همانطور که قبلاً اشاره شد مجهولات گرهی تنش‌های عرضی با استفاده از تکنیک انقباض استاتیکی از معادلات حاکم حذف می‌شوند. لیکن در نهایت تنها مجهولات مساله، مجهولات جابجایی خواهند بود. به عنوان مثال اگر از مدل برشی مرتبه اول ($N=1$) برای میدان جابجایی تک‌لایه‌ها استفاده کنیم، مجهولات مساله برای یک گره در تئوری کاملاً لایه‌گون به شکل زیر هستند:

$$\mathbf{u}_\tau = \{u_{x_b}^{L1}, u_{y_b}^{L1}, u_{z_b}^{L1}, u_{x_i}^{L1} = u_{x_b}^{L2}, u_{y_i}^{L1} = u_{y_b}^{L2}, u_{z_i}^{L1} = u_{z_b}^{L2}, u_{x_i}^{L2} = u_{x_b}^{L3}, u_{y_i}^{L2} = u_{y_b}^{L3}, u_{z_i}^{L2} = u_{z_b}^{L3}, u_{x_i}^{L3} = u_{x_b}^{L4}, u_{y_i}^{L3} = u_{y_b}^{L4}, u_{z_i}^{L3} = u_{z_b}^{L4}, u_{x_i}^{L4} = u_{x_b}^{L5}, u_{y_i}^{L4} = u_{y_b}^{L5}, u_{z_i}^{L4} = u_{z_b}^{L5}, u_{x_i}^{L5}, u_{y_i}^{L5}, u_{z_i}^{L5}\}^T \quad (68)$$

در حالیکه برای مدل هیبریدی مجهولات مساله برای یک گره عبارتند از:

$$\mathbf{u}_\tau = \{u_{x_b}^{face1}, u_{y_b}^{face1}, u_{z_b}^{face1}, u_{x_i}^{face1} = u_{x_b}^{core}, u_{y_i}^{face1} = u_{y_b}^{core}, u_{z_i}^{face1} = u_{z_b}^{core}, u_{x_i}^{core} = u_{x_b}^{face2}, u_{y_i}^{core} = u_{y_b}^{face2}, u_{z_i}^{core} = u_{z_b}^{face2}, u_{x_i}^{face2}, u_{y_i}^{face2}, u_{z_i}^{face2}\}^T \quad (69)$$

با توجه به روابط (۶۸) و (۶۹) مشاهده می‌شود که تعداد مجهولات برای یک گره در مدل کاملاً لایه‌گون ۱۸ و در مدل هیبریدی ۱۲ می‌باشد. که این اختلاف برای وقتی که تعداد لایه‌های بیشتر با مدل مرتبه بالاتر مد نظر باشد، بیشتر نیز می‌شود. به عنوان مثال اگر هر کدام از رویه‌ها از ۵ لایه (یعنی کل ورق ۱۱ لایه) تشکیل شده باشد و از مدل مرتبه سه استفاده کنیم، تعداد مجهولات در مدل کاملاً لایه‌گون ۱۰۲ و در مدل هیبریدی ۳۰ می‌شود. بنابراین همانطور که در فصل نتایج مشاهده خواهد شد، با استفاده از مدل هیبریدی با درجات آزادی کمتر می‌توان به نتایج مدل کاملاً لایه‌گون دست یافت که در حجم محاسباتی تحلیل کل مساله بسیار موثر است. لیکن در حالت کلی می‌توان گفت، تعداد کل درجات آزادی برای یک گره در فرمولاسیون هیبریدی ($9N+3$) است، در حالیکه در مدل کاملاً لایه‌گون ($3[N_l(N+1)-N_l+1]$) می‌باشد. بنابراین از مزایای فرمولاسیون هیبریدی می‌توان گفت که علی‌رغم پیوستگی تنش‌های عرضی در تمام لایه‌ها، تعداد درجات آزادی مجهول مساله مستقل از تعداد لایه‌ها می‌باشد که منجر به حجم محاسباتی کمتر تحلیل مساله می‌شود. از دیگر مزایای فرمولاسیون هیبریدی این است که مرتبه مدل را می‌توان بر حسب نیاز، به شکل دلخواه انتخاب کرد. به‌طوریکه در بعضی حالات که ضخامت ورق کم باشد استفاده از مدل‌های مرتبه

بالا با حجم محاسباتی زیاد ضرورتی نداشته و می‌توان از مدلی با مرتبه پایین‌تر که دقت قابل قبول و همچنین حجم محاسباتی کمتری دارد، استفاده کرد. در این پژوهش تئوری هیبریدی "لایه‌گون L - تک‌لایه E " با نماد $LEMN$ نشان داده می‌شود که M بیانگر فرمولاسیون مختلط و N نشان دهنده مرتبه فرمولاسیون می‌باشد.

۴- بحث و بررسی نتایج

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از مساله مذکور پرداخته می‌شود. بدین منظور مطابق روند ذکر شده در بخش‌های قبل، کدنویسی اجزاء محدود از ابتدائی‌ترین مرحله در (M-file) نرم‌افزار مطلب (Matlab) نوشته شده است و نتایج حاصل می‌شوند. این فصل از دو بخش تشکیل شده است. در بخش اول صحت سنجی فرمولاسیون هیبریدی و دقت نتایج آنالیز فرکانسی حاصل از مدل هیبریدی بررسی شده و در بخش دوم به بررسی نتایج جدید حاصل از این پژوهش پرداخته خواهد شد.

۴-۱- صحت‌سنجی فرمولاسیون هیبریدی

همانطور که پیش‌تر گفته شد در این تحقیق برای تحلیل یک ورق ساندویچی با رویه‌های چند لایه کامپوزیتی یک مدل هیبریدی تک‌لایه-لایه‌گون ارائه گردیده است. در ابتدا به منظور صحت‌سنجی و بررسی دقت این مدل، یک ورق ساندویچی با شرایط مرزی ساده، هسته نرم ارتوتروپیک و رویه‌های چند لایه کامپوزیتی تحت فشار سینوسی تحلیل شده و نتایج حاصل از مدل هیبریدی با نتایج دقیق سه‌بعدی مقایسه می‌شوند. توزیع فشار سینوسی روی سطح بالایی ورق طبق رابطه زیر اعمال می‌شود:

جدول ۱- خواص هندسی و فیزیکی رویه‌های ورق ساندویچی

| | |
|-------------------------------------|---|
| E_L (GPa) | 50 |
| $E_T = E_Z$ (GPa) | 10 |
| ν | 0.25 |
| G (GPa) | 5 |
| h for each layer of face sheets (m) | .02 |
| a=b(m) | 4, 10, 100, 1000 |
| θ : orientation (deg) | 0/90/0/90/0/90/0/90/0/90 and 90/0/90/0/90/0/90/0/90/0 |

جدول ۲- خواص هندسی و فیزیکی هسته ورق ساندویچی

| | |
|-------------------|------------------|
| $E_L = E_T$ (MPa) | 0.01 |
| E_Z (MPa) | 75.85 |
| ν | 0.01 |
| G (MPa) | 22.5 |
| h(m) | .6 |
| a=b(m) | 4, 10, 100, 1000 |

$$P_z = p_z \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (70)$$

هر کدام از رویه‌ها از ۱۰ لایه با چیدمان $[0^\circ/90^\circ]_5$ تشکیل شده‌اند. مشخصات هندسی و فیزیکی رویه‌ها و

هسته به ترتیب در جداول (۱) و (۲) ارائه شده است [۱۱].

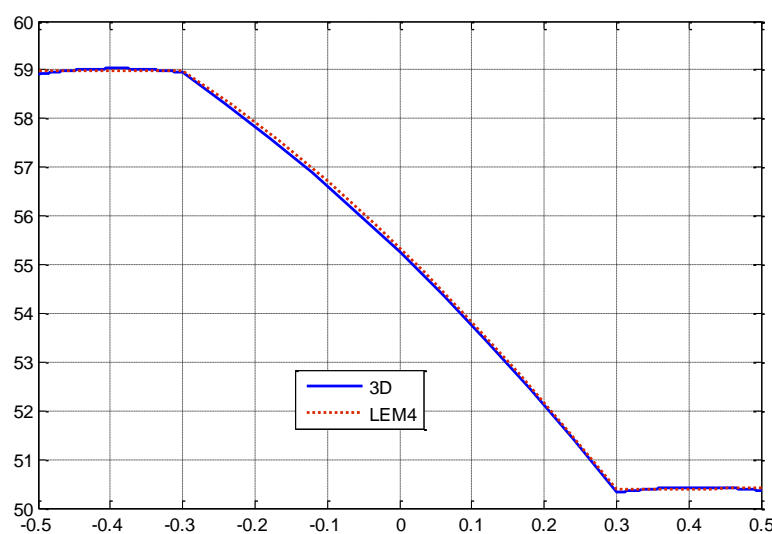
خیز و تنش‌های عرضی حاصل از بارگذاری فوق طبق روابط زیر به شکل بی بعد محاسبه می‌شوند:

$$\bar{U}(x, y, z) = \frac{u_z 100h^3 E_2}{p_z a^4}, \quad \bar{\sigma}_{zz}(x, y, z) = \frac{\sigma_{zz}}{p_z}, \quad \bar{\sigma}_{xz}(x, y, z) = \frac{\sigma_{xz}}{p_z} \quad (71)$$

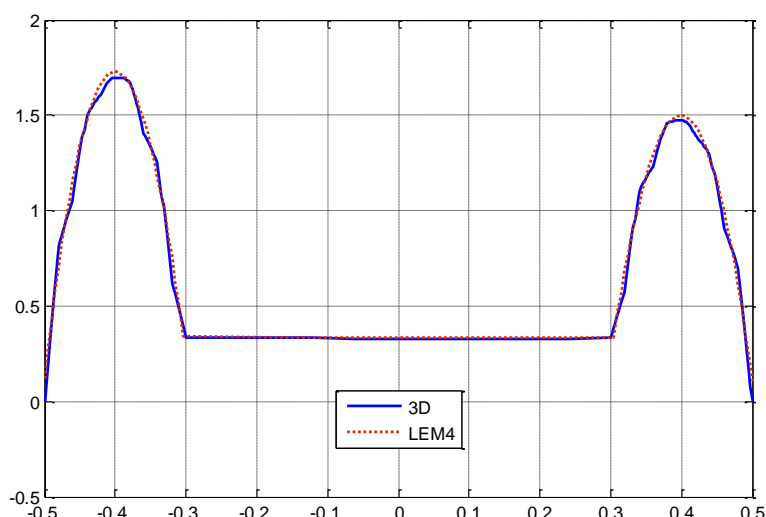
لازم به ذکر است که نتایج همگرایی مش‌بندی نشان می‌دهد که تعداد ۴ در ۴ المان (در کل ۱۶ المان) برای تحلیل مساله از دقت کافی برخوردار می‌باشد. جدول (۳) مقادیر خیز بی بعد را در مرکز ورق $\bar{U}(a/2, b/2, 0)$ به ازای نسبت طول به ضخامت‌های (a/h) مختلف نشان می‌دهد. همانطور که از این جدول ملاحظه می‌شود تطابق بسیار خوبی بین مدل هیبریدی و نتایج سه بعدی [۱۱] وجود دارد.

جدول ۳- خیز بی بعد در مرکز ورق به ازای a/h های مختلف

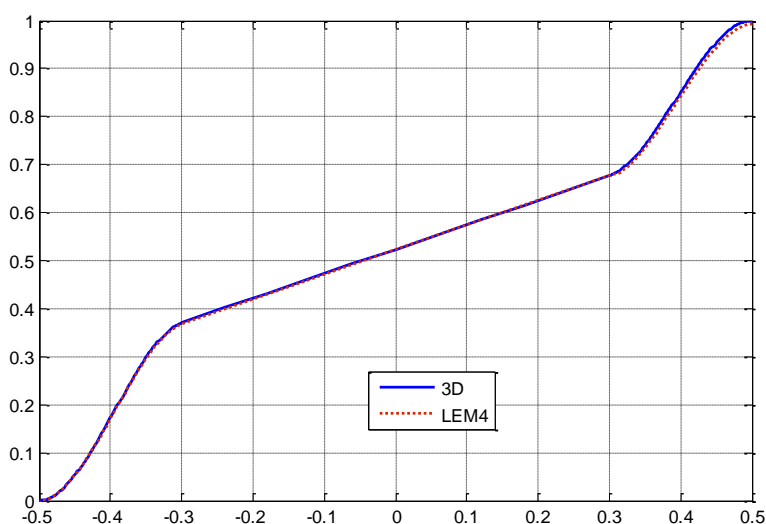
| a/h | 4 | 10 | 100 | 1000 |
|--------|---------|---------|--------|--------|
| 3D[11] | 55.2528 | 18.3812 | 2.0327 | 1.8120 |
| LEM1 | 54.7422 | 18.3728 | 2.0323 | 1.8319 |
| LEM2 | 55.2498 | 18.3939 | 2.0323 | 1.8320 |
| LEM3 | 55.3473 | 18.3956 | 2.0323 | 1.8320 |
| LEM4 | 55.3475 | 18.3956 | 2.0323 | 1.8320 |
| EM4 | 19.5724 | 13.1981 | 0.9938 | 1.3523 |



شکل ۱۰- تغییرات خیز بی بعد بر حسب ضخامت با استفاده از LEM4 برای $a/h=4$



شکل ۱۱- تغییرات تنش برشی عرضی بی بعد $\bar{\sigma}_{xz}$ بر حسب ضخامت با استفاده از LEM4 برای $a/h=4$



شکل ۱۲- تغییرات تنش عمودی عرضی بی بعد $\bar{\sigma}_{zz}$ بر حسب ضخامت با استفاده از مدل LEM4 برای $a/h=4$

در این جدول برای بررسی دقت مدل‌های تک لایه معادل، نتایج مدل $EM4$ (که در آن E به مفهوم تک لایه، M به معنی فرمولاسیون مختلط و ν به مفهوم مرتبه چهار می‌باشد) نیز آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود در برخی از حالات خطای این مدل به ۱۰۰ درصد می‌رسد که علت اصلی آن تفاوت زیاد خواص هسته با رویه‌ها می‌باشد. بنابراین مشاهده می‌شود که مدل‌های تک لایه معادل برای تحلیل ورق‌های ساندویچی مناسب نمی‌باشند. در شکل (۱۰) تغییرات خیز بی‌بعد مرکز ورق $\bar{U}(a/2, b/2)$ در راستای ضخامت نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود مدل $LEM4$ به خوبی فرم زیگ‌زاگ میدان جابجایی را به دلیل نرم بودن هسته مدلسازی می‌کند. همچنین در این شکل تطابق خیلی خوبی بین مدل هیبریدی حاضر و نتایج سه بعدی مشاهده می‌شود. به عبارت دیگر در این مدل هیبریدی تعداد درجات آزادی برای هر گره ۳۹ می‌باشد در حالیکه تعداد درجات آزادی برای هر گره در یک مدل کاملاً لایه‌گون ۲۵۵ می‌باشد (که با کامپیوترهای پیشرفته روز با کمبود حافظه مواجه می‌شود). بنابراین مشاهده می‌شود که

در مدل هیبریدی با تعداد درجات آزادی کمتر می‌توان به نتایج سه‌بعدی دست پیدا نمود (که این کم بودن درجات آزادی در یک مساله غیرخطی بسیار حائز اهمیت خواهد بود).

شکل (۱۱) توزیع تنش برشی عرضی $\bar{\sigma}_{xz}$ را در نقطه مرزی $(0, b/2)$ و شکل (۱۲) توزیع تنش عمودی عرضی $\bar{\sigma}_{zz}$ را در نقطه $(a/2, b/2)$ در راستای ضخامت نشان می‌دهند. در این اشکال نیز تطابق خوبی بین نتایج مدل هیبریدی و نتایج سه‌بعدی مشاهده می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شود که پیوستگی تنش‌های عرضی در تمام لایه‌ها مخصوصاً در سطح مشترک بین رویه‌ها و هسته حاصل شده است.

جهت اطمینان بیشتر از فرمولاسیون ارائه شده در مورد آنالیز فرکانسی، ارتعاشات آزاد یک ورق ساندویچی با رویه‌های چند لایه کامپوزیتی صورت گرفته و نتایج آن با نتایج سه‌بعدی موجود مقایسه شده است. بدین منظور یک ورق ساندویچی با چیدمان $[0^\circ/90^\circ/core/90^\circ/0^\circ]$ در نظر گرفته شده است [۱۲].

خواص ورق مطابق جدول (۴) می‌باشد. نتایج حاصل از مدل‌های مختلف برای شرایط مرزی متفاوت، با نتایج سه‌بعدی به دست آمده توسط Kulkarni و Kapuria [۱۲] در جدول (۵) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تطابق بسیار خوبی بین نتایج مدل‌های مختلف با نتایج سه‌بعدی مشاهده می‌شود. همچنین با توجه به جدول (۵) مشاهده می‌شود که مدل LEM2 از دقت کافی برخوردار می‌باشد. بنابراین از این مدل برای بقیه آنالیزها استفاده خواهد شد.

۴-۲- آنالیز فرکانسی ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته نرم وابسته به دما

در این بخش پژوهش به بررسی آنالیز فرکانسی ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته نرم وابسته به دما پرداخته می‌شود. همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد، در سازه‌های ساندویچی با هسته نرم، تحت شرایط دمایی خواص هسته به شدت وابسته به دما می‌باشد بطوریکه با افزایش دما، خواص ذاتی سازه کاهش می‌یابد. بدین منظور یک ورق مربعی ساندویچی با چیدمان $[(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)_s/core/[(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)_s]$ در نظر گرفته شده است.

خواص مکانیکی- حرارتی و هندسی رویه‌های کامپوزیتی و هسته نرم به شکل زیر می‌باشند [۱۱]:

$$E_1 = 50 \text{ GPa}, \quad E_2 = E_3 = 10 \text{ GPa}, \quad G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

$$\alpha_L = 1.5e-8 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad \alpha_T = 1e-6 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad \rho_t = \rho_b = 1600 \text{ kg/m}^3 \quad a = b = 1 \text{ m},$$

$$h_t = h_b = 0.01 \text{ m}, \quad h = 0.1 \text{ m}, \quad E_0 = 85 \text{ MPa}, \quad \nu_c = 0.25, \quad \rho_c = 100 \text{ kg/m}^3, \quad \alpha_c = 35e-5 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

جدول ۴- خواص ورق ساندویچی [۱۲]

| E_1 (GPa) | E_2, E_3 (GPa) | G_{12}, G_{13} (GPa) | G_{23} (GPa) | ν_{12}, ν_{13} | ν_{23} | ρ (kg/m ³) |
|-------------|------------------|------------------------|----------------|----------------------|------------|-----------------------------|
| Face sheets | | | | | | |
| 275 | 6.9 | 6.9 | 6.9 | 0.25 | 0.3 | 681.8 |
| Core | | | | | | |
| 0.5776 | 0.5776 | 0.1079 | 0.22215 | 0.0025 | 0.0025 | 1000 |

جدول ۵- فرکانسهای بی بعد ($\hat{\omega}_n = 100\omega_n a \sqrt{E_1^f / \rho^c}$) برای ورق ساندویچی مربعی با $h_f / h = 0.1$

| a/h | Theory | $\hat{\omega}_1$ | $\hat{\omega}_2$ | $\hat{\omega}_3$ | $\hat{\omega}_4$ | $\hat{\omega}_5$ | $\hat{\omega}_6$ |
|------|-------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| SSSS | | | | | | | |
| 10 | 3D[12] | 9.8281 | 15.5057 | 18.0752 | 21.6965 | 22.2022 | 26.9150 |
| | LEM4 | 9.8283 | 15.5064 | 18.0758 | 21.6969 | 22.2026 | 26.9153 |
| | LEM3 | 9.8285 | 15.5073 | 18.0785 | 21.6991 | 22.2133 | 26.9164 |
| | LEM2 | 9.8287 | 15.5145 | 18.0888 | 21.7020 | 22.2820 | 26.9505 |
| | LEM1 | 9.8307 | 15.5165 | 18.0957 | 21.7082 | 22.2837 | 26.9557 |
| 20 | 3D | 7.6882 | 13.8455 | 15.9204 | 19.6563 | 20.6760 | 24.9485 |
| | LEM4 | 7.6884 | 13.8458 | 15.9206 | 19.6564 | 20.6763 | 24.9487 |
| | LEM3 | 7.6885 | 13.8460 | 15.9209 | 19.6567 | 20.6767 | 24.9488 |
| | LEM2 | 7.6889 | 13.8566 | 15.9369 | 19.6664 | 20.7574 | 24.9911 |
| | LEM1 | 7.6898 | 13.8583 | 15.9409 | 19.6704 | 20.7596 | 24.9952 |
| SCSC | | | | | | | |
| 10 | 3D(FE) [12] | 10.2816 | 16.1245 | 18.3029 | 22.1480 | 23.1797 | 27.1464 |
| | LEM4 | 10.2822 | 16.1251 | 18.3035 | 22.1485 | 23.1802 | 27.1467 |
| | LEM3 | 10.2828 | 16.1255 | 18.3037 | 22.1491 | 23.1822 | 27.1472 |
| | LEM2 | 10.2834 | 16.1264 | 18.3044 | 22.1496 | 23.1846 | 27.1498 |
| | LEM1 | 10.2980 | 16.1844 | 18.3298 | 22.1955 | 23.3970 | 27.2697 |
| 20 | 3D(FE) | 8.5675 | 14.3524 | 16.3014 | 20.0117 | 21.2553 | 25.2762 |
| | LEM4 | 8.5677 | 14.3526 | 16.3017 | 20.0119 | 21.2554 | 25.2763 |
| | LEM3 | 8.5685 | 14.3531 | 16.3019 | 20.0120 | 21.2558 | 25.2768 |
| | LEM2 | 8.5691 | 14.3536 | 16.3023 | 20.0128 | 21.2563 | 25.2771 |
| | LEM1 | 8.5735 | 14.3645 | 16.3124 | 20.0225 | 21.2624 | 25.2816 |
| CCCC | | | | | | | |
| 10 | 3D(FE) [12] | 11.2236 | 16.6777 | 18.9650 | 22.7096 | 23.5270 | 28.0728 |
| | LEM4 | 11.2240 | 16.6779 | 18.9654 | 22.7099 | 23.5273 | 28.0731 |
| | LEM3 | 11.2242 | 16.6782 | 18.9658 | 22.7104 | 23.5278 | 28.0736 |
| | LEM2 | 11.2251 | 16.6788 | 18.9663 | 22.7110 | 23.5285 | 28.0742 |
| | LEM1 | 11.2343 | 16.6832 | 18.9753 | 22.7221 | 23.5321 | 28.1123 |
| 20 | 3D(FE) | 10.1635 | 15.2734 | 17.2645 | 20.7882 | 21.8260 | 26.0346 |
| | LEM4 | 10.1638 | 15.2737 | 17.2648 | 20.7885 | 21.8263 | 26.0348 |
| | LEM3 | 10.1644 | 15.2740 | 17.2651 | 20.7889 | 21.8266 | 26.0351 |
| | LEM2 | 10.1651 | 15.2746 | 17.2655 | 20.7894 | 21.8272 | 26.0358 |
| | LEM1 | 10.1715 | 15.2815 | 17.2715 | 20.7945 | 21.8344 | 26.0423 |

فرض می‌شود که دمای ورق از ۲۰ درجه به مقادیر ذکر شده در جدول (۶) برسد. نتایج حاصل برای دماهای متفاوت در جدول (۶) نشان داده شده است. در این جدول، ۵ ستون وجود دارد. ستون اول تغییرات دما از ۲۰ درجه تا دمای مورد نظر را نشان می‌دهد. ستون دوم مربوط به چهار فرکانس طبیعی اول می‌باشد. ستون سوم فرکانسهای طبیعی مربوط به وقتی که خواص هسته ثابت (NTD^1) باشد را نشان می‌دهد. ستون چهارم بیانگر فرکانسهای طبیعی مربوط به وقتی که خواص هسته وابسته به دما (WTD^2) می‌باشد و ستون پنجم اختلاف بین نتایج مربوط به خواص وابسته به دما (WTD) و نتایج مربوط به خواص ثابت (NTD) می‌باشد. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که وابستگی خواص هسته به دما تاثیر چشمگیری روی فرکانسهای طبیعی دارد. بطوریکه وقتی که دما افزایش می‌یابد، سفتی ذاتی سازه به دلیل کاهش خواص هسته کمتر می‌شود و در نتیجه فرکانسهای طبیعی تا بیش از ۱۱ درصد کاهش می‌یابند.

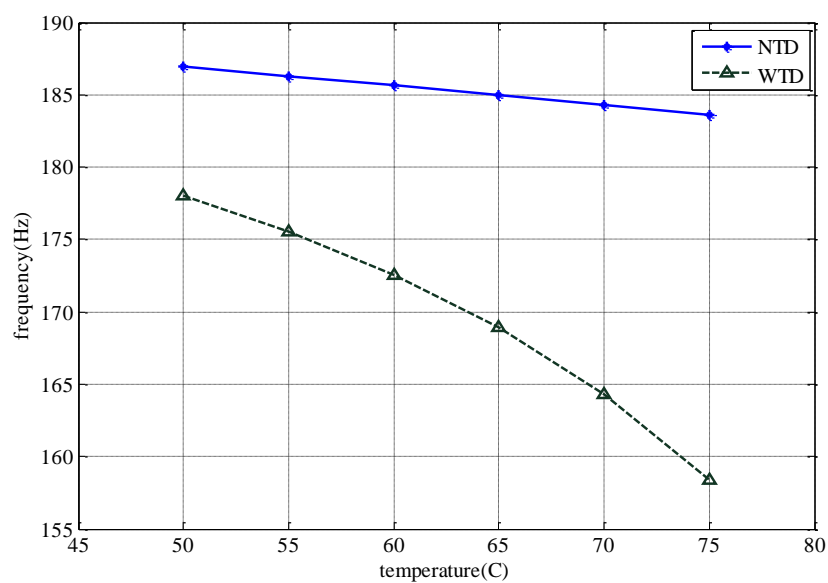
شکل (۱۳) تغییرات فرکانس طبیعی اول سازه را با دما نشان می‌دهد.

¹ Not temperature dependent

² With temperature dependent

جدول ۶- چهار فرکانس طبیعی اول برای ورق مربعی ساندویچی بر حسب دما با $h_f / h = 0.1$

| $T(^{\circ}C)$ | $f_n(Hz)$ | NTD | WTD | Discrepancy% |
|----------------|-----------|----------|----------|--------------|
| 50 | f_1 | 186.965 | 178.0387 | -4.77432 |
| | f_2 | 315.9693 | 299.6672 | -5.15939 |
| | f_3 | 322.8417 | 306.439 | -5.08073 |
| | f_4 | 412.7263 | 391.6301 | -5.11143 |
| 55 | f_1 | 186.3048 | 175.5331 | -5.78176 |
| | f_2 | 314.9949 | 295.3374 | -6.24058 |
| | f_3 | 321.8949 | 302.1247 | -6.14182 |
| | f_4 | 411.5449 | 386.1216 | -6.17753 |
| 60 | f_1 | 185.6423 | 172.5727 | -7.04021 |
| | f_2 | 314.0175 | 290.1963 | -7.58595 |
| | f_3 | 320.9451 | 297.0008 | -7.46056 |
| | f_4 | 410.36 | 379.5761 | -7.50168 |
| 65 | f_1 | 184.9774 | 168.9217 | -8.67982 |
| | f_2 | 313.0369 | 283.8314 | -9.32973 |
| | f_3 | 319.9925 | 290.6579 | -9.16728 |
| | f_4 | 409.1715 | 371.4708 | -9.21391 |
| 70 | f_1 | 184.3101 | 164.3065 | -10.853231 |
| | f_2 | 312.0532 | 275.7761 | -11.625293 |
| | f_3 | 319.037 | 282.6364 | -11.409523 |
| | f_4 | 407.9795 | 361.2214 | -11.460894 |



شکل ۱۳- تغییرات فرکانس طبیعی اول با دما

با توجه به شکل (۱۴) مشاهده می‌شود که در حالتی که خواص ثابت بوده با افزایش دما فرکانس طبیعی تا حدودی کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر در این حالت با وجود اینکه سفتی ذاتی سازه تغییر نکرده، ولی با افزایش دما فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. این به دلیل ایجاد تنشهای حرارتی فشاری درون صفحه‌ای (با در نظر گرفتن کرنشهای غیرخطی) بوده، که باعث کاهش سفتی سازه شده و در نتیجه منجر به کاهش فرکانس طبیعی سازه می‌شود.

جدول ۷- چهار فرکانس طبیعی اول برای ورق مربعی ساندویچی بر تغییرات خطی دما با $h_f/h = 0.1$

| $T(^{\circ}C)$ | $f_n(Hz)$ | NTD | WTD | Discrepancy% |
|--|-----------|----------|----------|--------------|
| $T_b = 50^{\circ}C$ $T_t = 55^{\circ}C$ | f_1 | 186.6352 | 176.8155 | -5.26144 |
| | f_2 | 315.4825 | 297.555 | -5.68257 |
| | f_3 | 322.3687 | 304.3343 | -5.59434 |
| | f_4 | 412.136 | 388.943 | -5.62751 |
| $T_b = 50^{\circ}C$ $T_t = 60^{\circ}C$ | f_1 | 186.3048 | 175.462 | -5.81993 |
| | f_2 | 314.9949 | 295.2092 | -6.28128 |
| | f_3 | 321.8949 | 301.996 | -6.1818 |
| | f_4 | 411.5449 | 385.9565 | -6.21764 |
| $T_b = 50^{\circ}C$ $T_t = 65^{\circ}C$ | f_1 | 185.9739 | 173.9246 | -6.47903 |
| | f_2 | 314.5066 | 292.5343 | -6.98628 |
| | f_3 | 321.4204 | 299.329 | -6.87305 |
| | f_4 | 410.9529 | 382.5486 | -6.91181 |

جدول ۸- چهار فرکانس طبیعی اول برای ورق مربعی ساندویچی بر حسب دما با $h_f/h = 0.1$

| B.C. | $f_n(Hz)$ | NTD | WTD | Discrepancy% |
|------|-----------|----------|----------|--------------|
| SSSS | f_1 | 186.965 | 178.0387 | -4.77432 |
| | f_2 | 315.9693 | 299.6672 | -5.15939 |
| | f_3 | 322.8417 | 306.439 | -5.08073 |
| | f_4 | 412.7263 | 391.6301 | -5.11143 |
| CSCS | f_1 | 202.0363 | 192.4455 | -4.74707 |
| | f_2 | 324.1021 | 307.6198 | -5.08553 |
| | f_3 | 350.0038 | 333.7738 | -4.63709 |
| | f_4 | 434.5593 | 413.6531 | -4.8109 |
| CCCC | f_1 | 216.3086 | 205.6162 | -4.94312 |
| | f_2 | 343.2938 | 326.6282 | -4.85462 |
| | f_3 | 356.2272 | 339.6536 | -4.65254 |
| | f_4 | 449.2735 | 428.234 | -4.683 |

جدول ۹- چهار فرکانس طبیعی اول برای ورق ساندویچی مربعی بر حسب نسبت منظرهای مختلف با $h_f/h=0.1$

| a/b | f_n (Hz) | NTD | WTD | Discrepancy% |
|-------|------------|----------|----------|--------------|
| 0.5 | f_1 | 144.1303 | 137.4949 | -4.82592 |
| | f_2 | 186.9948 | 178.065 | -5.01491 |
| | f_3 | 247.9446 | 235.4584 | -5.30293 |
| | f_4 | 298.7884 | 283.5751 | -5.36482 |
| 1 | f_1 | 186.965 | 178.0387 | -4.77432 |
| | f_2 | 315.9693 | 299.6672 | -5.15939 |
| | f_3 | 322.8417 | 306.439 | -5.08073 |
| | f_4 | 412.7263 | 391.6301 | -5.11143 |
| 1.25 | f_1 | 215.7871 | 205.1807 | -5.1693 |
| | f_2 | 340.7155 | 323.3765 | -5.36186 |
| | f_3 | 389.1341 | 369.0016 | -5.45594 |
| | f_4 | 472.3417 | 448.3183 | -5.35856 |
| 1.5 | f_1 | 247.3804 | 234.9339 | -5.2978731 |
| | f_2 | 361.9391 | 343.4781 | -5.374724 |
| | f_3 | 466.0306 | 442.2003 | -5.3890285 |
| | f_4 | 514.6301 | 489.9043 | -5.0470674 |

در جدول (۷) نتایج برای زمانی که توزیع دما در راستای ضخامت به شکل خطی باشد را نشان می‌دهد. به عبارتی در اثر بارهای حرارتی دمای رویه پایین به T_b و دمای رویه بالا به T_t می‌رسد. همواره مشخص است که شرایط مرزی تاثیر بسزایی روی پاسخ فرکانسی ورق‌های ساندویچی دارد. بدین منظور در این قسمت پاسخ فرکانسی ورق ساندویچی با شرایط مرزی $SSSS$, $CSCS$, و $CCCC$ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. حروف C و S به ترتیب به مفهوم شرایط مرزی ساده^۱ و گیردار^۲ می‌باشند. فرض شده است که دمای ورق از ۲۰ درجه سانتیگراد به ۵۰ درجه سانتیگراد برسد. نتایج حاصل در جدول (۸) آورده شده است. در جداول (۹) و (۱۰) نیز به ترتیب اثر پارامترهای هندسی نسبت منظر a/b و نسبت ضخامت رویه‌ها به ضخامت کل ورق بر روی پاسخ فرکانسی ورق ساندویچی با شرایط مرزی ساده مطالعه شده است.

¹ Simply Supported

² Clamped

جدول ۱۰- چهار فرکانس طبیعی اول برای ورق ساندویچی مربعی بر حسب نسبت ضخامت رویه‌ها

| h_f / h | $f_n (Hz)$ | NTD | WTD | Discrepancy% |
|-----------|------------|----------|----------|--------------|
| 0.04 | f_1 | 225.01 | 215.7938 | -4.27084 |
| | f_2 | 395.4022 | 375.722 | -5.23797 |
| | f_3 | 402.0811 | 381.4422 | -5.41075 |
| | f_4 | 516.261 | 489.0692 | -5.55991 |
| 0.06 | f_1 | 210.6522 | 201.2004 | -4.6977 |
| | f_2 | 361.1821 | 342.5171 | -5.44936 |
| | f_3 | 366.4035 | 347.1738 | -5.53893 |
| | f_4 | 468.7101 | 443.6542 | -5.64762 |
| 0.08 | f_1 | 197.6423 | 188.3839 | -4.91465 |
| | f_2 | 335.1532 | 317.6889 | -5.4973 |
| | f_3 | 340.6585 | 322.8834 | -5.50511 |
| | f_4 | 435.285 | 412.2911 | -5.5771 |
| 0.1 | f_1 | 186.965 | 178.0387 | -4.77432 |
| | f_2 | 315.9693 | 299.6672 | -5.15939 |
| | f_3 | 322.8417 | 306.439 | -5.08073 |
| | f_4 | 412.7263 | 391.6301 | -5.11143 |
| 0.12 | f_1 | 178.4808 | 169.9309 | -5.0313981 |
| | f_2 | 302.233 | 287.0228 | -5.2993003 |
| | f_3 | 311.3151 | 296.2001 | -5.1029692 |
| | f_4 | 398.6662 | 379.3284 | -5.0979046 |

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش آنالیز فرکانسی یک ورق ساندویچی با رویه‌های چند لایه کامپوزیتی و هسته انعطاف‌پذیر با در نظر گرفتن اثرات حرارتی و خواص هسته به دما بررسی شده است. از آنجایی که تعداد لایه‌های کامپوزیتی هر رویه ممکن است زیاد باشد، استفاده از تئوریهای لایه‌گون منجر به حجم بالای محاسبات و استفاده از تئوریهای تک لایه منجر به دقت پایین محاسبات خواهد شد.

بنابراین در این پژوهش یک فرمولاسیون جامع ارتقا یافته مختلط با دقت بالا و حجم محاسبات پایین (که تمام تئوریهای موجود اعم از تک لایه، لایه‌گون و تئوریهای مرتبه بالا را در بر می‌گیرد)، با در نظر گرفتن اثرات حرارتی ارائه شده است.

ضمناً برای بالا بردن دقت محاسبات، پیوستگی تنش‌های عرضی در تمام لایه‌ها لحاظ می‌شود و برای جلوگیری از قفل شونده‌گی برشی از روش انتگرال‌گیری کاهش یافته استفاده شده است.

برای آنکه بتوان معادلات حرکت را برای تمام شرایط مرزی (اعم از شرایط مرزی ساده، گیردار، آزاد) حل نمود، یک فرمولاسیون جدید اجزاء محدود استخراج شده است. نتایج بیانگر دقت بالا با حجم محاسبات پایین فرمولاسیون ارائه شده می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دما فرکانسهای سازه به شکل چشمگیری کاهش می‌یابند.

سپاسگزاری

با توجه به زحمات و حمایت‌های مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین نویسندگان این مقاله بر خود لازم می‌دانند که کمال تشکر و امتنان را از مسئولین این دانشگاه داشته باشند.

مراجع

- [1] Singh, A.V., "Free Vibration Analysis of Deep Doubly Curved Sandwich Panels", *Computers and Structures*, Vol. 73, pp. 385-394, (1999).
- [2] Kant, T., and Swaminathan, K., "Analytical Solution for Free Vibrations for Laminated Composite and Sandwich Plates Based on a Higher-order Refined Theory", *Composite Structures*, Vol. 53, pp. 73-85, (2001).
- [3] Rao, M.K., and Desai, Y.M., "Analytical Solutions for Vibrations of Laminated and Sandwich Plates using Mixed Theory", *Composite Structures*, Vol. 63, pp. 361-373, (2004).
- [4] Morozov, E.V., and Lopatin, A.V., "Fundamental Frequency of the CCCF Composite Sandwich Plate", *Composite Structures*, Vol. 92, Vol. 11, pp. 2747-2757, (2010).
- [5] Matsunaga, H., "Free Vibration and Stability of Angle-ply Laminated Composite and Sandwich Plates under Thermal Loading", *Composite Structures*, Vol. 77, pp. 249-262, (2007).
- [6] Frostig, Y., and Thomsen, O.T., "On the Free Vibration of Sandwich Panels with a Transversely Flexible and Temperature-dependent Core Material- Part I: Mathematical Formulation", *Composites Science and Technology*, Vol. 69, pp. 856-862, (2009).
- [7] Frostig, Y., and Thomsen, O.T., "On the Free Vibration of Sandwich Panels with a Transversely Flexible and Temperature-dependent Core Material-Part II: Numerical Study", *Composites Science and Technology*, Vol. 69, pp. 863-869, (2009).
- [8] Carrera, E., "A Class of Two-dimensional Theories for Anisotropic Multilayered Plates Analysis", *Atti Accad Sci Torino Mem Sci Fis*, 19-20, pp.1-39, (1995).
- [9] Zhang, S., Dulieu-Barton, J.M., Fruehmann, R.K., and Thomsen, O.T., "A Methodology for Obtaining Material Properties of Polymeric Foam at Elevated Temperatures", *Experimental Mechanics*, Vol. 52, pp. 3-15, (2012).

- [10] Reddy, J.N., "An Introduction to the Finite Element Method", 2nd ed, McGraw-Hill, New York, (1993).
- [11] Carrera, E., and Brischetto, S., "A Survey with Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates", Applied Mechanics Reviews, Vol. 62, 010803, (17 pages), (2009).
- [12] Kulkarni, S.D., and Kapuria, S., "Free Vibration Analysis of Composite and Sandwich Plates using an Improved Discrete Kirchhoff Quadrilateral Element Based on Third Order Zigzag Theory", Computation Mechanics, Vol. 42, Vol. 6, pp. 803–824, (2008).

فهرست نمادهای انگلیسی

| | |
|--|--------------------------------|
| طول ورق : | a |
| عرض ورق : | b |
| اندیس بیانگر پایین (bottom) : | b |
| ماتریسهای سفتی لایه k ام : | C_{ij}^k |
| اپراتور دیفرانسیلی : | D_p |
| مدول یانگ : | E |
| انتگرال گیری توابع ضخامت : | E_{τ} |
| تابع ضخامت : | F_{τ} |
| بردار نیروی المانی : | $\{F^e\}$ |
| ضخامت رویه بالا : | h_t |
| ضخامت رویه پایین : | h_b |
| ماتریس سفتی المانی : | $[K^e]$ |
| ماتریس سفتی ناشی از اثرات غیرخطی حرارتی : | $K_{uu_{n10}}^{k\tau s ij}$ |
| ماتریس سفتی ناشی از تنشهای مکانیکی : | $K_{uu_{mech}}^{k\tau s ij}$ |
| ماتریس سفتی ناشی از اثرات غیرخطی تغییر فاز : | $K_{uu_{nISM A}}^{k\tau s ij}$ |
| ماتریس سفتی لایه k ام : | $K_{u\sigma}^{k\tau s}$ |
| ماتریس سفتی لایه k ام : | $K_{uu}^{k\tau s}$ |
| اندیس بیانگر لایه k ام : | k |
| کار ناشی از تنشهای مکانیکی : | L_{intM} |
| کار ناشی از تنشهای حرارتی : | L_{intT} |
| کار نیروهای خارجی لایه k ام : | L_e^k |
| کار نیروهای خارجی : | L_{ext} |

| | |
|---|------------------------|
| کار نیروهای اینرسی لایه kام | L_{in}^k |
| طول المان | l_e |
| ماتریس جرمی المانی | $[M^e]$ |
| ماتریس جرمی لایه kام | $M_{uu}^{k\alpha}$ |
| تعداد لایه‌ها | N_l |
| توابع شکل لاگرانژی درجه دو | N_i |
| بردار نیروهای ناشی از اثرات حرارتی | $P_{u\theta}^k$ |
| بردار نیروهای خارجی | p_{us}^k |
| چند جمله‌ای لژاندر | P_n |
| بردار جابجائیهای گرهی | $q_{\bar{n}}^k$ |
| دما | T |
| اندیس بیانگر بالا (top) | t |
| انرژی پتانسیل داخلی | U |
| بردار درجات آزادی جابجایی | u_{τ}^k |
| جابجایی در راستای X | u |
| انرژی پتانسیل خارجی | V |
| جابجایی در راستای Y | v |
| جابجایی در راستای Z | w |
| بردار جابجائیهای گرهی | Δ^e |
| اختلاف دما | θ |
| ضرایب انبساط حرارتی لایه kام | α_i^k |
| سفتی ناشی از ضرایب انبساط حرارتی لایه kام | λ_i^k |
| مختصاتهای محلی | ζ, η |
| کرنشهای درون صفحه‌ای غیرخطی | $\epsilon_{pG_{nl}}^k$ |
| تنش | σ |
| کرنش | ϵ |
| تنشهای درون صفحه‌ای | σ_p |
| تنشهای عرضی عمود بر صفحه | σ_n |
| اپراتور تغییراتی | δ |
| مختصات بی‌بعد محلی | ζ_k |
| چگالی لایه kام | ρ^k |

Abstract

In this study a frequency analysis of a sandwich plate with multilayered composite face-sheets and flexible core under thermal conditions is investigated for different boundary conditions. In this regard, thermal effects and temperature dependent properties of the core are considered. In this study, for driving the equations of motion, a hybrid LW/ESL finite element formulation, considering the thermal effects is proposed by which the number of unknowns is independent on the number of layers. This new formulation is in the framework of Carrera's Unified Formulation (CUF). The CUF unify many theories in a unified form which can be differed by the order of expansion and definition of the variables in the thickness direction. In order to satisfy the interlaminar continuity of transverse stresses between the layers the Reissner Mixed Variational Theorem (RMVT) is employed.

In this research for considering the thermal effects, the nonlinear strains are used. Results of this formulation are compared with available results which show the high accuracy with low computational cost of the proposed formulation. Results show that with increasing the temperature, the frequency of structure decreases significantly, due to the degradation of the properties of the core. In this study, some new results are presented for different thermal conditions and also different boundary conditions.