ISME

# تحلیل کمانش و ارتعاشات آزادپنل استوانه‌ای تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی بر بستر الاستیک

مهدی محمدی مهر[1]
استادیار

سیدمحمد اخوان علوی[2]
دانشجوی کارشناسی ارشد

سیدوحید اخروی[3]
دانشجوی کارشناسی ارشد

*در این مقاله کمانش و ارتعاشات پنل استونه‌ای تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی برای دو حالت یکنواخت و مدرج تابعی مقایسه و مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادلات دیفرانسیل حاکم بر پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با استفاده از روش انرژی و اصل همیلتون به‌دست می‌آید. سپس با استفاده از روش ناویر، معادلات حاکم بر تعادل پنل استوانه‌ای حل می‌شود. همچنین از قانون اختلاط، برای تعیین خواص پوسته استوانه‌ای استفاده می‌شود. در این تحقیق تاثیر درصدهای مختلف کسر حجمی، انواع توزیع نانو لوله‌های کربنی، ضرایب بستر الاستیک روی بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی بررسی می‌شود.*

*واژه‌های راهنما:* تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد، پنل استوانه‌ای، توزیع‌های مختلف نانو لوله کربنی، بستر الاستیک

## ۱- مقدمه

از مهمترین ساختارهایی که در مقیاس نانو بررسی شده، می‌توان به ساختارهای نانو لوله‌های کربنی اشاره نمود. نانو لوله‌ها در زمینه‌های مختلفی از جمله فیزیک، شیمی، مهندسی مکانیک، برق و متالورژی کاربرد دارند. همچنین به دلیل مدول یانگ و استحکام پیچشی خوب و خاصیت‌های الکتریکی و حرارتی، منحصر به فرد می‌باشند. از طرفی پنل‌های استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی به عنوان جزئی از سازه در صنایع هوافضا و دریایی شناخته شده می‌باشند. کاهش وزن، کاهش ارتعاشات، افزایش استحکام و قرار گرفتن این گونه سازه‌ها در محدوده سازه‌های جدار نازک لزوم تحلیل کمانشی و ارتعاشی پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله های کربنی را نسبت به زاویه دهانه ایجاب می‌کند.

[1]نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان mmohammadimehr@kashanu.ac.ir
[2] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان m.akhavanalavi@grad.kashanu.ac.ir
[3] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان vahidokhravi@grad.kashanu.ac.ir
تاریخ دریافت: ۹۴/۰۲/۲۷، تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۲/۱۲

تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه انجام شده که می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. مهرآبادی و همکارانش[۱] تحلیل کمانش مکانیکی پوسته استوانه ای تقویت شده با نانولوله های کربنی تک جداره را بررسی کردند و تاثیرات مشخصات هندسی و خواص مصالح را بر بار کمانش بحرانی مورد تحقیق قرار دادند. رئوفی و همکارانش[۲] ارتعاشات آزاد ورق قطاعی سوراخ‌دار مدرج تابعی[1] دوبعدی را روی بسترالاستیک مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که ثابت‌های قانون توانی و بسترالاستیک بر فرکانس‌های طبیعی سیستم اثرات قابل ملاحظه‌ای دارند. همچنین درسازه‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی دوبعدی با استفاده از پارامترهای بیشتری می‌توان ویژگی‌های ارتعاشی سیستم را نسبت به مواد مدرج تابعی یک بعدی، کنترل کرد.

قربان پور و همکارانش[۳] ارتعاشات نانولوله‌های کربنی حاوی سیال را در میدان مغناطیسی یکنواخت براساس تئوری الاستیسیته غیر موضعی ارینگن بر بستر الاستیک بررسی کردند. آنها برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی نانو از مدل تیر تیموشنکو استفاده کردند که اثرات چرخشی و تغییر شکل برشی را در نظر می‌گیرد. آزمایش‌ها و مطالعه بر روی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی نشان داده‌اند که توزیع یکنواخت نانو لوله‌ها به عنوان تقویت کننده در ماتریس باعث بهبود متوسطی در خواص مکانیکی می شود[۴]. نوع دیگر نانو لوله‌ها در کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی، توزیع غیر همگن نانو لوله های کربنی با یک شکل خاص است که برای بهبود بخشیدن به رفتار کمانشی کامپوزیت استفاده می‌شود. شن و زو[۵] تاثیر کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی را روی رفتار پس از کمانش حرارتی یک صفحه کامپوزیتی بررسی کردند. کی وهمکارانش[۶] ارتعاشات آزاد تیرهای نانوکامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو در حالت توزیع مدرج تابعی بررسی کردند. آنها تاثیر کسر حجمی نانولوله‌ها را روی فرکانس طبیعی مطالعه کرده و دریافتند که فرکانس در حالت توزیع مدرج تابعی بیشتر از حالت یکنواخت است و با افزایش درصد حجمی نانو لوله‌ها فرکانس نیز افزایش می‌یابد.

لی و همکارانش[۷] ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی را با استفاده از روش ریتز[2] در محیط حرارتی تجزیه و تحلیل کردند. آنها تاثیر کسر حجمی نانو لوله‌ها، نسبت عرض به ضخامت صفحات و اثر شرایط مرزی و دما را روی فرکانس طبیعی بررسی کردند. فادیکار و پردهان[۸] برای تئوری-های تیر اویلر- برنولی و تیر تیموشنکو روابط المان محدود را ارائه کردند. آنها شکل ضعیف شده معادلات حاکم و توابع انرژی را برای نانو لوله‌های کربنی به دست آورده و با روش المان محدود تحلیل خمش، ارتعاشات و کمانش تیر غیرمحلی را برای شرایط مرزی گوناگون محاسبه کردند.

محمدی مهر و همکارانش[۹] کمانش و ارتعاشات نانوکامپوزیت پیزوالکتریک[3] تقویت شده با نانو لوله نیترید بور را روی بستر الاستیک بر اساس روش اشلبی-موری-تاناکا با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده تحت بارگذاری‌های الکتریکی، حرارتی و مکانیکی محاسبه کردند. قنادپور و همکارانش[۱۰] تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات تیر اویلر- برنولی را بررسی کردند.

[1] Functionally Graded
[2] Ritz Method
[3] Piezoelectric

آنها با استفاده از روش ریتز و شرایط مرزی دلخواه بار کمانش بحرانی، فرکانس طبیعی و خیز را بدست آوردند. محمدی مهر و همکارانش[۱۱]تاثیر حرارت روی خیز، بارکمانش بحرانی و ارتعاشات تیر اویلر- برنولی را بر بستر پاسترناک با استفاده از روش ریتز بررسی کردند. آنها دریافتند که با افزایش ثابت فنری نوع وینکلر و ثابت برشی پاسترناک مقدار خیز در تیر کاهش و فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی افزایش می‌یابد، در حالی که با افزایش حرارت مقدار خیز افزایش و فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد.

در این تحقیق بار کمانش بحرانی و فرکانس‌های طبیعی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی با در نظر گرفتن کسر حجمی مختلف و برای توزیع‌های مختلف نانو لوله کربنی روی بستر الاستیک به دست می‌آیند. ماتریس این کامپوزیت‌ها پلی متیل متاکریلیت[1] بوده که علاوه بر کاربرد وسیع در صنایع مختلف، در علوم پزشکی نیز سال‌هاست به منظور ثابت نمودن عناصر پلاستیکی و فلزی مفاصل مصنوعی به کار می‌رود و از سال (۲۰۰۴) به بعد با تایید سازمان غذا و داروی آمریکا[2] برای درمان شکستگی‌های پاتولوژیک ستون مهره‌ها مورد استفاده قرار گرفته است[۱۲]. شکل استوانه‌ای ستون مهره‌ها و از طرفی استفاده از پلی متیل متاکریلیت در درمان شکستگی آن‌ها و همچنین کاربرد این پلیمر در صنعت، تحلیل یک پنل استوانه‌ای تقویت شده از جنس پلی متیل متاکریلیت را توجیه می‌کند. معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با توجه به فرضیات پوسته‌های استوانه‌ای دانل تقویت شده با نانو لوله-های کربنی با استفاده از معادلات انرژی به‌دست می‌آید. همچنین برای به دست آوردن خواص پنل استوانه‌ای از قانون اختلاط استفاده می‌شود.

در این مقاله به منظور تحلیل هرچه بهتر این سازه پرکاربرد، تحلیل کمانش و ارتعاشات بررسی شده و تاثیرات متقابل انواع توزیع‌های مدرج تابعی، کسر حجمی نانو لوله‌ها و بستر الاستیک بر روی آنها نشان داده شده است. با انتخاب مناسب توزیع نانو لوله کربنی و کسر حجمی آنها می‌توان سفتی سازه را افزایش داده و در نتیجه بار کمانش بحرانی و فرکانسهای طبیعی پنل استوانه‌ای می‌یابد. لذا این نکته در طراحی بهینه سازه‌ها در مقیاس نانو حائز اهمیت می‌باشد.

## ۲-خواص مکانیکی کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

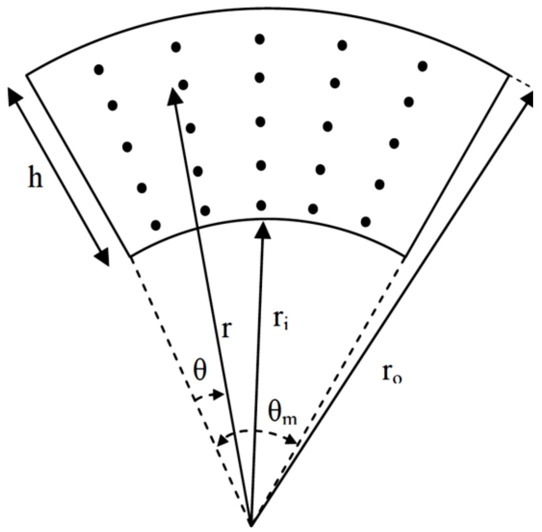
در این تحقیق با استفاده از قانون اختلاط خواص نانوکامپوزیت تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تعیین می-گردد. روابـط کسـرحجمـی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۳]:

$$V_{\mathrm{CNT}} = w(z)V_{CNT}^{*}$$

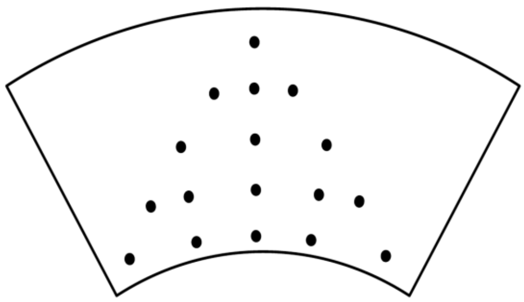
$$V_{\mathrm{CNT}} = \frac{w_{\mathrm{CNT}}}{w_{CNT} + \frac{\rho_{\mathrm{CNT}}}{\rho_{\mathrm{m}}} - \frac{\rho_{\mathrm{CNT}}}{\rho_{\mathrm{m}}}(w_{\mathrm{CNT}})} \qquad (۱)$$

$$V_{\mathrm{m}} + V_{\mathrm{CNT}} = 1$$

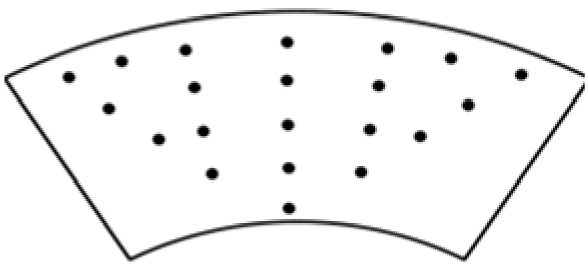
[1]Poly Methyl Methacrylate
[2]Food and Drug Administration



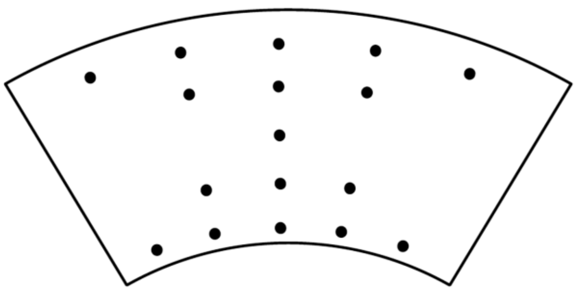

الف- توزیع یکنواخت UD



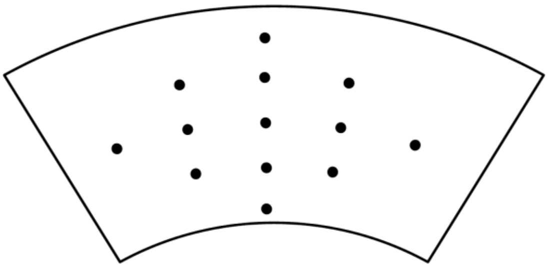
ب- توزیع $FG-\Lambda$



ج- توزیع $FG-V$



د- توزیع $FG-X$



ه-توزیع$\mathrm{FG-O}$

**شکل۱**- شکل شماتیکی از انواع توزیع نانولوله‌های کربنی[۱۴]

که$V_{\mathrm{CNT}}$،$V_{\mathrm{m}}$، $\rho_{\mathrm{CNT}}$،$\rho_{\mathrm{m}}$، $w_{\mathrm{CNT}}$به ترتیب کسر حجمی نانو لوله کربنی، کسر حجمی ماتریس، چگالی نانو لوله کربنی، چگالی ماتریس و کسر جرمی نانو لوله کربنی می‌باشد. این روابط با فرض تغییرات مدرج تابعی برای خصوصیات کامپوزیت مورد مطالعه در جهت محور$Z$ آورده شده است.

مطابق شکل(۱-الف) تا (۱- ه)، کسرهای حجمی برای توزیع$\mathrm{UD}$، $\mathrm{FG-\Lambda}$، $\mathrm{FG-V}$، $\mathrm{FG-O}$، $\mathrm{FG-X}$ نانو لوله‌ها در معادلات ۲ تا ۶ آورده شده اند[۱۴].

$$V_{\mathrm{CNT}} = V_{\mathrm{CNT}}^{*} \tag{۲}$$

$$V_{\mathrm{CNT}} = 2\left(-\frac{r-R}{h} + 0.5\right) V_{\mathrm{CNT}}^{*} \tag{۳}$$

$$V_{\mathrm{CNT}} = 2\left(\frac{r-R}{h} + 0.5\right) V_{\mathrm{CNT}}^{*} \tag{۴}$$

$$V_{\mathrm{CNT}} = 4 \times \frac{|r-R|}{h} V_{\mathrm{CNT}}^{*} \tag{۵}$$

$$V_{\mathrm{CNT}} = 4\left(0.5 - \frac{|r-R|}{h}\right) V_{\mathrm{CNT}}^{*} \tag{۶}$$

که برای توزیع‌های مختلف نانو لوله کربنی رابطه(۷) برقرار می‌باشد:

$$V_{\mathrm{CNT}}^{*} = \frac{W_{\mathrm{CNT}}}{W_{\mathrm{CNT}} + \left(\frac{\rho_{\mathrm{CNT}}}{\rho_{\mathrm{m}}}\right) - \left(\frac{\rho_{\mathrm{CNT}}}{\rho_{\mathrm{m}}}\right) W_{\mathrm{CNT}}} \tag{۷}$$

که $W_{\mathrm{CNT}}$ کسر جرمی نانو لوله کربنی و اندیس(CNT) مربوط به نانولوله‌های کربنی است[۱۵].

بر اساس قانون اختلاط روابط مدول الاستیسیته طولی، برشی و رابطه چگالی به صورت زیر پیشنهاد می‌شود[۱۳و۱۵]:

$$
\begin{aligned}
E_{11} &= \eta_1 V_{\mathrm{CNT}} E_{11}^{CNT} + V_{\mathrm{m}} E^m \\
\frac{\eta_2}{E_{22}} &= \frac{V_{\mathrm{CNT}}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_{\mathrm{m}}}{E^m} \\
\frac{\eta_3}{G_{12}} &= \frac{V_{\mathrm{CNT}}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_{\mathrm{m}}}{G^m} \\
\rho &= V_{\mathrm{CNT}} \rho_{\mathrm{CNT}} + V_{\mathrm{m}} \rho_{\mathrm{m}}
\end{aligned} \tag{۸}
$$

که $E_{11}^{CNT}$ و $E_{22}^{CNT}$ به ترتیب مدول یانگ نانو لوله‌های کربنی در راستای الیاف و عمود بر آن می‌باشند و $G_{12}^{CNT}$، $E^m$ و $G^m$ به ترتیب مدول برشی نانولوله‌های کربنی، مدول یانگ ماتریس و مدول برشی ماتریس می‌باشند. $\eta_j$ ضریب بهره‌وری نانولوله است که با ادغام مدول الاستیک به دست آمده از روش دینامیک مولکولی با نتایج عددی به دست آمده از قوانین اختلاط محاسبه می‌شود.

با توجه به وابستگی کم ضریب پواسون به درجه حرارت و موقعیت برای آن تنها توزیع UD در نظر گرفته شده و به صورت زیر تعریف می‌شود[۱۳]:

$$
\nu_{12} = V_{\mathrm{CNT}}^{*} \nu_{12}^{CNT} + V_{\mathrm{m}} \nu^m \tag{۹}
$$

## ۳- معادلات حاکم بر پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی

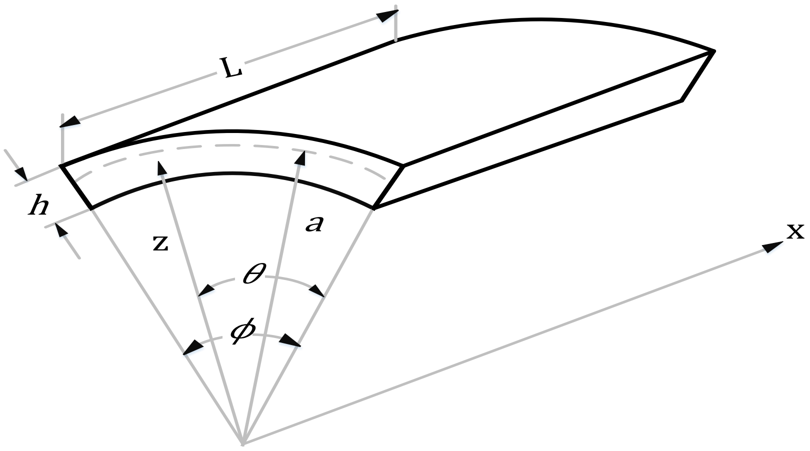
پنل استوانه‌ای با طول $L$، شعاع صفحه میانی $a$ و ضخامت $h$ با سیستم مختصات $(x،\theta،z)$ در نظر گرفته شده است که $x،\theta،z$ به ترتیب نشان دهنده جهت‌های طولی، مماسی و عمود بر صفحه میانی پنل استوانه‌ای می‌باشند شکل(۲).

روابط کرنش- جابجایی طبق تئوری پنل استوانه‌ای به صورت زیر می‌باشند[۱۶]:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{\theta} = \frac{\frac{\partial v}{\partial \theta} + w}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{a\partial \theta}\right)^2 \\
\varepsilon_{\mathrm{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \text{ و } \gamma_{\mathrm{x}\theta} = \frac{\partial u}{a\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \\
\gamma_{\mathrm{xz}} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \text{ و } \gamma_{\theta\mathrm{z}} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{a\partial \theta}
\end{gathered} \tag{۱۰}
$$

که $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_\theta$ کرنش‌های عمودی و $\gamma_{\mathrm{x}\theta}$،$\gamma_{\theta\mathrm{z}}$،$\gamma_{\mathrm{xz}}$ کرنش‌های برشی و همچنین $u$،$v$و$w$ به ترتیب جابجایی پنل استوانه‌ای در جهت‌های $x$، $\theta$و $z$ می‌باشند. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، اینرسی دورانی و کرنش‌های برشی $\varepsilon_{\mathrm{xz}}$ و $\varepsilon_{\theta\mathrm{z}}$ قابل صرف نظر نمی‌باشند و تنها مؤلفه کرنش $\varepsilon_z$ صفر می‌باشد. بر اساس این تئوری میدان جابجایی پنل استوانه ای به‌صورت زیر می‌باشد[۱۷و۱۸]:

$$
\begin{aligned}
u(x,\theta,z,t) &= u_0(x,\theta,t) + z\psi_1(x,\theta,t) \\
v(x,\theta,z,t) &= v_0(x,\theta,t) + z\psi_2(x,\theta,t) \\
w(x,\theta,z,t) &= w_0(x,\theta,t)
\end{aligned} \tag{۱۱}
$$




**شکل۲**- شکل شماتیکی از پنل استوانه‌ای

که $w_0$ و $v_0$ و $u_0$ به ترتیب جابجایی صفحه میانی پنل استوانه‌ای ($z$=0) در جهت‌های $z$، $\theta$ و $x$ می‌باشند و $\psi_1$ و $\psi_2$ به ترتیب دوران صفحه میانی حول محورهای $x$ و $\theta$ هستند. با جایگذاری معادله (۱۱) در روابط (۱۰)، روابط کرنش- جابجایی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{x}\\ \varepsilon_{\theta}\\ \gamma_{x\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{x}^{0}\\ \varepsilon_{\theta}^{0}\\ \gamma_{x\theta}^{0}\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}k_{x}\\ k_{\theta}\\ k_{x\theta}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{\theta z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xz}^{0}\\ \varepsilon_{\theta z}^{0}\end{pmatrix} \tag{۱۲}$$

که در آن:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{x}^{0}\\ \varepsilon_{\theta}^{0}\\ \gamma_{x\theta}^{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}+\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial w_0}{\partial x})^2\\ \dfrac{1}{a}(\dfrac{\partial v_0}{\partial \theta}+w_0)+\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial w_0}{a\partial \theta})^2\\ \dfrac{\partial u_0}{a\partial \theta}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}+\dfrac{1}{a}(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial \theta})\end{pmatrix} \tag{۱۳- الف}$$

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{xz}^{0}\\ \varepsilon_{\theta z}^{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1+\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\\ \psi_2+\dfrac{\partial w_0}{a\,\partial \theta}\end{pmatrix}،\begin{pmatrix}k_{x}\\ k_{\theta}\\ k_{x\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial \psi_1}{a\partial \theta}+\dfrac{\partial \psi_2}{\partial x}\end{pmatrix}$$

روش حل در این مقاله تحلیلی بوده و از روش ناویر برای حل معادلات خطی استفاده شده است. با توجه به تغییر شکلهای کوچک و خطی فرض نمودن معادلات، از ترمهای غیر خطی ون کارمن با فرض تغییر شکلهای کوچک صرفنظر شده است[مراجع۱و۱۳]. لذا روابط فوق به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_\theta^0\\ \gamma_{x\theta}^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\partial v_0}{\partial\theta}+w_0\right)\\ \dfrac{\partial u_0}{a\,\partial\theta}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{pmatrix} \tag{۱۳- ب}$$

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{xz}^0\\ \varepsilon_{\theta z}^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1+\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\\ \psi_2+\dfrac{\partial w_0}{a\,\partial\theta}\end{pmatrix}،\begin{pmatrix}k_x\\ k_\theta\\ k_{x\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial\psi_1}{a\,\partial\theta}+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}\end{pmatrix}$$

با توجه به قانون هوک تعمیم یافته روابط تنش-کرنش به صورت می باشد:

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \tau_{x\theta}\\ \tau_{\theta z}\\ \tau_{xz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0&0&0\\ Q_{21}&Q_{22}&0&0&0\\ 0&0&Q_{33}&0&0\\ 0&0&0&Q_{44}&0\\ 0&0&0&0&Q_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{x\theta}\\ \gamma_{\theta z}\\ \gamma_{xz}\end{pmatrix} \tag{۱۴}$$

که در آن، $Q$ ماتریس سختی است و درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند [۸، ۱۵ و ۱۹] :

$$\begin{gathered}Q_{11}=\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}،Q_{12}=\frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\\ Q_{12}=\frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}،Q_{21}=\frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\\ Q_{33}=G_{12}،Q_{44}=G_{23}،Q_{66}=G_{13}\\ G_{12}=G_{23}=G_{13}\end{gathered} \tag{۱۵}$$

نیروها و ممان‌های منتجه به صورت زیر تعریف می‌شوند[۲۰] :

$$\begin{gathered}N_i=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_i\,dzi=x,\theta,x\theta\\ M_i=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_i z\,dzi=x,\theta,x\theta\\ Q_i=K_s\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{iz}\,dz\qquad i=x,\theta،K_s=\frac{5}{6}\end{gathered} \tag{۱۶-الف}$$

بـــا جایگـــذاری روابـــط (۱۲) و (۱۴) در معـــادلات (۱۶- الف)، نیروی منتجه برای پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی به دست می‌آیند:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\mathrm{x}}\, dz$$

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11}\varepsilon_x + Q_{12}\varepsilon_\theta)\, dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11}(\varepsilon_{\mathrm{x}}^0 + \mathrm{z}\, k_{\mathrm{x}}) + Q_{12}(\varepsilon_\theta^0 + \mathrm{z}\, k_\theta))\, dz$$

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}\varepsilon_{\mathrm{x}}^0\, dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12}\varepsilon_\theta^0\, dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z k_{\mathrm{x}}\, dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} z k_\theta\, dz \qquad (۱۶-\text{ب})$$

که انتگرال‌های حاصل به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$B'_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} z\, d \text{ و } B'_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z\, dz \text{ ، } B_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12}\, dz \text{ ، } B_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}\, dz \qquad (۱۶-\text{ج})$$

در نتیجه :

$$N_{\mathrm{x}} = B_{11}\varepsilon_{\mathrm{x}}^0 + B_{12}\varepsilon_\theta^0 + B'_{11} k_{\mathrm{x}} + B'_{12} k_\theta \qquad (۱۷\text{الف})$$

به طریق مشابه سایر نیروها و گشتاورهای منتجه به صورت روابط (۱۷-ب) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{x}} &= B'_{11}\varepsilon_{\mathrm{x}}^0 + B'_{12}\varepsilon_\theta^0 + B''_{11} k_{\mathrm{x}} + B''_{12} k_\theta \\
N_\theta &= B_{12}\varepsilon_{\mathrm{x}}^0 + B_{22}\varepsilon_\theta^0 + B'_{12} k_{\mathrm{x}} + B'_{22} k_\theta \\
M_\theta &= B'_{12}\varepsilon_{\mathrm{x}}^0 + B'_{22}\varepsilon_\theta^0 + B''_{12} k_{\mathrm{x}} + B''_{22} k_\theta \\
N_{\mathrm{x}\theta} &= B_{66}\varepsilon_{\mathrm{x}\theta}^0 + B'_{66} k_{\mathrm{x}\theta} \\
M_{\mathrm{x}\theta} &= B'_{66}\varepsilon_{\mathrm{x}\theta}^0 + B''_{66} k_{\mathrm{x}\theta} \\
Q_{\mathrm{x}} &= K_{\mathrm{s}} B_{66}\varepsilon_{\mathrm{xz}}^0 ، Q_\theta = K_{\mathrm{s}} B_{44}\varepsilon_{\theta\mathrm{z}}^0
\end{aligned} \qquad (۱۷-\text{ب})$$

که در آن :

$$B''_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} z^2\, dz ، B''_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} z^2\, dz$$

$$B_{44} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44}\, dz ، B_{66} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66}\, dz$$

$$B'_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} z\, dz ، B'_{66} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} z\, dz$$

$$B''_{11}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}Q_{11}z^2\,dz \text{ ، } B''_{66}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}Q_{66}z^2\,dz$$

$$B_{22}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}Q_{22}\,dz \qquad (۱۸)$$

انرژی پتانسیل کـل $\Pi$ به صورت زیر تعریف می‌شود[۲۱]:

$$\Pi=T-(U-V) \qquad (۱۹)$$

که $T$ انرژی جنبشی، $U$ انرژی کرنشی و $V$ کار ناشی از نیروهای خارجی هستند. با اعمال حساب تغییرات، رابطه (۲۰) به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\delta\Pi=\delta T-(\delta U-\delta V) \qquad (۲۰)$$

که در آن [۲۱و۲۲]:

$$\delta T=\int_0^L\int_0^{\varphi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}\delta\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial t}\delta\frac{\partial w}{\partial t}\right)dzd\phi dx$$

$$\delta U=\int_0^L\int_0^{\varphi}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_{\mathrm{x}}\delta\varepsilon_{\mathrm{x}}+\sigma_{\theta}\delta\varepsilon_{\theta}+\sigma_{\mathrm{z}}\delta\varepsilon_{\mathrm{z}}+2\sigma_{\mathrm{x}\theta}\delta\varepsilon_{\mathrm{x}\theta}+2\sigma_{\mathrm{xz}}\delta\varepsilon_{\mathrm{xz}}+2\sigma_{\theta\mathrm{z}}\delta\varepsilon_{\theta\mathrm{z}})dzd\phi dx \qquad (۲۱)$$

$$\delta V=\int f_{\mathrm{elastic}}\delta w dA$$

$$f_{\mathrm{elastic}}=k_{\mathrm{w}}w_0-k_{\mathrm{G}}\nabla^2 w_0$$

که $k_{\mathrm{w}}$ و $k_{\mathrm{G}}$ به ترتیب ثابت فنری وینکلر و برشی پاسترناک می‌باشند. با جایگذاری روابط (۲۱) در رابطه (۲۰)، معادلات حرکت به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial N_{\mathrm{x}}}{\partial x}+\frac{\partial N_{\mathrm{x}\theta}}{a\partial\theta}=I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_0+I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_1$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{a\partial\theta}+\frac{\partial N_{\mathrm{x}\theta}}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_0+I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_2$$

$$\frac{\partial M_{\mathrm{x}}}{\partial x}+\frac{\partial M_{\mathrm{x}\theta}}{a\partial\theta}-Q_{\mathrm{x}}=I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_0+I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_1$$

$$\frac{\partial M_{\mathrm{x}\theta}}{\partial x}+\frac{\partial M_{\theta}}{a\partial\theta}-Q_{\theta}=I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_0+I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_2$$

$$-\frac{N_{\theta}}{a}+N_{\mathrm{x}}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{2N_{\mathrm{x}\theta}}{a}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial\theta}+\frac{\partial Q_{\mathrm{x}}}{\partial x}+\frac{N_{\theta}}{a^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}+\frac{\partial Q_{\theta}}{a\partial\theta}-f_{\mathrm{elastic}}=I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_0 \qquad (۲۲)$$

که در آن:

$$I_{\mathrm{i}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^{i} \rho dz \;, i = 0,1,2 \tag{۲۳}$$

## ۴-تحلیل کمانش و ارتعاشات پنل استوانه‌ای

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول میدان جابجایی پنل استوانه‌ای به‌صورت زیر بیان می‌شود[۱۷و۱۸]:

$$\begin{aligned} u(x,\theta,z,t) &= u_0(x,\theta,t) + z\psi_1(x,\theta,t) \\ v(x,\theta,z,t) &= v_0(x,\theta,t) + z\psi_2(x,\theta,t) \\ w(x,\theta,z,t) &= w_0(x,\theta,t) \end{aligned} \tag{۲۴}$$

که $w_0$و$v_0$و$u_0$ به ترتیب جابجایی صفحه میانی پنل استوانه‌ای ($z$=0) در جهت‌های $z$،$\theta$و$x$ می‌باشند و$\psi_1$ و$\psi_2$ به ترتیب دوران صفحه میانی حول محورهای$x$ و$\theta$ هستند. شکل (۳) شکلی شماتیک از المان پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله‌ی کربنی بر بستر الاستیک با در نظر گرفتن میدان جابجایی را نشان می‌دهد.

حال برای تحلیل کمانش، فرض می‌شود بار محوری$P$به پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی اعمال شود که نیروهای منتجه به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$N_{\mathrm{x\theta 0}} = 0 \text{ ، } N_{\mathrm{\theta 0}} = 0 \text{ ، } N_{\mathrm{x0}} = -\frac{P}{a\phi} \tag{۲۵}$$

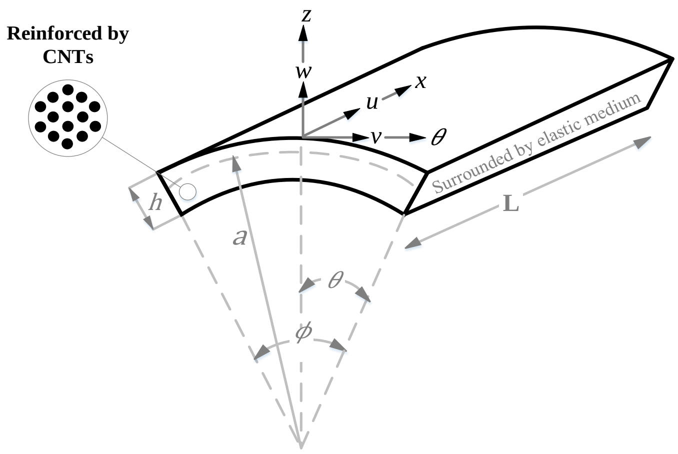
لازم به ذکر است که در تحلیل ارتعاشی$N_{\mathrm{x0}}$ برابر صفر در نظر گرفته می شود.

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو سر پنل به صورت روابط زیر بیان می‌شود:

$$w_0 = v_0 = M_{\mathrm{x}} = 0 \tag{۲۶}$$

با استفاده از روش ناویر، مولفه های جابجایی برای شرایط مرزی مورد نظر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_1 \sin(\beta_{\mathrm{m}}\theta)\cos(P_{\mathrm{n}}x)\, e^{i\omega t} \\ v_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_2 \cos(\beta_{\mathrm{m}}\theta)\sin(\mathrm{P_n}x)\, e^{i\omega t} \\ w_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_3 \sin(\beta_{\mathrm{m}}\theta)\sin(\mathrm{P_n}x)\, e^{i\omega t} \\ \psi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_4 \sin(\beta_{\mathrm{m}}\theta)\cos(\mathrm{P_n}x)\, e^{i\omega t} \\ \psi_2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_5 \cos(\beta_{\mathrm{m}}\theta)\sin(\mathrm{P_n}x) e^{i\omega t} \\ \beta_{\mathrm{m}} &= \frac{m\pi}{\phi} \text{ ، } P_{\mathrm{n}} = \frac{n\pi}{L} \end{aligned} \tag{۲۷}$$




**شکل۳**- شکل شماتیک المان پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله‌ی کربنی بر بستر الاستیک
با در نظر گرفتن میدان جابجایی

$S_1$، $S_2$، $S_3$، $S_4$، $S_5$ مقـــادیر ثابتی هستند. $m$و$n$ به ترتیب تعداد موج‌ها در جهـت$\theta$و$x$ هســتند. در محاسبات این تحقیق با توجه به کوچک بودن جابه‌جایی‌ها از ترم های غیر خطی صرف نظر گردیده است[مراجع۱ و۱۳]. با جایگذاری روابط (۱۷) در روابط (۲۲) و صرف نظر از روابط غیر خطی با استفاده از روش حل ناویر، شکل ماتریسی روابط به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۲۸}$$

که درایه‌های ماتریس ضرایب فوق در پیوست آمده است.
برای داشتن جواب غیر صفر، دترمینان ضرایب را برابر صفر قرار داده، سپس بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی بر حسب توابعی از پارامترهای $m$ و $n$ به دست می‌آیند.

## ۵- جداول نتایج عددی

در جدول(۱)، خواص نانو لوله‌های کربنی(۱۰و۱۰) شامل طول، شعاع، ضخامت، ضریب پواسون و چگالی نشان داده شده است.
در جدول(۲)، مدول‌های الاستیک و برشی نانو لوله‌های کربنی(۱۰و۱۰)در دمای ثابت ۳۰۰K نشان داده شده است.

**جدول۱**– خواص نانولوله‌های کربنی تک جداره[۱۳]

| $L$ | $R$ | $h$ | $\nu_{12}^{CNT}$ | $\rho$ | نوع نانو لوله |
|---|---|---|---|---|---|
| ۹/۲۶ nm | ۰/۶۸ nm | ۰/۰۶۷ nm | ۰/۱۷۵ | ۱۴۰۰ $^{kg}/_{m^3}$ | SWCNT (۱۰،۱۰ ) |

**جدول۲**- خواص نانولوله‌های کربنی تک جداره(۱۰و۱۰) در دمای محیط[۱۳]

| (TPa) $G_{12}^{CN}$ | (TPa) $E_{22}^{CN}$ | (TPa) $E_{11}^{CN}$ | دما (K) |
|---|---|---|---|
| ۱/۹۴۴۵ | ۷/۰۸۰۰ | ۵/۶۴۶۶ | ۳۰۰ |

**جدول۳**– خواص ماتریس پلی متیل متاکریلیت(PMMA)[۱۳]

| GPa $E^m$ | GPa $G^m$ | $\nu^m$ | نوع ماتریس |
|---|---|---|---|
| ۲/۵ | ۰/۹۳۳ | ۰/۳۴ | PMMA |

**جدول۴**– نتایج حاصل از دینامیک مولکولی و قانون اختلاط[۱۳]

| قانون اختلاط | | | | دینامیک مولکولی | | کسر حجمی |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta_2$ | $E_{22}$ GPa | $\eta_1$ | $E_{11}$ GPa | $E_{22}$ GPa | $E_{11}$ GPa | |
| ۱/۰۲۲ | ۲/۹ | ۰/۱۳۷ | ۹۴/۷۸ | ۲/۹ | ۹۴/۶ | ۰/۱۲ |
| ۱/۶۲۶ | ۴/۹ | ۰/۱۴۲ | ۱۳۸/۶۸ | ۴/۹ | ۱۳۸/۹ | ۰/۱۷ |
| ۱/۵۸۵ | ۵/۵ | ۰/۱۴۱ | ۲۲۴/۵ | ۵/۵ | ۲۲۴/۲۲ | ۰/۲۸ |

در جدول(۳)، خواص ماتریس پلی متیل متاکریلیت[۱] شامل مدول الاستیک، مدول برشی و ضریب پواسون نشان داده می‌شود.

در جدول(۴)، خواص کامپوزیت به دو شیوه‌ی قانون اختلاط و دینامیک مولکولی برای درصدهای متفاوت نانو لوله محاسبه و مقایسه می‌گردد.

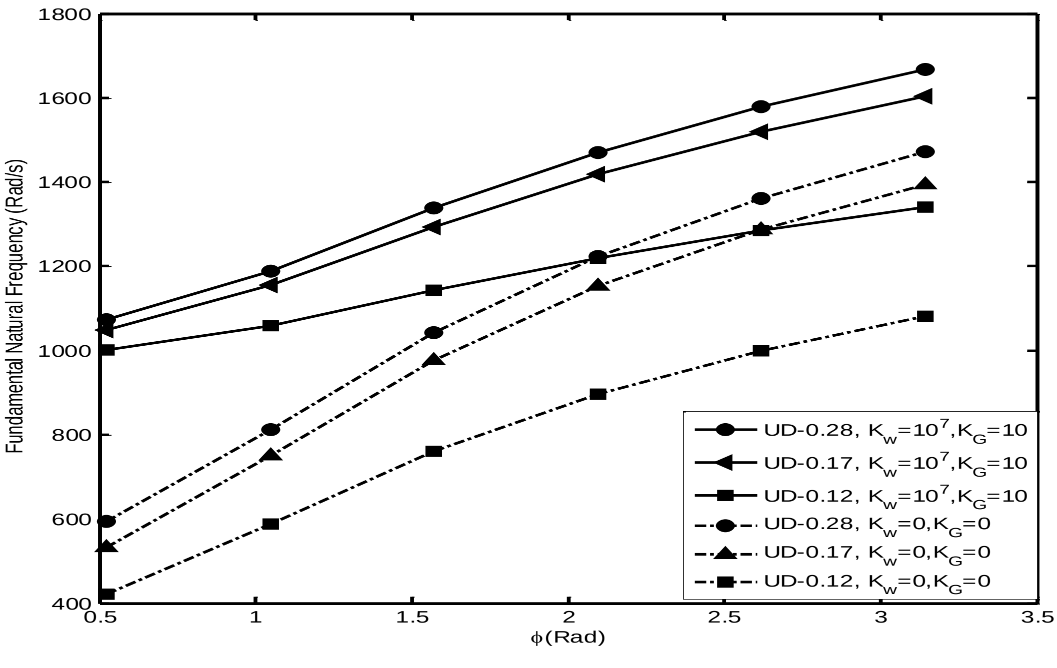
در این تحقیق تاثیر درصد کسر حجمی، انواع مختلف توزیع نانو لوله کربنی، ضرایب بستر الاستیک روی بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی بررسی می‌شود. همچنین در نتایج عددی از خواص نانو لوله‌های کربنی (۱۰و۱۰) و ماتریس پلی متیل متاکریلیت استفاده شده که در جداول (۱) تا (۴) به آن اشاره شد.

[1] Poly Methyl Methacrylate

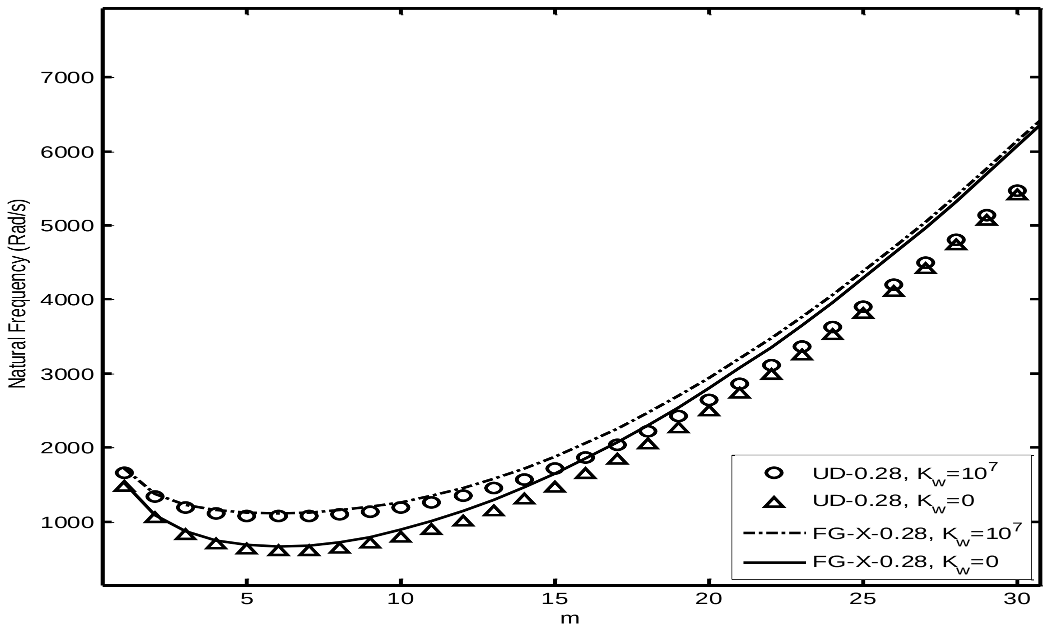
## ۶-تحلیل ارتعاشات پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی

در شکل(۴)، مود اول ارتعاشات برحسب تغییر زاویه قطاع پنل استوانه‌ای در حالت یکنواخت برای درصدهای مختلف نانو لوله‌های کربنی بررسی شده که با افزایش درصد نانو لوله‌های کربنی به دلیل افزایش مدول الاستیک(طبق جدول۴) و نسبت مستقیم فرکانس با سختی، فرکانس نیز افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است، که این نمودار برای حالت‌های مدرج تابعی نیز به همین صورت می‌باشد. در شکل(۵)، فرکانس طبیعی پنل استوانه‌ای در دو توزیع یکنواخت و $\mathrm{FG-X}$، با درصد ثابتی از نانو لوله کربنی بر حسب عدد موج محیطی نشان داده شده است. با توجه به شکل، با افزایش$m$، فرکانس طبیعی نیز افزایش یافته و همانطورکه مشاهده می‌شود، تاثیر ثابت فنری وینکلر در افزایش فرکانس طبیعی، کمتر از تاثیر حالت توزیع نانو لوله‌های کربنی می‌باشد. در شکل‌های(۶) و (۷)، مود اول ارتعاشات پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی بر حسب زاویه قطاع برای توزیع‌های یکنواخت و مدرج تابعی با درصد ثابتی از نانو لوله‌های کربنی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که توزیع $\mathrm{FG-X}$ بیشترین فرکانس طبیعی را دارد. همچنین در این شکل‌ها مشاهده می‌شودکه بسترالاستیک باعث افزایش فرکانس طبیعی پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی می‌شود. در شکل(۷)، نمودار با در نظر گرفتن بستر الاستیک برای حالت‌های مختلف توزیع نانو لوله کربنی رسم شده است در حالیکه در شکل(۶)، نمودار بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک می‌باشد.

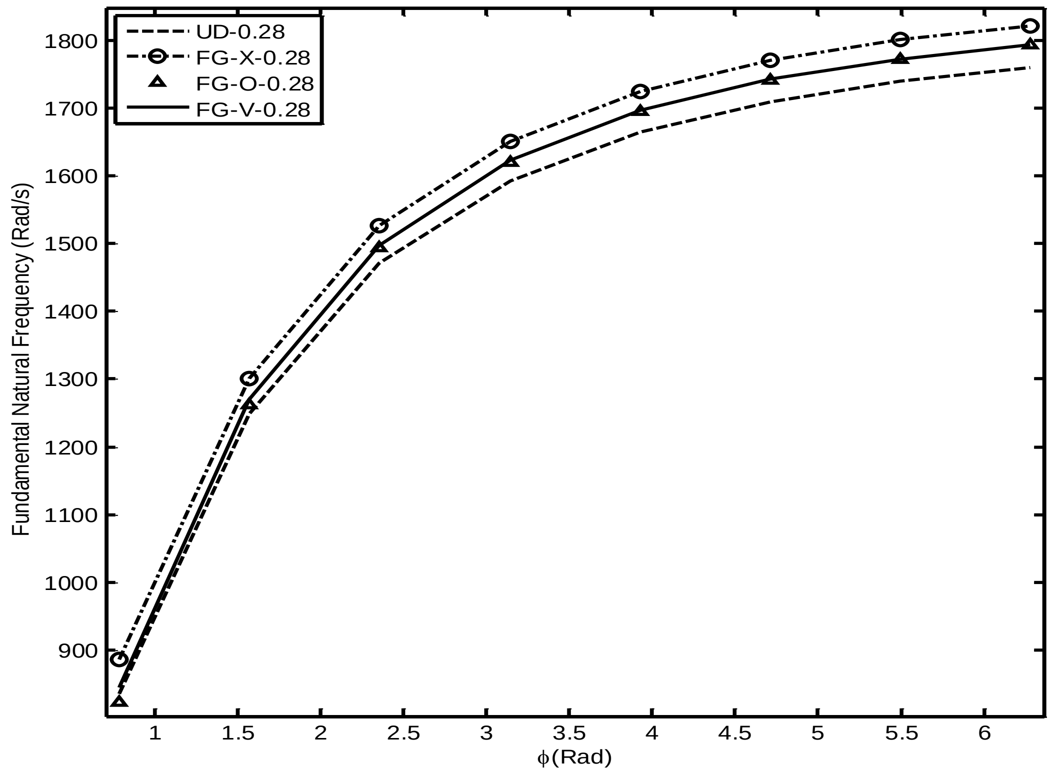
در شکل(۸)، مود دوم ارتعاشات پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی بر حسب زاویه قطاع پنل استوانه‌ای (حدود ۰/۸ رادیان تا ۶/۲۸ رادیان) در توزیع یکنواخت و مدرج تابعی برای درصد ثابتی از نانو لوله‌های کربنی بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک نشان داده شده است، که نتایج نشان می‌دهد توزیع $\mathrm{FG-X}$ بیشترین فرکانس را داراست.



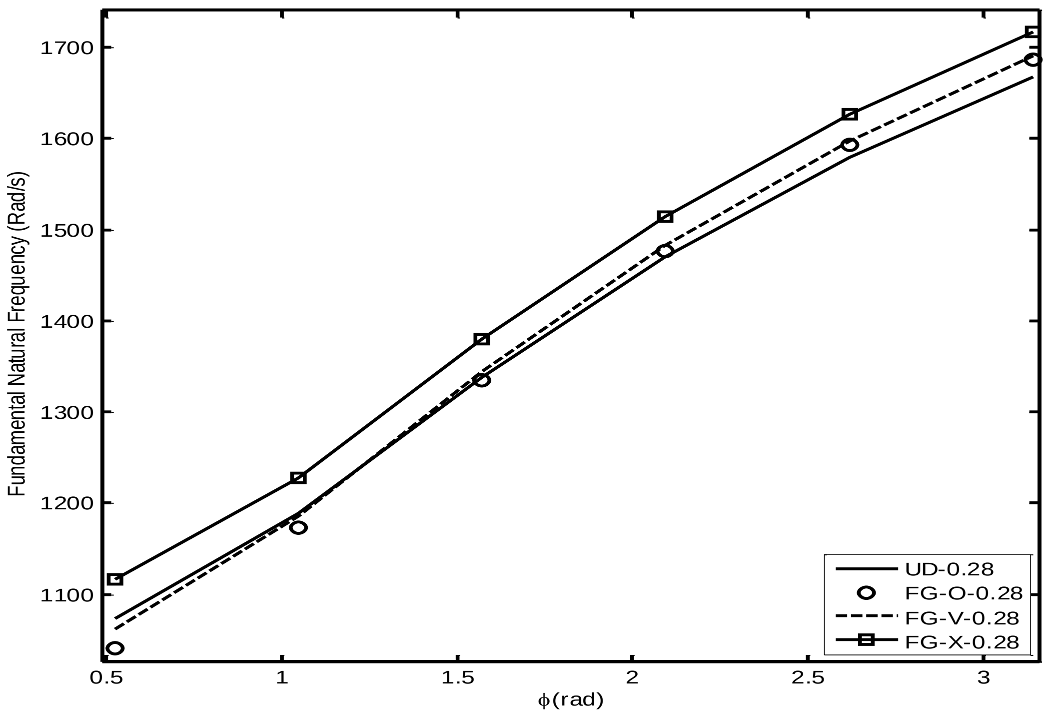

**شکل۴**- نتایج مود اول (اصلی) ارتعاشات پنل استوانه‌ای بر حسب زاویه پنل ($\phi$) برای درصدهای مختلف نانولوله کربنی در حالت یکنواخت.($a = L = 1\mathrm{m}$، $h = 0.01\mathrm{m}$، $K_\mathrm{G} = 10\ \mathrm{N}/\mathrm{m}$،$K_\mathrm{W} = 10^7\ \mathrm{N}/\mathrm{m}^3$)



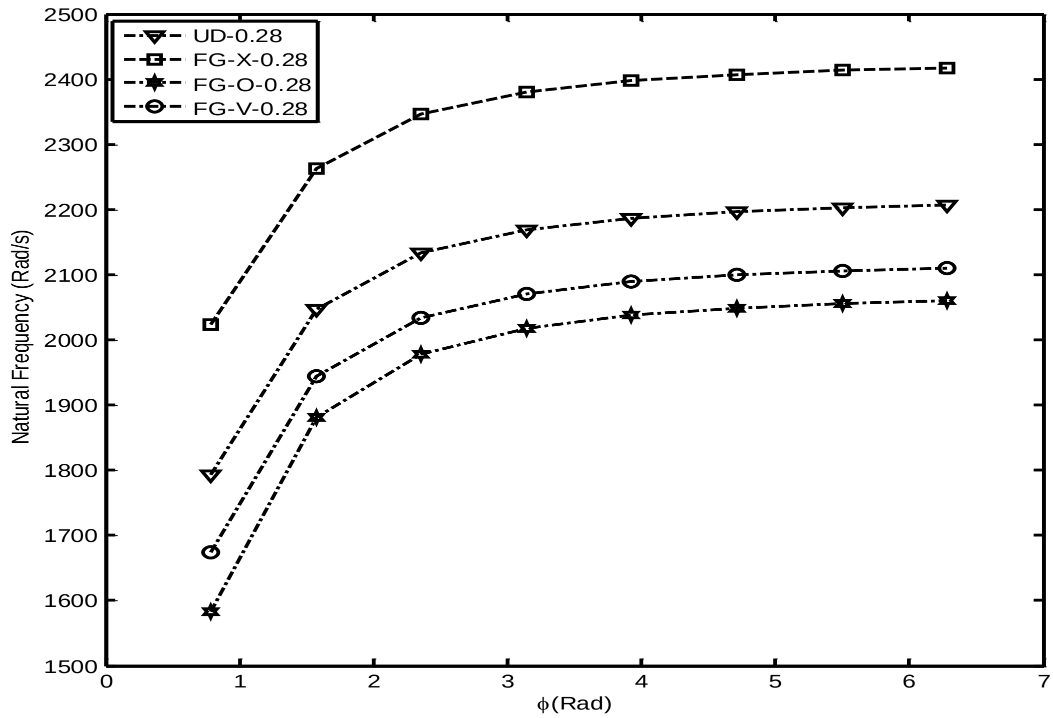

**شکل۵**- مقایسه دو توزیع یکنواخت و $\mathrm{FG-X}$ بر حسب عدد موج محیطی با در نظر گرفتن ثابت فنری وینکلر.
($a = L = 1\mathrm{m}$، $K_G = 0\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}}$ $h = 0.01\mathrm{m}$).



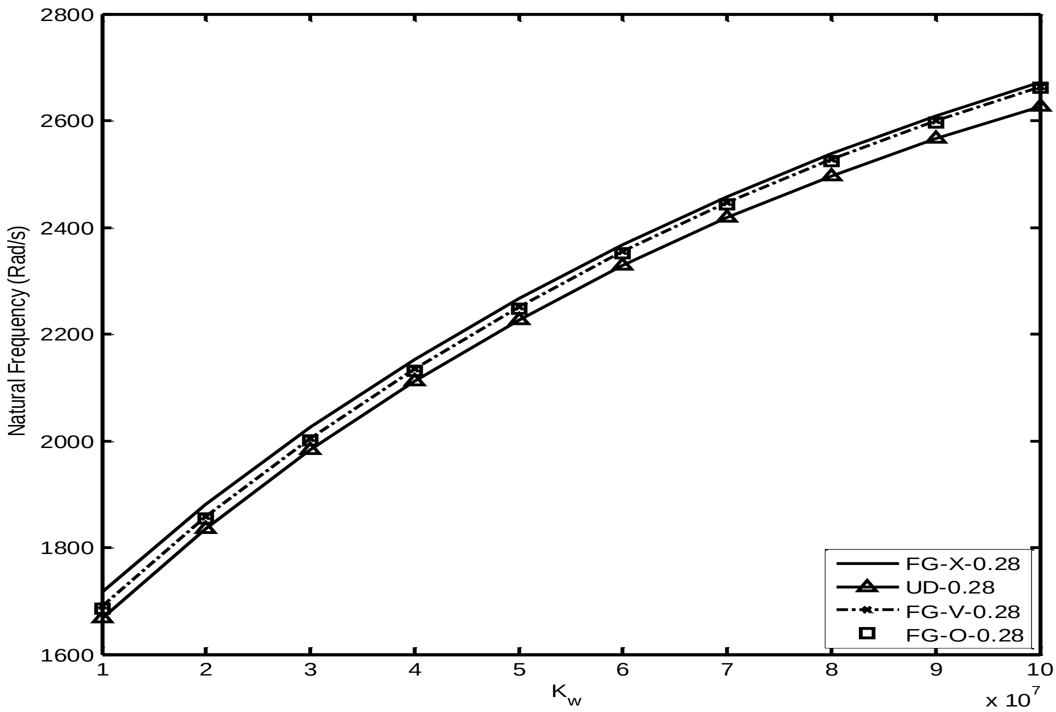

**شکل۶**- نتایج مود اول(اصلی) ارتعاشات پنل استوانه‌ای برای توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی بر حسب زاویه پنل($\phi$).
($a = L = 1\mathrm{m}$، $h = 0.01\mathrm{m}$، $K_G = 0\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}}$، $K_W = 0\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m^3}}$).



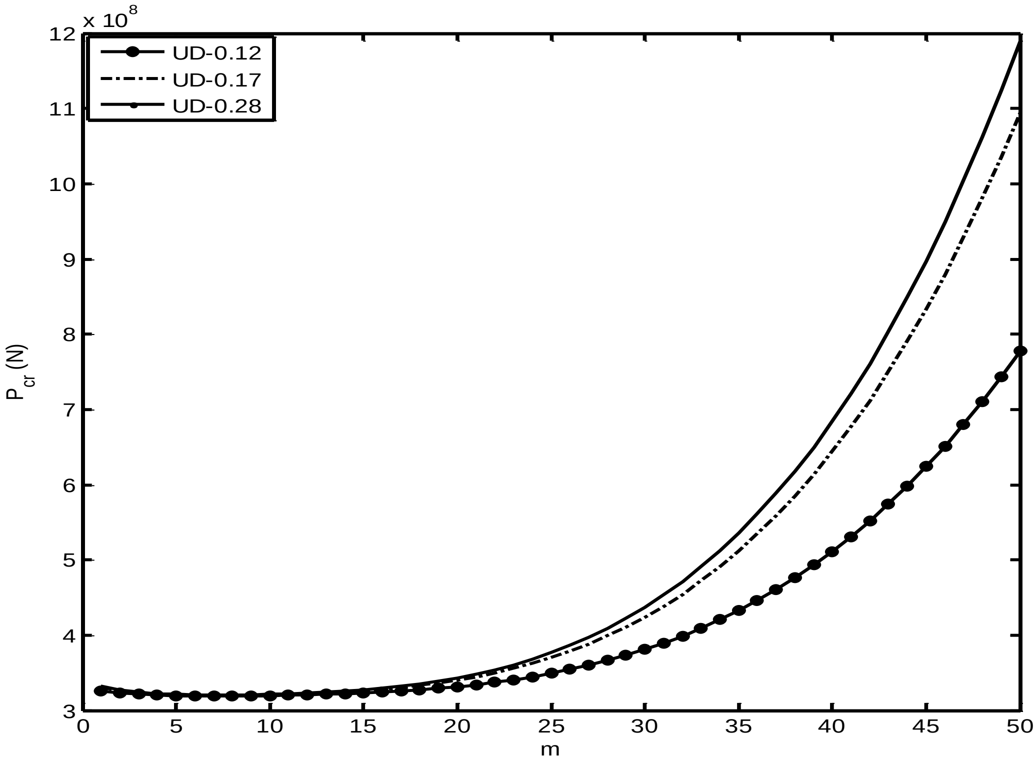

**شکل۷**– نتایج مود اول(اصلی) ارتعاشات پنل استوانه‌ای برای توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی بر حسب زاویه پنل($\phi$) و بر بستر الاستیک. ($a = L = 1\text{m}$، $h = 0.01\text{m}$، $K_G = 10\ {}^{\text{N}}/_{\text{m}}$، $m = 1, n = 1, K_W = 10^7\ {}^{\text{N}}/_{\text{m}^3}$).




**شکل۸**– نتایج مود دوم ارتعاشات پنل استوانه‌ای برای توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی بر حسب زاویه پنل($\phi$). ($a = L = 1\text{m}$، $h = 0.01\text{m}$،$K_G = 0\ {}^{\text{N}}/_{\text{m}}$، $K_W = 0\ {}^{\text{N}}/_{\text{m}^3}$).




**شکل۹**– نتایج مود دوم ارتعاشات پنل استوانه‌ای بر حسب $K_W$ در توزیع‌های مختلف.
($a = L = 1\text{m}$، $h = 0.01\text{m}$، $\varphi = \pi\text{Rad}$).



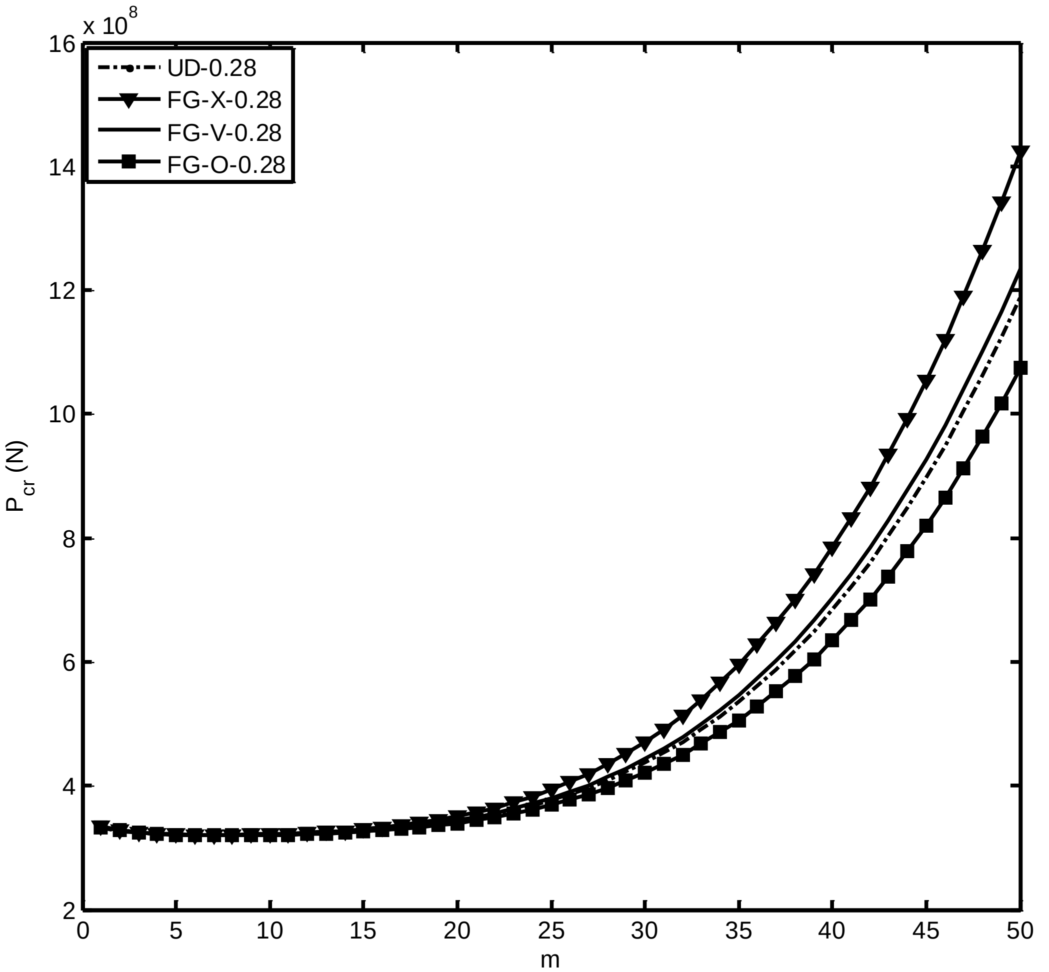

**شکل۱۰**– مقایسه بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای برای درصدهای مختلف نانو لوله‌های کربنی بر حسب عدد موج محیطی
($n = 1$، $\varphi = \pi\text{Rad}$، $a = L = 1\text{m}$، $h = 0.01\text{m}$، $K_G = 10\ {}^{\text{N}}/_{\text{m}}$، $K_W = 10^9\ {}^{\text{N}}/_{\text{m}^3}$).

در شکل(۹)، مود اول ارتعاشات پنل استوانه‌ای برای توزیع‌های متفاوت برحسب $K_{\mathrm{W}}$ رسم شده است. می‌توان مشاهده نمود که با افزایش $K_{\mathrm{W}}$، فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد.

## ۷- تحلیل کمانش پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی

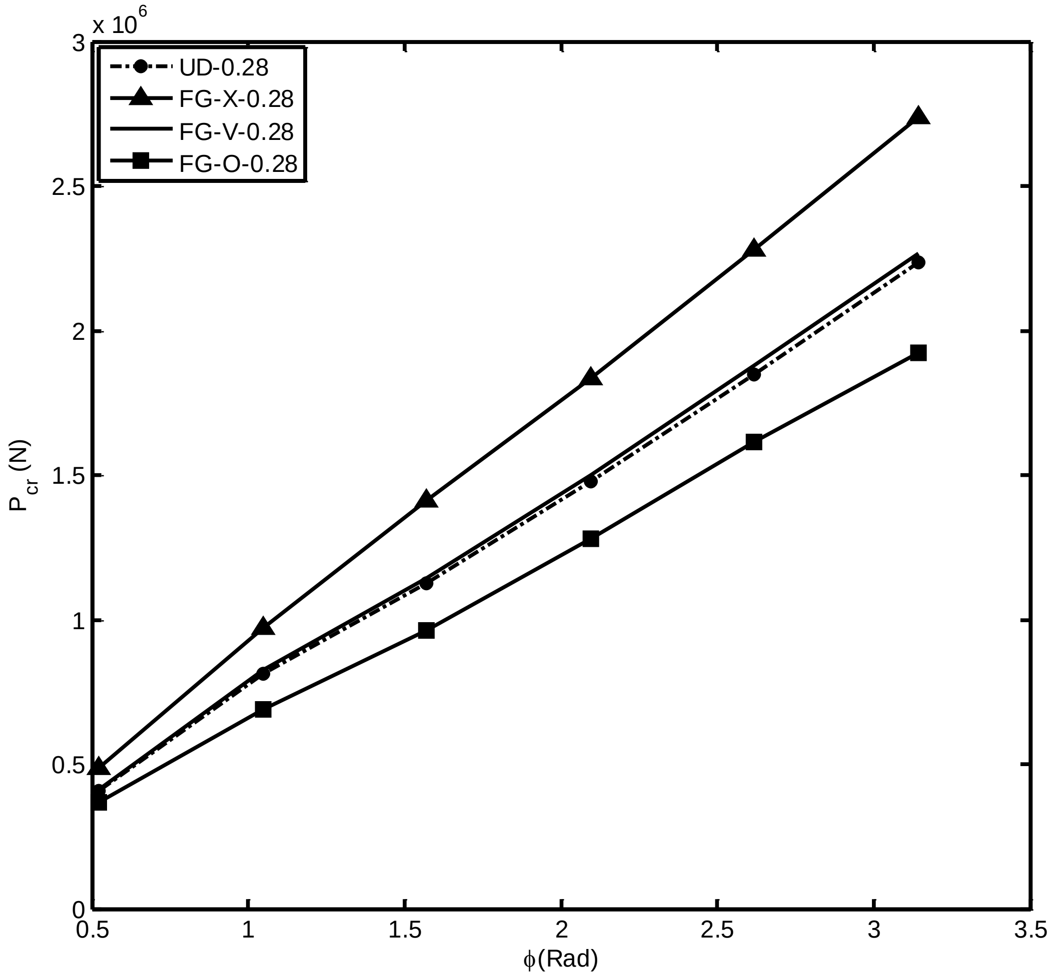
در شکل(۱۰)، بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای برای درصدهای مختلف نانو لوله‌های کربنی در حالت یکنواخت مقایسه شده است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که با افزایش درصد نانو لوله‌های کربنی به دلیل افزایش مدول الاستیک و نسبت مستقیم کمانش با سختی، بار کمانش بحرانی افزایش می یابد. این نتیجه برای حالت‌های مختلف توزیع نانو لوله کربنی یکسان می‌باشد.

شکل(۱۱)، بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای را برحسب عدد موج محیطی برای توزیع‌های مختلف نانو لوله کربنی نشان می‌دهد، می‌توان دریافت که بیشینه بار کمانش بحرانی پنل برای توزیع $\mathrm{FG-X}$ می‌باشد.




**شکل۱۱**– مقایسه بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای برای توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی بر حسب عدد موج محیطی
($n = 1$، $\varphi = \pi\mathrm{Rad}$، $a = L = 1\mathrm{m}$، $h = 0.01\mathrm{m}$، $K_{\mathrm{G}} = 10\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}}$، $\mathrm{K_W} = 10^9\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}^3}$).

با بدست آوردن بار کمانش پنل بر حسب پارامترهای$m$ و$n$ وکمینه کردن آن نسبت به این دو پارامتر بار کمانش بحرانی بدست خواهد آمد. در شکل(۱۲)، بار کمانش بحرانی بر حسب زاویه‌ی پنل استوانه‌ای برای توزیع‌های مختلف نانو لوله کربنی بررسی می‌شود که بیشینه بار کمانش بحرانی پنل در توزیع $\mathrm{FG-X}$ است و کمینه بار کمانش بحرانی پنل در توزیع$\mathrm{FG-O}$ رخ می‌دهد. با توجه به اینکه تنش ماکزیمم به لبه پنل استوانه‌ای و در واقع دورترین نقاط از تار خنثی اعمال می‌گردد؛ لذا هر چه این نقاط بیشتر تقویت شده باشند، بار کمانش بحرانی نیز بیشتر خواهد بود (این نکته در توزیع $\mathrm{FG}-X$ مشاهده می‌شود).
حال با نظر به اینکه در توزیع$\mathrm{FG-O}$ لبه پنل استوانه‌ای درصد کسر حجمی کمتری از نانو لوله‌های کربنی را نسبت به دیگر نقاط پنل به خود اختصاص می‌دهد، بنابراین کمتر از توزیع‌های مدرج تابعی دیگر تقویت می‌شود و کمینه بار کمانش بحرانی پنل در توزیع$\mathrm{FG-O}$ رخ می‌دهد. با توجه به نکات ذکر شده، سفتی سازه برای توزیع $\mathrm{FG}-X$ در لبه‌های بالا و پایین بیشتر از توزیع$\mathrm{FG-O}$ نسبت به صفحه میانی افزایش یافته، لذا بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای تقویت شده برای توزیع $\mathrm{FG}-X$ بیشتر از $\mathrm{FG-O}$ است [۲۲].

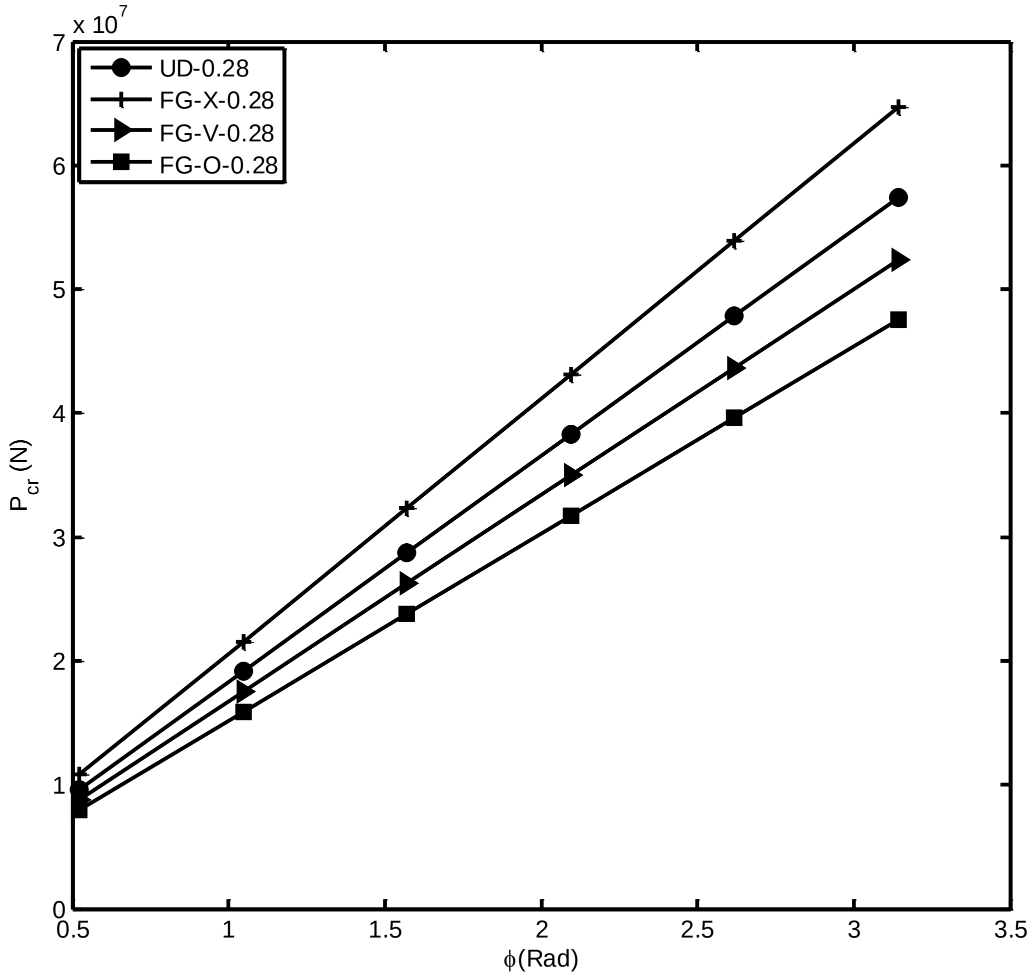



**شکل۱۲**– نتایج بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای بر حسب زاویه‌ی پنل($\phi$) برای توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی.($a = L = 1\mathrm{m}$،$K_{\mathrm{G}} = 0\ \mathrm{N}/\mathrm{m}$ $h = 0.01\mathrm{m}$، $K_{\mathrm{W}} = 0\ \mathrm{N}/\mathrm{m}^3$).

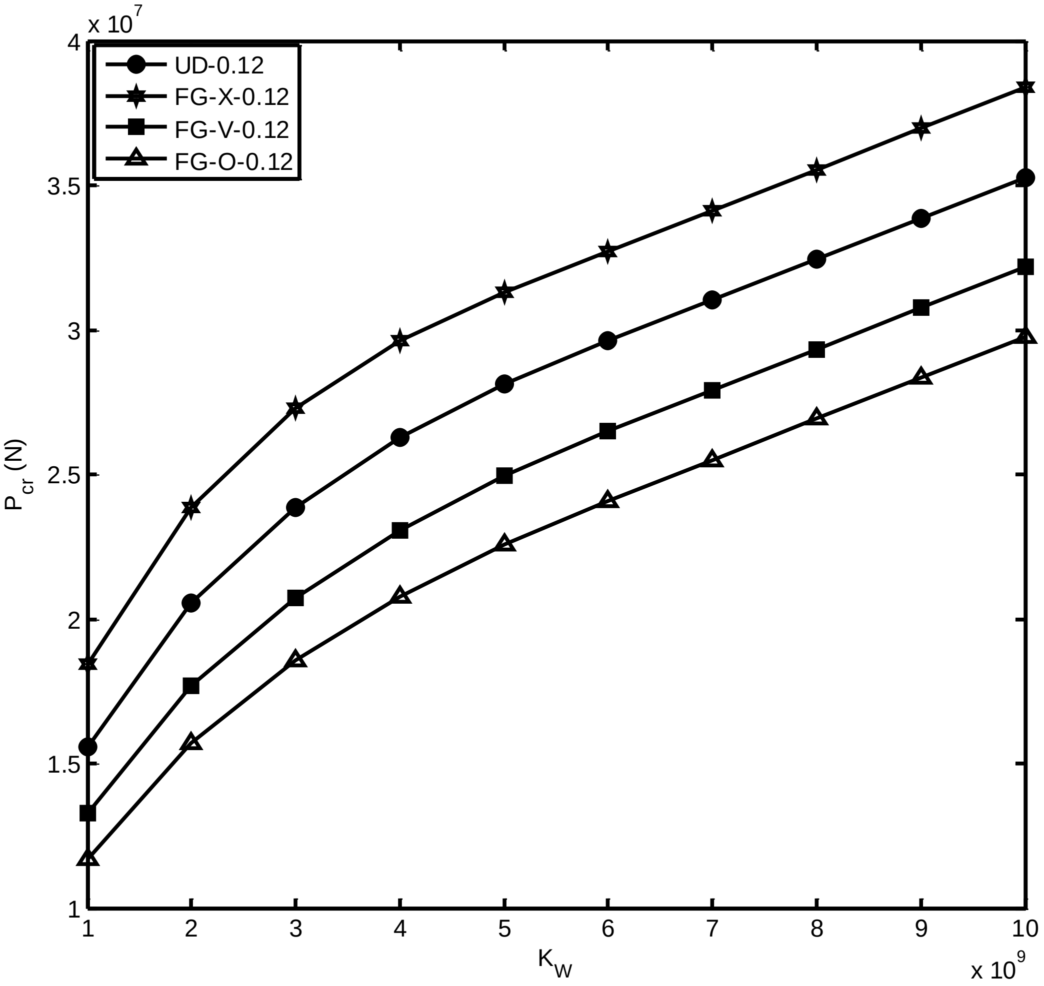
شکل(۱۳)، همانند شکل(۱۲)، بار کمانش بحرانی را بر حسب زاویه‌ی پنل استوانه‌ای برای توزیع‌های مختلف نانو لوله کربنی بررسی می‌کند با این تفاوت که بستر الاستیک روی سازه در نظر گرفته شده است.

مقایسه شکل‌های(۱۲) و (۱۳) نشان می‌دهد که در حضور بستر الاستیک بار کمانش بحرانی پنل در دو توزیع $\mathrm{FG-V}$ و $\mathrm{FG-O}$ از حالت $\mathrm{UD}$ کمتر است این در حالی است که بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک تنها توزیع $\mathrm{FG-O}$ کمتر از توزیع $\mathrm{UD}$ می‌باشد.

در شکل(۱۴)، بارکمانش بحرانی پنل استوانه‌ای برحسب $K_\mathrm{W}$ برای توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضریب فنری نوع وینکلر بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای افزایش یافته که بیشینه بار کمانش بحرانی در $\mathrm{FG-X}$ رخ می‌دهد.




**شکل۱۳**– نتایج بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای بر حسب زاویه‌ی پنل($\phi$) برای توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی بر بستر الاستیک. ($a = L = 1\mathrm{m}$،$h = 0.01\mathrm{m}$، $K_\mathrm{G} = 10\, ^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}}$،$K_\mathrm{W} = 10^9\, ^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}^3}$).




**شکل۱۴**– نتایج بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای برای توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی بر حسب $K_{\mathrm{W}}$.
$(h = 0.01\mathrm{m}\ a = L = 1\mathrm{m}،\ K_{\mathrm{G}} = 0\ {}^{\mathrm{N}}\!/_{\mathrm{m}}،\ \varphi = \pi\mathrm{Rad})$.

## ۸- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله معادلات تعادل پنل استوانه‌ای بر بستر الاستیک با استفاده از روش انرژی به دست آمد. سپس با استفاده از روش ناویر، معادلات حاکم بر تعادل پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول حل شد. در نهایت بار کمانش بحرانی و ارتعاشات آزاد پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی تحت کسر حجمی متفاوت از نانو لوله‌ها در دو حالت یکنواخت و مدرج تابعی روی بستر الاستیک مقایسه و بررسی شد.

نتایج حاصل از این تحقیق را می‌توان به صورت زیر جمع بندی کرد:

۱- با افزایش درصد نانو لوله‌های کربنی به دلیل افزایش مدول الاستیک و نسبت مستقیم سختی با فرکانس و بارکمانش بحرانی، فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای نیز افزایش می‌یابد.

۲- ازلحاظ تئوری با افزایش درصد نانولوله کربنی بارکمانش بحرانی و فرکانس طبیعی پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی افزایش می‌یابد؛ اما از لحاظ عملی با افزایش درصد کسرحجمی نانولوله‌های

کربنی بیش از یک حد معین، پدیده کلوخه شدن رخداده وباعث اعمال محدودیت درتقویت سازه با این روش می‌گردد.

۳- حضور بستر الاستیک باعث افزایش قابل توجهی در فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی می‌شود.

۴- با افزایش عدد موج طولی و محیطی فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله کربنی افزایش می‌یابد و تاثیر درصد نانو لوله‌های کربنی در عددهای موج بالاتر، محسوس تر است.

۵- تاثیر نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی بر بار کمانش بحرانی، با افزایش زاویه دهانه پنل بیشتر می‌شود. این در حالی است که تاثیر آن بر فرکانس طبیعی در زوایای مختلف، نسبتا ثابت می‌باشد.

۶- از بین توزیع‌های مدرج تابعی و یکنواخت، توزیع$\mathrm{FG-X}$ دارای بیشترین فرکانس طبیعی در مود اول و دوم ارتعاشات می باشد و نتیجه گیری درمورد کمترین فرکانس طبیعی پنل استوانه‌ای از بین توزیع‌های مختلف نانو لوله کربنی، با توجه به زاویه دهانه پنل و مود ارتعاشات متغیر می باشد.

۷- با افزایش زاویه‌ی دهانه پنل استوانه‌ای، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد. با توجه به شیب نمودارها تاثیر زاویه دهانه پنل بر توزیع $\mathrm{FG-X}$ و کسر حجمی ۲۸درصد نانو لوله‌های کربنی بیشتر است.

۸- از بین توزیع های مدرج تابعی و یکنواخت، توزیع $\mathrm{FG-X}$ در پنل استوانه‌ای تقویت شده دارای بیشترین بار کمانش بحرانی و توزیع $\mathrm{FG-O}$ دارای کمترین بار کمانش بحرانی می‌باشد.

## مراجع


[1] Mehrabadi, S.J., Karimi Samar, R., and Bohluli, M., "Mechanical Buckling Analysis of Open Circular Cylindrical Shells Reinforced with Single Walled Carbon Nanotubes", Aerospace Mech, Vol. 9, No. 4, pp. 51-59, (2013).

[2] Raoufi, M., Jafari Mehrabadi, S., and Satouri, S., "Free Vibration Analysis of 2D-FGM Annular Sectorial Moderately Thick Plate Resting on Elastic Foundation using 2D-DQM Solution", Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 15, pp. 299-306, (2015).

[3] GhorbanpourArani, A., Haghparast, E., Khoddami Maraghi, Z., and Amir, S., "Nonlocal Vibration and Instability Analysis of Embedded DWCNT Conveying Fluid under Magnetic Field with Slip Conditions Consideration", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 229, pp. 349-363, (2015).

[4] Seidel, G.D., and Lagoudas, D.C., "Micromechanical Analysis of the Effective Elastic Properties of Carbon Nanotube Reinforced Composites, Mechanical. Materials", Vol. 38, No. 8, pp. 884–907, (2006).

[5] Shen, H.S., and Zhu, Z.H., "Buckling and Post Buckling Behavior of Functionally Graded Nanotube-reinforced Composite Plates in Thermal Environments", Computational Materials Science, Continua, Vol. 18, No. 2, pp. 155–162, (2010).

[6] Ke, L.L., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Nonlinear Free Reinforced Composite Beams", Composite Structures, Vol. 92, No. 3, pp. 676–683, (2010).

[7] Le, Z.X., Liew, K.M., and Yu, J.L., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Plates using the Element-free Kp-Ritz Method in Thermal Environment", Composite Structures, Vol. 106, pp. 128-138, (2013).

[8] Phadikar, J.K., and Pradhan, S.C., "Variational Formulation and Finite Element Analysis for Nonlocal Elastic Nanobeams and Nanoplates", Computational Materials Science, Vol. 49, No. 3, pp. 492-499, (2010).

[9] Mohammadimehr, M., Mohandes, M., and Moradi, M.,"Size Dependent Effect on the Buckling and Vibration Analysis of Double-bonded Nanocomposite Piezoelectric Plate Reinforced by Boron Nitride Nanotube Based on Modified Couple Stress Theory", Journal of Vibration and Control, SAGE Publicatio, Vol. 22, No. 7, pp. 1790-1807, (2016).

[10] Ghannadpour, S.A.M., Mohammadi, B., and Fazilati, J., "Bending, Buckling and Vibration Problems of Nonlocal Euler Beams using Ritz Method", Composite Structures, Vol. 96, pp. 584-589, (2013).

[11] Mohammadimehr, M., Salami, M., Nasiri, H., and Afshari, H., "Thermal Effect on Deflection, Critical Buckling Load and Vibration of Nonlocal Euler-Bernoulli Beam on Pasternak Foundation using Ritz Method", Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 11, pp. 64-76, (2013).

[12] Abdelrazek, E.M., Hezma, A.M., El-khodary, A., and Elzayat, A.M., “Spectroscopic Studies and Thermal Properties of PCL/PMMA Biopolymer Blend”, Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences, Vol. 3, No. 1, pp. 10-15, (2016).

[13] Shen, H.S., "Post Buckling of Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments", Part I: Axially-loaded Shells, Composite Structures, Vol. 93 pp. 2096-2108, (2011).

[14] Alibeigloo, A., and Shaban, M., "Elasticity Solution of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Panel Subjected to Thermo Mechanical Load ", Composites Part B, Vol. 87, pp. 214-226, (2016).

[15] Jafari Mehrabadi, S., Jalilian Rad, M., and Zarouni, E., "Free Vibration Analysis of Nanotube-reinforced Composite Truncatedconical Shell Resting on Elastic Foundation", Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 12, pp. 122-132, (2014).

[16] GhorbanpourArani, A., Kolahchi, R., Khoddami Maraghi, Z., “Nonlinear Vibration and Instability of Embedded Double-walled Boron Nitride Nanotubes Based on Nonlocal Cylindrical Shell Theory”, Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, pp. 7685–7707, (2013).

[17] Abolghasemi, S., Eipakchi, H., and Shariati, M., "Analytical Solution for Buckling of Rectangular Plates Subjected to Nonuniform In-plane Loading Based on First Order

Shear Deformation Theory", Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 13, pp. 37-46, (2014).

[18] Sohani, F., and Eipakchi, H.R., "A Survey on Free Vibration and Buckling of a Beam with Moderately Large Deflection using First Order Shear Deformation Theory", Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 14, pp. 1-14, (2014).

[19] Bakhsheshy, A., and Khorshidi, K., "Free Vibration of Functionally Graded Rectangular Nanoplates in Thermal Environment Based on the Modified Couple Stress Theory", Modares Mechanical Engineering, Vol. 99, No. 9, pp. 1-8, (2014).

[20] Mohammadi, M., Farajpour, A., Moradi, A., and Ghayour, M., "Shear Buckling of Orthotropic Rectangular Graphene Sheet Embedded in an Elastic Medium in Thermal Environment", Composites Part B: Engineering, Elsevier, Vol. 56, pp. 629-637, (2014).

[21] Mohammadimehr, M., Salemi, M., and RoustaNavi, B., "Bending, Buckling, and Free Vibration Analysis of MSGT Microcomposite Reddy Plate Reinforced by FG-SWCNTs with Temperature-dependent Material Properties under Hydro-thermo-mechanical Loadings using DQM", Composite Structures, Vol. 138, pp. 361-380, (2016).

[22] Mohammadimehr, M., RoustaNavi, B., and GhorbanpourArani, A., "Free Vibration of Viscoelastic Double-bonded Polymeric Nanocomposite Plates Reinforced by FG-SWCNTs using MSGT, Sinusoidal Shear Deformation Theory and Meshless Method", Composite Structures, Vol. 131, pp. 654-671, (2015).

## فهرست نمادهای انگلیسی

a: شعاع پنل استوانه‌ای

E: مدول یانگ

G: مدول برشی

FG: مدرج تابعی

h: ضخامت پنل استوانه‌ای

K: ضریب فنری

L: طول پنل استوانه‌ای

m: عدد موج محیطی

n: عدد موج طولی

V: کسر حجمی

w: کسر جرمی

$\rho$: چگالی

$\varphi$: زاویه قطاع پنل استوانه‌ای

**پیوست** (اگر $\omega = 0$ باشد درایه های ماتریس کمانش را خواهیم داشت.)

$$a_{11} = -B_{11}{P_{\mathrm{n}}}^2 - \frac{B_{66}}{2a^2}\beta_{\mathrm{m}}^2 + I_0\omega^2 ،\; a_{12} = -\left(\frac{B_{12}}{a} + \frac{B_{66}}{2a}\right)\beta_{\mathrm{m}}P_{\mathrm{n}}$$

$$a_{13} = \frac{B_{12}}{a}P_{\mathrm{n}} ،\; a_{14} = -B'_{11}{P_{\mathrm{n}}}^2 - \frac{B'_{66}}{2a^2}\beta_{\mathrm{m}}^2 + I_1\omega^2$$

$$a_{15} = -\left(\frac{B'_{66}}{2a} + \frac{B'_{12}}{a}\right)\beta_{\mathrm{m}}P_{\mathrm{n}} ،\; a_{21} = -\left(\frac{B_{66}}{2a} + \frac{B_{12}}{a}\right)\beta_{\mathrm{m}}P_{\mathrm{n}}$$

$$a_{22} = -B_{66}{P_{\mathrm{n}}}^2 - \frac{B_{22}}{a^2}\beta_{\mathrm{m}}^2 + I_0\omega^2 ،\; a_{23} = \frac{B_{22}}{a^2}\beta_{\mathrm{m}}$$

$$a_{24} = -\left(\frac{B'_{66}}{2a} + \frac{B'_{12}}{a}\right)\beta_{\mathrm{m}}P_{\mathrm{n}}$$

$$a_{25} = -\frac{B'_{66}}{2}{P_{\mathrm{n}}}^2 - \frac{B'_{22}}{a^2}\beta_{\mathrm{m}}^2 + I_1\omega^2 ،\; a_{31} = \frac{B_{12}}{a}P_{\mathrm{n}}$$

$$a_{32} = \frac{B_{22}}{a}\beta_{\mathrm{m}}$$

$$a_{33} = -\frac{B_{22}}{a^2} - \frac{K_{\mathrm{s}}B_{66}}{2}{P_{\mathrm{n}}}^2 - \frac{K_{\mathrm{s}}B_{44}}{2a^2}\beta_{\mathrm{m}}^2 + I_2\omega^2 - k_{\mathrm{w}} - k_{\mathrm{G}}P_{\mathrm{n}}^2 - \frac{k_{\mathrm{G}}}{a^2}\beta_{\mathrm{m}}^2$$

$$a_{34} = \left(\frac{B'_{12}}{a} - \frac{K_{\mathrm{s}}B_{66}}{2}\right)P_{\mathrm{n}} ،\; a_{35} = \left(\frac{B'_{22}}{a^2} - \frac{K_{\mathrm{s}}B_{44}}{2a}\right)\beta_{\mathrm{m}}$$

$$a_{41} = a_{14} ،\; a_{42} = a_{24} ،\; a_{43} = a_{34}$$

$$a_{44} = -\frac{K_{\mathrm{s}}B_{44}}{2} - B''_{11}{P_{\mathrm{n}}}^2 - \frac{B''_{66}}{2a^2}\beta_{\mathrm{m}}^2 + I_2\omega^2$$

$$a_{45} = -\left(\frac{B''_{12}}{a} - \frac{B''_{66}}{2a}\right)\beta_{\mathrm{m}}P_{\mathrm{n}} ،\; a_{51} = a_{15}$$

$$a_{52} = a_{25} ،\; a_{53} = a_{35} ،\; a_{54} = a_{45}$$

## Abstract

In this paper, buckling and free vibration analysis of cylindrical panel reinforced by various distributions of carbon nanotubes (CNTs) on elastic foundation for two cases including uniform distributed (UD) and functionally graded (FG) is studied. Based on the first order shear deformation theory (FSDT), the equilibrium equations of cylindrical panel reinforced by CNTs are derived using energy method and Hamilton's principle. Then, using Navier's type solution, the governing equations of equilibrium for cylindrical panel reinforced by various distributions of CNTs are solved. Using the mixture rule, the material properties of cylindrical panel reinforced by CNTs are estimated. In this study, the effects of volume fraction, various distributions of CNTs, elastic foundation parameters on the critical buckling load and natural frequency of cylindrical panel reinforced with CNTs are investigated.

The obtained results of this research indicate that the trend of increasing natural frequency leads to increase in the percentage of CNTs and elastic modulus parameters which the maximum natural frequency occurs for FG-X case. Also increasing the percentage of CNTs and elastic modulus parameters leads to increase the critical buckling load which the maximum and minimum values of this load take place for FG-X and FG-O, respectively. On the other hands, it can conclude that with suitable selecting of CNTs distributions and volume fraction, the stiffness of structures increases and then the critical buckling load and natural frequencies enhance. Thus this point is noticeable to design the optimum of structures at nanoscale.