

## تحلیل اغتشاشات تیر مجهز به جاذب دینامیکی غیرخطی تحت تحریک رزونانسی و غیررزونانسی

در پژوهش حاضر، تأثیر جاذب دینامیکی غیرخطی بر رفتار ارتعاشات پایای تیر یکسرگردار تحت تحریک رزونانسی و غیررزونانسی بررسی شده است. پس از استخراج معادلات حاکم، بی‌بعدسازی و اعمال روش گالرکین، از روش مقیاس‌های چندگانه برای حل استفاده شده و تأثیر پارامترهای جاذب بر رفتار ارتعاشی سیستم مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد در ناحیه ظهور پدیده پرش، تحت شرایط خاصی، امکان عملکرد بهتر جاذب غیرخطی نسبت به جاذب خطی در کاهش دامنه وجود دارد. همچنین، گرچه نتایج حاکی از عدم وجود تفاوت عمده در رفتار ارتعاشی سیستم در حضور جاذب‌های دینامیکی خطی نامیرا، میرا و غیرخطی در فرکانس‌های تحریک غیررزونانسی است ولی جاذب غیرخطی باعث جابجایی فرکانس‌های تشدید و تغییر بازه‌ی فرکانسی غیررزونانسی سیستم نسبت به حالت خطی می‌شود.

موسی رضائی<sup>۱</sup>

استاد

رحیم وصال<sup>۲</sup>

دانشجوی دکترا

واژه‌های راهنما: جاذب دینامیکی غیرخطی، تحریک رزونانسی و غیررزونانسی، روش مقیاس‌های چندگانه، پدیده پرش

### ۱- مقدمه

از گذشته‌های دور محققان همواره در تلاش بوده‌اند تا از نوسانات ناخواسته اجزای مکانیکی جلوگیری کنند. کاهش نوسانات نامطلوب تیرها، به عنوان یکی از سازه‌های پرکاربرد در صنایع مختلف، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. استفاده از جاذب‌های دینامیکی یکی از روش‌های کارآمد برای نیل به این منظور محسوب می‌شود. جاذب دینامیکی در سال (۱۹۰۹) برای نخستین بار استفاده توسط فرهم پیشنهاد شد که شامل یک سیستم جرم و فنر بود که به سیستم نوسانی اولیه‌ی نامیرای یک درجه آزادی متصل شده بود. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که استفاده از جاذب دینامیکی باعث جلوگیری از بروز پدیده تشدید در حوالی فرکانس طبیعی سیستم اولیه می‌شود [۱]. هارتوگ رفتار ارتعاشی یک سیستم یک درجه آزادی با جاذب دینامیکی میرا را در حضور نیروی خارجی هارمونیک مطالعه کرد. او نشان داد که وجود میرایی در ساختار جاذب باعث کاهش چشمگیر حساسیت سیستم نسبت به فرکانس تحریک شده، دامنه نوسانات پاسخ نسبت به حالت نامیرا

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول، استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، m\_rezaee@tabrizu.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران،

rahim\_vesal@mecheng.iust.ac.ir

کاهش بیشتری می‌یابد [۱]. والش و لامانکوسا یک جاذب ارتعاشی را به منظور کنترل نوسانات یک سیستم یک درجه آزادی طراحی کردند. نابالانسی دورانی سیستم اصلی به عنوان نیروی تحریک در نظر گرفته شد. هدف از طراحی این جاذب کاهش دامنه نوسانات گذرای سیستم در حین تغییرات احتمالی در وضعیت نوسانی پایای سیستم بود. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از جاذب ارتعاشی امکان کنترل دامنه نوسانات سیستم اصلی را فراهم می‌کند [۲]. در سال (۲۰۰۳)، نایفه و زوو نشان دادند که اضافه کردن جاذب دینامیکی دو درجه آزادی به سیستم اولیه یک درجه آزادی تأثیر بسزایی در کاهش دامنه نوسانات آن دارد. نتایج این پژوهش به وضوح نشانگر این است که یک جاذب دینامیکی دو درجه آزادی نسبت به دو جاذب دینامیکی مشابه یک درجه آزادی عملکرد بهتری در کاهش دامنه نوسانات سیستم دارد [۳].

با وجود مؤثر بودن جاذب‌های دینامیکی در کنترل دامنه نوسانات، نوع خطی آنها تنها برای بازه‌ی فرکانسی تحریک بسیار محدودی کارایی دارد. این در حالی است که جاذب‌های دینامیکی غیرخطی برای بازه‌های فرکانسی گسترده‌تری قابل استفاده هستند [۴-۷]. هاکستون یک تیر با جرم متمرکز در انتها را به عنوان جاذب دینامیکی به یک سیستم ارتعاشی یک درجه‌ی آزادی میرا اضافه کرد. نتایج این پژوهش شامل تنظیم اندازه جرم متمرکز و طول تیر جاذب به منظور کاهش بیشتر دامنه ارتعاشات سیستم می‌شود [۸]. گاش و همکاران از یک پاندول صلب به عنوان جاذب ارتعاشی برای کنترل دامنه نوسانات یک سیستم یک درجه آزادی استفاده کردند. مطالعه آنها شامل دو مرحله، به ترتیب با در نظر گرفتن نیروی جاذبه در مرحله نخست و گشتاور ناشی از یک فنر پیچشی در مرحله بعد به عنوان عامل بازگرداننده پاندول، می‌باشد. در این پژوهش از روش بالانس هارمونیک برای تحلیل معادلات غیرخطی استفاده شده است [۹، ۱۰].

یونگ شنگ سو و فرگوسن به بررسی تأثیر جاذب دینامیکی غیرخطی میرا بر رفتار ارتعاشی یک سیستم یک درجه آزادی پرداختند. در این پژوهش از روش بالانس هارمونیک برای حل معادلات غیرخطی حاکم بر سیستم استفاده شده است. نتایج بدست آمده از این تحقیق شامل تأثیر سفتی فنر جاذب، دامنه نیروی تحریک و میرایی جاذب بر رفتار دینامیکی سیستم و مقایسه نتایج با پاسخ بدست آمده از تست‌های تجربی است [۱۱]. در سال (۲۰۰۸)، شیروکی و گندلمن رفتار دینامیکی یک سیستم خطی یک درجه آزادی دارای یک جاذب غیرخطی تحت تحریک پارامتریک را مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش پایداری سیستم برای حالت بدون جاذب و دارای جاذب دینامیکی مورد مقایسه قرار گرفته است. آنها نشان دادند که به ازای شرایط اولیه خاصی، اضافه کردن جاذب دینامیکی تأثیر بسزایی در کنترل دامنه نوسانات پاسخ دارد [۱۲].

در سال (۲۰۱۴)، جی به بررسی رفتار دینامیکی یک سیستم یک درجه آزادی غیرخطی در حضور جاذب دینامیکی غیرخطی تحت تحریک خارجی پرداخته است. فرکانس طبیعی جاذب نزدیک به یک سوم فرکانس طبیعی سیستم خطی متناظر اولیه در نظر گرفته شده است. نتایج بدست آمده از این تحقیق شامل بررسی پدیده پرش در دامنه نوسانات و تأثیر ضریب میرایی و سفتی فنر جاذب بر رفتار ارتعاشی سیستم می‌باشد [۱۳]. طراحی جاذب‌های ارتعاشی خطی برای تیرهای خمشی توسط جیکوت [۱۴] و جوانگ [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. ونگ با استفاده از روش المان محدود به ارائه روشی برای طراحی جاذب‌های دینامیکی به منظور کاهش دامنه نوسانات تیر پرداخت [۱۶].

جووالچی و ارتاش با استفاده از یک پاندول به عنوان جاذب ارتعاشی به مطالعه تئوری و تجربی ارتعاشات تیر یکسرگیردار دارای جرم متمرکز در انتهای آزاد پرداختند [۱۷]. نتایج مطالعات آنها نشان دهنده تأثیر قابل ملاحظه جاذب دینامیکی بر کاهش دامنه نوسانات سیستم اصلی می‌باشد. کوچیما و سایتو به بررسی رفتار ارتعاشی یک تیر دو سر تکیه‌گاه ساده تحت تحریک جابجایی هارمونیک در حضور جاذب دینامیکی غیرخطی پرداختند. آنها از روش بالانس هارمونیک و نیوتن-رافسون برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی سیستم استفاده کرده و پایداری پاسخ را مورد ارزیابی قرار دادند [۱۸].

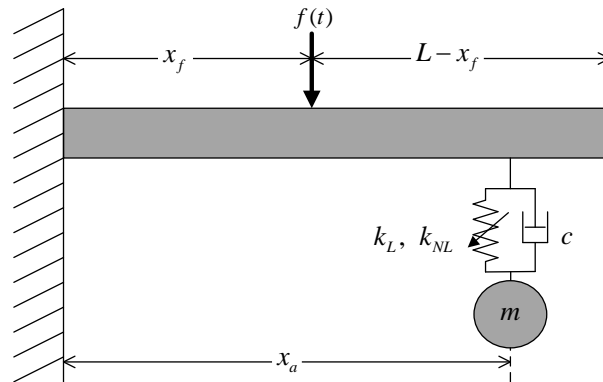
جورجیادس و واکاکیس ارتعاشات اجباری تیر اویلر-برنولی دو سر تکیه‌گاه ساده دارای جاذب دینامیکی غیرخطی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها برای بدست آوردن پاسخ سیستم، پس از کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیلی حاکم به وسیله روش گالرکین، به کمک روش‌های حل عددی به بررسی رفتار ارتعاشی سیستم پرداختند. نسبت انرژی تلف شده در جاذب به کل انرژی اعمال شده به تیر و عوامل تأثیرگذار بر این نسبت در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته است [۱۹].

آوراموف و گندلمن ارتعاشات اجباری تیر دو سر تکیه‌گاه ساده در حضور جاذب دینامیکی غیرخطی را به صورت عددی مورد مطالعه قرار دادند. همچنین پایداری پاسخ تیر با کمک روش لیاپانوف در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت [۲۰]. در سال (۲۰۱۵)، مرتضی دردل و همکاران تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها تحت تحریک هارمونیک را در حضور جاذب دینامیکی غیرخطی مورد بررسی قرار دادند [۲۱]. آنها از روش‌های عددی خاصی برای بدست آوردن پاسخ پایای سیستم استفاده کردند. در این پژوهش تأثیر حضور جاذب در کاهش دامنه نوسانات سیستم اولیه نشان داده شده است.

استفاده از روش‌های عددی در بررسی ارتعاشات تیرها در حضور جاذب‌های دینامیکی مرسوم می‌باشد و اطلاعات مفیدی در خصوص رفتار نوسانی آنها ارائه می‌دهد. مزیت استفاده از روش‌های تحلیلی ارائه جزئیات در خصوص تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ و ایجاد درک بهتر از روابط حاکم بر مشخصات فیزیکی مدل است. با استفاده از روش‌های تحلیلی، بررسی رفتار سیستم‌های غیرخطی و مطالعه پدیده‌هایی همچون پرش در دامنه‌ی نوسانات در تمامی نواحی فرکانسی به سادگی امکان‌پذیر است، این در حالی است که مطالعه چنین رفتارهایی با استفاده از روش‌های عددی مستلزم تغییر روش حل در هر مرحله می‌باشد.

در پژوهش حاضر، با استفاده از روش اغتشاشات به بررسی رفتار دینامیکی تیر یکسرگیردار، در حضور جاذب دینامیکی با سفتی متشکل از دو بخش خطی و غیرخطی از مرتبه سه و میرائی خطی، تحت تحریک پریودیک پرداخته شده است. مدل اویلر-برنولی برای تیر در نظر گرفته شده است. پس از بی‌بعدسازی، از روش گالرکین برای گسسته‌سازی معادلات حرکت غیرخطی سیستم استفاده شده است.

روش مقیاس‌های چندگانه برای تحلیل معادلات بدست آمده به کار برده شده است. حالت‌های رزونانسی و غیررزونانسی برای نیروی تحریک مورد بررسی قرار گرفته‌اند. با ارائه فرضیات مسأله و حل معادلات، پاسخ پایای سیستم در حوالی فرکانس طبیعی اول و دوم و بین این دو فرکانس استخراج شده و تأثیر دامنه نیروی تحریک، ضریب میرائی و میزان غیرخطینگی فنر جاذب بر پاسخ سیستم در حوالی فرکانس طبیعی اول مورد بررسی قرار گرفته است. با صرف‌نظر از اثرات غیرخطی جاذب، حل معادلات سیستم خطی متناظر با استفاده از روش تبدیل لاپلاس بدست آمده و نتایج با جاذب غیرخطی مقایسه شده است.



شکل ۱- تیر یکسرگیردار مجهز به جاذب دینامیکی غیرخطی میرا

## ۲- مدل سازی و حل اغتشاشات

شکل (۱) یک تیر یکسرگیردار را نشان می‌دهد که تحت تأثیر نیروی هارمونیک قرار دارد و یک جاذب دینامیکی غیرخطی میرا به آن متصل شده است.

معادلات حاکم بر حرکت عرضی تیر و جاذب دینامیکی به ترتیب زیر هستند:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \delta(x-x_f) f(t) + \delta(x-x_a) \quad (۱-الف)$$

$$\left[ f_k(q(t), w(x_a, t)) + f_c(\dot{q}(t), \dot{w}(x_a, t)) \right]$$

$$m\ddot{q}(t) + f_k(q(t), w(x_a, t)) + f_c(\dot{q}(t), \dot{w}(x_a, t)) = 0 \quad (۱-ب)$$

که در آن  $\delta$  معرف تابع دلتای دیراک،  $f(t)$  نیروی تحریک خارجی،  $f_k$  و  $f_c$  به ترتیب نشان دهنده‌ی نیروی اعمال شده توسط فنر و میراگر جاذب دینامیکی بر تیر،  $I$  ممان سطح مقطع تیر حول تار خنثی،  $\rho$  چگالی تیر،  $A$  سطح مقطع تیر،  $x_f$  و  $x_a$  به ترتیب معرف فاصله محل اتصال جاذب و محل اعمال نیروی خارجی به تیر از تکیه‌گاه گیردار و  $w(x, t)$  و  $q(t)$  به ترتیب نشان دهنده‌ی جابجایی عرضی تیر و جاذب دینامیکی هستند.  $f_k$  و  $f_c$  به صورت معادلات (۲-الف) و (۲-ب) تعریف می‌شوند:

$$f_k(q(t), w(x_a, t)) = k_L(q(t) - w(x_a, t)) + \varepsilon k_{NL}(q(t) - w(x_a, t))^3 \quad (۲-الف)$$

$$f_c(\dot{q}(t), \dot{w}(x_a, t)) = c(\dot{q}(t) - \dot{w}(x_a, t)) \quad (۲-ب)$$

که در آن  $c$  نشان دهنده‌ی ضریب میرائی ویسکوز،  $k_L$  و  $\varepsilon k_{NL}$  به ترتیب معرف بخش خطی و غیرخطی ضریب سفتی جاذب و  $\varepsilon$  یک پارامتر کوچک و بدون بعد می‌باشد. با در نظر گرفتن سفتی جاذب به صورت ترکیب دو بخش خطی و غیرخطی امکان بررسی طیف گسترده‌تری از مسائل فراهم می‌شود. همچنین با چنین فرضی می‌توان با صفر قرار دادن یک بخش، مسأله را به صورت کاملاً خطی و یا کاملاً غیرخطی مورد بررسی قرار داد. با تعریف متغیرهای بی‌بعد به صورت معادله (۳) و جایگذاری آنها در معادلات (۱-الف) و (۱-ب) می‌توان آنها را به شکل بی‌بعد نوشت:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{q} &= \frac{q}{L}, \hat{w} = \frac{w}{L}, \hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{t} = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \omega_0 t, \hat{f}(\hat{t}) = \frac{L^2}{EI} f(t), \hat{k}_L = \frac{L^3}{EI} k_L \\ \hat{k}_{NL} &= \frac{L^5}{EI} k_{NL}, \hat{c} = \frac{L}{\sqrt{EI\rho A}} c, \hat{m} = \frac{m}{\rho AL}, \hat{\delta}(u) = L\delta(u) \end{aligned} \right. \quad (۳)$$

بنابراین:

$$\frac{EI}{L^3} \frac{\partial^4 \hat{w}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}^4} + \frac{EI}{L^3} \frac{\partial^2 \hat{w}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{t}^2} = \frac{\hat{\delta}(\hat{x} - \hat{x}_f)}{L} \frac{EI}{L^2} \hat{f}(\hat{t}) + \frac{\hat{\delta}(\hat{x} - \hat{x}_a)}{L} \frac{EI}{L^2} \left[ \hat{f}_k(\hat{q}(\hat{t}), \hat{w}(\hat{x}_a, \hat{t})) + \hat{f}_c(\hat{q}(\hat{t}), \hat{w}(\hat{x}_a, \hat{t})) \right] \quad (۴-الف)$$

$$\frac{EI}{L^2} \hat{m} \hat{q}(\hat{t}) + \frac{EI}{L^2} \left[ \hat{f}_k(\hat{q}(\hat{t}), \hat{w}(\hat{x}_a, \hat{t})) + \hat{f}_c(\hat{q}(\hat{t}), \hat{w}(\hat{x}_a, \hat{t})) \right] = 0 \quad (۴-ب)$$

که در آن  $\hat{f}_k(\hat{t})$  و  $\hat{f}_c(\hat{t})$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{f}_k(\hat{q}(\hat{t}), \hat{w}(\hat{x}_a, \hat{t})) = \hat{k}_L (\hat{q}(\hat{t}) - \hat{w}(\hat{x}_a, \hat{t})) + \varepsilon \hat{k}_{NL} (\hat{q}(\hat{t}) - \hat{w}(\hat{x}_a, \hat{t}))^3 \quad (۵-الف)$$

$$\hat{f}_c(\hat{q}(\hat{t}), \hat{w}(\hat{x}_a, \hat{t})) = \hat{c} (\hat{q}(\hat{t}) - \hat{w}(\hat{x}_a, \hat{t})) \quad (۵-ب)$$

به منظور حفظ سادگی معادلات، از قرار دادن علامت  $(\hat{\quad})$  صرف نظر می‌شود. با ساده‌سازی معادلات (۴-الف) و (۴-ب) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = g(x, t) \quad (۶-الف)$$

$$m\ddot{q}(t) + k_L (q(t) - w(x_a, t)) + \varepsilon k_{NL} (q(t) - w(x_a, t))^3 + c(\dot{q}(t) - \dot{w}(x_a, t)) = 0 \quad (۶-ب)$$

و تابع  $g(x, t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(x, t) = \delta(x - x_f) f(t) + \delta(x - x_a) \left[ k_L (q(t) - w(x_a, t)) + \varepsilon k_{NL} (q(t) - w(x_a, t))^3 + c(\dot{q}(t) - \dot{w}(x_a, t)) \right] \quad (۷)$$

با استفاده از روش گالرکین [۲۲] حل معادله (۶-الف) را می‌توان به صورت معادله (۸) در نظر گرفت:

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) \phi_m(t) \quad (۸)$$

که در آن  $\phi_m(t)$  معرف قسمت زمانی پاسخ بوده و  $X_m(x)$  شکل مودهای تیر یکسرگیردار است [۲۲]. با جایگذاری معادله (۸) در (۶-الف)، معادله (۹) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) \phi_m(t) \right] + \frac{d^4}{dx^4} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) \phi_m(t) \right] \\ &= \delta(x - x_f) f(t) + \delta(x - x_a) \left[ k_L \left( q(t) - \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x_a) \phi_m(t) \right) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon k_{NL} \left( q(t) - \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x_a) \phi_m(t) \right)^3 + c \left( \dot{q}(t) - \frac{d}{dt} \left( \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x_a) \phi_m(t) \right) \right) \right] \quad (۹) \end{aligned}$$

با استفاده از اصل تعامد مودها [۲۲] می‌توان معادله (۹) را ساده‌سازی کرد. به علت پیچیدگی معادلات، امکان محاسبه پاسخ به روش اغتشاشات برای بیش از یک مود ارتعاشی در روش گالرکین وجود ندارد [۲۳]. بنابراین پاسخ فقط برای یک مود ( $n = 1$ ) محاسبه خواهد شد. با صرف نظر از نوشتن اندیس 1 در کنار تابع  $\phi(t)$  می‌توان به معادله (۱۰) دست یافت:

$$\ddot{\phi}(t) + \omega_1^2 \phi(t) = X_1(x_f) f(t) + X_1(x_a) \left[ k_L (q - X_1(x_a) \phi(t)) + \varepsilon k_{NL} (q - X_1(x_a) \phi(t))^3 + c (\dot{q} - X_1(x_a) \dot{\phi}(t)) \right] \quad (10)$$

که در آن  $\omega_m$  مقادیر ویژه توابع  $X_m(x)$  هستند [۲۲]. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه [۲۴] پاسخ سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} \phi(t, \varepsilon) = \phi_0(T_0, T_1) + \varepsilon \phi_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \\ q(t, \varepsilon) = q_0(T_0, T_1) + \varepsilon q_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (11)$$

که در آن  $T_n = \varepsilon^n t$  است. در ادامه برای تحلیل مسأله، پاسخ سیستم در سه حالت مختلف فرکانس تحریک مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲-۱- فرکانس تحریک نزدیک به فرکانس طبیعی اول سیستم

برای امکان تحلیل مسأله با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، در این مرحله فرض می‌شود که قسمت غیرخطی ضریب سفتی فنر، ضریب میرایی و نیروی تحریک مقادیر کوچکی هستند [۲۴]. پارامترهای سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} f(t) &= \varepsilon F(t) \\ c &= \varepsilon C \end{aligned} \quad (12)$$

با جایگذاری معادلات (۱۱) و (۱۲) در (۱۰) و (۶-ب) و جداسازی این معادلات برحسب توان‌های  $\varepsilon$ ، می‌توان به معادلات (۱۳) و (۱۴) دست یافت:

معادلات مرتبه  $\varepsilon^0$ :

$$D_0^2 \phi_0 + (\omega_1^2 + k_L X_1^2(x_a)) \phi_0 - k_L X_1(x_a) q_0 = 0 \quad (13-الف)$$

$$D_0^2 q_0 + \frac{k_L}{m} q_0 - \frac{k_L}{m} X_1(x_a) \phi_0 = 0 \quad (13-ب)$$

معادلات مرتبه  $\varepsilon^1$ :

$$D_0^2 \phi_1 + (\omega_1^2 + k_L X_1^2(x_a)) \phi_1 - k_L X_1(x_a) q_1 = -2D_0 D_1 \phi_0 - C X_1^2(x_a) D_0 \phi_0 \quad (14-الف)$$

$$+ X_1(x_f) F(t) + C X_1(x_a) D_0 q_0 - k_{NL} X_1(x_a) [X_1(x_a) \phi_0 - q_0]^3$$

$$D_0^2 q_1 + \frac{k_L}{m} q_1 - \frac{k_L}{m} X_1(x_a) \phi_1 = -2D_0 D_1 q_0 - \frac{C}{m} D_0 q_0 + \frac{k_{NL}}{m} [X_1(x_a) \phi_0 - q_0]^3 + \frac{C}{m} X_1(x_a) D_0 \phi_0 \quad (14-ب)$$

که در آن عملگر مشتق جزئی نسبت به  $T_n$  می‌باشد. با در نظر گرفتن  $\phi_0$  و  $q_0$  به صورت  $\phi_0 = \alpha_0 e^{i\lambda T_0}$  و  $q_0 = \beta_0 e^{i\lambda T_0}$  (۱۳-الف) و (۱۳-ب) را می‌توان با استفاده از معادله (۱۵) بدست آورد:

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 + k_L X_1^2(x_a) - \lambda^2 & -k_L X_1(x_a) \\ -\frac{k_L}{m} X_1(x_a) & \frac{k_L}{m} - \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

حل عمومی معادله (۱۵) به صورت معادلات (۱۶-الف) و (۱۶-ب) می‌باشد:

$$\phi_0 = A(T_1) e^{i\Omega_1 T_0} + B(T_1) e^{i\Omega_2 T_0} + cc \quad (16-الف)$$

$$q_0 = c_1 A(T_1) e^{i\Omega_1 T_0} + c_2 B(T_1) e^{i\Omega_2 T_0} + cc \quad (16-ب)$$

که در آن  $\Omega_n$ ها فرکانس‌های طبیعی سیستم خطی متناظر هستند و  $cc$  نشان دهنده مزدوج مختلط عبارات ماقبل می‌باشد. ضرایب  $C_1$  و  $C_2$  را می‌توان از رابطه (۱۷) محاسبه کرد:

$$c_n = \frac{\frac{k_L}{m} X_1(x_a)}{\frac{k_L}{m} - \Omega_n^2}, \quad n = 1, 2 \quad (17)$$

برای بررسی رفتار سیستم در ناحیه تشدید اول، نیروی تحریک هارمونیک به صورت معادله (۱۸) در نظر گرفته می‌شود:

$$\Omega = \Omega_1 + \varepsilon\sigma, \quad F(t) = F_0 \sin \Omega t = \frac{F_0}{2} e^{i(\Omega_1 T_0 + \sigma T_1 - \frac{\pi}{2})} + cc \quad (18)$$

$\sigma$  پارامتر تنظیم کننده است که میزان نزدیک بودن  $\Omega$  به  $\Omega_1$  را نشان می‌دهد.  $A(T_1)$  و  $B(T_1)$  از جایگذاری معادلات (۱۶) تا (۱۸) در (۱۴-الف) و (۱۴-ب) و حذف جملات سکولار بدست می‌آید:

$$D_0^2 \phi_1 + (\omega_1^2 + k_L X_1^2(x_a)) \phi_1 - k_L X_1(x_a) q_1 = \gamma_{11} e^{i\Omega_1 T_0} + \gamma_{12} e^{i\Omega_2 T_0} + cc + NST \quad (19-الف)$$

$$D_0^2 q_1 + \frac{k_L}{m} q_1 - \frac{k_L}{m} X_1(x_a) \phi_1 = \gamma_{21} e^{i\Omega_1 T_0} + \gamma_{22} e^{i\Omega_2 T_0} + cc + NST \quad (19-ب)$$

که در آن  $NST$  نشانگر جملات غیرسکولار است و ضرایب  $\gamma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= -2i\Omega_1 A' - i\Omega_1 C X_1^2(x_a) A + ic_1 \Omega_1 C X_1(x_a) A - k_{NL} X_1(x_a) \xi_1 + F_0 \frac{X_1(x_f)}{2} e^{i(\sigma T_1 - \frac{\pi}{2})} \\ \gamma_{12} &= -2i\Omega_2 B' - i\Omega_2 C X_1^2(x_a) B + ic_2 \Omega_2 C X_1(x_a) B - k_{NL} X_1(x_a) \xi_2 \\ \gamma_{21} &= -2ic_1 \Omega_1 A' - ic_1 \Omega_1 \frac{C}{m} A + i\Omega_1 \frac{C}{m} X_1(x_a) A + \frac{k_{NL}}{m} \xi_1 \\ \gamma_{22} &= -2ic_2 \Omega_2 B' - ic_2 \Omega_2 \frac{C}{m} B + i\Omega_2 \frac{C}{m} X_1(x_a) B + \frac{k_{NL}}{m} \xi_2 \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن علامت « ' » نشانگر مشتق نسبت به  $T_1$  است و  $\xi_1$  و  $\xi_2$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 3X_1^3(x_a) A^2 \bar{A} - 3A^2 \bar{A} c_1^3 - 9X_1^2(x_a) A^2 \bar{A} c_1 - 6AB\bar{B} c_1 c_2^2 \\ &+ 6X_1(x_a) AB\bar{B} c_2^2 - 12X_1^2(x_a) AB\bar{B} c_2 + 12X_1(x_a) AB\bar{B} c_1 c_2 \\ &- 6X_1^2(x_a) AB\bar{B} c_1 + 6X_1^3(x_a) AB\bar{B} + 9X_1(x_a) A^2 \bar{A} c_1^2 \end{aligned} \quad (21-الف)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = & 3X_1^3(x_a)B^2\bar{B} - 3B^2\bar{B}c_2^3 + 9X_1(x_a)B^2\bar{B}c_2^2 - 9X_1^2(x_a)B^2\bar{B}c_2 \\ & + 6X_1^3(x_a)A\bar{A}B + 6X_1(x_a)A\bar{A}Bc_1^2 - 6A\bar{A}Bc_1^2c_2 - 12X_1^2(x_a)A\bar{A}Bc_1 \\ & - 6X_1^2(x_a)A\bar{A}Bc_2 + 12X_1(x_a)A\bar{A}Bc_1c_2 \end{aligned} \quad (21\text{-ب})$$

$\bar{A}$  و  $\bar{B}$  به ترتیب مزدوج مختلف  $A$  و  $B$  هستند. با صفر قرار دادن ضرایب عبارت‌های  $e^{i\Omega_1 T_0}$  و  $e^{i\Omega_2 T_0}$  در معادلات (۱۹-الف) و (۱۹-ب)، چهار معادله با دو مجهول ظاهر خواهند شد که منجر به حل معقول نمی‌شود. لذا برای حذف جملات سکولار، حل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۵]:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= P_1(T_1)e^{i\Omega_1 T_0} + P_2(T_1)e^{i\Omega_2 T_0} \\ q_1 &= Q_1(T_1)e^{i\Omega_1 T_0} + Q_2(T_1)e^{i\Omega_2 T_0} \end{aligned} \quad (22)$$

با جایگذاری معادلات (۲۰) تا (۲۲) در (۱۹-الف) و (۱۹-ب) می‌توان به معادلات (۲۳-الف) و (۲۳-ب) دست یافت:

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 + k_L X_1^2(x_a) - \Omega_1^2 & -k_L X_1(x_a) \\ -\frac{k_L}{m} X_1(x_a) & \frac{k_L}{m} - \Omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} \quad (23\text{-الف})$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 + k_L X_1^2(x_a) - \Omega_2^2 & -k_L X_1(x_a) \\ -\frac{k_L}{m} X_1(x_a) & \frac{k_L}{m} - \Omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (23\text{-ب})$$

شرط وجود جواب برای معادلات (۲۳-الف) و (۲۳-ب) را می‌توان به صورت معادلات (۲۴-الف) و (۲۴-ب) نشان داد:

$$\gamma_{11} \left[ \frac{k_L}{m} - \Omega_1^2 \right] + \gamma_{21} k_L X_1(x_a) = 0 \quad (24\text{-الف})$$

$$\gamma_{12} \left[ \frac{k_L}{m} - \Omega_2^2 \right] + \gamma_{22} k_L X_1(x_a) = 0 \quad (24\text{-ب})$$

برای حل معادلات (۲۴-الف) و (۲۴-ب)،  $A(T_1)$  و  $B(T_1)$  به صورت معادله (۲۵) در نظر گرفته می‌شوند [۲۴]:

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a_1(T_1) e^{i\theta_1(T_1)}, \quad B(T_1) = \frac{1}{2} a_2(T_1) e^{i\theta_2(T_1)} \quad (25)$$

پاسخ حالت پایا با صفر قرار دادن مقادیر  $\hat{a}_1$ ،  $\hat{a}_2$  و  $\hat{\theta}_1$  و  $\hat{\theta}_2$  پس از جایگذاری معادلات (۲۰)، (۲۱) و (۲۵) در (۲۴-الف) و (۲۴-ب) و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی به صورت معادلات (۲۶-الف) و (۲۶-ب) بدست می‌آید:

$$-\frac{3}{8} \Omega_2^2 k_{NL} X_1(x_a) a_2 \left[ 2c_1^2 c_2 a_1^2 - 2c_1^2 X_1(x_a) a_1^2 - 4c_1 c_2 X_1(x_a) a_1^2 + 4c_1 X_1^2(x_a) a_1^2 + c_2^3 a_1^2 \right. \\ \left. - 3c_2^2 X_1(x_a) a_2^2 + 2c_2 X_1^2(x_a) a_1^2 + 3c_2 X_1^2(x_a) a_2^2 - 2X_1^3(x_a) a_1^2 - X_1^3(x_a) a_2^2 \right] = 0 \quad (26\text{-الف})$$

$$\frac{1}{2} C X_1(x_a) \Omega_2^3 a_2 (X_1(x_a) - c_2) = 0 \quad (26\text{-ب})$$



با توجه به معادله (۲۶-ب) می‌توان دریافت که در حالت پایا مقدار  $a_2$  صفر است. با ادغام بخش‌های حقیقی و موهومی معادله (۲۶-الف) می‌توان به معادله (۲۷) دست یافت:

$$\left[ \sigma a_1 \Omega_1 \left( \frac{k_L}{m} - \Omega_1^2 \right) + k_L X_1(x_a) a_1 c_1 \Omega_1 \sigma + \frac{3\Omega_1^2}{8} k_{NL} a_1^3 X_1(x_a) (X_1(x_a) - c_1)^3 \right]^2 + \left[ \frac{\Omega_1^3}{2} (X_1(x_a) - c_1) C X_1(x_a) a_1 \right]^2 - \frac{F_0^2}{4} X_1^2(x_f) \left( \frac{k_L}{m} - \Omega_1^2 \right)^2 = 0 \quad (27)$$

با استفاده از معادله (۲۷) و با معلوم بودن پارامترهای مسأله، مقدار  $a_1$  قابل محاسبه است و بسته به پارامترهای سیستم، وجود یک یا سه جواب حقیقی برای آن امکان‌پذیر است.

## ۲-۲- فرکانس تحریک نزدیک به فرکانس طبیعی دوم سیستم

در این حالت همانند مرحله قبل فرض می‌شود که نیروی تحریک، قسمت غیرخطی ضریب سختی فنر و ضریب میرایی مقادیر کوچکی هستند. بدین ترتیب معادلات (۱۲) تا (۱۷) در این مرحله نیز برقرار هستند و برای رعایت اختصار از بازنویسی آنها خودداری شده است. برای بررسی رفتار سیستم در ناحیه تشدید دوم، نیروی تحریک هارمونیک به صورت معادله (۲۸) در نظر گرفته می‌شود:

$$\Omega = \Omega_2 + \varepsilon \sigma, \quad F(t) = F_0 \sin \Omega t = \frac{F_0}{2} e^{i(\Omega_2 T_0 + \sigma T_1 - \frac{\pi}{2})} + cc \quad (28)$$

با صفر قرار دادن ضرایب جملات سکولار، بار دیگر معادلات (۱۹-الف) و (۱۹-ب) برقرار خواهند بود، با این تفاوت که ضرایب  $\gamma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  این بار به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= -2i\Omega_1 A' - i\Omega_1 C X_1^2(x_a) A + ic_1 \Omega_1 C X_1(x_a) A - k_{NL} X_1(x_a) \xi_1 \\ \gamma_{12} &= -2i\Omega_2 B' - i\Omega_2 C X_1^2(x_a) B + ic_2 \Omega_2 C X_1(x_a) B - k_{NL} X_1(x_a) \xi_2 + F_0 \frac{X_1(x_f)}{2} e^{i(\sigma T_1 - \frac{\pi}{2})} \\ \gamma_{21} &= -2ic_1 \Omega_1 A' - ic_1 \Omega_1 \frac{C}{m} A + i\Omega_1 \frac{C}{m} X_1(x_a) A + \frac{k_{NL}}{m} \xi_1 \\ \gamma_{22} &= -2ic_2 \Omega_2 B' - ic_2 \Omega_2 \frac{C}{m} B + i\Omega_2 \frac{C}{m} X_1(x_a) B + \frac{k_{NL}}{m} \xi_2 \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن  $\xi_1$  و  $\xi_2$  با معادلات (۲۱-الف) و (۲۱-ب) تعریف می‌شوند. روند کار برای حل معادلات و بدست آوردن پاسخ پایای سیستم همانند مرحله‌ی قبل است و از بازنویسی آن خودداری می‌شود. در این حالت  $a_1$  صفر بوده و  $a_2$  از معادله (۳۰) بدست می‌آید:

$$\left[ \sigma a_2 \Omega_2 \left( \frac{k_L}{m} - \Omega_2^2 \right) + k_L X_1(x_a) a_2 c_2 \Omega_2 \sigma + \frac{3\Omega_2^2}{8} k_{NL} a_2^3 X_1(x_a) (X_1(x_a) - c_2)^3 \right]^2 + \left[ \frac{\Omega_2^3}{2} (X_1(x_a) - c_2) C X_1(x_a) a_2 \right]^2 - \frac{F_0^2}{4} X_1^2(x_f) \left( \frac{k_L}{m} - \Omega_2^2 \right)^2 = 0 \quad (30)$$

از معادله (۳۰) برای بدست آوردن نتایج عددی استفاده شده است.

### ۲-۳- فرکانس تحریک در حالت غیرتشدیدی و مابین دو فرکانس طبیعی اول و دوم

در این حالت فرض بر این است که فرکانس تحریک بین دو فرکانس طبیعی اول و دوم سیستم بوده و به اندازه کافی از آنها دور باشد. در این حالت، نیروی تحریک و ضریب میرایی جاذب از مرتبه  $\epsilon^0$  در نظر گرفته می‌شوند [۲۴]. نیروی تحریک به صورت معادله (۳۱) در نظر گرفته می‌شود:

$$f(t) = f_0 \sin \Omega t \quad (31)$$

با در نظر گرفتن پاسخ به صورت معادله (۱۱)، می‌توان به معادلات (۳۲-الف) و (۳۲-ب) دست یافت:

$$D_0^2 \phi_0 + CX_1^2(x_a) D_0 \phi_0 + (\omega_1^2 + k_L X_1^2(x_a)) \phi_0 - cX_1(x_a) D_0 q_0 - k_L X_1(x_a) q_0 = X_1(x_f) f_0 \sin \Omega t \quad (32-الف)$$

$$D_0^2 q_0 + \frac{c}{m} D_0 q_0 + k_L q_0 - \frac{c}{m} X_1(x_a) D_0 \phi_0 - \frac{k_L}{m} X_1(x_a) \phi_0 = 0 \quad (32-ب)$$

پاسخ معادلات (۳۲-الف) و (۳۲-ب) را می‌توان به صورت مجموع دو قسمت گذرا و پایا نوشت:

$$\phi_0(t) = \phi_h(t) + \phi_p(t), \quad q_0(t) = q_h(t) + q_p(t) \quad (33)$$

پاسخ گذرای سیستم در معادله (۳۳)، یعنی  $q_h(t)$  و  $\phi_h(t)$ ، با گذشت زمان به سمت صفر میل می‌کند. پاسخ پایا به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۶]:

$$\begin{bmatrix} \phi_p(t) \\ q_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} e^{i\Omega t} \quad (34)$$

بدین ترتیب معادله (۳۵) حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 + k_L X_1^2(x_a) + i\Omega c k_L X_1^2(x_a) - \Omega^2 & -k_L X_1(x_a) - i\Omega c X_1(x_a) \\ -k_L X_1(x_a) - i\Omega c X_1(x_a) & \frac{k_L}{m} + i\Omega \frac{c}{m} - \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 X_1(x_f) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

ماتریس ضرایب معادله (۳۵) به ماتریس ایمپدانس معروف است [۲۷] و با  $[A]$  نشان داده می‌شود. بدین ترتیب پاسخ سیستم به صورت زیر قابل بیان است:

$$Q_0 = \frac{-A_{21} f_0 X_1(x_f)}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}, \quad \Phi_0 = \frac{A_{22} f_0 X_1(x_f)}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} \quad (36)$$

که در آن  $A_{ij}$ ،  $i, j = 1, 2$  نشان دهنده اعضای ماتریس  $[A]$  هستند. از معادله (۳۶) برای بدست آوردن نتایج عددی استفاده شده است.

### ۳- تحلیل خطی مسأله

به منظور بررسی رفتار دینامیکی تیر با جاذب دینامیکی با دو فرض خطی و غیرخطی بودن جاذب و مشاهده‌ی بهتر اثرات غیرخطی فنر جاذب، ابتدا جاذب از نوع خطی در نظر گرفته می‌شود. در چنین حالتی تحلیل مسأله علاوه بر روش اغتشاشات، با روش‌های تحلیل خطی نیز قابل بررسی است. در این بخش ابتدا با صرف نظر کردن از بخش غیرخطی فنر جاذب، با استفاده از روش اغتشاشات، مسأله در ناحیه‌ی رزونانس بررسی شده و به منظور صحت‌سنجی تحلیل، نتایج حاصل با نتایج بدست آمده از روش تحلیل خطی (استفاده از تبدیل لاپلاس) مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

## ۳-۱- حل اغتشاشات

با صفر قرار دادن مقدار  $k_{NL}$  در معادله (۲۷) می‌توان مقدار  $a_1$  در ناحیه‌ی رزونانس اول را از معادله (۳۷) بدست آورد:

$$\left[ \sigma a_1 \Omega_1 \left( \frac{k_L}{m} - \Omega_1^2 \right) + k_L X_1(x_a) a_1 c_1 \Omega_1 \sigma \right]^2 + \left[ \frac{\Omega_1^3}{2} (X_1(x_a) - c_1) C X_1(x_a) a_1 \right]^2 - \frac{F_0^2}{4} X_1^2(x_f) \left( \frac{k_L}{m} - \Omega_1^2 \right)^2 = 0 \quad (37)$$

با جایگذاری مقدار  $a_1$  بدست آمده از معادله (۳۷) در معادله (۲۵) و جایگذاری نتیجه حاصل در معادله (۱۶)، بخش زمانی پاسخ بدست می‌آید که با ضرب آن در  $X_1(x)$  پاسخ بدست می‌آید. بنابراین تغییرات دامنه پاسخ در برابر فرکانس تحریک در حوالی تشدید اول قابل بررسی است.

## ۳-۲- حل با استفاده از تبدیل لاپلاس

با صفر قرار دادن مقدار  $k_{NL}$  در معادلات (۶) و (۷)، می‌توان به معادلات (۳۸-الف) و (۳۸-ب) دست یافت:

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = u(x,t) \quad (38-الف)$$

$$m\ddot{q}(t) + c(\dot{q}(t) - \dot{w}(x_a, t)) + k_L(q(t) - w(x_a, t)) = 0 \quad (38-ب)$$

که در آن  $f(t) = f_0 \sin \Omega t$  است و  $u(x, t)$  با معادله (۳۹) تعریف می‌شود:

$$u(x, t) = \delta(x - x_f) f(t) + \delta(x - x_a) \{ k_L(q(t) - w(x_a, t)) + c(\dot{q}(t) - \dot{w}(x_a, t)) \} \quad (39)$$

با فرض شرایط اولیه‌ی صفر، معادلات (۳۸-الف) و (۳۸-ب) در حوزه لاپلاس به صورت معادلات (۴۰-الف) و (۴۰-ب) بدست می‌آید:

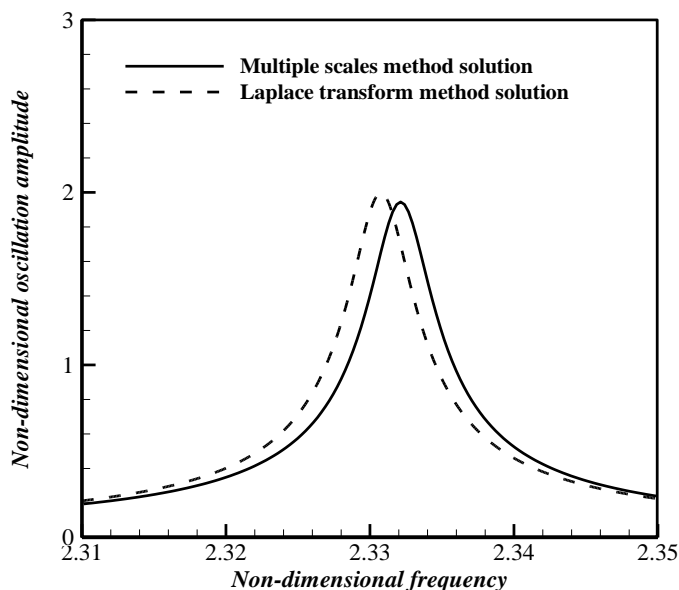
$$\frac{\partial^4 \bar{w}(x, s)}{\partial x^4} + s^2 \bar{w}(x, s) = \bar{u}(x, s) \quad (40-الف)$$

$$s^2 m \bar{q}(s) + s c (\bar{q}(s) - \bar{w}(x_a, s)) + k_L (\bar{q}(s) - \bar{w}(x_a, s)) = 0 \quad (40-ب)$$

که در آن  $\bar{w}(x_a, s)$ ،  $\bar{u}(x, s)$  و  $\bar{q}(s)$  به ترتیب تبدیل لاپلاس توابع  $w(x, t)$ ،  $u(x, t)$  و  $q(t)$  می‌باشند. با تبدیل مجدد لاپلاس از معادله‌ی (۴۰-الف) نسبت به  $x$  می‌توان به معادله (۴۱) دست یافت:

$$\bar{W}(p, s) = \frac{\bar{U}(p, s) + p^3 \bar{w}(0, s) + p^2 \bar{w}_x(0, s) + p \bar{w}_{xx}(0, s) + \bar{w}_{xxx}(0, s)}{p^4 + s^2} \quad (41)$$

که در آن  $\bar{W}(p, s)$  تبدیل لاپلاس  $\bar{w}(x, s)$  بوده و  $p$  متغیر در حوزه لاپلاس است.  $\bar{w}_x(0, s)$ ،  $\bar{w}_{xx}(0, s)$  و  $\bar{w}_{xxx}(0, s)$  به ترتیب نشان دهنده‌ی مشتقات اول تا سوم  $\bar{w}(x, s)$  نسبت به  $x$  در  $x = 0$  هستند. با عکس تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله (۴۰-ب) نسبت به  $p$  و دو بار عکس تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله (۴۱) نسبت به  $p$  و  $s$  و اعمال شرایط مرزی پاسخ سیستم بدست می‌آید [۲۸].



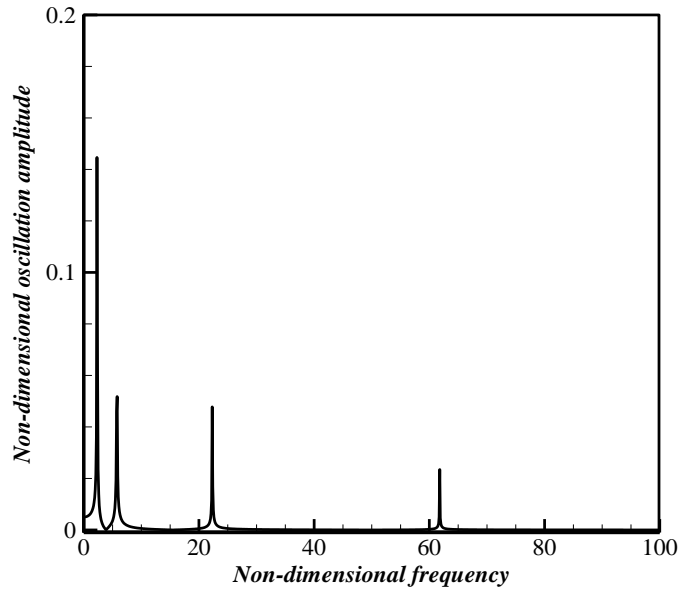
**شکل ۲-** مقایسه دامنه‌ی نوسانات انتهای آزاد تیر در حضور جاذب دینامیکی خطی میرا در رزونانس اول با دو روش حل مقیاس‌های چندگانه و تبدیل لاپلاس با نصب جاذب دینامیکی و ایجاد تحریک سینوسی در انتهای آزاد تیر،  $f_0 = \varepsilon F_0 = 0.015$ ،  $c = \varepsilon C = 0.01$ ،  $k_L = 3$  و  $m = 0.2$

به منظور مقایسه‌ی نتایج بدست آمده از این دو روش، فرکانس تحریک در معادلات (۳۸-الف) و (۳۸-ب) در ناحیه‌ی رزونانس اول در نظر گرفته شده است.

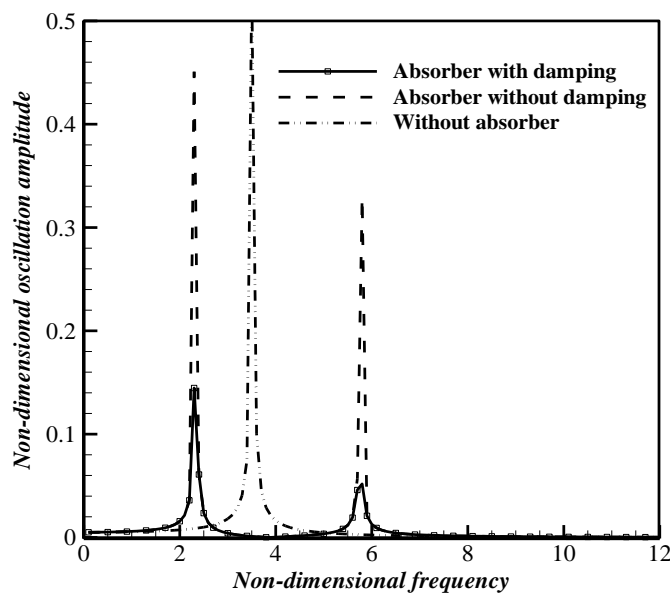
شکل (۲) مقایسه پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر در حوالی فرکانس طبیعی اول سیستم را برای دو روش تبدیل لاپلاس و مقیاس‌های چندگانه نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، مطابقت خوبی در پاسخ‌های بدست آمده از این دو روش وجود دارد.

با توجه به معادله (۳۸)، می‌توان با صفر قرار دادن مقدار  $C$  و مقادیر  $k_L$  و  $C$  به طور همزمان، به ترتیب به معادلات حرکت برای حالت جاذب خطی نامیرا و بدون جاذب دست یافت. پاسخ فرکانسی سیستم خطی در شکل‌های (۳) و (۴) رسم شده است.

با توجه به شکل (۳) می‌توان دریافت که سیستم در بازه‌ی فرکانسی بی‌بعد کوچکتر از ۱۰۰ دارای ۴ فرکانس طبیعی است. شکل (۴) مقایسه پاسخ فرکانسی را برای سه حالت بدون جاذب، جاذب دینامیکی نامیرا و میرا نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با اضافه کردن جاذب به تیر یک پیک جدید در محدوده فرکانسی مورد نظر ظاهر می‌شود. وجود میرائی به وضوح دامنه نوسانات پاسخ را کاهش می‌دهد. با توجه به شکل (۴) اضافه کردن جاذب دینامیکی موجب کاهش چشمگیر دامنه نوسانات پاسخ در بازه‌ی فرکانسی ۲٫۷ تا ۵ می‌شود، حال آنکه در سایر نواحی فرکانسی بین ۰ تا ۱۲ حتی منجر به افزایش دامنه نوسانات شده و یا بر آن بی‌تأثیر است.

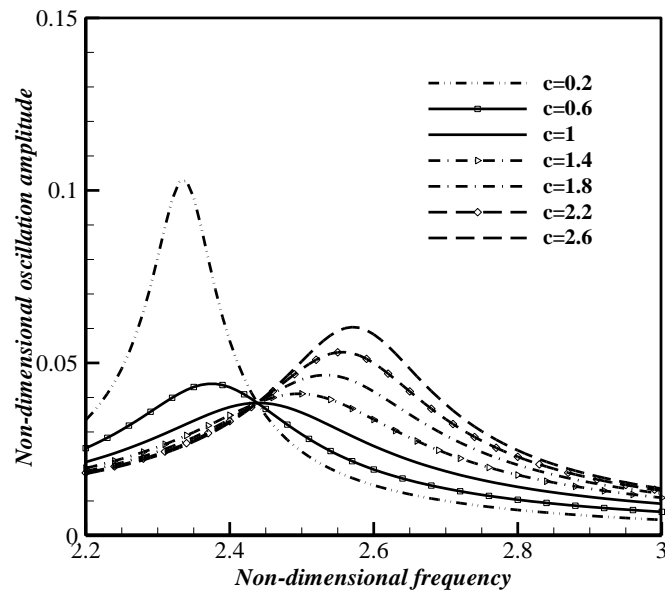


شکل ۳- پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر در حضور جاذب دینامیکی خطی میرا به ازای نصب جاذب و ایجاد تحریک سینوسی در انتهای آزاد تیر،  $f_0 = 0.015$ ،  $c = 0.1$ ،  $k_L = 3$  و  $m = 0.2$

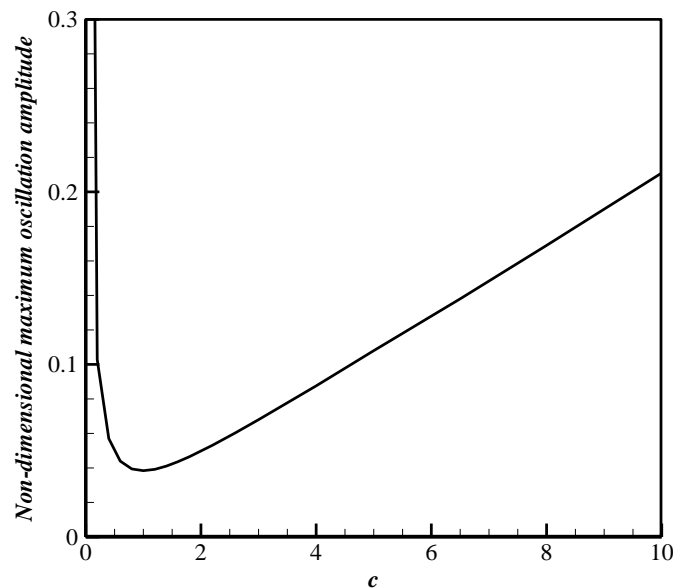


شکل ۴- پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر به ازای  $f_0 = 0.015$ ،  $c = 0.1$ ،  $k_L = 3$  و  $m = 0.2$  برای جاذب‌های مختلف دینامیکی خطی نصب شده در انتهای آزاد تیر با تحریک سینوسی در همان نقطه

شکل (۵) و (۶) به ترتیب پاسخ فرکانسی سیستم خطی به ازای مقادیر مختلف میرائی و تغییرات بیشینه دامنه نوسانات در رزونانس اول را نشان می‌دهند. همانطور که در شکل (۵) مشاهده می‌شود، با افزایش میرائی، بیشینه دامنه نوسانات در رزونانس اول ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد و فرکانس تشدید در رزونانس اول افزایش می‌یابد. با توجه به شکل (۶) می‌توان دریافت که دامنه نوسانات پاسخ در رزونانس اول به ازای مقدار مشخصی از میرائی جاذب به کمترین مقدار خود می‌رسد.



شکل ۵- پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر به ازای نصب جاذب دینامیکی خطی میرا و ایجاد تحریک سینوسی در انتهای آزاد تیر،  $f_0 = 0.015$ ,  $k_L = 3$ ,  $m = 0.2$  و مقادیر مختلف  $c$



شکل ۶- تغییرات دامنه نواسانات انتهای آزاد تیر در رزونانس اول در مقابل  $c$  با نصب جاذب دینامیکی خطی میرا و ایجاد تحریک سینوسی در انتهای آزاد،  $f_0 = 0.015$ ,  $k_L = 3$  و  $m = 0.2$

#### ۴- تحلیل غیر خطی مسأله

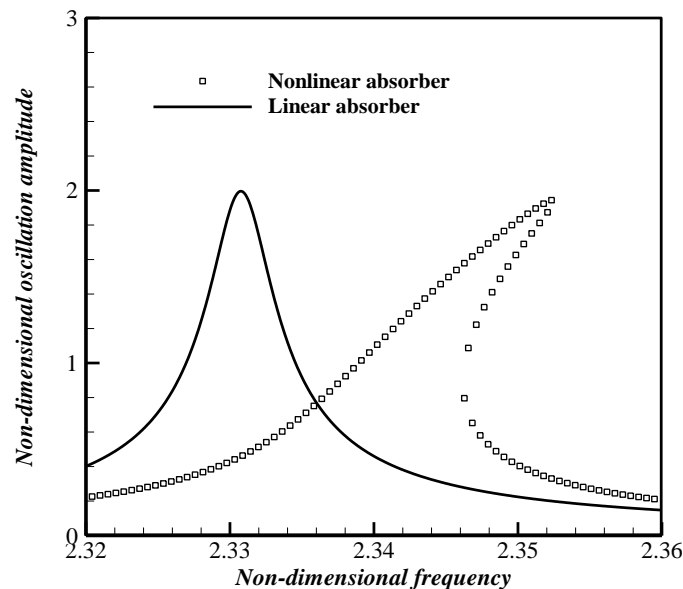
در این بخش با در نظر گرفتن فنر جاذب به صورت ترکیب دو بخش خطی و غیر خطی ابتدا به بررسی مسأله در محدوده‌ی تشدید اول و دوم پرداخته شده و تأثیر پارامترهای جاذب بر پاسخ سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است. سپس پاسخ سیستم در نواحی غیررزونانسی (بین تشدید اول و دوم) بدست آمده و با نتایج سیستم دارای جاذب خطی میرا و نامیرا و سیستم بدون جاذب مورد مقایسه قرار گرفته است.

## ۴-۱- تحلیل مسأله در محدوده تشدید اول و دوم

در حوالی تشدید اول و دوم می‌توان به ترتیب با حل معادلات (۲۷) و (۳۰)، جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $a_2$  بدست آمده در معادله (۲۵)، جایگذاری نتیجه حاصل در معادله (۱۶) و ضرب بخش زمانی بدست آمده از آن در  $X_1(x)$  پاسخ را بدست آورد. مقایسه دامنه‌ی نوسانات پاسخ در حضور جاذب خطی و غیرخطی در رزونانس اول و دوم در شکل‌های (۷) و (۸) نشان داده شده است.

همانطور که در شکل‌های (۷) و (۸) مشاهده می‌شود، غیرخطی بودن فنر جاذب دینامیکی باعث می‌شود تا فرکانس‌های طبیعی سیستم نسبت به حالت خطی تغییر کند. استفاده از روش تحلیلی امکان اطلاع از رفتار واقعی سیستم در تمامی نواحی فرکانسی را فراهم می‌کند. با توجه به شکل‌های (۷) و (۸) می‌توان دریافت که حضور حتی اندکی غیرخطینگی به اندازه  $\varepsilon k_{NL} = 0.15$  باعث می‌شود که فرکانس ظاهر شدن بیشترین دامنه‌ی پاسخ در هر دو رزونانس اول و دوم نسبت به حالت خطی افزایش یابند. همانطور که در شکل‌های (۷) و (۸) نشان داده شده است، این افزایش در رزونانس دوم بیشتر از رزونانس اول بوده و به این ترتیب بازه‌ی فرکانسی غیررزونانسی بین دو فرکانس طبیعی اول و دوم نسبت به حالت خطی بزرگتر شده است. با توجه به بی‌بعد بودن پارامترهای سیستم، این تغییرات در پاسخ فرکانسی اهمیت زیادی در مباحث مربوط به طراحی جاذب‌های دینامیکی در ابعاد واقعی دارد.

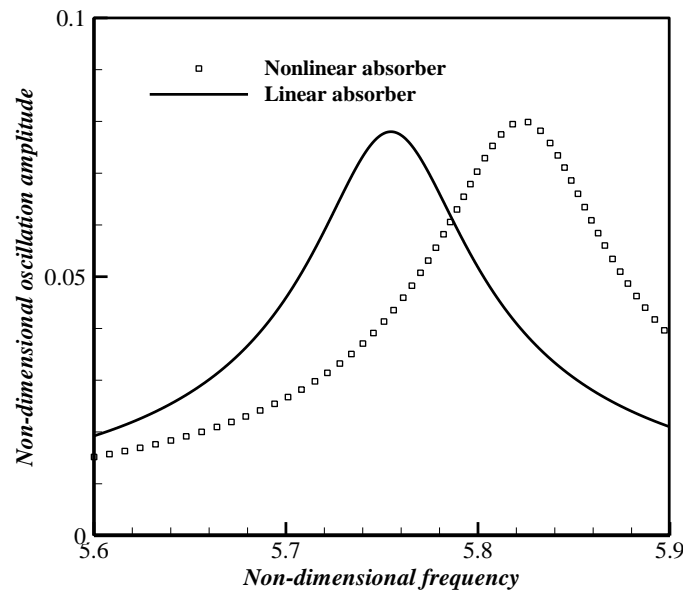
بروز پدیده‌ی پرش در دامنه‌ی پاسخ یکی از ویژگی‌های منحصر به فرد در سیستم‌های غیرخطی است. همانطور که در شکل (۷) مشاهده می‌شود سیستم در یک بازه‌ی فرکانسی مشخص دارای سه پاسخ احتمالی است. یکی از این پاسخ‌ها ناپایدار بوده و مابین دو پاسخ پایدار دیگر قرار دارد. اینکه سیستم در کدامیک از این دو دامنه پایدار نوسان خواهد کرد بستگی به شرایط اولیه سیستم دارد.



**شکل ۷-** پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر در حضور جاذب دینامیکی خطی و غیرخطی میرا در رزونانس اول سیستم با نصب

جاذب دینامیکی و ایجاد تحریک سینوسی در انتهای آزاد تیر،  $f_0 = \varepsilon F_0 = 0.015$ ،  $\varepsilon k_{NL} = c = \varepsilon C = 0.01$ ،

$m = 0.2$  و  $k_L = 3, 0.15$



**شکل ۸-** پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر در حضور جاذب دینامیکی خطی و غیرخطی میرا در رزونانس دوم سیستم با نصب جاذب دینامیکی و ایجاد تحریک سینوسی در انتهای آزاد تیر،  $f_0 = \varepsilon F_0 = 0.015$ ،  $c = \varepsilon C = 0.01$ ،  $\varepsilon k_{NL} = 0.15$  و  $m = 0.2$  و  $k_L = 3$

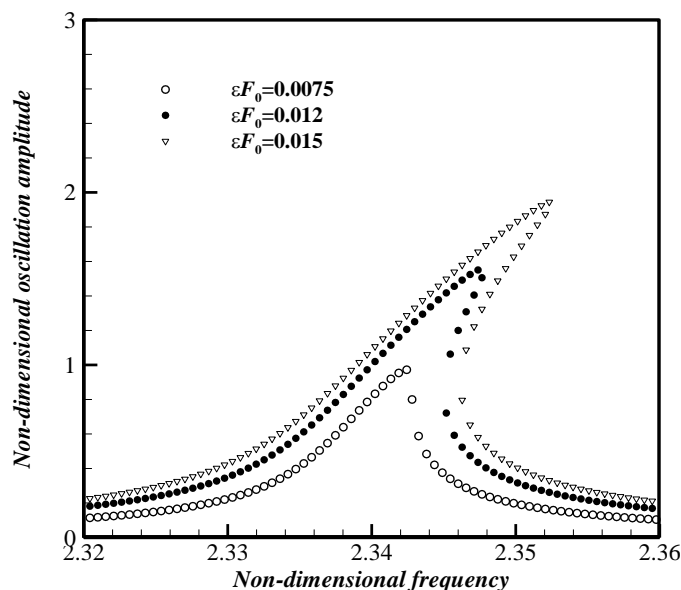
با این حال این احتمال وجود دارد که اندازه بیشترین دامنه‌ی نوسانات پاسخ در سیستم غیرخطی نسبت به سیستم خطی در شرایط اولیه مشابه کمتر باشد. با مقایسه‌ی شکل‌های (۷) و (۸) مشاهده می‌شود که بر خلاف رزونانس اول، در شرایط یکسان پدیده‌ی پرش در رزونانس دوم ظاهر نمی‌شود و بروز این پدیده مستلزم وجود مقادیر بزرگتری از میزان غیرخطینگی در ساختار فنر جاذب دینامیکی است.

استفاده از روش‌های تحلیلی و حل پارامتری مسأله امکان بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار سیستم را فراهم می‌کند. به منظور ایجاد درک بهتر از تأثیر پارامترهای فیزیکی سیستم بر رفتار نوسانی آن، تغییرات دامنه‌ی نوسانات پاسخ در رزونانس اول در مقابل پارامترهای اندازه‌ی دامنه‌ی تحریک، میرائی و بزرگی قسمت غیرخطی فنر جاذب به ترتیب در شکل‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) ترسیم شده است.

شکل (۹) تأثیر اندازه نیروی تحریک بر دامنه‌ی نوسانات پاسخ در رزونانس اول را نشان می‌دهد. هر اندازه که دامنه‌ی تحریک بزرگتر باشد، دامنه‌ی پاسخ در تمامی نواحی فرکانسی و طول بازه‌ی فرکانسی بروز پدیده‌ی پرش بزرگتر خواهد بود. همچنین با توجه به معادله (۲۷)، که یک معادله‌ی درجه ۶ برحسب  $a_1$  می‌باشد، یک مقدار بحرانی برای  $\varepsilon F_0$  وجود دارد که اگر مقدار آن از مقدار اخیر بیشتر باشد پدیده‌ی پرش بوجود آمده و در این ناحیه سه پاسخ حقیقی برای  $a_1$  وجود خواهد داشت.

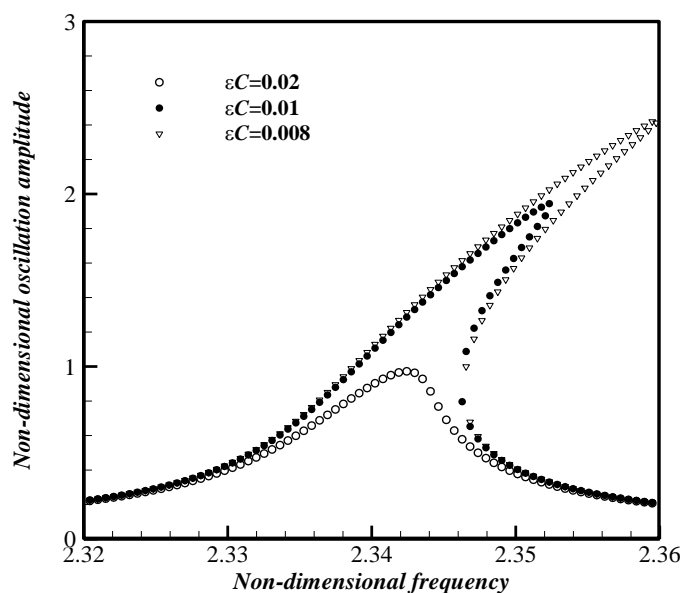
حال اگر مقدار  $\varepsilon F_0$  از این حد بحرانی کمتر باشد تنها یک پاسخ حقیقی برای  $a_1$  وجود خواهد داشت. بدست آوردن این مقدار بحرانی بر حسب پارامترهای دیگر به دلیل پیچیدگی معادلات بسیار سخت می‌باشد، با وجود این، مقدار عددی آن با توجه به فرضیات عددی مسأله در حدود  $0.0078$  بدست می‌آید. با توجه به شکل (۹) مشاهده می‌شود که وقتی که مقدار  $\varepsilon F_0$  برابر با  $0.0075$  است، که کمتر از مقدار بحرانی است، پدیده‌ی پرش در دامنه‌ی نوسانات پاسخ ظاهر نمی‌شود.



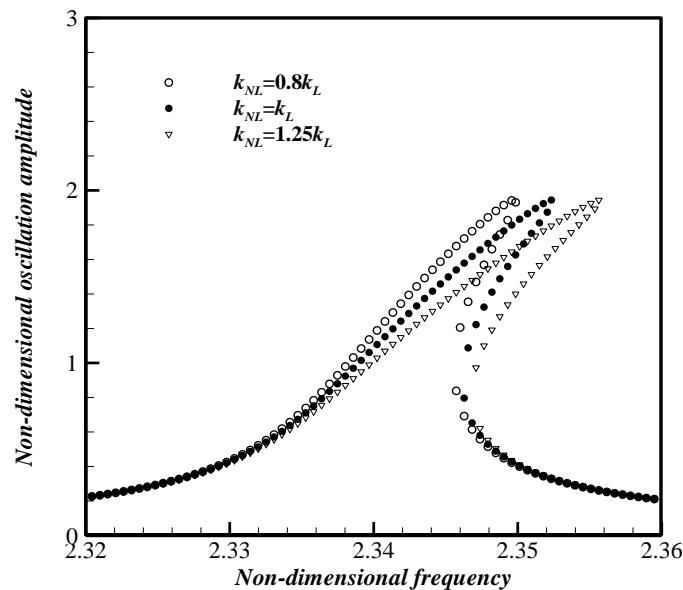


شکل ۹- پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر به ازای نصب جاذب دینامیکی غیرخطی و ایجاد تحریک سینوسی در انتهای آزاد تیر،  $\varepsilon k_{NL} = 0.15$ ،  $\varepsilon C = 0.01$ ،  $k_L = 3$ ،  $m = 0.2$  و مقادیر مختلف  $\varepsilon F_0$

شکل (۱۰) تأثیر اندازه‌ی میرائی جاذب بر دامنه‌ی نوسانات پاسخ را در رزونانس اول نشان می‌دهد. هرچه میرائی جاذب کوچکتر باشد، دامنه نوسانات رزونانسی بیشتر خواهد بود. این در حالی است که اندازه‌ی میرائی تأثیر چندانی بر دامنه‌ی پاسخ در نواحی غیر رزونانسی ندارد. با توجه به معادله (۲۷)،  $\varepsilon C$  دارای مقدار بحرانی  $0.0153$  است که به ازای مقادیر بزرگتر از آن، تنها یک پاسخ حقیقی و برای مقادیر کوچکتر سه پاسخ حقیقی برای  $a_1$  وجود خواهد داشت.



شکل ۱۰- پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر به ازای نصب جاذب دینامیکی غیرخطی و ایجاد تحریک سینوسی در انتهای آزاد تیر،  $\varepsilon k_{NL} = 0.15$ ،  $\varepsilon F_0 = 0.015$ ،  $k_L = 3$ ،  $m = 0.2$  و مقادیر مختلف  $\varepsilon C$



شکل ۱۱- پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر به ازای نصب جاذب دینامیکی غیرخطی و ایجاد تحریک سینوسی در انتهای

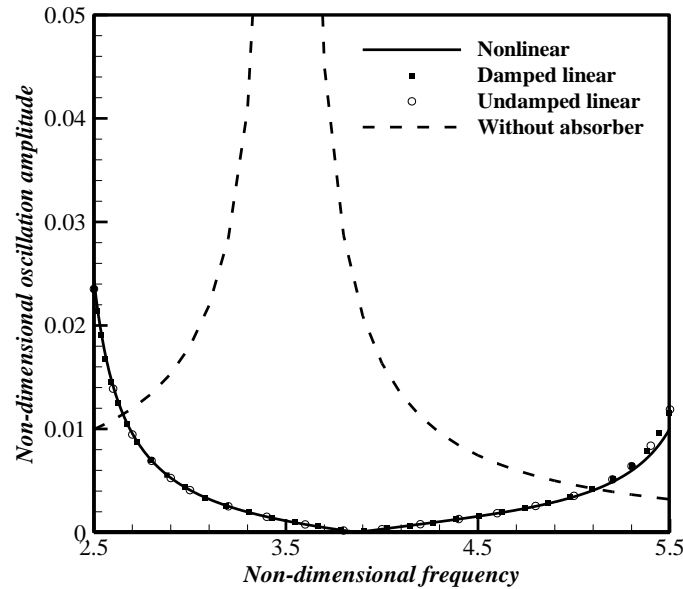
آزاد تیر،  $\varepsilon C = 0.01$ ،  $\varepsilon F_0 = 0.015$ ،  $k_L = 3$ ،  $m = 0.2$  و مقادیر مختلف  $k_{NL}$

شکل (۱۱) تأثیر میزان غیرخطی فتر جاذب بر دامنه‌ی نوسانات پاسخ را در رزونانس اول نشان می‌دهد. با توجه به این شکل می‌توان دریافت که بزرگی قسمت غیرخطی فتر جاذب تأثیر قابل توجهی بر اندازه‌ی بیشینه دامنه‌ی نوسانات پاسخ ندارد لیکن هر چقدر فتر سفت شونده‌تر باشد، قله نمودار بیشتر به سمت راست متمایل می‌شود. با توجه به فرضیات عددی مسأله اندازه‌ی بحرانی  $k_{NL}$ ، که به ازای مقادیر بزرگتر از آن پدیده‌ی پرش در دامنه‌ی نوسانات پاسخ مشاهده می‌شود، برابر با  $0.28k_L$  است.

#### ۴-۲- تحلیل مسأله در محدوده غیررزونانسی

با بدست آوردن مقدار  $\Phi_0$  از معادلات (۳۵) و (۳۶) و جایگذاری آن در معادله (۳۴) بخش زمانی پاسخ بدست می‌آید که با ضرب آن در  $X_1(x)$  پاسخ بدست می‌آید. پاسخ فرکانسی سیستم بین فرکانس‌های تشدید اول و دوم در شکل (۱۲) ترسیم شده است.

استفاده از جاذب‌های دینامیکی به منظور کاهش دامنه‌ی نوسانات مستلزم آگاهی کامل از شرایط کاری سیستم می‌باشد. همانطور که در شکل (۱۲) نشان داده شده است، اضافه کردن جاذب دینامیکی به تیر منجر به کاهش دامنه‌ی نوسانات پاسخ در بازه‌ی فرکانسی ۲٫۷ تا ۵٫۱ شده است. این در حالی است که اگر فرکانس تحریک بزرگتر از ۵٫۱ و یا کوچکتر از ۲٫۷ باشد، افزودن جاذب موجب افزایش دامنه‌ی نوسانات انتهای آزاد تیر می‌شود. حضور میرایی در ساختار جاذب تأثیری بر دامنه‌ی نوسانات غیررزونانسی پاسخ ندارد. با توجه به شکل (۱۲) می‌توان دریافت که رفتار سیستم غیرخطی در نواحی غیر رزونانسی با تقریب بسیار خوبی مشابه سیستم خطی بوده و فتر غیرخطی جاذب دینامیکی مزیتی در کاهش نوسانات غیررزونانسی نسبت به جاذب خطی ندارد.



شکل ۱۲- پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر به ازای  $f_0 = 0.015$ ,  $m = 0.2$ ,  $k_L = 3$ ,  $\varepsilon k_{NL} = 0.15$  و  $c = 0.01$  با جاذب‌های مختلف دینامیکی نصب شده در انتهای آزاد تیر با تحریک سینوسی در همان نقطه

## ۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر رفتار ارتعاشی تیر اویلر- برنولی تحت تحریک رزونانسی و غیررزونانسی در حضور جاذب دینامیکی غیرخطی با استفاده از روش تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. جاذب دینامیکی به کار رفته در این مقاله شامل یک جرم متمرکز می‌باشد که به وسیله‌ی یک میراگر خطی و یک فنر غیرخطی سفت شونده به تیر متصل شده است. پس از بی‌بعدسازی و گسسته‌سازی معادلات با استفاده از روش گالرکین، روش مقیاس‌های چندگانه برای تحلیل آنها به کار برده شده است.

استفاده از روش تحلیلی امکان تحلیل دقیق مسأله در تمامی نواحی فرکانسی را فراهم می‌کند. سفت شونده بودن فنر جاذب دینامیکی باعث جابجایی فرکانس‌های طبیعی به سمت راست و همچنین افزایش طول بازه‌ی فرکانسی غیررزونانسی سیستم نسبت به حالت خطی می‌شود. به این ترتیب استفاده از روش تحلیلی اطلاعات دقیقی از رفتار واقعی سیستم ارائه می‌دهد که در طراحی جاذب‌های دینامیکی بسیار با اهمیت است. با توجه به بروز پدیده‌ی پرش در دامنه‌ی نوسانات پاسخ در رزونانس اول، امکان اینکه در برخی شرایط اولیه حاکم بر مسأله بیشترین دامنه‌ی نوسانات پاسخ در سیستم غیرخطی نسبت به سیستم خطی کمتر باشد، وجود دارد. علیرغم ایجاد پرش در دامنه‌ی نوسانات پاسخ در رزونانس اول، این پدیده در رزونانس دوم دیده نمی‌شود که نشان دهنده‌ی حساسیت کمتر آن به میزان غیرخطی‌نگی فنر جاذب در رزونانس‌های بالاتر می‌باشد. ضمناً، وجود غیرخطی‌نگی در فنر جاذب دینامیکی و میرا بودن آن تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر کاهش دامنه‌ی نوسانات در نواحی غیررزونانسی ندارد. برای هر یک از پارامترهای سیستم، شامل دامنه‌ی نیروی تحریک، اندازه‌ی میرائی و بخش غیرخطی فنر، می‌توان مقادیر بحرانی متناظری بدست آورد که در وقوع پرش در دامنه‌ی نوسانات پاسخ و یا عدم وقوع آن نقش تعیین کننده دارند.

## مراجع

- [1] Den Hartog, J. P., "*Mechanical Vibrations: Courier Corporation*", Cambridge, UK, (1985).
- [2] Walsh, P., and Lamancusa, J., "A Variable Stiffness Vibration Absorber for Minimization of Transient Vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 158, No. 2, pp. 195-211, (1992).
- [3] Zuo, L., and Nayfeh, S. A., "The Multi-degree-of-freedom Tuned-mass Damper for Suppression of Single-mode Vibration under Random and Harmonic Excitation", In ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Sep 2-6, Chicago, IL, US, pp. 2051-2061, (2003).
- [4] Avramov, K., and Mikhlin, Y. V., "Damping of Free Elastic Vibrations in Linear Systems", *International Applied Mechanics*, Vol. 41, No. 2, pp. 203-209, (2005).
- [5] Mikhlin, Y. V., and Reshetnikova, S., "Dynamic Analysis of a Two-mass System with Essentially Nonlinear Vibration Damping", *International Applied Mechanics*, Vol. 41, No. 1, pp. 77-84, (2005).
- [6] Mikhlin, Y. V., and Reshetnikova, S., "Dynamical Interaction of an Elastic System and Essentially Nonlinear Absorber", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 283, No. 1, pp. 91-120, (2005).
- [7] Avramov, K., and Mikhlin, Y. V., "Snap-through Truss as an Absorber of Forced Oscillations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, No. 3, pp. 705-722, (2006).
- [8] Haxton, R. S., and Barr, A. D. S., "The Autoparametric Vibration Absorber", *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 94, No. 1, pp. 119-125, (1972).
- [9] Hatwal, H., Mallik, A., and Ghosh, A., "Forced Nonlinear Oscillations of an Autoparametric System Part 1: Periodic Responses", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 3, pp. 657-662, (1983).
- [10] Hatwal, H., Mallik, A., and Ghosh, A., "Non-linear Vibrations of a Harmonically Excited Autoparametric System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 81, No. 2, pp. 153-164, (1982).
- [11] Hsu, Y. S., Ferguson, N. S., and Brennan, M. J., "The Experimental Performance of a Nonlinear Dynamic Vibration Absorber", In: *Topics in Nonlinear Dynamics*, Vol. 1, Eds., pp. 247-257, Springer, (2013).
- [12] Shiroky, I., and Gendelman, O., "Essentially Nonlinear Vibration Absorber in a Parametrically Excited System", *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 88, No. 7, pp. 573-596, (2008).

- [13] Ji, J., "Design of a Nonlinear Vibration Absorber using Three-to-one Internal Resonances", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 42, No. 1, pp. 236-246, (2014).
- [14] Jacquot, R., "Optimal Dynamic Vibration Absorbers for General Beam Systems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, No. 4, pp. 535-542, (1978).
- [15] Juang, J. N., "Optimal Design of a Passive Vibration Absorber for a Truss Beam", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 7, No. 6, pp. 733-739, (1984).
- [16] Wang, B., Kitis, L., Pilkey, W., and Palazzolo, A., "Synthesis of Dynamic Vibration Absorbers", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. 107, No. 2, pp. 161-166, (1985).
- [17] Cuvalci, O., and Ertas, A., "Pendulum as Vibration Absorber for Flexible Structures: Experiments and Theory", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, No. 4, pp. 558-566, (1996).
- [18] Kojima, H., and Saito, H., "Forced Vibrations of a Beam with a Non-linear Dynamic Vibration Absorber", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 88, No. 4, pp. 559-568, (1983).
- [19] Georgiades, F., and Vakakis, A., "Dynamics of a Linear Beam with an Attached Local Nonlinear Energy Sink", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 12, No. 5, pp. 643-651, (2007).
- [20] Avramov, K., and Gendelman, O., "Forced Oscillations of Beam with Essentially Nonlinear Absorber", *Strength of Materials*, Vol. 41, No. 3, pp. 310-317, (2009).
- [21] Parseh, M., Dardel, M., Ghasemi, M. H., and Pashaei, M. H., "Steady State Dynamics of a Non-linear Beam Coupled to a Non-linear Energy Sink", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 79, pp. 48-65, (2016).
- [22] Rao, S. S., "*Vibration of Continuous Systems*", John Wiley & Sons, New York, (2007).
- [23] Zhang, G. C., Ding, H., Chen, L. Q., and Yang, S. P., "Galerkin Method for Steady-state Response of Nonlinear Forced Vibration of Axially Moving Beams at Supercritical Speeds", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 7, pp. 1612-1623, (2012).
- [24] Nayfeh, A. H., and Mook, D. T., "*Nonlinear Oscillations*", John Wiley & Sons, New York, (2008).
- [25] Nayfeh, A. H., "*Introduction to Perturbation Techniques*", John Wiley & Sons, New York, (2011).
- [26] Tse, F. S., Morse, I. E., and Hinkle, R. T., "*Mechanical Vibrations*", Allyn and Bacon, Boston, (1963).
- [27] Thomson, W., "*Theory of Vibration with Applications*", CRC Press, New York, (1996).

[28] Kreyszig, E., "Advanced Engineering Mathematics", John Wiley & Sons, New York, (2010).

## فهرست نمادهای انگلیسی

$A$ : سطح مقطع تیر

$c$ : ضریب میرایی جاذب دینامیکی

$\hat{c}$ : ضریب میرایی بی بعد جاذب دینامیکی

$E$ : مدول الاستیسیته

$f_k$ : نیروی فنر جاذب دینامیکی

$f_c$ : نیروی میراگر جاذب دینامیکی

$f(t)$ : نیروی تحریک

$\hat{f}(t)$ : نیروی تحریک بی بعد

$I$ : ممان سطح

$k_L$ : بخش خطی سفتی جاذب دینامیکی

$k_{NL}$ : بخش غیر خطی سفتی جاذب دینامیکی

$\hat{k}_L$ : بخش خطی بی بعد سفتی جاذب دینامیکی

$\hat{k}_{NL}$ : بخش غیر خطی بی بعد سفتی جاذب دینامیکی

$L$ : طول تیر

$m$ : جرم جاذب دینامیکی

$\hat{m}$ : جرم بی بعد جاذب دینامیکی

$q$ : جابجایی عرضی جاذب دینامیکی

$\hat{q}$ : جابجایی بی بعد عرضی جاذب دینامیکی

$s$ : متغیر لاپلاس

$T_n$ : مقیاس زمانی  $n$ ام

$t$ : زمان

$\hat{t}$ : زمان

$x$ : محور مختصات طولی

$x_a$ : فاصله محل اتصال جاذب دینامیکی تا تکیه گاه گیردار

$x_f$ : فاصله محل اعمال تحریک تا تکیه گاه گیردار

$\hat{x}$ : مختصه بی بعد طولی

$X_m(x)$ : قسمت مکانی  $m$ ام پاسخ

$w$ : جابجایی عرضی تیر

$\hat{w}$ : جابجایی بی بعد عرضی تیر

### نمادهای یونانی

$\delta$ : تابع دلتای دیراک

$\rho$ : چگالی تیر

$\sigma$ : پارامتر تنظیم کننده

$\phi_m(t)$ : قسمت زمانی  $m$ ام پاسخ

$\Omega$ : فرکانس تحریک

$\Omega_n$ : فرکانس طبیعی  $n$ ام

## **Abstract**

In the current paper the impact of the presence of a damped nonlinear Dynamic Vibration Absorber on dynamic behavior of an Euler-Bernoulli clamped-free beam is investigated under resonant and non-resonant excitations. Accordingly, the governing equations of motion are derived and converted to the form of non-dimensional equations. Then, these equations are solved using the Multiple Scales Method after applying the Galerkin Method. It is assumed that the Dynamic Vibration Absorber damping is linear, and its stiffness is composed of two parts, a linear and a third order nonlinear one. Resonant and non-resonant cases have been taken into account for sinusoidal excitation. The influence of the Dynamic Vibration Absorber parameters on the system vibrational behavior is provided. Obtained results illustrate the possibility that under specific circumstances the nonlinear dynamic vibration absorber could have a better performance in suppressing the oscillation amplitude than a similar linear one in jumping phenomenon region.

In addition, the results show that in non-resonant frequency regions, there is no major difference in system vibrational behavior in presence of linear damped, undamped and nonlinear vibration absorbers. Furthermore, in comparison with similar linear case, the nonlinearity of the absorber stiffness relocates the resonant frequencies, and makes changes in the non-resonant frequency region.