

## تحلیل ارتعاشات خمشی ورق‌های دایروی متخلخل اشباع شده با استفاده از روش مربعات

### دیفرانسیلی

پژوهش حاضر به تحلیل ارتعاشات ورق‌های دایروی ساخته شده از مواد متخلخل می‌پردازد. ورق مورد نظر نسبتاً نازک و خصوصیات مواد متخلخل به صورت توابعی که ارائه شده‌اند در راستای ضخامت ورق متغیر است. معادلات حاکم و شرایط مرزی بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها و با استفاده از اصل همپلتون حاصل می‌شوند. به کمک روش مربعات دیفرانسیلی، فرکانس‌های طبیعی ورق محاسبه می‌شوند. با افزایش تخلخل، فرکانس در توزیع غیرخطی متقارن تخلخل افزایش و در توزیع یکنواخت ثابت می‌ماند و در هر دو توزیع، با افزایش فشردگی حفرات که با ضریب اسکمپتون نمایش داده می‌شود، فرکانس افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت ضخامت به شعاع ورق، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. نتایج در دو شرط مرزی گیردار و تکیه‌گاه ساده مورد بررسی قرار گرفته‌اند و در حالت ساده‌تر با پژوهش‌های پیشین صحت‌گذاری شده‌اند.

### احسان آرشید<sup>۱</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

### احمد رضا خورشیدوند<sup>۲</sup>

استادیار

واژه‌های راهنما: ارتعاشات آزاد، مواد متخلخل، ورق دایروی، روش مربعات دیفرانسیلی

### ۱- مقدمه

یک محیط متخلخل<sup>۳</sup> (یا یک ماده‌ی متخلخل) ماده‌ای دارای منافذ و حفرات می‌باشد. بخش اسکلتی این ماده ماتریس<sup>۴</sup> یا قاب<sup>۵</sup> نامیده می‌شود. معمولاً حفرات با یک سیال پر می‌شوند. در اغلب موارد ماده‌ی اسکلتی، جامد است اما سازه‌هایی مانند فوم و کف اغلب نیز با استفاده از مفهوم محیط متخلخل بررسی می‌شوند. یک محیط متخلخل اغلب موارد به واسطه‌ی تخلخل<sup>۶</sup> آن توصیف می‌شود. تخلخل عبارتست از نسبت حفره‌ی یک ماده‌ی متخلخل به فضای کلی آن. به‌طور مثال در صورتی که منافذ و حفرات ماده‌ی متخلخل با

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران  
<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

Ar\_Khorshidvand@Azad.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۴/۱۲/۰۳، تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۲/۲۶

<sup>۳</sup> Porous

<sup>۴</sup> Matrix

<sup>۵</sup> Frame

<sup>۶</sup> Porosity

سیالی پر شده باشند، نسبت حجم سیال به حجم کل ماده که شامل حجم منافذ و سیال می‌باشد، تخلخل گفته می‌شود. این ویژگی اصلی مواد متخلخل را به روش‌های گوناگونی مانند روش چشمی و با استفاده از میکروسکوپ که روشی تقریبی است، روش انتشار گاز و استفاده از پمپ جیوه می‌توان اندازه‌گیری کرد. [۱]

دیگر مشخصه‌ها و ویژگی‌های این محیط از قبیل نفوذپذیری<sup>۱</sup>، استحکام کششی<sup>۲</sup>، هدایت الکتریکی<sup>۳</sup> گاهی اوقات می‌توانند از ویژگی‌های مربوطه‌ی ترکیبات آن (ماتریس جامد و سیال) و تخلخل محیط و ساختار منافذ مشتق شده، اما چنین اشتقاقی معمولاً دارای پیچیدگی می‌باشد. حتی مفهوم تخلخل تنها برای یک محیط پروالاستیک صراحت دارد.

مفهوم محیط متخلخل در حوزه‌های بسیاری از علوم کاربردی و مهندسی مانند پالایش، مکانیک خاک، مکانیک سنگ، مهندسی نفت، بازسازی زیستی، مهندسی ساخت و ساز، علوم مربوط به زمین‌شناسی، زیست-شناسی و بیوفیزیک و مهندسی مواد کاربرد دارد. برای مثال از مواد متخلخل می‌توان در حمل و نقل زمینی، ریلی، دریایی و هوایی استفاده نمود. همچنین استفاده در صنعت بیو دارویی، فیلترها و جداکننده‌ها، مبدل‌های حرارتی و سردکن‌ها و سایر کاربردهای مهمی که این مواد دارند، اهمیت هر چه بیشتر آن‌ها را برای بررسی خصوصیاتشان نمایان می‌کند.

ساختارهایی از مواد متخلخل مانند تیرها، پوسته‌ها و ورق‌ها به‌طور گسترده‌ای در مسائل طراحی ساختاری مورد استفاده قرار می‌گیرند. بایوت در انجام مطالعه و بررسی در زمینه تعامل و برهم‌کنش پروالاستیک پیشگام می‌باشد. در مقالات برجسته‌ی وی در این زمینه، این متغیرها (به صورت نشانه گذاری کنونی) را معرفی می‌نماید: تانسور تنش کلی  $\sigma_{ij}$ ، فشار مایع  $P_p$ ، تانسور کرنش جامد  $\epsilon_{ij}$ ، و تغییرات محتوی حجم سیال<sup>۴</sup> این نظریه با استفاده از مفهوم تنش‌های جزئی مجدداً تنظیم و تدوین گشت. در مدل بایوت، محیط دگرپذیر<sup>۴</sup> متخلخل به عنوان یک زنجیره‌ی متشکل از یک فاز جامد و فاز سیال در نظر گرفته می‌شود.

Cheng و Detournay [۱]، روابط تنش-کرنش محیط را به‌طور کلی به لحاظ ثابت‌های الاستیک فازهای جامد و سیال بیان می‌کنند. در طول سالیان گذشته، محققین بسیاری به مطالعه و بررسی مسائل خیز<sup>۵</sup>، کمانش<sup>۶</sup> و ارتعاشات ورق‌ها با ویژگی‌های مختلف پرداخته‌اند. Abrate [۲] نشان داد که فرکانس‌های طبیعی صفحات FG متناسب با فرکانس‌های صفحات همسانگرد<sup>۷</sup> می‌باشند. وی همچنین همین نتایج را در مورد بارهای کمانش و خیز استاتیکی صفحات FG به دست آورد. Khdeir و Reddy [۳]، کمانش و رفتار ورق مستطیلی متعامد چندلایه‌ی مرکب را تحت ارتعاش آزاد با استفاده از تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم ورق‌ها با انواع مختلف شرایط مرزی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها راه‌حل‌های تحلیلی دقیق و همچنین راه‌حل‌های عددی اجزا محدود را در مطالعه‌شان مورد استفاده و بررسی دادند.

<sup>1</sup> Permeability

<sup>2</sup> Tensile strength

<sup>3</sup> Electrical conductivity

<sup>4</sup> Deformable

<sup>5</sup> Deflection

<sup>6</sup> Buckling

<sup>7</sup> Isotropic

Mei و Decha-Umphai [۴] ارتعاشات غیر خطی حاصل از تحریکات خارجی ورق‌های دایروی را با استفاده از روش اجزا محدود بررسی کرده و رابطه‌های نسبت دامنه و فرکانس را برای شرایط مرزی گوناگون و شرایط بارگذاری مختلف به دست آوردند.

Wang و همکاران [۵] ارتعاش آزاد متقارن محوری ورق‌های دایروی FGM را بر اساس نظریه‌ی سه بعدی ارائه دادند، که مواد این تئوری عملکرد مدرج داشته و خواص‌شان از قانون نمایی در راستای ضخامت ورق پیروی می‌نماید. با در نظر داشتن دو شرط مرزی، راه حل‌ها تمام معادلات و شرایط مرزی مربوطه را در هر نقطه ارضا می‌کنند و نتایج با پژوهش‌های قبلی مقایسه شدند. Heydari و Najafizadeh [۶] یک راه حل دقیق را برای کمانش ورق‌های دایروی با عملکرد مدرج بر مبنای نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر صفحه تحت فشار شعاعی یکنواخت ارائه دادند و نتایج را با بارهای کمانش ورق‌ها به دست آمده برای FGCP بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق<sup>۱</sup> و تئوری کلاسیک ورق‌ها<sup>۲</sup> مقایسه نمودند. با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها که در آن اثرات تغییر شکل برشی عرضی نادیده گرفته می‌شود، محاسبات نسبتاً ساده می‌شوند. Wu و همکاران [۷] ارتعاش آزاد ورق‌های دایروی را با استفاده از روش GDQ بررسی کردند. معادلات حاکم برای بررسی فرکانس طبیعی بر اساس روش GDQ گسسته شده بودند و نتایج با دقت بسیار خوبی به دست آمد. Brayan [۸] در مورد پایداری<sup>۳</sup> ورق مسطح تحت فشار درون صفحه‌ای بحث کرد و راه حلی را برای مساله‌ی خاصی از یک ورق دایروی جامد گیردار تحت بار فشاری یکنواخت به ازای هر واحد طول دور صفحه ارائه داد. وی اصل انرژی را به کار بست و از روش تغییرات برای رسیدن به جواب استفاده کرد. براین همچنین کمانش غیرمتقارن و متقارن را در تحلیلش در نظر داشت. Reismann [۹] مساله‌ی کمانش یک ورق مدور جامد را با یک محدودیت الاستیک از نوع جهشی و مرزی هم راستا با محیط صفحه بررسی نمود. وی فرض کرد که بار کمانش در تطابق با حالت متقارن بوده است.

Amon و Widera [۱۰] بعدها پژوهش ریزمن را توسعه دادند و پایداری یک ورق مدور جامد را با یک تیر مجاور با سطح مقطع مستطیلی بررسی نمودند. در پژوهش انجام شده توسط Yamaki [۱۱] کمانش ورق‌های حلقوی تحت فشار یکنواخت در هر دو لبه‌ی ورق، پی برده شد که بارهای کمانش اغلب موارد در شکل‌های مود بالاتر کمانش، پدیدار می‌شوند. Forry و Klosner [۱۲] کمانش ورق‌های مدور را تحت توزیع متقارن دما با استفاده از روش ریلی-ریتز مطالعه نمودند. آرشید و خورشیدوند [۱۳] نیز ارتعاشات ورق‌های دایروی متخلخل را در حالت توزیع متقارن تخلخل نسبت به صفحه‌ی میانی ورق و تحت شرایط مرزی گیردار بررسی کردند. هدف پژوهش حاضر، به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی متخلخل که در آن، معادلات حاکم بر مساله و شرایط مرزی بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها و با استفاده از اصل همیلتون به دست می‌آیند. جهت استفاده از این اصل باید انرژی‌های کرنشی و جنبشی ورق را به دست آورد. جهت حل معادلات و به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی از روش مربعات دیفرانسیلی<sup>۴</sup> استفاده می‌شود. در این پژوهش خصوصیات ماده‌ی متخلخل و توزیع حفرات در راستای ضخامت ورق در دو حالت متغیر و ثابت بررسی می‌شود.

<sup>1</sup> First shear deformation theory (FSDT)

<sup>2</sup> Classical plate theory (CPT)

<sup>3</sup> Stability

<sup>4</sup> Differential quadrature method (DQM)

مقدار تخلخل، مهمترین ویژگی یک ماده‌ی متخلخل می‌باشد که با تغییر آن، خواص ماده‌ی متخلخل تغییرات مهمی خواهد یافت. همچنین ضریب اسکمپتون که نشان دهنده‌ی فشردگی حفرات است به عنوان یکی از پارامترهای مهم و تاثیرگذار بر ارتعاشات ورق مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج در دو شرط مرزی مختلف که شامل شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار هستند به دست آورده شده‌اند. با تحلیل نتایج، تاثیر تخلخل، فشردگی حفرات، توزیع حفرات، شرایط مرزی و نسبت ضخامت به شعاع ورق بر فرکانس‌های طبیعی به خوبی قابل مشاهده خواهد بود که این موضوع سبب می‌شود شناخت بهتری از این مواد به دست آورده شود تا در طراحی ساختارهای مختلف، با توجه به نوع نیاز، مورد استفاده قرار گیرند.

## ۲- به دست آوردن معادلات حاکم بر مساله

### ۲-۱- روابط تنش - کرنش

ورق نسبتاً نازک فرض شده است و بنا بر فرضیات کرشهف-لاو، سطوح عمود بر سطح میانی پس از تغییر شکل مسطح باقی می‌مانند. از این رو، تغییر شکل برشی عمود بر صفحه نادیده گرفته می‌شود. با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها (CPT)، مولفه‌های کرنش در فاصله‌ی  $z$  از سطح میانی ورق به شکل زیر توسط Reddy ارائه شده‌اند: [۱۴]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \bar{\varepsilon}_{rr} + zk_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + zk_{\theta\theta}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\gamma_{r\theta} = \bar{\gamma}_{r\theta} + 2zk_{r\theta}$$

که  $\varepsilon_{rr}$ ،  $\varepsilon_{\theta\theta}$  و  $\gamma_{r\theta}$  به ترتیب مولفه‌های کرنش در راستای  $r$ ،  $\theta$  و  $z$  هستند. در اینجا  $\bar{\varepsilon}_{rr}$ ،  $\bar{\varepsilon}_{r\theta}$  و  $\bar{\gamma}_{r\theta}$  به ترتیب مولفه‌های کرنش سطح میانی،  $k_{rr}$ ،  $k_{\theta\theta}$  و  $k_{r\theta}$  انحنا<sup>۱</sup> خمشی و پیچشی نسبت به محورهای  $r$  و  $\theta$  می‌باشند. روابط بین کرنش‌های سطح میانی و انحناها با مولفه‌های جابجایی بنا بر فرضیات Sanders در حالت خطی عبارتست از: [۱۵]

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \\ \bar{\varepsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\end{aligned}\quad (2)$$

$$k_{rr} = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$k_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

$$k_{r\theta} = \frac{-1}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

<sup>۱</sup>Curvature

با جایگذاری معادله‌ی (۲) در معادله‌ی (۱)، عبارات زیر برای مولفه‌های تنش به دست خواهند آمد: [۱۶]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} - z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + 2z \left( \frac{-1}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (3)$$

## ۲-۲- ورق متخلخل

ورق مورد بررسی همانگونه که در شکل (۱) نشان داده شده است، یک ورق یکنواخت دایروی شکل ساخته شده از مواد متخلخل می‌باشد که دارای شعاع  $a$  و ضخامت  $h$  است. برای اثبات روابط، سیستم مختصات استوانه‌ای در مرکز ورق گرفته شده است.

## ۲-۳- روابط تنش- کرنش در ورق متخلخل

رابطه‌ی تنش- کرنش ماده‌ی متخلخل به صورت زیر است: [۱]

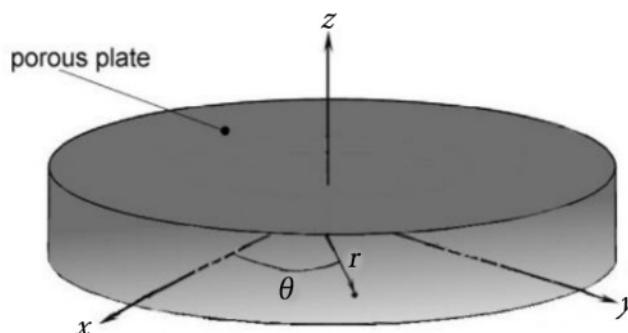
$$\sigma_{ij}^p = 2G(z)\varepsilon_{ij} + \frac{2G(z)v_u}{1-2v_u}\varepsilon\delta_{ij} - \alpha P_p \delta_{ij} \quad (4)$$

که در آن  $\delta_{ij}$  دلتای کرانکر می‌باشد و:

$$P_p = M(\xi - \alpha\varepsilon) \quad (5)$$

$$M = \frac{2G(z)(v_u - \nu)}{\alpha^2(1-2v_u)(1-2\nu)} \quad (6)$$

$$v_u = \frac{\nu + \alpha B(1-2\nu)/3}{1 - \alpha B(1-2\nu)/3} \quad (7)$$



شکل ۱- هندسه‌ی ورق دایروی متخلخل

که بالانویس  $p$  در رابطه‌ی (۴) دلالت بر ورق متخلخل دارد،  $P_p$  فشار سیال داخل حفرات،  $M$  مدول بایوت،  $G(z)$  مدول برشی،  $\nu_u$  ضریب پواسون در حالتی که از حفرات سیال خارج نمی‌شود (تخلیه نشده) است که  $0/5 < \nu < \nu_u$  است.  $\alpha$  ضریب بایوت تنش موثر است که  $0 < \alpha < 1$  است.  $\varepsilon$  کرنش حجمی و  $\xi$  تغییرات در محتویات حجم سیال است.

نسبت پواسون در حالت کلی به صورت نسبت کرنش عرضی به کرنش محوری تعریف می‌شود. تغییر شکل در حالت‌های تخلیه شده و تخلیه نشده‌ی مواد متخلخل متفاوت است، پس برای معرفی این پارامتر در مواد متخلخل تفاوت قائل بوده و می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}} \Big|_{\sigma_{jj}=0}, \quad p = 0 \quad i \neq j \quad (8)$$

$$\nu_u = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}} \Big|_{\sigma_{jj}=0}, \quad \xi = 0 \quad i \neq j \quad (9)$$

ضریب بایوت ( $\alpha$ ) تاثیر تخلخل بر رفتار ماده‌ی متخلخل بدون سیال را توصیف می‌کند و بیان می‌کند در اثر ایجاد تخلخل، مقاومت بدنه چند درصد تغییر می‌کند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s} \quad (10)$$

$K_s$  مدول بالک ماده‌ی همسانگرد همگن می‌باشد.

مدول بالک نیز تراکم پذیری یک ماده را نشان می‌دهد. رابطه‌ی مدول بالک با مدول برشی به صورت زیر می‌باشد:

$$K = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}G \quad (11)$$

$$K_u = \frac{2(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)}G \quad (12)$$

ضریب اسکمپتون پارامتر بی‌بعد بسیار مهمی برای توصیف تاثیر سیال درون حفرات بر رفتار ماده‌ی متخلخل در حالت تخلیه نشده ( $\xi = 0$ ) می‌باشد و به صورت نسبت فشار حفره به تنش حجمی کل جسم می‌باشد.

$$B = \frac{dp}{d\sigma} \Big|_{\xi=0} = \frac{1}{1+e_1 \frac{C_p}{C_s}} = \frac{K_u - K}{\alpha K_u} \quad (13)$$

که در آن  $K_u$  مدول بالک حالت تخلیه نشده،  $K$  مدول بالک حالت تخلیه شده،  $C_p$  تراکم پذیری سیال درون حفره و  $C_s$  تراکم پذیری جامد هستند. این ضریب همچنین تاثیر تراکم پذیری سیال بر مدول الاستیک و تراکم پذیری کل ماده‌ی متخلخل را نشان می‌دهد.

قانون تنش-کرنش دو بعدی برای حالت تنش صفحه‌ای در مختصات استوانه‌ای برای حالتی که سیال از حفرات خارج نمی‌شود<sup>۱</sup> ( $\xi = 0$ ) به صورت زیر است:

<sup>۱</sup>Undrained

$$\sigma_{rr}^p = 2G(z)\varepsilon_{rr} + \frac{2G(z)v_u}{1-2v_u}\varepsilon - P_p\alpha$$

$$\sigma_{\theta\theta}^p = 2G(z)\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2G(z)v_u}{1-2v_u}\varepsilon - P_p\alpha \quad (14)$$

$$\sigma_{r\theta}^p = G(z)\gamma_{r\theta}$$

که:

$$P_p = M(-\alpha\varepsilon) \quad (15)$$

با ساده سازی رابطه‌ی (۱۴)، در مختصات قطبی می‌توان نوشت:

$$\sigma_{rr}^p = A_1\varepsilon_{rr} + B_1\varepsilon_{\theta\theta}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^p = A_1\varepsilon_{\theta\theta} + B_1\varepsilon_{rr} \quad (16)$$

$$\sigma_{r\theta}^p = G\gamma_{r\theta}$$

که در آن: [۱۷]

$$A_1 = \left(\frac{2}{1-v_u^2}\right)\left[1+v_u + \frac{(v_u-v)(1+v_u)}{1-2v}\left(1-\frac{C_2}{C_1}\right)\right]G(z)$$

$$B_1 = \left(\frac{2}{1-v_u^2}\right)\left[(1+v_u)v_u + \frac{(v_u-v)(1+v_u)}{1-2v}\left(1-\frac{C_2}{C_1}\right)\right]G(z) \quad (17)$$

$$C_1 = 2\left[1 + \frac{v_u}{1-2v_u} + \frac{v_u-v}{(1-2v_u)(1-2v)}\right]G(z)$$

$$C_2 = C_1 - 2G(z)$$

## ۲-۴- توزیع تخلخل

## ۲-۴-۱- توزیع غیرخطی متقارن

روابط بین  $E$ ،  $G$  و  $\rho$  با  $z$  در توزیع غیرخطی متقارن<sup>۱</sup> تخلخل به صورت زیر در نظر گرفته شده است: [۱۸]

$$G(z) = G_0\left[1 - e_1 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]$$

$$E(z) = E_0\left[1 - e_1 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right] \quad (18)$$

$$\rho(z) = \rho_0\left[1 - e_1 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]$$

که  $e_1$  ضریب تخلخل ورق می‌باشد و مقدار آن بین صفر و یک است. نسبت فضای حفره‌ای به فضای کلی یک ماده‌ی متخلخل را ضریب تخلخل گویند. افزایش ضریب تخلخل به معنای افزایش حجم حفرات نسبت به فضای کل ماده‌ی متخلخل می‌باشد.

<sup>۱</sup>Symmetric

همچنین  $E_1$  و  $E$  مدول الاستیسیته‌ی یانگ در  $z=h/2$  و  $z=-h/2$  و  $G_1$  و  $G$  مدول برشی در  $z=h/2$  و  $z=-h/2$  و به همین صورت  $\rho_0$  و  $\rho$  چگالی جرم در  $z=h/2$  و  $z=-h/2$  می‌باشند. همچنین رابطه‌ی مدول الاستیسیته و مدول برشی به صورت  $E_j = 2G_j(1+\nu)$ , ( $j=0$  و  $1$ ) می‌باشد که در آن  $\nu$  ضریب پواسون است و در راستای ضخامت ورق ثابت در نظر گرفته شده است.

## ۲-۴-۲- توزیع یکنواخت

در توزیع یکنواخت<sup>۱</sup> تخلخل، هیچگونه وابستگی به  $z$  وجود ندارد:

$$G = G_0[1 - e_1]$$

$$E = E_0[1 - e_1] \quad (19)$$

$$\rho = \rho_0[1 - e_1]$$

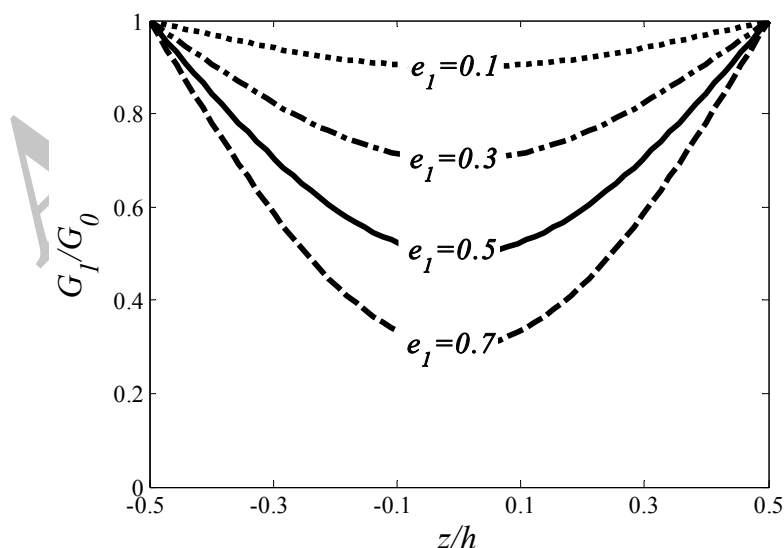
شکل‌های (۲) و (۳) توزیع تخلخل در حالت‌های غیرخطی متقارن و یکنواخت را بر حسب ضخامت ورق نشان می‌دهند.

## ۲-۵- اصل همیلتون

برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر مساله و شرایط مرزی، از اصل تغییرات همیلتون استفاده شده است. اصل همیلتون<sup>۲</sup> برای سیستم‌های دینامیکی در صورت عدم وجود کار خارجی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta U - \delta T] dt = 0 \quad (20)$$

که  $T$  انرژی جنبشی کل سیستم و  $U$  انرژی کرنشی کل سیستم می‌باشد.

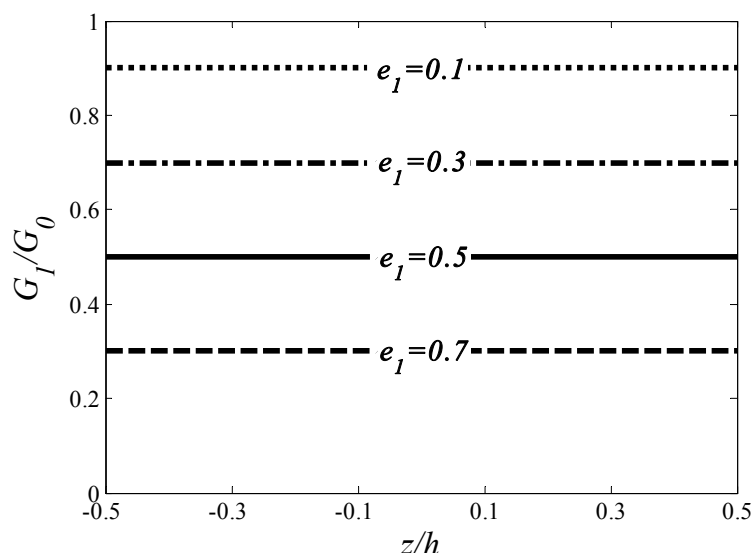


شکل ۲- توزیع تخلخل در حالت غیرخطی متقارن برای ضرایب تخلخل مختلف

<sup>1</sup> Monotonous

<sup>2</sup> Hamilton's principle





شکل ۳- توزیع تخلخل در حالت یکنواخت برای ضرایب تخلخل مختلف

با بررسی معادله‌ی (۲۰) می‌توان متوجه شد که باید انرژی جنبشی و کرنشی ورق را به دست آورده و سپس در آن جایگذاری کرد.

برای به دست آوردن انرژی کرنشی ورق، می‌توان از رابطه‌ی (۲۱) استفاده کرد: [۱۹]

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{rr}\varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta}\gamma_{r\theta}) r dr d\theta dz \quad (21)$$

با استفاده از اصل تغییرات، معادله‌ی (۲۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\delta U = \frac{1}{2} \iiint (2A_1\varepsilon_{rr}\delta\varepsilon_{rr} + B_1\varepsilon_{\theta\theta}\delta\varepsilon_{rr} + B_1\varepsilon_{rr}\delta\varepsilon_{\theta\theta} + 2A_1\varepsilon_{\theta\theta}\delta\varepsilon_{\theta\theta} + B_1\varepsilon_{\theta\theta}\delta\varepsilon_{rr} + B_1\varepsilon_{rr}\delta\varepsilon_{\theta\theta} + 2G(z)\gamma_{r\theta}\delta\gamma_{r\theta}) r dr d\theta dz \quad (22)$$

و برای به دست آوردن انرژی جنبشی ورق نیز از رابطه‌ی (۲۳) می‌توان استفاده نمود:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho(z)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) r dr d\theta dz \quad (23)$$

که برای جمله‌ی اول معادله‌ی فوق داریم:

$$\frac{1}{2} \int_v \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 r dr d\theta dz = \frac{1}{2} \int_r \int_\theta \left(\int_z \rho(z) dz\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 r dr d\theta \quad (24)$$

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_r \int_\theta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 r dr d\theta \right\} \int_z \rho(z) dz = \left\{ \int_r \int_\theta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \delta u}{\partial t}\right) r dr d\theta \right\} P$$

که در آن:

$$\int_z \rho(z) dz = P \quad (25)$$

سپس با استفاده از اصل همیلتون داریم:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_r \int_\theta P \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right) r dr d\theta \right\} dt \\
&= \int_r \int_\theta \left[ \int_{t_1}^{t_2} P \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right) dt \right] r dr d\theta \\
&= \int_r \int_\theta \left[ P \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} P \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u dt \right] r dr d\theta \quad (26) \\
&= \int_r \int_\theta \left[ \text{Pr} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u dt \right] r dr d\theta
\end{aligned}$$

به روش مشابه برای دو جمله‌ی دیگر معادله‌ی (۲۳) عمل خواهیم کرد و جملات مربوط به انرژی جنبشی را به دست می‌آوریم.

$$\int_r \int_\theta \text{Pr} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \delta v \Big|_{t_1}^{t_2} r dr d\theta - \int_r \int_\theta \left[ \int_{t_1}^{t_2} \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v dt \right] r dr d\theta \quad (27)$$

$$\int_r \int_\theta \text{Pr} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} r dr d\theta - \int_r \int_\theta \left[ \int_{t_1}^{t_2} \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dt \right] r dr d\theta \quad (28)$$

### ۳- معادلات حاکم و شرایط مرزی

#### ۳-۱- معادلات

با ساده سازی معادلات (۲۲) و (۲۶) تا (۲۸) و انتگرال گیری از آن‌ها، با فرض تقارن محوری، معادلات حاکم بر ورق مورد بررسی در حالت خطی به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$\begin{aligned}
&\left( -\frac{hR\beta}{aG_0} \right) U'' - \left( \frac{h\beta}{aG_0} \right) U' + \left( \frac{h\beta}{aG_0 R} \right) U + \left( \frac{\eta h R}{2G_0 a^2} \right) W''' + \left( \frac{\eta h}{2G_0 a^2} \right) W'' - \\
&\left( \frac{\eta h}{2G_0 R a^2} \right) W' + \left( \frac{h R E P}{a G_0 \rho} \right) \ddot{U} = 0 \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{h\zeta R}{2a^3 G_0} \right) W^{(4)} + \left( \frac{h\zeta}{a^3 G_0} \right) W''' - \left( \frac{h\zeta}{2G_0 a^3 R} \right) W'' + \left( \frac{h\zeta}{2a^3 R^2 G_0} \right) W' - \left( \frac{hR\eta}{2a^2 G_0} \right) U''' - \\
&\left( \frac{h\eta}{a^2 G_0} \right) U'' + \left( \frac{h\eta}{2a^2 R G_0} \right) U' - \left( \frac{h\eta}{2a^2 R^2 G_0} \right) U + \left( \frac{h R E P}{a G_0 \rho} \right) \ddot{W} = 0 \quad (30)
\end{aligned}$$

که در این معادلات  $h$  ضخامت ورق،  $a$  شعاع خارجی،  $R$  شعاع هر گره،  $E$  مدول الاستیک یانگ،  $G_0$  مدول برشی و  $\rho$  چگالی ورق می‌باشد. سایر پارامترهای استفاده شده در معادلات فوق در رابطه‌ی (۳۵) معرفی شده‌اند.

## ۳-۲- شرایط مرزی

شرایط مرزی در حالت تکیه‌گاه ساده<sup>۱</sup> را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \text{در مرکز ورق } (r=0) \\ U = 0, \quad W' = 0, \quad W''' = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

در لبه‌ی ورق ( $r=a$ )

$$\begin{aligned} U = 0, \quad W = 0, \\ M_{rr} = \left(\frac{\zeta}{2a^3 G_0}\right) W'' + \left(\frac{\lambda}{a^3 R G_0}\right) W' - \left(\frac{\eta}{2a^2 G_0}\right) U' - \left(\frac{\kappa}{a^2 R G_0}\right) U = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

که  $M_{rr}$  منته‌ی گشتاوری تنش در لبه‌ی بیرونی ورق و در صفحه‌ی  $r$  است. و برای حالتی که شرایط مرزی گیردار<sup>۲</sup> باشد، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \text{در مرکز ورق } (r=0) \\ U = 0, \quad W' = 0, \quad W''' = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

در لبه‌ی ورق ( $r=a$ )

$$U = 0, \quad W = 0, \quad W' = 0 \quad (34)$$

پارامترهای استفاده شده در معادلات حاکم و شرایط مرزی ذکر شده به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \beta = \int_z A_1 dz, \quad \eta = \int_z 2A_1 z dz, \quad \zeta = \int_z 2A_1 z^2 dz, \\ P = \int_z \rho(z) dz, \quad \kappa = \int_z B_1 z dz, \quad \lambda = \int_z B_1 z^2 dz \end{aligned} \quad (35)$$

## ۴- روش عددی

در پژوهش حاضر، با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی متخلخل به دست خواهند آمد. در این روش تابع  $f = f(x)$  در دامنه‌ی  $a < x < b$  مورد بررسی قرار می‌گیرد و مشتق  $n$  ام تابع  $f(x)$  در نقطه‌ی  $x_i$  به صورت زیر خواهد بود: [۲۰]

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^M c_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (36)$$

که  $C_{ij}^{(n)}$  ضریب وزنی<sup>۳</sup> مربوط به مشتق مرتبه‌ی  $n$  ام،  $N$  تعداد نقاط شبکه<sup>۴</sup> و  $x_i$  مختصات نقطه‌ی  $i$  ام است. ضرایب وزنی برای مشتق مرتبه اول به صورت زیر خواهد بود: [۲۱]

<sup>1</sup> Simply supported

<sup>2</sup> Clamped

<sup>3</sup> Weighting coefficient

<sup>4</sup> Grid points

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{L^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L^{(1)}(x_j)}$$

$$c_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(1)} \quad (37)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

که:

$$L(x) = \prod_{i=1}^N (x - x_i), \quad L^{(1)}(x_j) = \prod_{i=1, i \neq j}^N (x_j - x_i) \quad (38)$$

$L^{(1)}(x)$  مشتق اول  $L(x)$  و  $x_i$  مختصات نقاط نمونه هستند که ممکن است به صورت اختیاری انتخاب شوند. ضرایب وزنی برای مشتقات مرتبه دوم و بالاتر به صورت زیر است:

$$c_{ij}^{(n)} = n \left( c_{ii}^{(n-1)} c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)} \right) \quad i \neq j$$

$$c_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(n)} \quad i = j \quad (39)$$

$$n = 2, 3, \dots, N - 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

گزینه‌های مختلفی برای انتخاب موقعیت نقاط شبکه وجود دارد که ساده‌ترین روش برای انتخاب نقاط شبکه در دامنه‌ی محاسباتی، انتخاب با فاصله‌ی برابر در راستای مختصات دامنه‌ی محاسباتی است. البته توزیع غیر یکنواخت نقاط شبکه نتایج بهتری را نسبت به نقاط شبکه با فاصله‌ی مساوی به دست می‌دهد. بنابراین در این پژوهش از توزیع غیر یکنواخت نقاط شبکه که نقاط نمونه‌ی چیبیشف-گوس-لوباتو نام دارد استفاده می‌کنیم. این نقاط نمونه به این صورت هستند:

$$r_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)}{2} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (40)$$

با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، معادلات (۲۹) و (۳۰) را می‌توان به صورت زیر گسسته کرد و نوشت:

$$\left(-\frac{hR\beta}{aG_0}\right) \sum_{j=1}^N B_{ij} U_j - \left(\frac{h\beta}{aG_0}\right) \sum_{j=1}^N A_{ij} U_j + \left(\frac{h\beta}{aG_0 R}\right) U_i + \left(\frac{\eta h R}{2G_0 a^2}\right) \sum_{j=1}^N C_{ij} W_j +$$

$$\left(\frac{\eta h}{2G_0 a^2}\right) \sum_{j=1}^N B_{ij} W_j - \left(\frac{\eta h}{2G_0 R a^2}\right) \sum_{j=1}^N A_{ij} W_j + \left(\frac{hREP}{aG_0 \rho}\right) \ddot{U}_i = 0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h\zeta R}{2a^3G_0}\right)\sum_{j=1}^N D_{ij}W_j + \left(\frac{h\zeta}{a^3G_0}\right)\sum_{j=1}^N C_{ij}W_j - \left(\frac{h\zeta}{2G_0a^3R}\right)\sum_{j=1}^N B_{ij}W_j + \left(\frac{h\zeta}{2a^3R^2G_0}\right)\sum_{j=1}^N A_{ij}W_j - \\ & \left(\frac{hR\eta}{2a^2G_0}\right)\sum_{j=1}^N C_{ij}U_j - \left(\frac{h\eta}{a^2G_0}\right)\sum_{j=1}^N B_{ij}U_j + \left(\frac{h\eta}{2a^2RG_0}\right)\sum_{j=1}^N A_{ij}U_j - \left(\frac{h\eta}{2a^2R^2G_0}\right)U_i + \\ & \left(\frac{hREP}{aG_0\rho}\right)\ddot{W}_i = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

همچنین شرایط مرزی گفته شده در معادلات (۳۱) تا (۳۴) را نیز می‌توان به صورت زیر گسسته کرد:

شرط مرزی تکیه‌گاه ساده

در مرکز ورق

$$U_i = 0, \quad \sum_{j=1}^N A_{ij}W_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N C_{ij}W_j = 0 \quad (43)$$

در لبه‌ی ورق

$$U_i = 0, \quad W_i = 0, \quad M_{rr} = \left(\frac{\zeta}{2a^3G_0}\right)\sum_{j=1}^N B_{ij}W_j + \left(\frac{\lambda}{a^3RG_0}\right)\sum_{j=1}^N A_{ij}W_j - \left(\frac{\eta}{2a^2G_0}\right)\sum_{j=1}^N A_{ij}U_j - \left(\frac{\kappa}{a^2RG_0}\right)U_i = 0$$

شرط مرزی گیردار

در مرکز ورق

$$U_i = 0, \quad \sum_{j=1}^N A_{ij}W_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N C_{ij}W_j = 0 \quad (45)$$

در لبه‌ی ورق

$$U_i = 0, \quad W_i = 0, \quad \sum_{j=1}^N A_{ij}W_j = 0 \quad (46)$$

در معادلات و شرایط مرزی گفته شده،  $A_{ij}$ ،  $B_{ij}$ ،  $C_{ij}$  و  $D_{ij}$  به ترتیب ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه‌ی اول تا چهارم هستند.

## ۵- حل معادلات

با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، معادلات حاکم و شرایط مرزی گسسته شدند. حال در این مرحله، برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی، معادلات و شرایط مرزی به فرم زیر نوشته می‌شوند: [۲۲]

$$\begin{bmatrix} M_{dd} & M_{db} \\ M_{bd} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d} \\ \ddot{b} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{db} \\ K_{bd} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ b \end{Bmatrix} = 0 \quad (47)$$

که ماتریس‌های  $M_{dd}$ ،  $M_{db}$ ،  $M_{bd}$ ،  $M_{bb}$ ،  $K_{dd}$ ،  $K_{db}$ ،  $K_{bd}$ ،  $K_{bb}$  با توجه به بردار مختصه تعمیم یافته و معادلات حرکت و شرایط مرزی به دست می‌آیند.

با فرض اینکه پاسخ سیستم هارمونیک است، یعنی  $\begin{Bmatrix} d \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{d} \\ \bar{b} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$  معادله‌ی ماتریسی (۴۷) را می‌توان به صورت دو معادله‌ی (۴۸) و (۴۹) نوشت:

$$-\omega^2 M_{dd} \{\bar{d}\} + K_{dd} \{\bar{d}\} + K_{db} \{\bar{b}\} - \omega^2 M_{db} \{\bar{b}\} = 0 \quad (48)$$

$$-\omega^2 M_{bb} \{\bar{b}\} + K_{bb} \{\bar{b}\} + K_{bd} \{\bar{d}\} - \omega^2 M_{bd} \{\bar{d}\} = 0 \quad (49)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۴۹)،  $\{\bar{b}\}$  بر حسب  $\{\bar{d}\}$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\{\bar{b}\} = -[K_{bb} - \omega^2 M_{bb}]^{-1} [K_{bd} - \omega^2 M_{bd}] \{\bar{d}\} \quad (50)$$

با جایگذاری  $\{\bar{b}\}$  از معادله‌ی (۵۰) در معادله‌ی (۴۸)، رابطه‌ی (۵۱) به دست خواهد آمد:

$$\left[ K_{dd} - \omega^2 M_{dd} - [K_{db} - \omega^2 M_{db}] [K_{bb} - \omega^2 M_{bb}]^{-1} [K_{bd} - \omega^2 M_{bd}] \right] \{\bar{d}\} = 0 \quad (51)$$

که این معادله یک معادله‌ی مقدار ویژه است و وقتی جواب غیر بدیهی دارد که دترمینان ماتریس ضریب  $\{\bar{d}\}$  برابر صفر باشد. بنابراین  $\omega$  که همان فرکانس طبیعی سیستم است از حل معادله جبری (۵۲) به دست می‌آید:

$$\det \left( \left[ K_{dd} - \omega^2 M_{dd} - [K_{db} - \omega^2 M_{db}] [K_{bb} - \omega^2 M_{bb}]^{-1} [K_{bd} - \omega^2 M_{bd}] \right] \right) = 0 \quad (52)$$

در این پژوهش، روند حل با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی در نرم افزار متلب<sup>۱</sup> برنامه‌نویسی شده و نتایج برحسب فرکانس طبیعی محاسبه شده است.

## ۶- نتایج و بحث

نتایج تحلیل ارتعاشات ورق دایروی متخلخل تحت دو شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار برای دو نوع توزیع تخلخل غیرخطی متقارن و توزیع یکنواخت در ادامه آمده است.

ابتدا با استفاده از معادلات و روش مربعات دیفرانسیلی، به بررسی و صحه گذاری جواب برای حالت ساده‌تر پرداخته می‌شود. به این منظور چهار فرکانس طبیعی ابتدایی ورق دایروی همسانگرد را با استفاده از روابط به دست آمده و در حالتی که ضرایب تخلخل و اسکمپتون برابر صفر باشند، به دست آورده و سپس با پژوهش‌های گذشته مقایسه می‌شوند. جنس ورق دایروی همسانگرد از فولاد با  $E=200 \text{ GPa}$ ،  $\rho=7800 \text{ Kg/m}^3$  و  $\nu=0.3$  است. همچنین مشخصات هندسی ورق در جدول (۱) آورده شده است.

نتایج موجود در جدول (۲) برای شرایط مرزی گیردار و نتایج جدول (۳) برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده می‌باشد. با بررسی جداول (۲) و (۳) مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده با دقت بالایی قابل قبول می‌باشند.

<sup>۱</sup> MATLAB

حال به بررسی فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی متخلخل پرداخته می‌شود. خصوصیات ماده‌ی متخلخل در جدول (۱) ارائه شده است. نتایج برای دو نوع توزیع تخلخل غیرخطی متقارن و یکنواخت بررسی شده‌اند. شکل‌های (۴) و (۵) و جدول (۴) برای حالت توزیع تخلخل غیرخطی متقارن می‌باشند که در این حالت، روابط (۱۸) برقرار می‌باشند.

شکل (۴) تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب ضریب تخلخل در شرایط مرزی گیردار و تکیه‌گاه ساده در دو مقدار مختلف ضریب اسکمپتون  $B$  را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشخص است که با افزایش ضریب تخلخل، فرکانس طبیعی نیز افزایش پیدا می‌کند. افزایش ضریب تخلخل به معنای افزایش حجم حفرات نسبت به فضای کل ماده‌ی متخلخل می‌باشد.

**جدول ۱-** خصوصیات ماده‌ی متخلخل، ارائه شده توسط Cheng و Detournay [۱] و مشخصات هندسی ورق دایروی

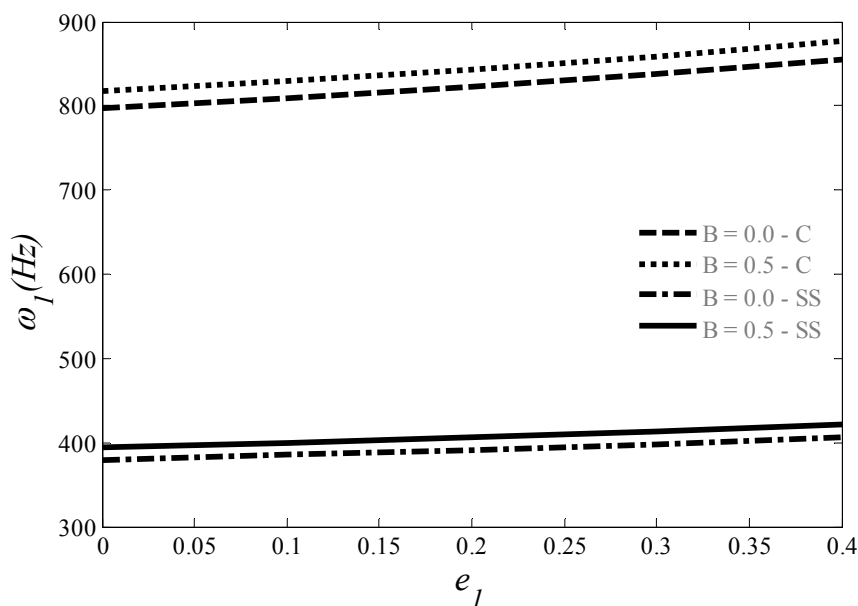
ماده‌ی متخلخل (Tennessee marble)	
$60 \times 10^9$	مدول الاستیسیته ( $N \cdot m^{-2}$ )
$2/7 \times 10^3$	چگالی ( $Kg \cdot m^{-3}$ )
۰/۲۵	ضریب پواسون ( $\nu$ )
۰/۱۹	$\alpha$
۶۰۰	شعاع ورق (mm)
۱۰	ضخامت ورق (mm)

**جدول ۲-** مقایسه‌ی چهار فرکانس بی بعد خطی اول ورق دایروی همسانگرد تحت شرط مرزی گیردار

$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	
۱۰/۲۱۶	۳۹/۷۷۱	۸۹/۱۰۴	۱۵۸/۱۸۴	مرجع [۷]
۱۰/۲۱۵۸	۳۹/۷۷۱	۸۹/۱۰۴	۱۵۸/۱۸۳	روش‌های عددی مرجع [۲۴]
۱۰/۲۱۵۸	۳۹/۷۷۱۱	۸۹/۱۰۴۱	۱۵۸/۱۸۴۲	پژوهش حاضر

**جدول ۳-** مقایسه‌ی چهار فرکانس بی بعد خطی اول ورق دایروی همسانگرد تحت شرط مرزی تکیه‌گاه ساده

$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	
۴/۹۳۵	۲۹/۷۲۰	۷۴/۱۵۶	۱۳۸/۳۱۸	مرجع [۷]
۴/۹۷۷	۲۹/۷۶	۷۴/۲۰	۱۳۸/۳۴	روش‌های عددی مرجع [۲۴]
۴/۹۳۷۱	۲۹/۷۳۵۰	۷۴/۱۹۴۲	۱۳۸/۳۸۹۶	پژوهش حاضر



شکل ۴- فرکانس طبیعی پایه بر حسب ضریب تخلخل برای شرایط مرزی گیردار و تکیه‌گاه ساده در حالت توزیع غیرخطی متقارن تخلخل

فرکانس به طور کلی به نسبت مجذور سفتی به جرم بستگی دارد که با افزایش تخلخل، اگرچه سفتی کاهش می‌یابد، ولی جرم بیشتر کم می‌شود و بنابراین این نسبت افزایش پیدا کرده و در نهایت باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. [۲۳] در واقع بیشتر بودن نرخ کاهش جرم نسبت به سفتی، باعث تفاوت رفتار مواد متخلخل با سایر مواد شده است و این، یکی از ویژگی‌های خاص این مواد است. [۲۵]

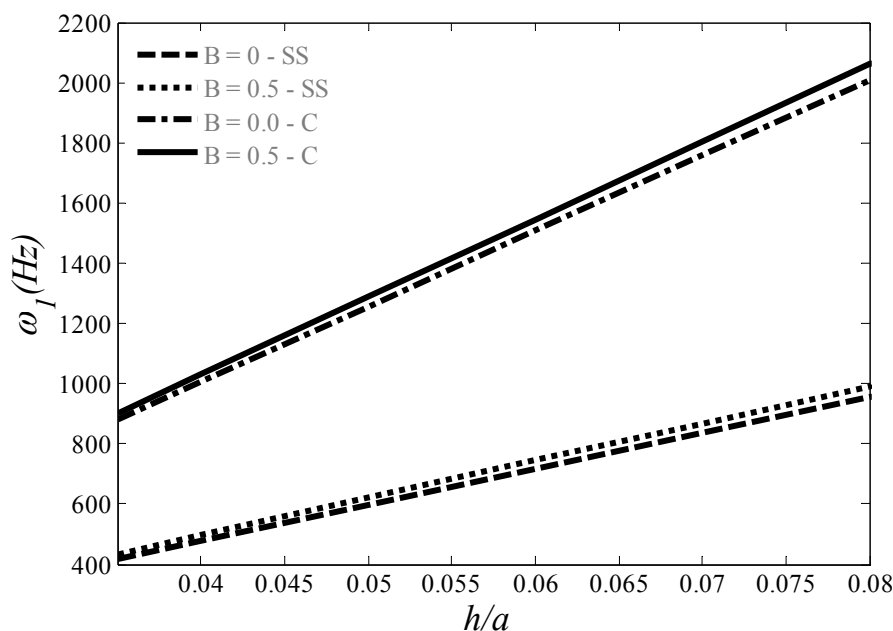
همچنین در جدول (۴) مقادیر دقیق فرکانس طبیعی پایه بر حسب ضرایب تخلخل و  $B$  مختلف ارائه شده است. با بررسی این جدول می‌توان متوجه شد که با افزایش ضریب  $B$ ، فرکانس طبیعی نیز افزایش پیدا می‌کند. به این صورت که با افزایش ضریب اسکمپتون، فشردگی حفرات افزایش می‌یابد که نرخ افزایش سفتی بیش از افزایش جرم می‌شود و بنابراین فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. همچنین افزایش فرکانس طبیعی با افزایش ضریب تخلخل نیز در این جدول هم مشخص است.

جدول ۴- فرکانس طبیعی پایه برای مقادیر مختلف  $e_1$  و  $B$  برای توزیع غیرخطی متقارن تخلخل

$e_1$			شرایط مرزی	$B$
۰/۴	۰/۲	۰/۰		
۴۰۶/۶۷۰۰	۳۹۱/۴۰۹۳	۳۷۹/۶۳۵۹	تکیه‌گاه ساده	۰/۰
۸۵۴/۴۶۳۲	۸۲۲/۳۹۸۶	۷۹۷/۶۶۱۲	گیردار	
۴۱۵/۹۷۰۴	۴۰۰/۳۶۰۷	۳۸۸/۳۱۸۱	تکیه‌گاه ساده	۰/۳
۸۶۷/۸۱۵۰	۸۳۵/۲۴۹۳	۸۱۰/۱۲۵۴	گیردار	
۴۲۱/۹۶۰۸	۴۰۶/۱۲۶۳	۳۹۳/۹۱۰۲	تکیه‌گاه ساده	۰/۵
۸۷۶/۴۸۱۴	۸۴۳/۵۹۰۶	۸۱۸/۲۱۵۷	گیردار	

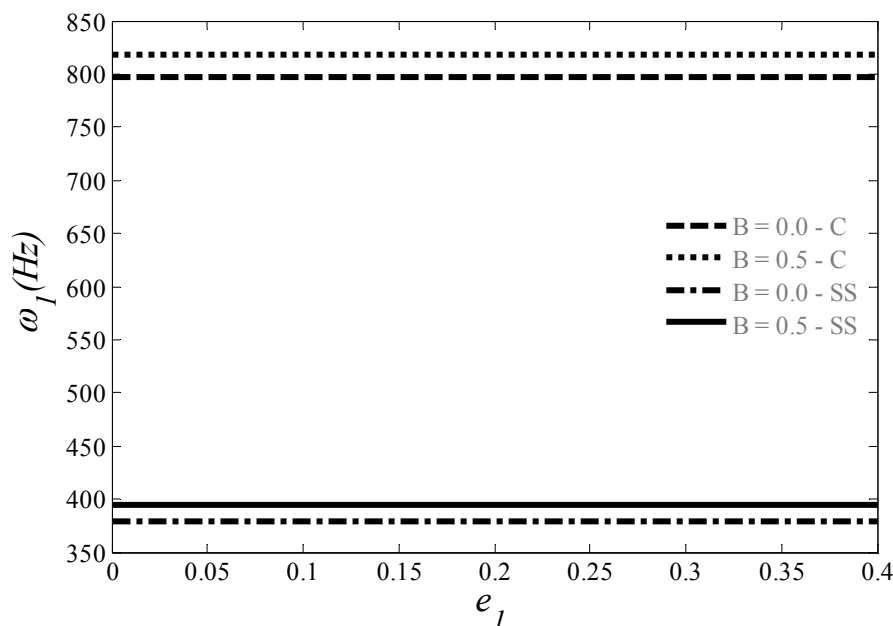


در شکل (۵) نیز تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب نسبت ضخامت به شعاع ورق دایروی در دو شرط مرزی گفته شده و با ضرایب  $B$  مختلف با  $e_1=0/3$  مشاهده می‌شود. در این شکل مشخص است که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، فرکانس طبیعی به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند. همچنین با مقایسه دو شرط مرزی می‌توان متوجه شد که نرخ افزایش فرکانس با افزایش  $h/a$  برای شرط مرزی گیردار بیش از شرط مرزی تکیه‌گاه ساده است. شکل‌های (۶) و (۷) و جدول (۵) برای حالت توزیع تخریل یکنواخت است. در این توزیع از روابط (۱۹) استفاده می‌شود. در شکل (۶) تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب ضریب تخریل ارائه شده است که مشاهده می‌شود با افزایش تخریل، هیچگونه تغییری در فرکانس طبیعی رخ نمی‌دهد و ثابت باقی می‌ماند. باید توجه داشت که فرکانس‌های طبیعی فقط به نوع توزیع تخریل بستگی ندارند. به همین دلیل است که با وجود یکسان بودن توزیع مدول الاستیک و چگالی در حالت غیرخطی متقارن، فرکانس طبیعی به دلیل ساختار معادلات حاکم بر این حالت افزایش می‌یابند، ولی این اتفاق برای توزیع یکنواخت تخریل رخ نمی‌دهد. در توزیع یکنواخت نیز مدول الاستیک و چگالی به یک نسبت تغییر می‌کنند ولی با توجه به اینکه معادلات حاکم در این حالت ساده‌تر می‌شوند، برخی ضرایب صفر می‌شوند و با تغییر در سفتی و چگالی معادل که در تعیین فرکانس نقش دارند، فرکانس طبیعی حالت یکنواخت تغییری نمی‌کند. جدول (۵) نیز مقادیر فرکانس طبیعی پایه برای ضرایب  $B$  و تخریل متفاوت را نشان می‌دهد. برای توزیع تخریل یکنواخت نیز همانند توزیع غیرخطی متقارن، با افزایش  $B$ ، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد که دلیل آن افزایش سفتی بیش از جرم است. در جدول (۵) همچنین می‌توان ثابت بودن فرکانس طبیعی در ضرایب مختلف را به خوبی مشاهده کرد. شکل (۷) نیز مشابه شکل (۳) و در حالت توزیع تخریل یکنواخت می‌باشد. در این شکل نیز همانند شکل (۳)، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. شکل (۵) برای  $e_1=0/3$  رسم شده است.



شکل ۵- فرکانس طبیعی پایه بر حسب نسبت ضخامت به شعاع ورق برای شرایط مرزی گیردار و

تکیه‌گاه ساده در حالت توزیع غیرخطی متقارن تخریل ( $e_1=0/3$ )



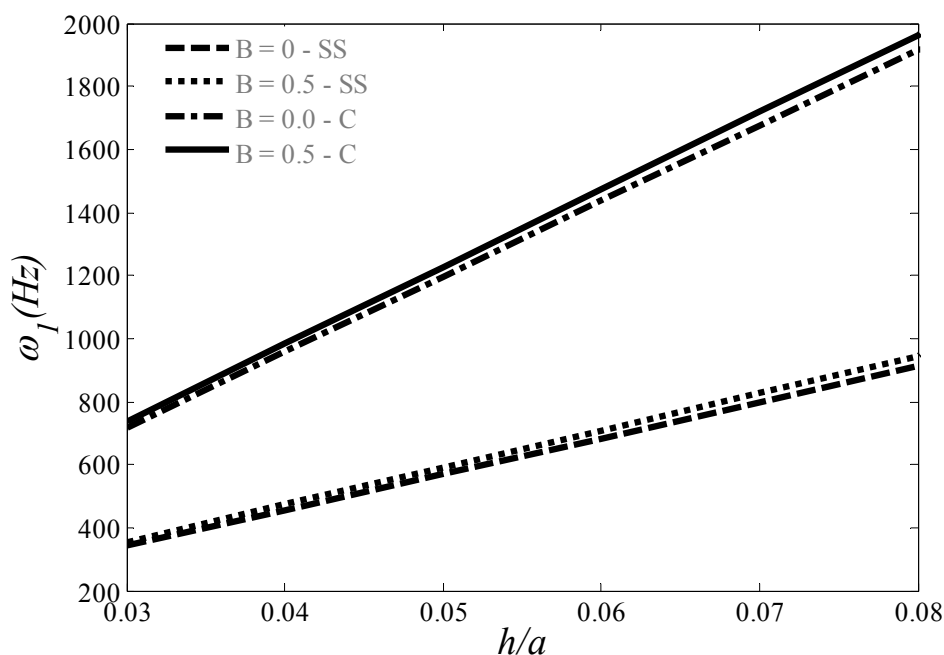
شکل ۶- فرکانس طبیعی پایه بر حسب ضریب تخلخل برای شرایط مرزی گیردار و تکیه‌گاه ساده در حالت توزیع یکنواخت تخلخل

جدول ۵- فرکانس طبیعی پایه برای مقادیر مختلف  $e_1$  و  $B$  برای توزیع یکنواخت تخلخل

$B$	شرایط مرزی	$e_1$		
		۰/۴	۰/۲	۰/۰
۰/۰	تکیه‌گاه ساده	۳۷۹/۶۳۵۸	۳۷۹/۶۳۵۸	۳۷۹/۶۳۵۸
	گیردار	۷۹۷/۶۶۱۲	۷۹۷/۶۶۱۲	۷۹۷/۶۶۱۲
۰/۳	تکیه‌گاه ساده	۳۸۸/۳۱۸۱	۳۸۸/۳۱۸۱	۳۸۸/۳۱۸۱
	گیردار	۸۱۰/۱۲۵۴	۸۱۰/۱۲۵۴	۸۱۰/۱۲۵۴
۰/۵	تکیه‌گاه ساده	۳۹۳/۹۱۰۲	۳۹۳/۹۱۰۲	۳۹۳/۹۱۰۲
	گیردار	۸۱۸/۲۱۵۷	۸۱۸/۲۱۵۷	۸۱۸/۲۱۵۷

## ۷- جمع بندی

پژوهش حاضر به تحلیل ارتعاشات ورق دایروی متخلخل تحت دو شرط مرزی گیردار و تکیه‌گاه ساده بر مبنای تئوری کلاسیک ورق‌ها پرداخت. ابتدا با استفاده از اصل تغییرات همیلتون، معادلات حاکم بر ورق مورد بررسی و شرایط مرزی به دست آورده شدند. این تغییرات در دو حالت غیرخطی متقارن و یکنواخت و طبق توابع مشخص شده مورد بررسی قرار گرفتند. معادلات و شرایط مرزی به دست آمده با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM) به معادلات جبری تبدیل و سپس حل شدند.



شکل ۷- فرکانس طبیعی پایه بر حسب نسبت ضخامت به شعاع ورق برای شرایط مرزی گیردار و تکیه‌گاه ساده در حالت توزیع یکنواخت تخلخل ( $e_1=0/3$ )

در نهایت فرکانس طبیعی ورق به دست آمد که تاثیر تغییر تخلخل، فشردگی حفرات، توزیع حفرات، شرایط مرزی و نسبت ضخامت به شعاع ورق مورد بررسی قرار گرفتند و نتایج به صورت زیر می‌باشند:

۱- در حالت توزیع تخلخل غیرخطی متقارن با افزایش ضریب تخلخل، فرکانس طبیعی پایه نیز افزایش پیدا می‌کند. در این حالت جرم بیش از سفتی کاهش پیدا می‌کند و فرکانس که با مجذور سفتی به جرم متناسب است نیز افزایش می‌یابد.

۲- تغییرات تخلخل بر حسب فرکانس طبیعی در حالت توزیع یکنواخت تخلخل تاثیری ندارد و فرکانس طبیعی ثابت می‌ماند.

۳- در هر دو شرط مرزی گفته شده و برای هر دو نوع توزیع تخلخل، در یک ضریب تخلخل ثابت، با افزایش  $B$ ، فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد. با افزایش فشردگی حفرات، سفتی ورق بیش از جرم آن زیاد می‌شود و بنابراین فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.

۴- در هر دو نوع توزیع تخلخل، فرکانس طبیعی در شرایط مرزی گیردار بیش از فرکانس طبیعی در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده است.

۵- با افزایش نسبت ضخامت ورق به شعاع آن، فرکانس طبیعی به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند. این اتفاق برای هر دو نوع توزیع تخلخل صادق است.

۶- نرخ افزایش فرکانس طبیعی با افزایش نسبت ضخامت به شعاع ورق، در شرایط مرزی گیردار بیش از شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده است.

## مراجع

- [1] Detournay, E., and Cheng, A. H. D., “*Fundamentals of Poroelasticity*”, Pergamon Press, New York, (1993).
- [2] Abrate, S., “Free Vibration, Buckling and Static Deflections of Functionally Graded Plates”, *Composites Science and Technology*, Vol. 66, No. 14, pp. 2383-2394, (2006).
- [3] Reddy, J. N., and Khdeir, A. A., “Buckling and Vibration of a Laminated Composite Plate using Various Plate Theories”, *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 12, pp. 1808-1817, (1989).
- [4] Decha-Umphai, K., and Mei, C., “Finite Element Method for Nonlinear Forced Vibrations of Circular Plates”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 9, pp. 1715-1726, (1986).
- [5] Wang, Y., Xu, R., and Ding, H., “Free Axisymmetric Vibration of FGM Circular Plates”, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 30, No. 9, pp. 1077-1082, (2009).
- [6] Najafzadeh, M. M., and Heydari, H. R., “An Exact Solution for Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher Order Shear Deformation Plate Theory under Uniform Radial Compression”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, No. 3, pp. 603-612, (2008).
- [7] Wu, T. Y., Wang, Y. Y., and Liu, G. R., “Free Vibration Analysis of Circular Plates using Generalized Differential Quadrature Rule”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, No. 46, pp. 5365–5380, (2002).
- [8] Brayan, G. H., “On the Stability of a Plane Plate under Thrust in its Own Plane with Application to the Buckling of the Side of a Ship”, *Proceeding of the London Mathematical Society*, Vol. 1, No. 1, pp. 54-67, (1890).
- [9] Reismann, H., “Bending and Buckling of an Elastically Restrained Circular Plate”, *Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, No. 2, pp. 167–172, (1952).
- [10] Amon, R., and Widera, O. E., “Stability of Edge-reinforced Circular Plate”, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 97, No. 5, pp. 1597–1601, (1971).
- [11] Yamaki, N., “Buckling of a Thin Annular Plate under Uniform Compression”, *Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, No. 3, pp. 267–273, (1958).
- [12] Klosner, J. M., and Forry, M. J., “Buckling of Simply Supported Plates under Arbitrary Symmetrical Temperature Distributions”, *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 25, No. 9, pp. 181–184, (1958).
- [13] Arshid, E., and Khorshidvand, A. R., “Numerical Solution of Free Vibrations Equations of Porous Circular Plates Based on Classical Theory”, *Second National Conference of*

- Civil, Architecture, Electricity and Mechanical Engineering, December 17, Gorgan, Iran, (2015). (In Persian)
- [14] Reddy, J. N., “*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*”, CRC Press, New York, (2004).
- [15] Brush, D. O., and Almorth, B. O., “*Buckling of Bars, Plates and Shells*”, McGraw-Hill, New York, (1975).
- [16] Najafizadeh, M. M., and Eslami, M. R., “Buckling Analysis of Circular Plates of Functionally Graded Materials under Uniform Radial Compression”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 44, No. 12, pp. 2479-2493, (2002).
- [17] Jabbari, M., Mojahedin, A., Khorshidvand, A. R., and Eslami, M. R., “Buckling Analysis of a Functionally Graded Thin Circular Plate Made of Saturated Porous Materials”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 140, No. 2, pp. 287–295, (2013).
- [18] Magnucka-Blandzi, E., “Axi-symmetrical Deflection and Buckling of Circular Porous-Cellular Plate”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, No. 3, pp. 333–337, (2008).
- [19] Khorshidvand, A. R., Farzaneh Joubaneh, E., Jabbari, M., and Eslami, M. R., “Buckling Analysis of a Porous Circular Plate with Piezoelectric Sensor-actuator Layers under Uniform Radial Compression”, *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 1, pp. 179-193, (2014).
- [20] Liew, K. M., Han, J. B., Xiao, Z. M., and Du, H., “Differential Quadrature Method for Mindlin Plates on Winkler Foundations”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 38, No. 4, pp. 405-421, (1996).
- [21] Hosseini-Hashemi, Sh., and Khorami, K., “Analysis of Free Vibration of Moderately Thick Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials using Differential Quadrature Method”, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 93-106, (2011). (In Persian)
- [22] Zong, Z., and Zhang, Y. Y., “*Advanced Differential Quadrature Methods*”, Chapman and Hall/CRC, New York, (2009).
- [23] Theodorakopoulos, D. D., and Beskos, D. E., “Flexural Vibrations of Poroelastic Plates”, *Acta Mechanica*, Vol. 103, No. 4, pp. 191-203, (1994).
- [24] Leissa, A. W., “*Vibration of Plates*”, NASA SP, Washington, (1969).
- [25] Chen, D., Yang, J., and Kitipornchai, S., “Free and Forced Vibrations of Shear Deformable Functionally Graded Porous Beams”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 108- 109, pp. 14-22, (2016).

## فهرست نمادهای انگلیسی

- $a$ : شعاع ورق  
 $B$ : ضریب اسکمپتون  
 $C_p$ : تراکم پذیری سیال درون حفره  
 $C_s$ : تراکم پذیری جامد  
 $C_{ij}$ : ضریب وزنی روش مربعات دیفرانسیلی  
 $E$ : مدول الاستیک یانگ  
 $e_1$ : ضریب تخلخل  
 $G$ : مدول برشی  
 $h$ : ضخامت ورق  
 $K$ : مدول بالک حالت تخلیه شده  
 $K_s$ : مدول بالک ماده‌ی همسانگرد همگن  
 $K_u$ : مدول بالک حالت تخلیه نشده  
 $k$ : انحنا  
 $M$ : مدول بایوت  
 $M_{rr}$ : منتجه‌ی گشتاوری تنش در صفحه‌ی  $r$   
 $P_p$ : فشار سیال داخل حفرات  
 $R$ : شعاع بی بعد  
 $r$ : محور شعاعی  
 $T$ : انرژی جنبشی  
 $U$ : انرژی کرنشی  
 $u$ : جابجایی شعاعی  
 $w$ : جابجایی عرضی  
 $z$ : محور عمودی

## نمادهای یونانی

- $\alpha$ : ضریب بایوت  
 $\delta_{ij}$ : دلتای کرانکر  
 $\varepsilon$ : کرنش  
 $\theta$ : محور پیچشی  
 $\vartheta$ : ضریب پواسون در حالت تخلیه شده  
 $\vartheta_u$ : ضریب پواسون در حالت تخلیه نشده  
 $\xi$ : تغییرات در محتویات حجم سیال  
 $\rho$ : چگالی جرم  
 $\sigma$ : تنش  
 $\omega$ : فرکانس طبیعی

**Abstract**

The present study provides the vibrations analysis of a solid circular plate made of porous material. The plate is assumed to be comparatively thin and the porous material properties vary through the thickness direction of the plate following given functions. The governing equations and boundary conditions are obtained based on the classical plate theory and by employing Hamilton's principle. By using differential quadrature method the governing differential equations are converted to algebraic equations and the natural frequencies are obtained. The obtained results show by increasing the porosity, the natural frequency of the plate increases in poro/nonlinear symmetric distribution but the natural frequency remains constant in poro/monotonous distribution and in both of mentioned poro distributions, by increasing the pores compressibility which is shown by Skempton coefficient at constant porosity, the natural frequency of the plate increases too.

Also by increasing the thickness to radius of the plate ratio, the natural frequency increases. The results are investigated for clamped and simply supported boundary conditions and are verified for the simpler state with the known results in the literature.

Archive of SID