

تحلیل ارتعاشات غیرخطی متقارن محوری واداشته از حرارت در پوسته‌ی کرووی ساخته‌شده از مواد هدفمند

زهرا اسدزاده¹

دانشجوی کارشناسی ارشد

محمد رضا اسلامی²

استاد

در تحقیق حاضر توزیع خواص پوسته از رابطه کسر حجمی به دست آمده، وابستگی حرارتی آن از رابطه تولوکیان لحاظ شده است. بارگذاری حرارتی و پاسخ پوسته متقارن محوری می‌باشد. سطح سرامیکی پوسته در دمای ثابت و سطح دیگر در دمای پایین‌تر (یا عایق حرارتی) مفروض است. توزیع دما از معادله‌ی گذرای غیرخطی غیرکوپل انتقال حرارت محاسبه می‌شود. از تئوری مرتبه اول پوسته‌ها و روابط کرنش-تغییر مکان فون-کارمن برای استخراج معادلات استفاده گردیده، معادلات دینامیکی از اصل همپلتون و روش ریتز به دست آمده و به وسیله روش های نیومارک و نیوتن-رافسون حل شده است. معادله انتقال حرارت با روش تفاضل محدود گسسته‌سازی و با استفاده از روش کرنک-نیکلسون در زمان پیگیری شده است. در پایان اثر توزیع خواص، نوع بار حرارتی و هندسه در پاسخ پوسته بررسی شده است.

واژه‌های راهنما: مواد هدفمند، پوسته کرووی، ارتعاشات واداشته از حرارت، ترموالاستیسیته غیرکوپل

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی که با نام مواد هدفمند شناخته می‌شوند از ترکیب دو یا چند جزء اصلی تشکیل می‌شوند. این اجزا به‌طور پیوسته با یکدیگر ترکیب شده و خواص ماده مخلوط با تغییر مکان تغییر می‌کند، بنابراین جزء مواد ناهمگن به حساب می‌آید. علت تغییرات حاصل، نسبت حجمی اجزای تشکیل‌دهنده ماده FGM³ در فرآیند ساخت می‌باشد. مسئله ارتعاشات حرارتی در المان‌های سازه‌ای، برای اولین بار به وسیله بولی⁴ در سال (۱۹۵۶)، مطرح شد [۱]. تا آن زمان برای سازه‌هایی که تحت تحریک حرارتی قرار می‌گیرند، تنها مفهوم پاسخ شبه‌استاتیکی^۵ مطرح بود. به این ترتیب که برای یافتن پاسخ سازه‌ای که با گرادیان دما یا شارحرارتی تحریک شده است، ابتدا معادله انتقال حرارت به صورت دینامیکی حل شده و توزیع دما در سازه به دست می‌

¹ نویسنده مسئول، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

z_asadzadeh@aut.ac.ir

² استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران eslami@aut.ac.ir

³ Functionally Graded Material

⁴ B.A. Boley

⁵ Quasi-Static Response

آمد. سپس با استفاده از توزیع دما، نیروها و ممان‌های حرارتی محاسبه شده و در معادله حرکت سازه قرار داده می‌شود. اما در این قسمت از وابستگی معادله حرکت سازه به زمان صرف نظر می‌شود. به بیان بهتر در یافتن پاسخ شبه‌استاتیکی، تأثیر اینرسی در معادله حرکت ناچیز فرض شده و نادیده گرفته می‌شود.

بولی در سال (۱۹۵۶) نشان داد که صرف نظر نمودن از تأثیر اینرسی در معادله حرکت که به‌عنوان فرض اساسی در یافتن پاسخ شبه‌استاتیکی مطرح بود، نمی‌تواند به‌طور کامل و در همه موارد صحیح باشد [۱]. وی یک تیر ایزوتروپیک^۱ نازک را که سطح تختانی آن عایق حرارتی بوده و سطح فوقانی آن به‌طور ناگهانی در معرض شار حرارتی قرار گرفته بود، مورد بررسی قرار داد.

پاسخ‌های بولی نشان داد که برای تیرهای نازکی که تحت تحریک ناگهانی حرارتی قرار می‌گیرند، ارتعاشات حرارتی اتفاق می‌افتد. این بدان معناست که در برخی از حالت‌ها، نباید از تأثیر اینرسی در معادله حرکت صرف نظر نمود. بدین ترتیب نتایج حاصل از مقاله بولی، سبب به چالش کشیده شدن پاسخ‌های استاتیکی شد که تا آن زمان برای تحریک ناگهانی حرارتی در سازه‌ها مطرح شده بودند.

پس از آن بولی و باربر^۲ در سال (۱۹۵۷) به تحلیل ارتعاشات حرارتی ورق ایزوتروپیک که تمام مرزهای آن ساده بود، پرداختند [۲]. در این حالت نیز سطح تختانی ورق عایق بوده و سطح فوقانی آن به‌طور ناگهانی در معرض شار حرارتی قرار گرفته بود. در یافتن پاسخ ارتعاشات عرضی ورق نیز از تئوری کلاسیک استفاده شد. نتایج این تحقیق موید پژوهش اولیه بولی و تصدیق بر وجود ارتعاشات حرارتی در ورق‌های نازک بود.

بولی و باربر، به ترتیب نتیجه کار خود را این‌گونه ارائه دادند که در نظر گرفتن تأثیر اینرسی در ارتعاشات عرضی تیر و ورق، زمانی حائز اهمیت خواهد بود که پرپود اساسی ارتعاشات^۳ تیر و ورق، هم‌اندازه و یا بزرگ‌تر از زمان مشخصه دمایی^۴ باشد. در همین راستا برای اعتبارسنجی پاسخ شبه‌استاتیکی تیر و ورق کیرشلف و اینکه این پاسخ در چه صورت بر پاسخ دینامیکی منطبق می‌گردد، کمیتی بی‌بعد به نام پارامتر اینرسی^۵ (B) را معرفی نمودند. پارامتر اینرسی به‌وسیله بولی به‌صورت رابطه (۱) مطرح شد [۳]:

$$B = \sqrt{\frac{t_r}{t_M}} \quad (1)$$

که در رابطه فوق، t_r زمان مشخصه دمایی بوده و t_M زمان مشخصه مکانیکی است که برابر با ضریبی از پرپود اساسی ارتعاشات سازه می‌باشد. بولی و باربر نشان دادند که اهمیت تأثیر اینرسی با کاهش پارامتر اینرسی (B) افزایش می‌یابد. در صورتی که این پارامتر در حالت حدی مورد بررسی قرار داده شود، به این نتیجه دست‌یافته می‌شود که: اگر $B = 0$ تأثیر اینرسی به حدی افزایش می‌یابد که مانع هرگونه تغییر شکلی در سازه (ورق و تیر) خواهد شد.

¹ Isotropic

² A.D. Barber

³ Fundamentak Period of Vibration

⁴ Charasteristic Thermal Time

⁵ Inertia Parameter

از سویی در صورتی که برای پارامتر اینرسی در نظر گرفته شود: $B = \infty$ تأثیر اینرسی به کلی از بین رفته و پاسخ ارتعاشات عرضی تیر و ورق بر پاسخ شبه‌استاتیکی آن منطبق خواهد شد. پس از آنکه نتایج کارهای بولی و بولی و باربر لزوم در نظر گرفتن تأثیر اینرسی را در ورق‌های نازک نشان داد، لیونز^۱ در سال (۱۹۶۶) ادعا نمود که نتایج حاصل از این مقالات صرفاً یک نتیجه ریاضی بوده و در واقعیت وجود ارتعاشات حرارتی امکان پذیر نخواهد بود [۴]. عدم وجود نتایج آزمایشگاهی نیز سبب شد تا این ادعا مدتی بی‌پاسخ بماند. سرانجام نتایج تجربی وجود ارتعاشات حرارتی را در المان‌های سازه‌ای به اثبات رساندند. اولین نتایج آزمایشگاهی در سال (۱۹۶۹) به وسیله بیم^۲ و در گزارشی از سازمان NASA منتشر شد که در آن به وجود ارتعاشاتی ناشی از شار حرارتی در سازه تیری شکل ماهواره اذعان شده بود [۵].

مطالعه تجربی دیگری در سال (۱۹۷۷) و به وسیله ریمروت^۳ و ابدل سید^۴ بر روی تیر یک سر گیردار یک سر آزاد که تحت تأثیر شار حرارتی در راستای عمود بر محور تیر قرار گرفته بود، انجام شد [۶]. به این ترتیب نشان داده شد که بر خلاف ادعای لیونز، نتایج حاصل از مقاله بولی و نیز بولی و باربر صرفاً یک محاسبه ریاضی نبوده و کاملاً با واقعیت انطباق داشته است. پس از این دو پژوهش، کراوس با الهام از نتایج این تحقیقات به بررسی وجود ارتعاشات حرارتی در پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط مرزی ساده پرداخت [۷].

وی به مقایسه اهمیت تأثیر اینرسی در المان‌های سازه (تیر، ورق و پوسته) پرداخت. نتایج ارائه شده نشان می‌دهد که تأثیر اینرسی در تیرها از اهمیت بیشتری برخوردار بوده و پس از آن به ترتیب در ورق‌ها و پوسته‌ها می‌توان تأثیر بالاتری را مشاهده نمود.

استراود^۵ و مایرز^۶ با در نظر گرفتن وابستگی دمایی خواص فیزیکی ماده نظیر مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی، پاسخ ورق مستطیلی را تحت شوک حرارتی به دست آوردند [۸]. ونکاتارامانا^۷ و جانا^۸ تیرهای نازک تحت بارگذاری حرارتی هارمونیک مورد بررسی قرار دادند [۹]. مانولیس^۹ و بسکوس^{۱۰} روشی را برای یافتن پاسخ دینامیکی سازه‌های تیری شکل که به‌طور ناگهانی تحت بارگذاری حرارتی قرار گرفته‌اند، معرفی نمودند [۱۰]. در سه تحقیقی که به ترتیب به‌وسیله مازومدار^{۱۱} و همکاران در سال (۱۹۸۰)، هیل و همکاران در سال (۱۹۸۲) و همچنین هیل و مازومدار در سال (۱۹۸۴) انجام شد، ارتعاشات حرارتی ورق و پوسته ویسکوالاستیک تحت تغییر شکل‌های کوچک و با فرض خطی بودن رابطه کرنش-جابجایی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت [۱۱ و ۱۲ و ۱۳]. پس از آن هیل و مازومدار در مقاله‌ای با استفاده از کرنش غیرخطی فون کارمن^{۱۲} به بررسی ارتعاشات حرارتی ورق و پوسته ویسکوالاستیک تحت تغییر شکل‌های بزرگ

¹ William C. Lyons

² Richard M. Beam

³ F.P.J.Rimrott

⁴ R.Abdel

⁵ Richard C.Stroud

⁶ J.Mayers

⁷ J.Venkataramana

⁸ M.K.Jana

⁹ G.D.Manolis

¹⁰ D.E.Beskos

¹¹ J.Mazumdar

¹² Von-Karman

پرداختند [۱۴]. ناکاجو^۱ و هایاشی^۲ یک ورق دایره‌ای را تحت بار حرارتی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با استفاده از تابع بسط پاسخی تحلیلی برای ورق دایروی با شرط مرزی ساده ارائه دادند [۱۵].

براش^۳ و همکاران، یک استراتژی برای متوقف کردن ارتعاشات حرارتی در تیر ایزوتروپیک و کنترل آن ارائه دادند [۱۶]. تاچر^۴ تأثیر شوک حرارتی را در ورق ارتوتروپیک^۵ مورد بررسی قرار داد [۱۷]. چانگ^۶ و همکاران با استفاده از روش المان محدود، ارتعاشات حرارتی ورق کامپوزیتی نازک چندلایه را تحلیل نمودند [۱۸].

هوانگ^۷ و تاچر به مطالعه پانل‌های چندلایه کامپوزیتی که به صورت ضربدری^۸ چیده شده‌اند پرداخته و برای آن حل تحلیلی ارائه دادند [۱۹]. آنها سپس با در نظر گرفتن تأثیر کرنش غیرخطی فون-کارمن پانل‌های چندلایه کامپوزیتی ساخته‌شده از گرافیت و آلومینیوم را مورد تحلیل و بررسی قرار دادند [۲۰].

خدی^۹ پاسخ تحلیلی برای پوسته چندلایه کامپوزیتی نازک تحت تحریک حرارتی ارائه داد [۲۱]. در تحقیقی دیگر، به بررسی ارتعاشات حرارتی تیرهای نازک خمیده کامپوزیتی پرداخت [۲۲].

تحقیق و مطالعه بر روی ارتعاشات حرارتی مواد هدفمند برای اولین بار به وسیله کیانی^{۱۰} و اسلامی^{۱۱} انجام گرفت. در این پژوهش آن‌ها به بررسی ارتعاشات حرارتی ورق گرد ساخته‌شده از مواد هدفمند پرداختند [۲۳]. پس از آن‌ها غیاثیان^{۱۲} و همکاران، ارتعاشات حرارتی تیر ساخته‌شده از مواد هدفمند با سطح مقطع مستطیلی را مورد بررسی قرار دادند [۲۴]. پس از او علیپور و همکارانش ارتعاشات حرارتی ورق مستطیلی ساخته‌شده از این مواد را مورد مطالعه قرار دادند [۲۵]. موارد ذکر شده تحقیقاتی هستند که تاکنون در مورد ارتعاشات حرارتی المان‌های سازه‌ای ساخته‌شده از مواد هدفمند انجام گرفته است.

در هر سه پژوهش تمام خواص مواد فلزی و سرامیکی، وابسته به دما در نظر گرفته شده و با این فرض معادله انتقال حرارت در راستای ضخامت تحلیل گردیده است. همچنین در استحصال معادلات حرکت، از کرنش غیرخطی فون-کارمن بهره برده شده است.

پس از بررسی تحقیقات صورت پذیرفته در مورد ارتعاشات حرارتی المان‌های سازه‌ای، می‌توان به وجود خلأ نسبی و کمبود در بررسی و تحلیل ارتعاشات حرارتی در المان‌های سازه‌ای ساخته‌شده از مواد هدفمند، پی برد. از این رو در این تحقیق، به تحلیل و مطالعه ارتعاشات حرارتی پوسته‌ی کروی ساخته‌شده از مواد هدفمند پرداخته خواهد شد.

در این تحقیق پوسته به کاررفته کروی و با عمق کم بوده و معادلات حرکت پوسته FGM با استفاده از روابط کرنش-تغییر مکان غیرخطی فون-کارمن و تئوری برشی مرتبه اول پوسته، استخراج می‌شود.

¹ Y.Nakajo

² K.Hayashi

³ J.C.Bruch

⁴ T.R.Tauchert

⁵ Orthotropic Plate

⁶ J.S.Chang

⁷ N.N.Huang

⁸ Cross-Ply

⁹ A.A.Khedir

¹⁰ Y. Kiani

¹¹ M.R. Eslami

¹² S.E. Ghiasian

فرض بر آن است که کلیه خواص ترمودینامیکی پوسته در راستای ضخامت توزیع یافته و همچنین وابستگی حرارتی این خواص در نظر گرفته خواهد شد. سطح سرامیکی پوسته در معرض دما و یا شار حرارتی قرار گرفته و این در حالی است که سطح دیگر در دمای نسبتاً پایین تر و یا به صورت عایق حرارتی در نظر گرفته می شود. قبل از تحلیل معادلات، می بایست معادله انتقال حرارت پوسته تحلیل شده و با استفاده از توزیع دمای حاصل از این نیروها و ممان های حرارتی، محاسبه شده و در معادلات حرکت پوسته و شرایط مرزی آن جایگذاری شود. معادله گذرای انتقال حرارت یک بعدی و غیرکوپل در راستای ضخامت به جهت توزیع درجه حرارت در ضخامت پوسته استفاده شده است. لحاظ نمودن اثر وابستگی حرارتی خواص ترمودینامیکی پوسته، سبب غیرخطی شدن این معادله خواهد شد. گسسته سازی مکانی معادله انتقال حرارت با استفاده از روش تفاضل محدود مرکزی¹ صورت می پذیرد. در نهایت دستگاه معادلات حاصل از این گسسته سازی مکانی با استفاده از روش کرنک-نیکلسون² تحلیل شده و توزیع درجه حرارت به دست خواهد آمد.

معادلات حرکت و شرایط مرزی پوسته نیز با استفاده از روش ریتز³ گسسته سازی مکانی شده و دستگاه معادلات حاصل از این گسسته سازی مکانی با استفاده از روش گام به گام زمانی نیومارک⁴ تحلیل خواهد شد.

۲- معادلات اساسی پوسته کروی

یک پوسته کروی ساخته شده از مواد هدفمند در نظر گرفته می شود. ضخامت پوسته h ، شعاع آن R و زاویه از مرکز φ می باشد. دستگاه مختصات کروی مطابق شکل (۱) مفروض است.

به جهت تعیین خواص مکانیکی پوسته FGM از مدل وویت استفاده می شود. بدین ترتیب خواص مکانیکی ماده نظیر مدول الاستیسیته، ضریب پواسون، هدایت حرارتی، ضریب انبساط حرارتی، ظرفیت گرمایی ویژه و چگالی به عنوان تابعی خطی از نسبت حجمی فلز و سرامیک در نظر گرفته خواهد شد. در صورتی که خاصیت مکانیکی ماده هدفمند با $P(z, T)$ نشان داده و تابع دما و ضخامت در نظر گرفته شود، با استفاده از قانون مخلوطها می توان نوشت:

$$P(z, T) = P_m(T) V_m(z) + P_c(T) V_c(z) \quad (2)$$

در معادله بالا اندیس های $P_m(T)$ و $P_c(T)$ بیانگر خاصیت مکانیکی فلز و سرامیک می باشد. همچنین $V_m(z)$ و $V_c(z)$ نسبت حجمی فلز و سرامیک بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_c(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^\zeta \quad (3)$$

$$V_m(z) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^\zeta \quad (4)$$

¹ Central Finite Difference

² Crank-Nicolson

³ Ritz

⁴ Newmark

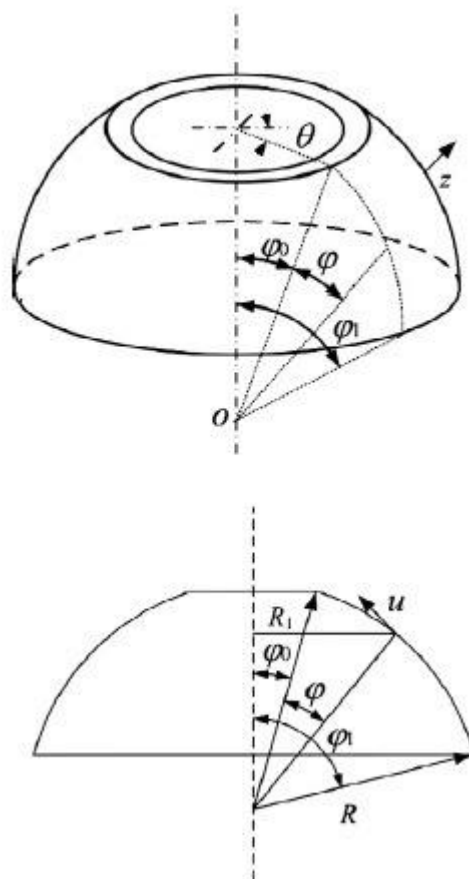
در رابطه نسبت حجمی فوق، اندیس ۲ بیانگر نماد ماده هدفمند است. این ضریب تغییرات درصد حجمی اجزای ماده هدفمند را در طول ضخامت کنترل می‌کند. رابطه فوق بیان‌کننده این است که سطح فوقانی پوسته دارای خواص کاملاً سرامیکی و سطح پایین آن دارای خواص کاملاً فلزی می‌باشد.

وابستگی دمایی خواص مکانیکی ماده هدفمند با استفاده از رابطه تولوکیان بری هر جزء فلزی و یا سرامیکی در نظر گرفته شده است. بر اساس این رابطه، هر یک از خواص مکانیکی فلز و سرامیک را به صورت تابع غیرخطی از دما می‌توان به شکل رابطه (۵) بیان نمود:

$$P(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (5)$$

در رابطه فوق، P_i ها ضرایب وابستگی دمایی بوده و برای هر جزء فلزی و سرامیکی ماده هدفمند، منحصر به فرد می‌باشند. همچنین T بیانگر دما برحسب کلونین است.

به این ترتیب با استفاده از روابط (۲) تا (۵) وابستگی مکانی و دمایی خواص مکانیکی ماده هدفمند در نظر گرفته خواهد شد. پس از توصیف پوسته ساخته‌شده از مواد هدفمند، معادلات حاکم بر آن به دست می‌آید.



شکل ۱- هندسه پوسته کروی مورد بررسی و دستگاه مختصات مربوطه.

۳- فرضیات حرکت

در این پژوهش از تئوری مرتبه اول برشی استفاده شده است. این تئوری ساده‌ترین تئوری پوسته‌هاست که اثرات برشی را در تغییر شکل پوسته در نظر می‌گیرد. اگر یک المان از پوسته دورانی در نظر گرفته شود محورهای منحنی α و β همان خطوط انحنای اصلی انتخاب شده‌اند. سیستم مختصات xyz روی سطح المان به گونه‌ای انتخاب می‌گردد که محور x در مبدأ O مماس بر محور منحنی α ، محور y مماس بر منحنی β و z به طرف مرکز انحنای می‌باشد. جابجایی‌های u ، v و w در نقطه (φ, θ, z) از صفحه میانی به صورت تابعی از جابجایی‌های این صفحه بیان می‌شود. یعنی [۲۶]:

قابل ذکر است در پوسته‌های کروی به علت تقارن، جابجایی‌ها تابعیت θ ندارند.

$$u = u_0(\varphi, \theta) + z\alpha(\varphi, \theta) \quad (۶-الف)$$

$$v = v_0(\varphi, \theta) + z\beta(\varphi, \theta) \quad (۶-ب)$$

$$w = w_0(\varphi, \theta) \quad (۶-پ)$$

۴- معادلات کرنش-جابجایی

کرنش در هر نقطه از پوسته با استفاده از کرنش صفحه‌ی میانی و تغییر در انحنای پوسته، طبق روابط (۷) قابل محاسبه است:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi} + Z\kappa_{\varphi\varphi} \quad (۷-الف)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta} + Z\kappa_{\theta\theta} \quad (۷-ب)$$

$$\gamma_{\varphi\theta} = \gamma_{\varphi\theta} + Z\kappa_{\varphi\theta} \quad (۷-پ)$$

$$\gamma_{\varphi z} = \gamma_{\varphi z} + Z\kappa_{\varphi z} \quad (۷-ت)$$

$$\gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z} + Z\kappa_{\theta z} \quad (۷-ث)$$

در کرنش غیرخطی و طبق رابطه فون-کارمن روابط کرنش به صورت روابط (۸) خواهد بود:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R}u' + \frac{w}{R} + \frac{Z}{R}\alpha' + \frac{1}{2R^2}W'^2 \quad (۸-الف)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}u + \frac{w}{R} + Z\frac{1}{R}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\alpha' \quad (۸-ب)$$

$$\gamma_{\varphi\theta} = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{w}{R} + \frac{v\cos\varphi}{R\sin\varphi} + Z\left[\frac{1}{R}\beta' - \frac{\beta\cos\varphi}{R\sin\varphi}\right] \quad (۸-پ)$$

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{-u}{R} + \frac{1}{R}w' + \alpha \quad (۸-ت)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{-v}{R} + \beta \quad (۸-ث)$$

۵- معادلات ساختاری

پس از یافتن کرنش، تنش‌ها برحسب مؤلفه‌های کرنش و تغییر دما در پوسته، معین خواهند شد:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{\varphi\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{\varphi z} \\ \gamma_{\varphi\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} (T - T_0)\alpha_{\varphi} \\ (T - T_0)\alpha_{\theta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (9)$$

برای ضریب ماتریس سفتی کاهش یافته^۱ (Q_{ij}) در رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z, T)}{1 - \nu^2(z, T)} \quad (10\text{-الف})$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \nu(z, T) \frac{E(z, T)}{1 - \nu^2(z, T)} = \nu(z, T) Q_{11} \quad (10\text{-ب})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = K^2 \frac{E(z, T)}{2(1 + \nu(z, T))} \quad (10\text{-پ})$$

$$Q_{66} = \frac{E(z, T)}{2(1 + \nu(z, T))} \quad (10\text{-ت})$$

در روابط بالا K^2 ضریب تصحیح برشی در تئوری برشی مرتبه اول می‌باشد. البته همان‌گونه که عنوان شد، این ضریب تابع شرایط مرزی، نوع اعمال بار و جنس ماده نیز می‌باشد. پژوهش‌هایی به جهت تعیین این ضریب برای مواد هدفمند نیز صورت پذیرفته است.

۶- منتجه‌های تنش

پس از به دست آوردن مؤلفه‌های تنش و با استفاده از این مؤلفه‌ها، منتجه‌های تنش از روابط زیر محاسبه می‌شود. به ترتیب برای نیروی صفحه‌ای بر واحد طول و نیروی برشی عرضی بر واحد طول روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$(N_{\varphi\varphi}, N_{\theta\theta}, N_{\varphi z}, N_{\theta\varphi}, N_{\theta z}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{\theta\varphi}, \sigma_{\theta z}) dz \quad (11\text{-الف})$$

$$(M_{\varphi\varphi}, M_{\theta\theta}, M_{\theta\varphi}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta\varphi}) z dz \quad (11\text{-ب})$$

به عبارت دیگر پس از جایگذاری رابطه (۹) در روابط (۱۱-الف) و (۱۱-ب) می‌توان این روابط را به شکل رابطه (۱۱-پ) خلاصه کرد:

¹ Reduced Stiffness Matrix

$$\begin{pmatrix} N_{\varphi\varphi} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{\varphi\theta} \\ M_{\varphi\varphi} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{\varphi\theta} \\ Q_{\theta z} \\ Q_{\varphi z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\varphi\varphi 0} \\ \varepsilon_{\theta\theta 0} \\ \gamma_{\varphi\theta 0} \\ \kappa_{\varphi\varphi} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{\varphi\theta} \\ \gamma_{\theta z 0} \\ \gamma_{\varphi z 0} \end{pmatrix} \quad (۱۱-پ)$$

$$- \begin{pmatrix} N_{\varphi\varphi}^T \\ N_{\theta\theta}^T \\ N_{\varphi\theta}^T \\ M_{\varphi\varphi}^T \\ M_{\theta\theta}^T \\ M_{\varphi\theta}^T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

که در این رابطه ضرایب A_{ij} بیانگر مؤلفه‌های ماتریس سفتی کششی - فشاری، ضرایب D_{ij} بیانگر ماتریس سفتی خمشی و ضرایب B_{ij} بیانگر مؤلفه‌های ماتریس جفت‌شدگی کشش و خمش در نظر گرفته می‌شوند. این مؤلفه‌ها با استفاده از ضرایب ماتریس سفتی کاهش‌یافته (Q_{ij}) به صورت رابطه (۱۲) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} Q_{ij} dz \quad (۱۲)$$

نیرو و ممان حرارتی در رابطه (۱۲) از رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود:

$$(N^T, M^T) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z) \frac{1}{1 - \nu(z, T)} E(z, T) \alpha(z, T) (T - T_0) dz \quad (۱۳)$$

۷- پروفیل دما

در این قسمت چگونگی یافتن توزیع دما در پوسته ساخته شده از مواد هدفمند بررسی می‌شود. در پوسته FGM و متناسب با کاربردهای آن معمولاً در نظر گرفتن انتقال حرارت یک‌بعدی و در راستای ضخامت کفایت نموده و دقت کافی را فراهم می‌کند، لذا در اینجا و در بررسی ارتعاشات حرارتی پوسته FGM از معادله‌ی انتقال حرارت یک‌بعدی در غیاب تولید حرارت داخلی، به صورت زیر می‌باشد [۲۷]:

$$\frac{\partial}{\partial z} (K(z, T) \frac{\partial T}{\partial z}) = \rho(z, T) C_v(z, T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۱۴)$$

پیش از اعمال تحریک حرارتی پوسته و در زمان اولیه، دمای پوسته در مرجع T_0 در نظر گرفته شده است. بنابراین برای شرط اولیه معادله انتقال حرارت بالا می‌توان نوشت:

$$T(z, 0) = T_0 \quad (15)$$

شرایط مرزی برای رابطه (۱۴) می‌تواند حالات متعددی داشته باشد. به بیان دیگر سطوح فوقانی و تحتانی پوسته می‌تواند به صورت‌های مختلف بارگذاری حرارتی شده و تحریک دمایی آن سبب شود. لیکن در این پژوهش به بررسی دو حالت مختلف تحریک حرارتی بسنده شده است. شرط مرزی در این دو حالت به صورت زیر می‌باشد:

حالت اول: سطوح بالایی و پایینی پوسته در دمای ثابتی قرار داده شده‌اند.

$$T\left(\frac{h}{2}, t\right) = T_c(t), \quad T\left(-\frac{h}{2}, t\right) = T_m(t) \quad (16)$$

در رابطه‌ی بالا، $T_c(t)$ و $T_m(t)$ به ترتیب دمای سطوح بالایی (سرامیکی) و پایینی (فلزی) پوسته FGM می‌باشد.

حالت دوم: سطح بالایی پوسته در دمای ثابتی قرار داده شده و سطح پایینی آن عایق شده است.

$$T\left(\frac{h}{2}, t\right) = T_c(t), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(T\left(-\frac{h}{2}, t\right) \right) = 0 \quad (17)$$

به این ترتیب با معین نمودن شرایط اولیه و شرایط مرزی معادله انتقال حرارت رابطه‌ی (۱۴) تحلیل آن امکان‌پذیر خواهد بود. می‌دانیم در صورتی که خواص مکانیکی ماده‌ی FGM مستقل از حرارت در نظر گرفته شود، معادله انتقال حرارت به معادله‌ی خطی تبدیل شده و به آسانی با استفاده از روش جداسازی متغیرها^۱ قابل حل می‌باشد. ولی با توجه به در نظر گرفتن وابستگی دمایی، این معادله تبدیل به معادله‌ای غیرخطی خواهد شد. برای حل این معادلات از روش کرنک - نیکلسون استفاده شده است [۲۸]. ابتدا با استفاده از روش تفاضل محدود مرکزی گسسته‌سازی مکانی صورت می‌گیرد:

$$K(z^i, T^i) \frac{T^{i+1} - 2T^i + T^{i-1}}{\Delta^2} + K_{,z}(z^i, T^i) \frac{T^{i+1} - T^{i-1}}{2\Delta} = \rho(z^i, T^i) c(z^i, T^i) \dot{T}^i \quad (18)$$

پس از جایگذاری شرایط مرزی دمایی، این معادله به شکل زیر خواهد بود:

$$[C_T(T)]\{\dot{T}\} + [K_T(T)]\{T\} = \{F_T(T)\} \quad (19)$$

ماتریس‌های C ، K و F از معادله گسسته‌سازی شده محاسبه می‌شوند. حال برای به دست آوردن پروفیل دمایی، بایستی در هر گام زمانی یک پروسه تکراری انجام شود. به این صورت که در هر گام زمانی خواص ماده در دمای مرجع محاسبه می‌شوند. سپس این خواص در T به دست آمده از معادله (۱۹) مجدداً محاسبه و در معادله جایگزین خواهد شد تا این معادله دوباره حل شود.

¹ Separation of Variables

۸- معادله حرکت

از اصل همیلتون استفاده نموده و معادلات حاکم را به دست آورد. اصل همیلتون با توجه به عدم در نظر گرفتن نیروی خارجی در ارتعاشات حرارتی پوسته FGM به صورت زیر درمی آید:

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \right) = 0 \quad (20\text{-الف})$$

$$\delta \left\{ \begin{matrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \Big|_{t=t_1} = \delta \left\{ \begin{matrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \Big|_{t=t_2} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (20\text{-ب})$$

حال می بایست عبارتهای موردنیاز برای استفاده از اصل همیلتون را محاسبه نماییم. انرژی جنبشی پوسته با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر محاسبه می شود.

$$T = \frac{1}{2} \iint \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho V^2 dz \right) dx dy \quad (21)$$

با قرار دادن رابطه سرعت در مختصات کارتزین در رابطه بالا و همچنین استفاده از روابط زیر برای اینرسی پوسته:

$$\left\{ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{matrix} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{matrix} \right\} \rho(z, T) dz \quad (22)$$

برای انرژی جنبشی پوسته می توان نوشت:

$$\delta T = \int (I_1 * (\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}) + I_2 * (\dot{u}\delta\dot{\alpha} + \dot{\alpha}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{\beta} + \dot{\beta}\delta\dot{v}) + I_3 * (\dot{\alpha}\delta\dot{\alpha} + \dot{\beta}\delta\dot{\beta})) \sin\varphi d\varphi \quad (23)$$

اکنون برای یافتن عبارت دوم اصل همیلتون می توان نوشت:

$$\delta u = \iint (\sigma_{\varphi\varphi} \delta\varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta} \delta\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\varphi} \delta\gamma_{\theta\varphi} + \sigma_{\varphi z} \delta\gamma_{\varphi z} + \sigma_{\theta z} \delta\gamma_{\theta z}) * 2\pi R^2 \sin\varphi d\varphi dz \quad (24)$$

حال به انواع شرایط مرزی و نحوه بیان آنها در پوسته کروی اشاره خواهد شد. برای شرایط مرزی، حالت های متداول زیر را می توان در نظر گرفت:

۱- تکیه گاه گیردار:

$$\begin{array}{llllll} \varphi = \varphi_0 & u = 0, & v = 0, & w \neq 0, & \alpha = 0, & \beta = 0 \\ \varphi = \varphi_1 & u = 0, & v = 0, & w = 0, & \alpha = 0, & \beta = 0 \end{array}$$

۲- تکیه‌گاه ساده:

$$\begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w \neq 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0 \\ \varphi = \varphi_1 \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0 \end{array}$$

۳- لبه آزاد:

$$\begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w \neq 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0 \\ \varphi = \varphi_1 \quad u \neq 0, \quad v \neq 0, \quad w \neq 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0 \end{array}$$

۹- نتایج و بررسی

قبل از بررسی ارتعاشات حرارتی پوسته FGM، می‌بایست صحت معادلات و همچنین درستی نحوه‌ی اعمال روش‌های عددی استفاده‌شده در این تحقیق مورد بررسی قرار گیرد. برای حصول اطمینان از معادلات و همچنین صحت محاسبات انجام‌شده مقایسه‌ای با کارهایی که تاکنون انجام گرفته است، صورت می‌پذیرد.

همان‌گونه که عنوان شد، تاکنون هیچ مطالعه‌ای مستقیماً بر روی ارتعاشات حرارتی پوسته کروی ساخته‌شده از مواد هدفمند انجام نشده است. لذا به جهت بررسی صحت ماتریس‌های جرم و سختی پوسته‌ی FGM در این پژوهش، نمای ماده‌ی هدفمند را برابر صفر قرار داده که با این کار جنس پوسته به صورت ایزوتروپیک در نظر گرفته شده و می‌توان نتایج را با پوسته‌ی ایزوتروپیک که در کارهای قبلی موجود است، اعتبارسنجی نمود.

در جداول (۱) تا (۴) فرکانس طبیعی اساسی بی‌بعد شده‌ی پوسته FGM، متناظر با برخی از شرایط مرزی برای نسبت‌های مختلف R/h و در زوایای مختلف φ و همچنین مقدار محاسبه‌شده‌ی موجود در مطالعات پیشین آورده شده است. از مقایسه‌ی نتایج به‌دست‌آمده در این پژوهش و مقادیر موجود در تحقیقات انجام‌شده می‌توان این‌گونه استنباط نمود که استخراج معادلات و حل عددی به‌درستی صورت پذیرفته و ماتریس‌های جرم و سختی به‌دست‌آمده دارای دقت کافی می‌باشند.

جدول ۱- اعتبارسنجی ماتریس‌های جرم و سختی با استفاده از مقایسه فرکانس طبیعی

اساسی بی‌بعد شده، R/h=100، K=5/6، تکیه‌گاه گیردار.

نتایج مرجع [۲۹]	تحقیق حاضر
۰/۷۶۰	۰/۷۶۲۴
۰/۹۳۸	۰/۹۳۸۱
۰/۹۸۴	۰/۹۸۳۷
۱/۰۲۰	۱/۰۲۸۲
۱/۰۷۱	۱/۱۱۲۷

جدول ۲- اعتبارسنجی ماتریس‌های جرم و سفتی با استفاده از مقایسه فرکانس طبیعی اساسی بی‌بعد شده، $R/h=200$ ، $K=5/6$ ، لبه آزاد.

$\varphi=30$		$\varphi=45$		$\varphi=60$		$\varphi=90$	
نتایج	تحقیق	نتایج	تحقیق	نتایج	تحقیق	نتایج	تحقیق
مرجع [۲۹]	حاضر	مرجع [۲۹]	حاضر	مرجع [۲۹]	حاضر	مرجع [۲۹]	حاضر
۰/۹۷۶۶	۰/۹۷۵۹	۰/۹۴۸۲	۰/۹۴۸۰	۰/۹۱۹۲	۰/۹۱۹۱	۰/۸۷۰۲	۰/۸۷۰۲
۱/۰۱۷۰	۱/۰۱۳۲	۰/۹۸۶۷	۰/۹۸۷۰	۰/۹۷۳۱	۰/۹۷۲۷	۰/۹۵۰۳	۰/۹۵۰۱
۱/۱۱۵۶	۱/۱۰۵۳	۱/۰۱۶۰	۱/۰۱۳۳	۰/۹۹۳۳	۰/۹۹۲۴	۰/۹۷۶۶	۰/۹۷۶۷
۱/۳۳۵۹	۱/۳۶۹۸	۱/۰۷۰۶	۱/۰۷۸۳	۱/۰۱۵۵	۱/۰۱۸۰	۰/۹۹۰۸	۰/۹۹۲۶
۱/۷۰۴۹	۱/۸۵۱۷	۱/۱۷۲۱	۱/۲۱۴۷	۱/۰۵۲۸	۱/۰۶۷۸	۱/۰۰۵	۱/۰۰۴۱

جدول ۳- اعتبار سنجی ماتریس‌های جرم و سفتی با استفاده از مقایسه فرکانس طبیعی اساسی بی‌بعد شده، $R/h=100$ ، $K=5/6$ ، لبه آزاد.

$\varphi=30$		$\varphi=45$		$\varphi=60$		$\varphi=90$	
نتایج	تحقیق	نتایج	تحقیق	نتایج	تحقیق	نتایج	تحقیق
مرجع [۲۹]	حاضر	مرجع [۲۹]	حاضر	مرجع [۲۹]	حاضر	مرجع [۲۹]	حاضر
۰/۹۸۱۹	۰/۹۷۹۴	۰/۹۴۹۹	۰/۹۴۹۳	۰/۹۲۰۲	۰/۹۱۹۹	۰/۸۷۰۷	۰/۸۷۰۵
۱/۰۸۷۳	۱/۰۷۴۵	۱/۰۰۱۸	۰/۹۹۸۸	۰/۹۷۸۰	۰/۹۷۷۰	۰/۹۵۳۱	۰/۹۵۲۶
۱/۴۰۷۳	۱/۳۷۹۳	۱/۰۸۴۹	۱/۰۷۶۶	۰/۰۱۵۰	۰/۰۱۱۹	۰/۹۸۳۹	۰/۹۸۳۷
۲/۰۱۶۸	۲/۱۰۰۵	۱/۲۶۵۸	۱/۰۸۳۸	۱/۰۹۳۳	۱/۰۱۸۰	۱/۰۰۱۹	۱/۰۰۴۴
۲/۸۹۳۸	۳/۱۹۶۸	۱/۵۷۴۰	۱/۶۹۴۷	۱/۲۰۷۹	۱/۲۵۹۰	۱/۰۳۲۲	۱/۰۴۴۴

جدول ۴- اعتبار سنجی ماتریس‌های جرم و سفتی با استفاده از مقایسه فرکانس طبیعی اساسی بی‌بعد شده، $R/h=50$ ، $K=5/6$ ، لبه آزاد.

$\varphi=30$		$\varphi=45$		$\varphi=60$		$\varphi=90$	
نتایج	تحقیق	نتایج	تحقیق	نتایج	تحقیق	نتایج	تحقیق
مرجع [۲۹]	حاضر	مرجع [۲۹]	حاضر	مرجع [۲۹]	حاضر	مرجع [۲۹]	حاضر
۱/۰۰۱۸	۰/۹۹۲۲	۰/۹۵۴۶	۰/۹۵۲۶	۰/۹۲۳۰	۰/۹۲۲۲	۰/۸۷۲۳	۰/۸۷۱۸
۱/۳۲۷۳	۱/۲۸۷۸	۱/۰۵۵۶	۱/۰۴۴۸	۰/۹۹۴۲	۰/۹۹۰۶	۰/۹۶۱۹	۰/۹۶۰۶
۲/۱۸۸۷	۲/۱۲۰۴	۱/۳۲۰۰	۱/۲۹۵۴	۱/۰۹۸۱	۱/۰۸۸۱	۰/۹۹۷۵	۰/۹۹۶۰
۳/۵۳۷۵	۳/۶۵۲۹	۱/۸۳۱۲	۱/۸۹۱۶	۱/۳۱۶۵	۱/۳۴۵۲	۱/۰۵۰۹	۱/۰۵۸۴
۴/۳۵۳۹	۴/۳۵۳۷	۲/۵۷۶۷	۲/۸۰۷۱	۱/۶۷۵۶	۱/۸۰۲۸	۱/۱۵۳۵	۱/۱۹۳۶

پس از مقایسه‌ی فرکانس طبیعی اساسی از صحت معادلات و درستی اعمال روش‌های عددی بر آن‌ها اطمینان حاصل شد. حال به بیان نتایج پرداخته خواهد شد. به این منظور جنس سرامیک و فلز تشکیل‌دهنده‌ی ماده‌ی هدفمند ثابت در نظر گرفته شده است. جز سرامیکی پوسته FGM، سیلیکون نیتريد^۱ (Si_3N_4) و جز فلزی آن فولاد ضدزنگ^۲ ($SUS304$) در نظر گرفته شده است. خواص این دو ماده برای استفاده در فرمول تولوکیان و یافتن خواص ماده‌ی هدفمند با لحاظ وابستگی دمایی در جدول (۵) ارائه شده است. در این پژوهش دمای مرجع که پوسته پیش از تغییر شکل در آن دما قرار دارد، $T_0=300\text{ K}$ در نظر گرفته شده است. در صورتی که برای یافتن خواص ترمومکانیکی ماده از تأثیرات وابستگی دمایی صرف نظر شود در فرمول تولوکیان در همه‌ی زمان‌ها مقدار دما برابر دمای مرجع قرار داده می‌شود. در این حالت خواص مستقل از دما در نظر گرفته شده و با نماد TID^۳ در ادامه‌ی این فصل نشان داده می‌شود. اما در این پژوهش به صورت پیش فرض تأثیر وابستگی دمایی لحاظ شده و در هر زمان و دمایی خواص ترمومکانیکی پوسته با قرار دادن دمای همان لحظه از همان مکان از ضخامت پوسته در فرمول تولوکیان دوباره محاسبه و به روز خواهد شد. این حالت با نماد TD^۴ نشان داده شده است. در تمام موارد به جز مواردی که ذکر شده، وابستگی دمایی لحاظ شده است. در بخش‌های بعد موارد مؤثر بر ارتعاشات حرارتی پوسته ساخته شده از مواد هدفمند مورد بررسی قرار خواهند گرفت. لازم به ذکر است سایر پارامترهای مورد نیاز برای تحلیل پوسته FGM در هر قسمت به طور جداگانه بیان می‌شود.

جدول ۵- خواص پوسته FGM به منظور بیان نتایج [۳۰].

ماده	خاصیت	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
SUS304	$\alpha [1/K]$	0	12.33e-6	8.086e-4	0	0
	$E [Pa]$	0	201.04e+9	3.079e-4	-6.534e-7	0
	$K [W/mK]$	0	15.379	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10
	$\rho [kg/m^3]$	0	8166	0	0	0
	ν	0	0.3262	-2.002e-4	3.797e-7	0
	$C_v [J/kgK]$	0	496.56	-1.0151e-3	1.636e-6	-5.863e-10
Si_3N_4	$\alpha [1/K]$	0	5.87e-06	9.10e-04	0	0
	$E [Pa]$	0	3.48e +11	-3.07 e -04	2.16e-07	-8.95e-11
	$K [W/mK]$	0	13.723	-1.03e-03	5.47e-07	-7.88e-11
	$\rho [kg/m^3]$	0	2370	0	0	0
	ν	0	0.24	0	0	0
	$C_v [J/kgK]$	0	555.11	1.02e-03	2.92e-07	-1.67e-10

¹ Silicon Nitride

² Stainless Steel

³ Temperature Independent

⁴ Temperature Dependent

• تأثیر در نظر گرفتن وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی

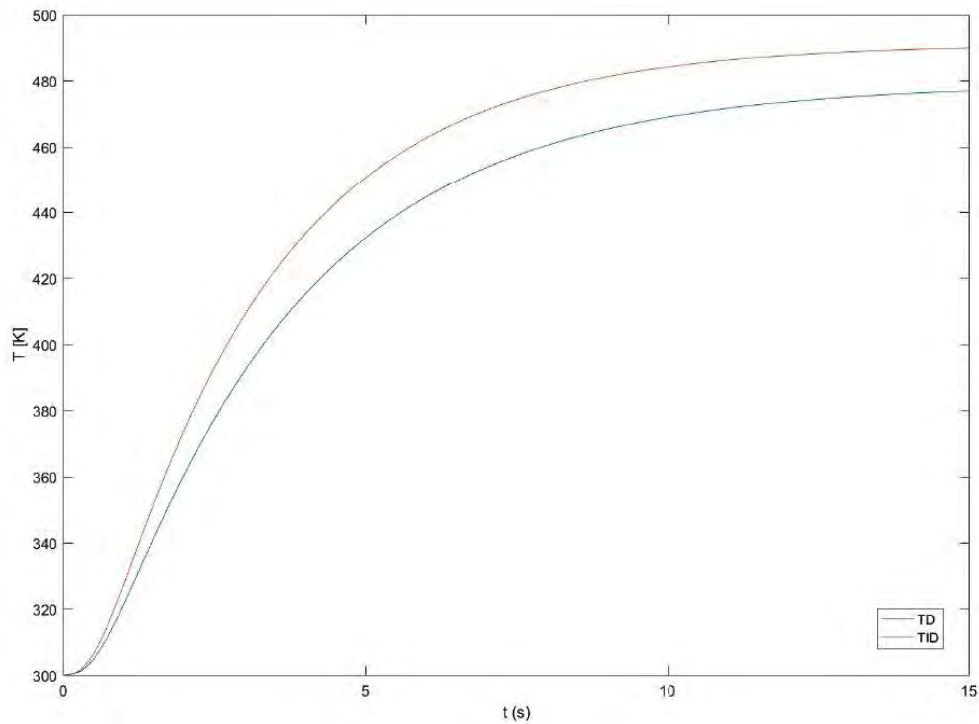
در گام اول از بیان نتایج، اهمیت تأثیر در نظر گرفتن وابستگی حرارتی خواص ترمومکانیکی پوسته ساخته شده از مواد هدفمند بررسی خواهد شد. مشخصات پوسته و شیوهی اعمال بار حرارتی در جدول (۶) بیان شده است. در شکل (۲) تغییرات درجهی حرارت صفحهی میانی پوسته FGM در دو حالتی که خواص ترمومکانیکی پوسته مستقل و وابسته به دما هستند، نشان داده شده است. در تحریک حرارتی صورت گرفته، بارگذاری حرارتی حالت اول بوده و این بدان معناست که سطح تحتانی و فوقانی پوسته به طور ناگهانی در دو دمای ثابت قرار داده شده اند. همان طور که ملاحظه می شود، لحاظ نمودن اثر وابستگی دمایی خواص پوسته سبب می شود درجهی حرارتی که از طریق حل معادلهی انتقال حرارت محاسبه می شود، در تمام زمانها پایین تر از دمایی باشد که بدون در نظر گرفتن وابستگی دمایی خواص پوسته به دست آمده است. همچنین تفاوت میان این دو حالت با گذشت زمان و در دماهای بالاتر افزایش می یابد.

دلیل این امر را می توان این گونه بیان نمود که با توجه به تغییر خواص ترمومکانیکی پوسته در حالت TD ، هدایت حرارتی پوسته و به تبع آن نفوذ حرارت در دماهای بالا و با توجه به رابطهی تولوکیان کاهش یافته و به همین سبب درجهی حرارت تخمین زده شده با در نظر گرفتن وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی پوسته نسبت به حالتی که خواص پوسته مستقل از دما فرض شده اند، کمتر بوده و همچنین با گذشتن زمان کاهش می یابد. در شکل (۳) و شکل (۴) به ترتیب تغییرات نیروی محوری حرارتی و ممان حرارتی پوسته ساخته شده از مواد هدفمند در دو حالتی که خواص ترمومکانیکی پوسته مستقل از دما و وابسته به آن هستند بیان شده است. همان گونه که ملاحظه می شود در نظر گرفتن وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی پوسته برخلاف درجهی حرارت، نیرو و ممان حرارتی را بیشتر از حالتی که خواص پوسته مستقل از دما فرض شده اند، تخمین می زند.

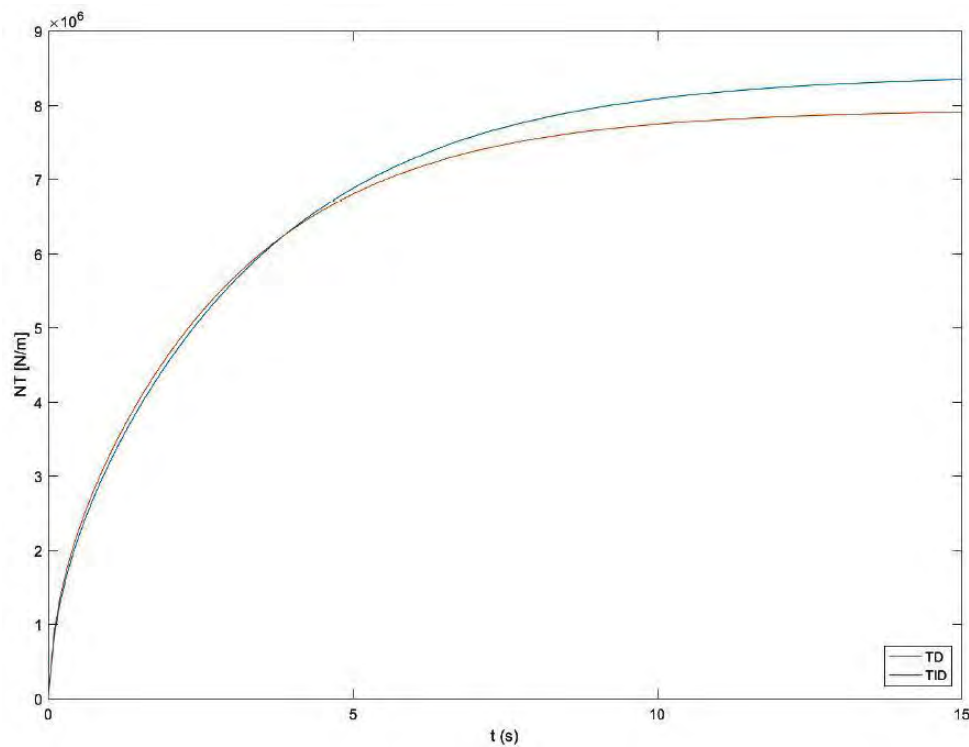
جدول ۶- مشخصات پوسته FGM در بررسی تأثیر در نظر گرفتن وابستگی

دمایی خواص ترمومکانیکی.

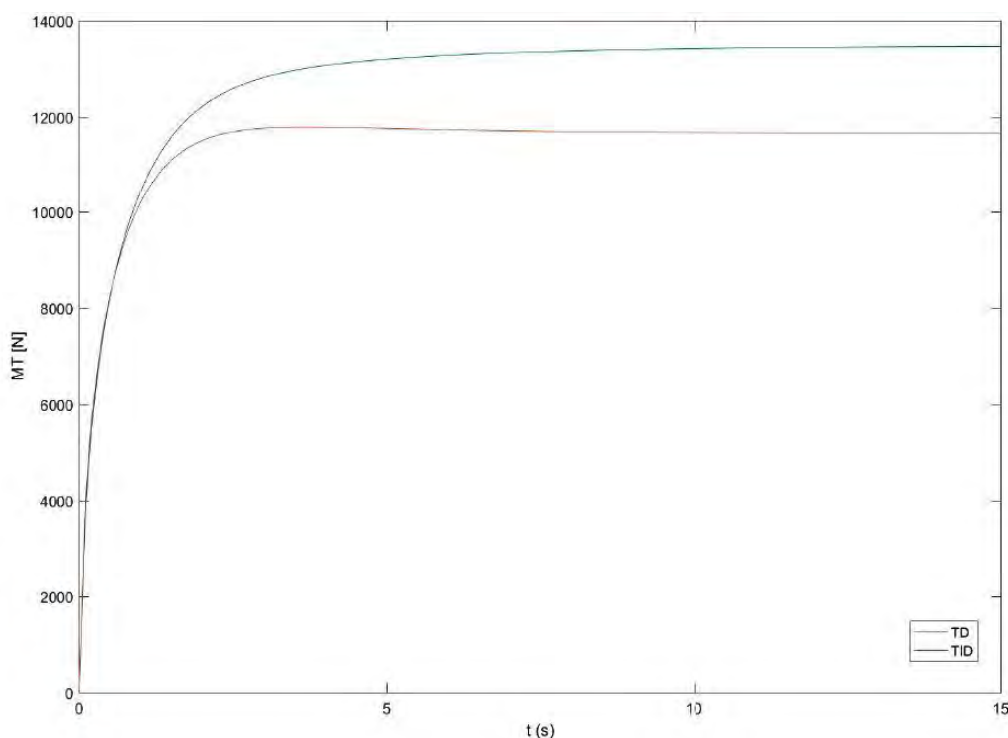
تکیه گاه ساده	شرط مرزی
حالت اول	حالت اعمال بار حرارتی
۲	نمای ماده هدفمند
۷۰۰ K	T_c
۳۰۰ K	T_m
۱۰ mm	H
۱ m	R
۹۰	φ



شکل ۲- تغییرات درجه حرارت صفحه میانی تحت تحریک حرارتی حالت اول، (۱) در صورتی که خواص ترمومکانیکی پوسته مستقل از دما در نظر گرفته شوند. (۲) در صورتی که وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی لحاظ شده باشد.



شکل ۳- تغییرات نیروی حرارتی تحت تحریک حرارتی حالت اول، (۱) در صورتی که خواص ترمومکانیکی پوسته مستقل از دما در نظر گرفته شوند. (۲) در صورتی که وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی لحاظ شده باشد.



شکل ۴- تغییرات ممان حرارتی تحت تحریک حرارتی حالت اول، (۱) در صورتی که خواص ترمومکانیکی پوسته مستقل از دما در نظر گرفته شوند. (۲) در صورتی که وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی لحاظ شده باشد.

دلیل این امر را می‌توان این‌گونه بیان نمود که نیروی محوری حرارتی و ممان حرارتی در هر زمان مبین سطح زیر نمودار تابع $f(z,T)$ نسبت به محور z و گشتاور اول سطح این تابع نسبت به صفحه‌ی میانی پوسته می‌باشند:

$$f(Z, T) = \frac{E(Z, T)\alpha(Z, T)}{1 - \nu(Z, T)} (T - T_0) \quad (25)$$

با در نظر گرفتن تأثیر دمایی خواص، مقدار تابع فوق و همچنین گشتاور اول سطح آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد. این امر سبب می‌شود نیروی محوری حرارتی و ممان حرارتی در حالت TD بیشتر از حالت TID بوده و همچنین با گذشت زمان افزایش یابد.

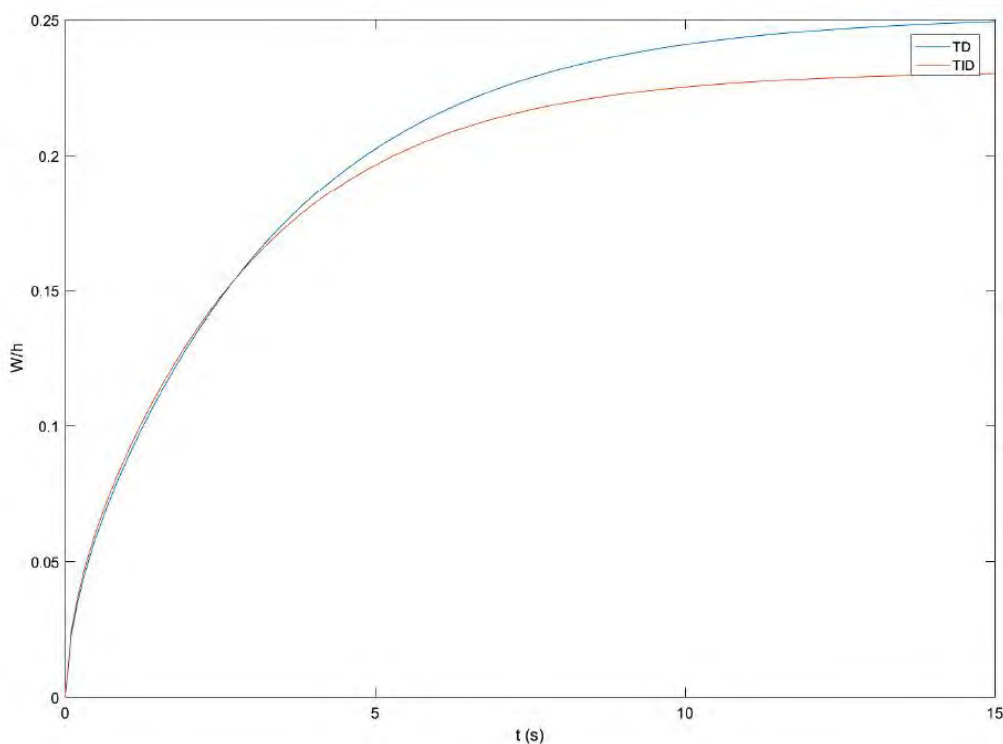
در شکل (۵) نسبت جابجایی عرضی به ضخامت صفحه‌ی میانی پوسته FGM در دو حالتی که خواص ترمومکانیکی پوسته مستقل و وابسته به دما در نظر گرفته شده‌اند، نشان داده شده است. نکته‌ی مهمی که از این نمودار قابل استنباط است، حکم‌فرما بودن پاسخ شبه‌استاتیکی در پوسته‌های نسبتاً ضخیم می‌باشد. با توجه به حل دینامیکی معادله‌ی انتقال حرارت و همچنین معادلات حرکت پوسته، ارتعاشات قابل توجهی در این نمودار مشاهده نمی‌شود. البته با دقت در این نمودار می‌توان تأثیر کم ترم‌های اینرسی پوسته که ارتعاشات بسیار اندکی را سبب شده است، مشاهده نمود.

تأثیر ترم‌های اینرسی به راحتی قابل چشم‌پوشی بوده و می‌توان این گونه نتیجه گرفت که در تحلیل پوسته‌های نسبتاً ضخیم تحت تحریک حرارتی لزومی به حل دینامیکی معادلات حرکت پوسته FGM نمی‌باشد. نکته‌ی دیگری که از این نمودار برمی‌آید این است که در نظر گرفتن وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی جابجایی عرضی پوسته را بیشتر از حالتی که خواص پوسته مستقل از درجه‌ی حرارت فرض شده‌اند، پیش‌بینی می‌کند؛ که این امر با توجه به بیشتر تخمین زدن نیرو و ممان حرارتی و تأثیر مستقیم این دو عامل بر معادلات حرکت پوسته، کاملاً قابل انتظار می‌باشد.

در ادامه تمام معادلات با استفاده از در نظر گرفتن وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی پوسته تحلیل شده و نتایج آن بیان شده است.

• بررسی وجود ارتعاشات حرارتی

در گام دوم از بیان نتایج این پژوهش، به بررسی وجود ارتعاشات حرارتی در پوسته FGM پرداخته و میزان کارآمدی پاسخ شبه‌استاتیکی در پوسته تحت تحریک حرارتی مورد بررسی قرار داده می‌شود. بدین منظور با ثابت قرار دادن شعاع و زاویه پوسته کروی، ضخامت را تغییر داده و پاسخ دینامیکی تحت تحریک دمایی حالت اول محاسبه می‌شود. مشخصات پوسته در جدول (۷) بیان شده است. پاسخ دینامیکی پوسته ساخته شده از مواد هدفمند به ازای ضخامت‌های مختلف در شکل (۶) نشان داده شده است.

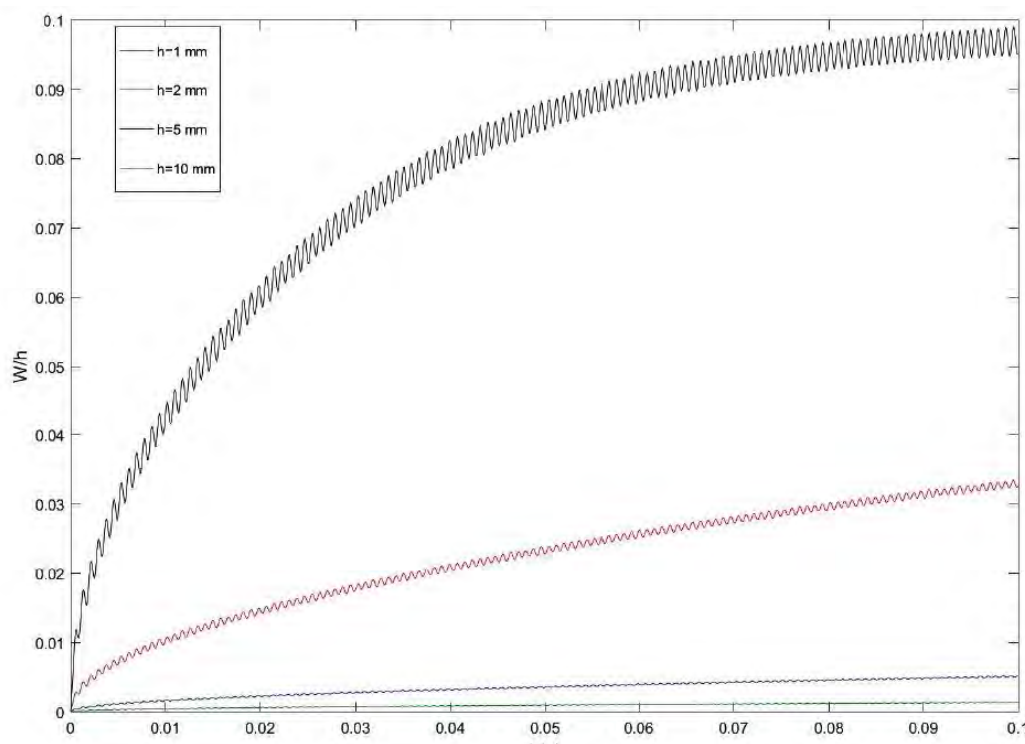


شکل ۵- نسبت جابجایی عرضی به ضخامت نقطه مرکزی پوسته تحت تحریک حرارتی حالت اول، (۱) در صورتی که خواص ترمومکانیکی پوسته مستقل از دما در نظر گرفته شوند. (۲) در صورتی که وابستگی دمایی خواص ترمومکانیکی لحاظ شده باشد.

از نتایج این قسمت این گونه استنباط نمود که در پوسته‌های ضخیم و حتی نسبتاً ضخیم که تأثیر ترم‌های اینرسی پوسته ناچیز است، پاسخ شبه‌استاتیکی جهت تحلیل کفایت می‌نماید؛ اما برای تحلیل پوسته‌های نازک و با توجه به مشاهده‌ی ارتعاشات ناشی از بارگذاری حرارتی، می‌بایست علاوه بر معادله‌ی انتقال حرارت، معادلات حرکت پوسته نیز به صورت دینامیکی مورد تحلیل قرار گیرد.

جدول ۷- مشخصات پوسته FGM در بررسی وجود ارتعاشات حرارتی.

شرط مرزی	تکیه‌گاه ساده
حالت اعمال بار حرارتی	حالت اول
نمای ماده‌ی هدفمند	۱
T_c	۳۲۰ K
T_m	۳۰۰ K
H	۱،۲،۵،۱۰ mm
R	۱m
φ	۹۰



شکل ۶- پاسخ دینامیکی نقطه مرکزی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول.

• تأثیر نمای ماده هدفمند

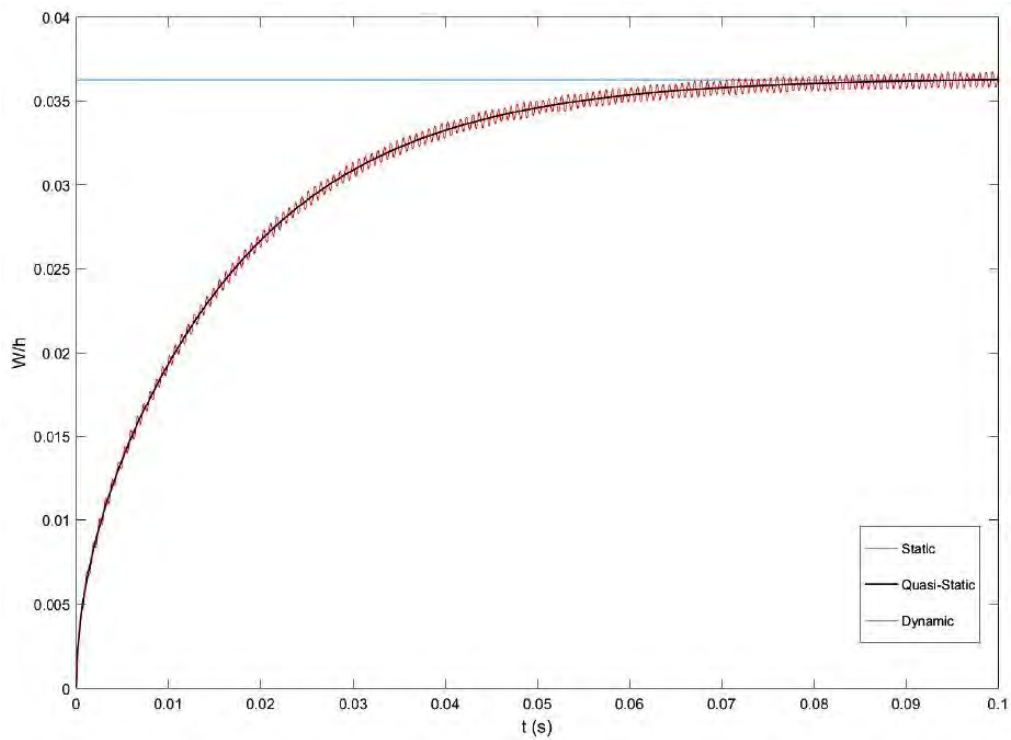
در این قسمت تأثیر نمای ماده‌ی هدفمند و همچنین مقایسه‌ی پاسخ‌های پوسته‌ی ساخته‌شده از مواد هدفمند در سه نوع تحلیل دینامیکی، شبه‌استاتیکی و استاتیکی بررسی خواهد شد. مشخصات پوسته و نوع بارگذاری حرارتی در جدول (۸) مشخص شده است.

لازم به ذکر است در یافتن پاسخ استاتیکی معادله‌ی انتقال حرارت و معادلات حرکت به‌صورت استاتیکی و با صرف‌نظر از ترم‌های اینرسی مورد تحلیل قرار گرفته است. در تحلیل شبه‌استاتیکی، معادله‌ی انتقال حرارت به‌صورت دینامیکی تحلیل شده و در هر لحظه نیرو و ممان حرارتی محاسبه می‌شود و در معادلات حرکت پوسته FGM قرار داده خواهد شد. به این صورت که در هر لحظه معادلات حرکت به‌صورت استاتیکی تحلیل شده و پاسخ شبه‌استاتیکی به دست می‌آید. در یافتن پاسخ دینامیکی معادله‌ی انتقال حرارت و معادلات حرکت پوسته FGM به‌صورت دینامیکی و با در نظر گرفتن ترم‌های اینرسی تحلیل می‌شود. از شکل (۷) تا شکل (۱۰) به مقایسه‌ی پاسخ‌های دینامیکی، شبه‌استاتیکی و استاتیکی نقطه مرکزی پوسته FGM تحت بارگذاری حرارتی حالت اول و به ازای نمای ماده‌ی هدفمند متفاوت پرداخته شده است.

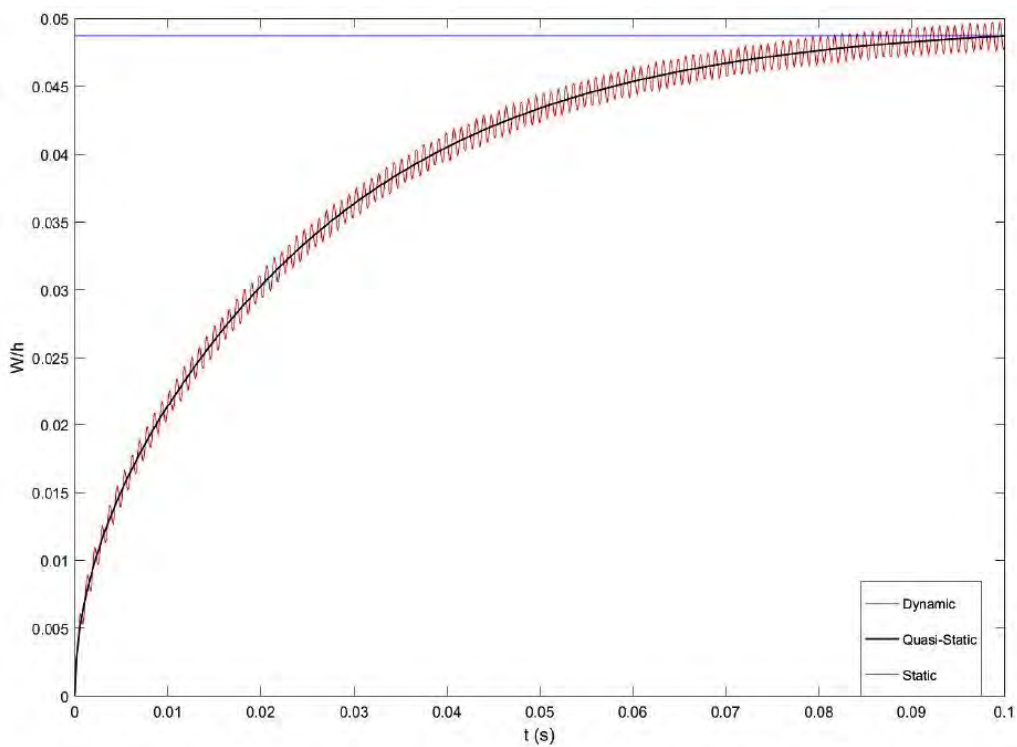
همان‌گونه که در نمودارها مشخص است، پس از گذشت چند صدم ثانیه پاسخ شبه‌استاتیکی بر پاسخ استاتیکی منطبق می‌شود. علت این امر این است که با گذشت زمان به تدریج دما به حالت پایدار رسیده و به تبع آن نیروها و ممان‌های حرارتی به مقدار ثابتی میل می‌کند و این مسئله سبب می‌شود با گذشت زمان تغییری در پاسخ شبه‌استاتیکی پوسته ایجاد نگردد. همچنین در این نمودارها ملاحظه می‌شود که دامنه‌ی پاسخ دینامیکی پوسته FGM به تدریج افزایش می‌یابد تا این که در نهایت و پس از گذشت زمان، به علت تأثیر ترم‌های اینرسی پوسته حول مقدار ثابتی که در آن پاسخ استاتیکی و شبه‌استاتیکی بر هم منطبق می‌شوند، نوسان می‌کند. لازم به ذکر است دلیل میل نمودن پاسخ دینامیکی به مقداری ثابت همانند علتی است که در مورد پاسخ شبه‌استاتیکی عنوان شد. البته همان‌طور که در قسمت‌های قبل نیز اشاره شد، در صورتی که پوسته دارای ضخامت قابل توجهی باشد، تأثیر ترم‌های اینرسی ناچیز بوده و پاسخ حاصل از تحلیل دینامیکی نیز بر پاسخ‌های ناشی از تحلیل استاتیکی و شبه‌استاتیکی منطبق خواهد شد.

جدول ۸- مشخصات پوسته FGM در بررسی نمای ماده‌ی هدفمند.

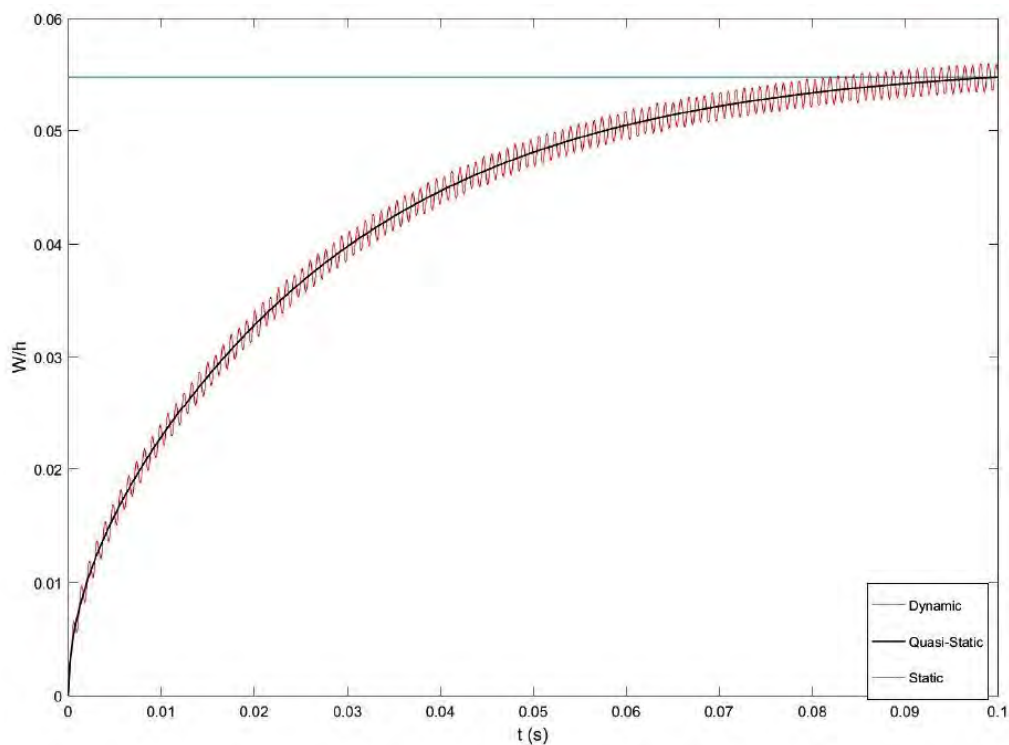
شرط مرزی	تکیه‌گاه ساده
حالت اعمال بار حرارتی	حالت اول
نمای ماده‌ی هدفمند	۰، ۱، ۲، ۵
T_c	۳۱۰K
T_m	۳۰۰K
H	۱mm
R	۱m
φ	۹۰



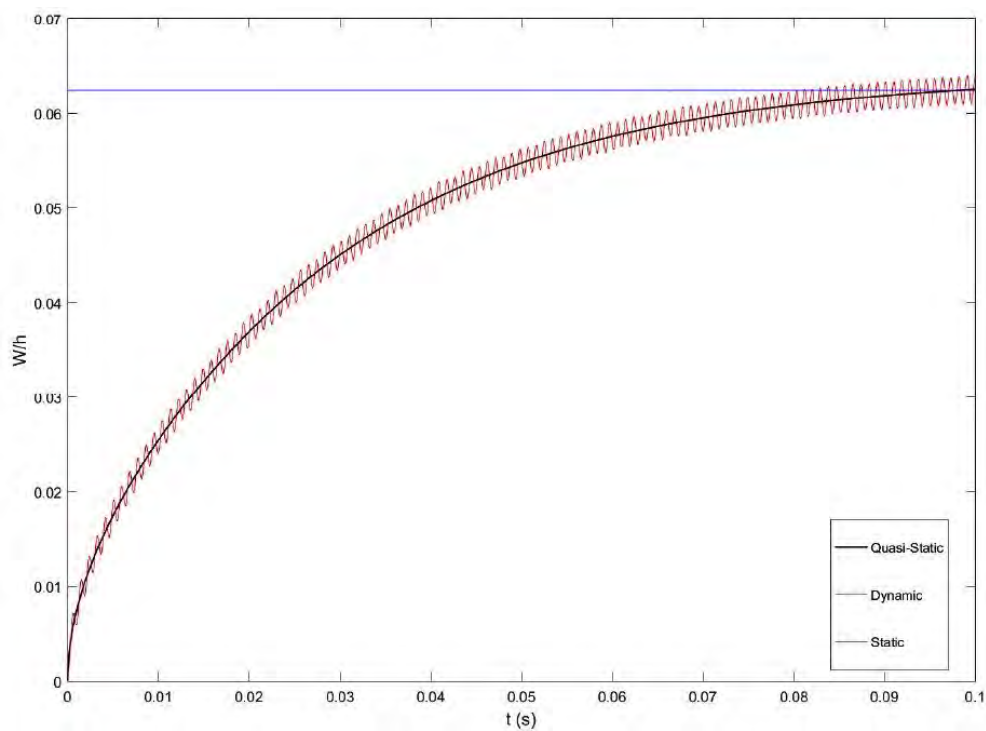
شکل ۷- مقایسه پاسخ‌های دینامیکی، شبه‌استاتیکی و استاتیکی نقطه مرکزی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول. $\xi=0$



شکل ۸- مقایسه پاسخ‌های دینامیکی، شبه‌استاتیکی و استاتیکی نقطه مرکزی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول. $\xi=1$



شکل ۹- مقایسه پاسخ‌های دینامیکی، شبه‌استاتیکی و استاتیکی نقطه مرکزی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول. $\xi=2$.



شکل ۱۰- مقایسه پاسخ‌های دینامیکی، شبه‌استاتیکی و استاتیکی نقطه مرکزی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول. $\xi=5$.

نکته‌ی حائز اهمیت دیگری که در این نمودارها مشاهده می‌شود، افزایش دامنه‌ی پاسخ‌ها به ازای افزایش نمای ماده‌ی هدفمند می‌باشد. هر چه نمای ماده‌ی هدفمند افزایش یابد سبب می‌شود نسبت حجمی سرامیک در معادلات پوسته FGM کاهش یافته و خواص ماده‌ی هدفمند به سمت خواص فلزی میل بیشتری پیدا کند. با توجه به اینکه فلز در مقایسه با سرامیک مقاومت کمتری در برابر اعمال بار حرارتی دارد طبیعی است با میل نمودن خواص پوسته به سمت خواص فلزی، میزان جابجایی عرضی ناشی از اعمال بارگذاری حرارتی افزایش خواهد یافت. همچنین می‌توان با مقایسه‌ی نمودارهای این قسمت مشاهده نمود که هر چه نمای ماده‌ی هدفمند و به تبع آن نسبت حجمی فلز افزایش می‌یابد، پیوند ارتعاشات پوسته FGM نیز افزایش خواهد یافت. دلیل این امر نیز همانند علتی است که برای مقایسه‌ی دامنه‌ی ارتعاشات حرارتی پوسته بیان شد، میل نمودن خواص به سمت خواص فلزی می‌باشد.

• تأثیر نوع بارگذاری‌های حرارتی

در قسمت‌های قبل با توجه به بررسی تأثیر عوامل مختلف در ارتعاشات حرارتی پوسته ساخته شده از مواد هدفمند، در تمام موارد بارگذاری حرارتی ثابت و مطابق با حالت اول در نظر گرفته شد. در این قسمت تأثیر نوع بارگذاری در پاسخ ارتعاشات حرارتی پوسته FGM و مقایسه میان دو بارگذاری حالت اول و دوم بررسی خواهد شد. بدین جهت پوسته‌ای با مشخصات نشان داده شده در جدول (۹) و با اعمال بارگذاری حرارتی حالت دوم که در آن سطح تحتانی عایق حرارتی بوده و سطح فوقانی آن به‌طور ناگهانی در دمای ثابت قرار داده شده است، مورد بررسی قرار داده می‌شود.

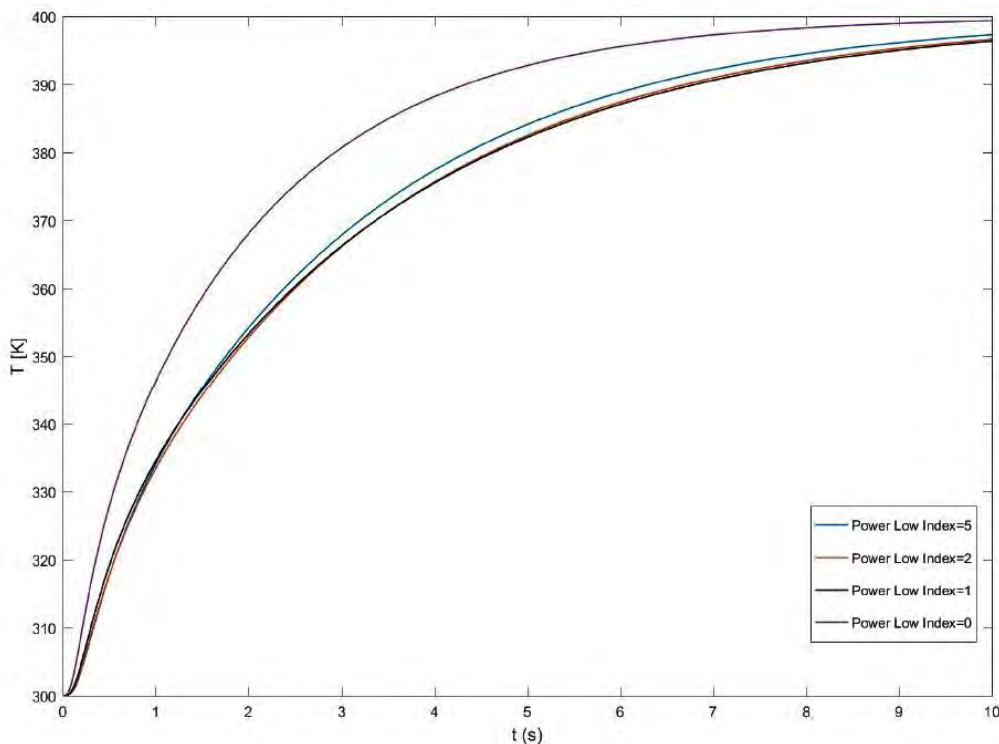
در شکل (۱۱) تغییرات درجه‌ی حرارت صفحه‌ی میانی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی نوع دوم بیان شده است. با استفاده از معادله‌ی انتقال حرارت می‌توان دریافت که نفوذ حرارت در پوسته متأثر از تأثیر عواملی نظیر هدایت حرارتی، چگالی، ظرفیت ویژه و در پوسته‌های ساخته شده از مواد هدفمند تابع نسبت حجمی فلز و سرامیک و به تبع آن نمای ماده‌ی هدفمند می‌باشد.

با توجه به لحاظ نمودن وابستگی حرارتی خواص ترمومکانیکی پوسته مشاهده می‌شود که در این نمودار و در ثانیه‌های ابتدایی میزان نفوذ حرارت با افزایش نمای ماده‌ی هدفمند کاهش می‌یابد؛ اما با توجه به تغییرات نامنظم خواص ترمومکانیکی پوسته به ازای ماده‌ی هدفمند متفاوت، ملاحظه می‌شود که در زمان‌های بالاتر و همچنین در دماهای بیشتر، ترتیب میزان نفوذ حرارت در پوسته‌های با نمادهای هدفمند غیر صفر تغییر می‌کند.

در خصوص پوسته‌ی تمام سرامیکی (پوسته با نمای هدفمند صفر) تفاوتی که مشاهده می‌شود، عدم تأثیرپذیری نفوذ حرارتی این پوسته از نسبت حجمی پوسته و تغییرات خواص در راستای ضخامت می‌باشد. نفوذ حرارت در این پوسته تنها به ترم نفوذ، $K / \rho C v$ وابسته است. این در حالی است که نفوذ حرارت در پوسته‌های FGM علاوه بر این ترم به نسبت حجمی، تغییرات خواص در راستای ضخامت و نمای ماده‌ی هدفمند نیز مرتبط می‌باشد. البته لازم به ذکر است این ترم با توجه به لحاظ نمودن اثرات وابستگی حرارتی خواص ترمومکانیکی پوسته به دما نیز وابسته خواهد بود.

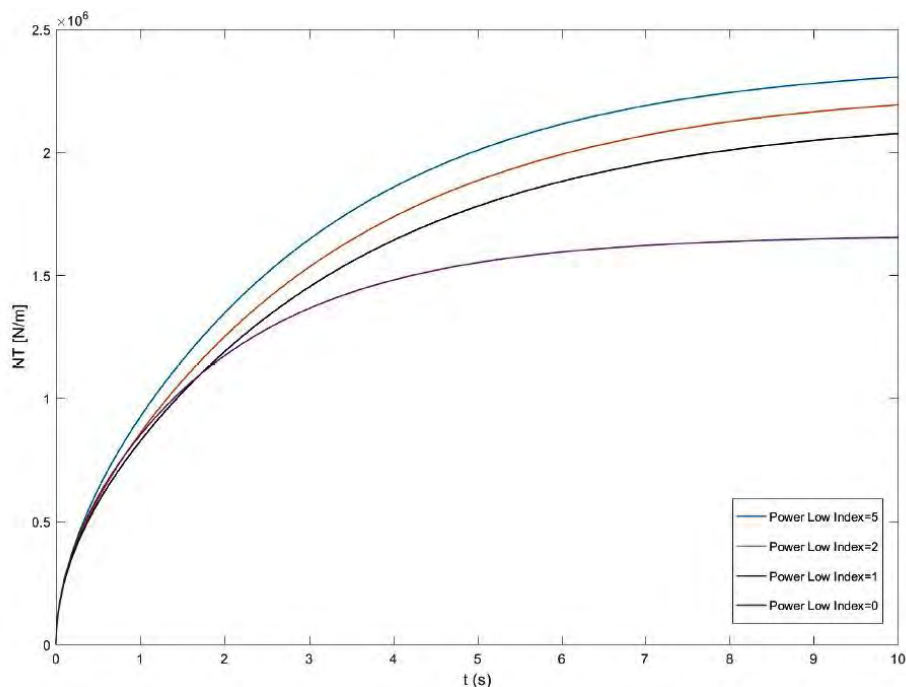
جدول ۹- مشخصات پوسته FGM در بررسی تأثیر نوع بارگذاری حرارتی (۲).

تکیه‌گاه ساده	شرط مرزی
حالت دوم	حالت اعمال بار حرارتی
۰،۱،۲،۵	نمای ماده‌ی هدفمند
۴۰۰K	T_c
۵mm	H
۱m	R
۹۰	φ

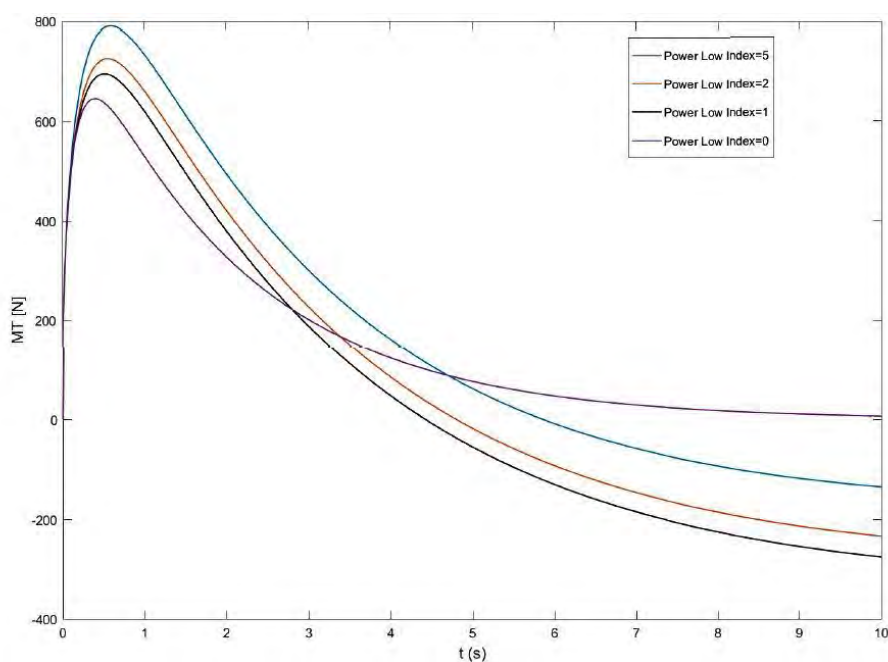
**شکل ۱۱- تغییرات درجه حرارت صفحه‌ی میانی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت دوم و به ازای نمای ماده‌ی هدفمند متفاوت.**

در شکل (۱۲) تغییرات نیروی حرارتی پوسته FGM نسبت به تحریک حرارتی حالت دوم بیان شده است. با توجه به حالت اعمال بارگذاری دمای همه‌ی نقاط پوسته به تدریج و با گذشت زمان افزایش یافته و این امر سبب می‌شود نیروی حرارتی هم تا زمانی که همه‌ی نقاط پوسته به دمای تحریک سطح فوقانی برسند، افزایش یافته و سرانجام به مقدار ثابتی میل نماید.

در شکل (۱۳) تغییرات ممان حرارتی پوسته FGM نسبت به تحریک حرارتی حالت دوم نشان داده شده است. در تعریف ریاضی ممان حرارتی عنوان شده که ممان حرارتی مبین گشتاور اول سطح تابع بیان شده در رابطه (۲۵) نسبت به صفحه‌ی میانی پوسته می‌باشد و این بدان معناست تغییرات درجه‌ی حرارت تمام نقاط در راستای ضخامت پوسته نسبت به هم در مقدار ممان حرارتی دخیل هستند.



شکل ۱۲- تغییرات نیروی حرارتی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت دوم و به ازای نمای ماده‌ی هدفمند متفاوت.



شکل ۱۳- تغییرات ممان حرارتی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت دوم و به ازای نمای ماده‌ی هدفمند متفاوت.

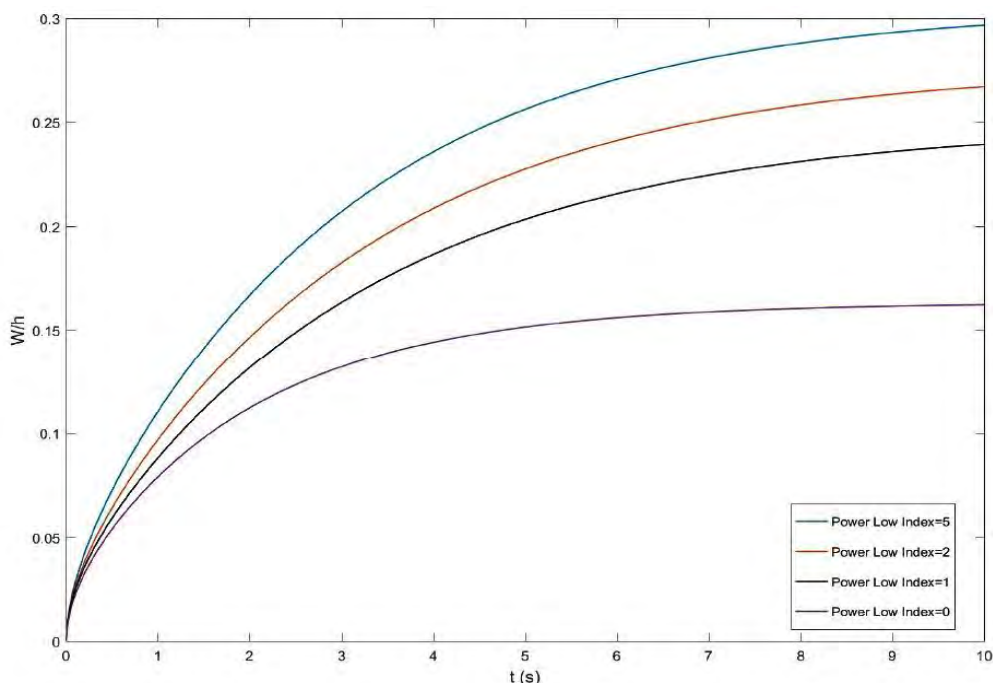
در بارگذاری حرارتی حالت اول با توجه به اینکه دماهای سطوح فوقانی و تحتانی پوسته ثابت در نظر گرفته می‌شدند، دمای نقاط پوسته نیز متأثر از قید دمایی سطح بالا و هم‌سطح پایین پوسته قرار داشت. این امر سبب می‌شد تفاوت دمایی میان نقاط بالای صفحه میانی پوسته و نقاط پایین صفحه میانی پوسته به تدریج و با گذشت زمان افزایش یافته تا اینکه سرانجام به مقدار ثابتی میل نماید. تحلیل بارگذاری حالت اول در انتهای فصل بررسی خواهد شد. در بارگذاری حرارتی حالت دوم سطح فوقانی در دمای ثابت قرار داده شده و این در حالی است که سطح تحتانی پوسته عایق حرارتی می‌باشد. این امر سبب می‌شود برخلاف بارگذاری حالت اول، دمای تمام نقاط مختلف پوسته به تدریج افزایش یافته و با گذشت زمان دمای نقاط پوسته یکسان شود؛ که این یکسان شدن دمای تمام نقاط در بارگذاری حرارتی حالت اول رخ نمی‌داد.

در صورتی که نمای ماده هدفمند برابر صفر در نظر گرفته شود، پوسته FGM به پوسته کاملاً ایزوتروپیک تبدیل خواهد شد. به همین دلیل در اثر اعمال بارگذاری حالت دوم و پس از یکسان شدن دمای نقاط ملاحظه می‌شود که گشتاور اول سطح رابطه (۲۵) برابر صفر شده و در نتیجه پس از گذشت زمان، مقدار ممان حرارتی پوسته ایزوتروپیک (سرامیکی) به صفر می‌رسد.

در پوسته FGM به‌عنوان یک ماده غیر ایزوتروپیک در ابتدای بارگذاری حرارتی حالت دوم، دمای نقاط بالای صفحه میانی پوسته بالاتر است. پس از گذشت زمان، به تدریج دمای نقاط پایینی پوسته نیز افزایش یافته و به دمای نقاط بالایی آن نزدیک شده تا اینکه سرانجام درجه حرارت در تمام نقاط پوسته یکسان خواهد شد. با توجه به رابطه (۲۵) و اینکه پس از گذشت چند ثانیه دما در تمام نقاط پوسته یکسان خواهد شد، این‌گونه استنباط می‌شود که گشتاور اول این رابطه برای پوسته ایزوتروپیک می‌بایست برابر صفر باشد که این امر برای پوسته تمام سرامیکی کامل مشهود است. لیکن در پوسته ساخته‌شده از مواد هدفمند، ضریب پواسون، مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در هر سطحی از پوسته متفاوت می‌باشد. این امر سبب می‌شود با وجود متعادل شدن درجه حرارت در پوسته، مقدار ممان حرارتی پوسته FGM به صفر میل نکند. شکل (۱۴) بیانگر جابجایی عرضی پوسته می‌باشد. علت اینکه علی‌رغم صفر شدن ممان در نهایت جابجایی عرضی پوسته به سمت صفر میل نمی‌کند، وجود نیروی حرارتی و صفر نبودن آن است.

نکته آخر اینکه با توجه به ضخیم در نظر گرفتن پوسته، ارتعاشات حرارتی در شکل (۱۴) مشاهده نمی‌شود. البته عبارتهای اینرسی پوسته نوسانات بسیار ریزی را در نمودار جابجایی عرضی نقطه میانی پوسته به وجود آورده‌اند. حال پوسته‌ای با همان شرایطی که در این قسمت تحت تحریک حرارتی حالت دوم قرار داده شد، در نظر گرفته می‌شود؛ با این تفاوت که سطح تحتانی پوسته به‌جای عایق حرارتی در دمای مرجع نگه داشته خواهد شد. به این ترتیب شیوه بارگذاری از حالت دوم به حالت اول تغییر می‌یابد. سایر پارامترهای پوسته ثابت در نظر گرفته می‌شود. مشخصات پوسته در جدول (۱۰) بیان شده است.

از شکل (۱۵) تا شکل (۱۸) به ترتیب تغییرات درجه حرارت صفحه میانی، تغییرات نیرو و ممان حرارتی و نسبت جابجایی عرضی به ضخامت نقطه مرکزی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول و به ازای نمای ماده هدفمند متفاوت نشان داده شده است.

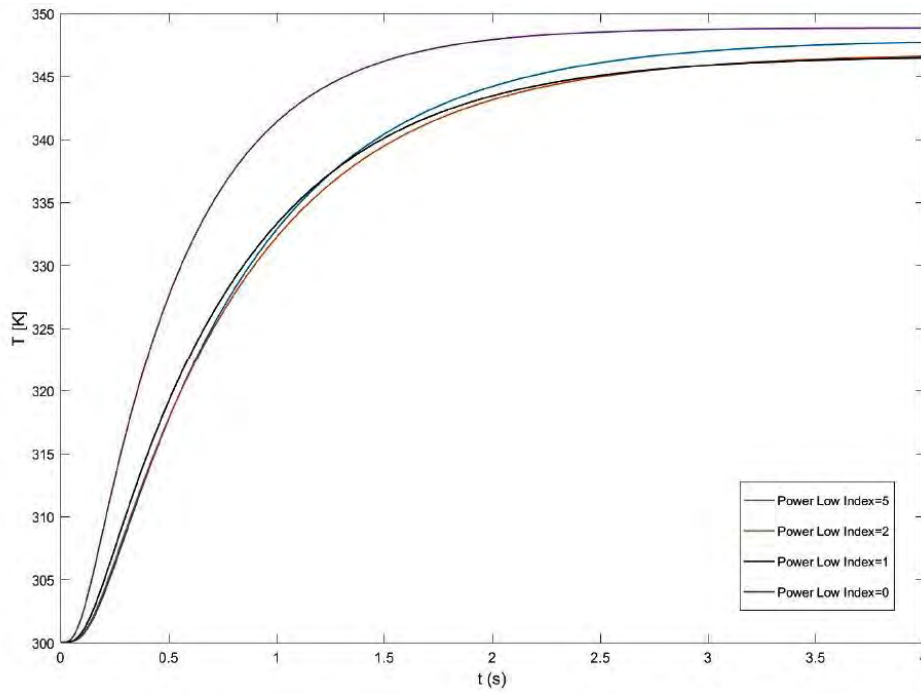


شکل ۱۴- نسبت جابجایی عرضی نقطه مرکزی به ضخامت پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت دوم و به ازای نمای ماده‌ی هدفمند متفاوت.

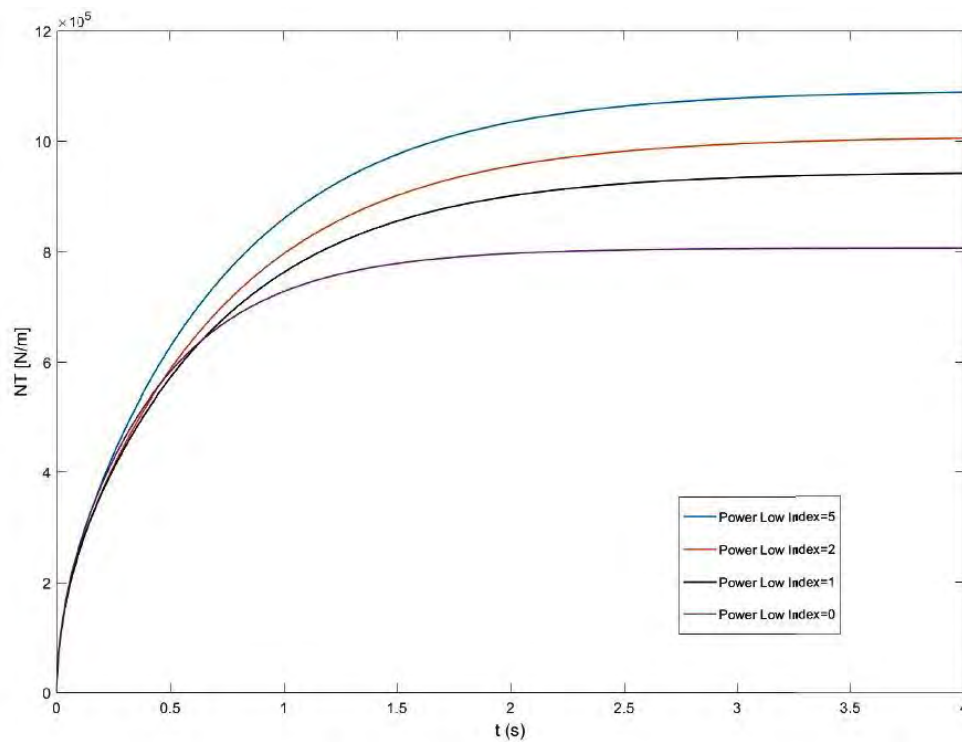
در شکل (۱۵) همانند بارگذاری حرارتی حالت دوم مشاهده می‌شود که با توجه به در نظر گرفتن وابستگی حرارتی خواص ترمودینامیکی پوسته، در لحظات ابتدایی میزان نفوذ حرارت با افزایش نمای ماده هدفمند کاهش می‌یابد؛ لکن وابستگی حرارتی خواص ترمودینامیکی پوسته و تغییرات آن به ازای نمای ماده هدفمند متفاوت سبب می‌شود این ترتیب در زمان‌های بالاتر تغییر یابد. تفاوت قابل ذکر میان این حالت بارگذاری و تحریک حالت دوم این است که در این حالت با توجه به ثابت بودن دمای صفحه پایینی پوسته، دمای نقاط مختلف پوسته سرانجام به مقداری مابین دمای بالا و پایین پوسته میل می‌کند. این در حالی است که در بارگذاری حالت دوم و با توجه به مقید نبودن دمای سطح تحتانی پوسته، دمای تمام نقاط حتی سطح پایینی پوسته به دمای تحریک سطح سرامیکی و فوقانی همگرا می‌شوند.

جدول ۱۰- مشخصات پوسته FGM در بررسی تأثیر نوع بارگذاری حرارتی (۱).

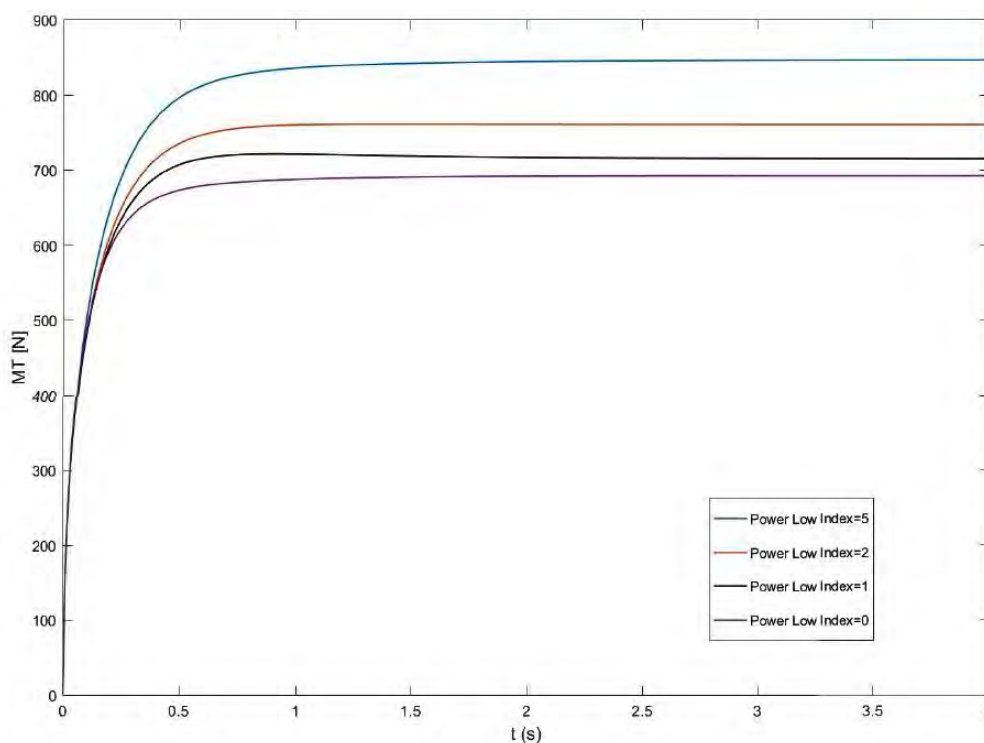
تکیه‌گاه ساده	شرط مرزی
حالت اول	حالت اعمال بار حرارتی
۰، ۱، ۲، ۵	نمای ماده‌ی هدفمند
۴۰۰ K	T_c
۳۰۰ K	T_m
۵ mm	H
۱ m	R
۹۰	φ



شکل ۱۵- تغییرات درجه حرارت صفحه‌ی میانی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول و به ازای نمای ماده‌ی هدفمند متفاوت.

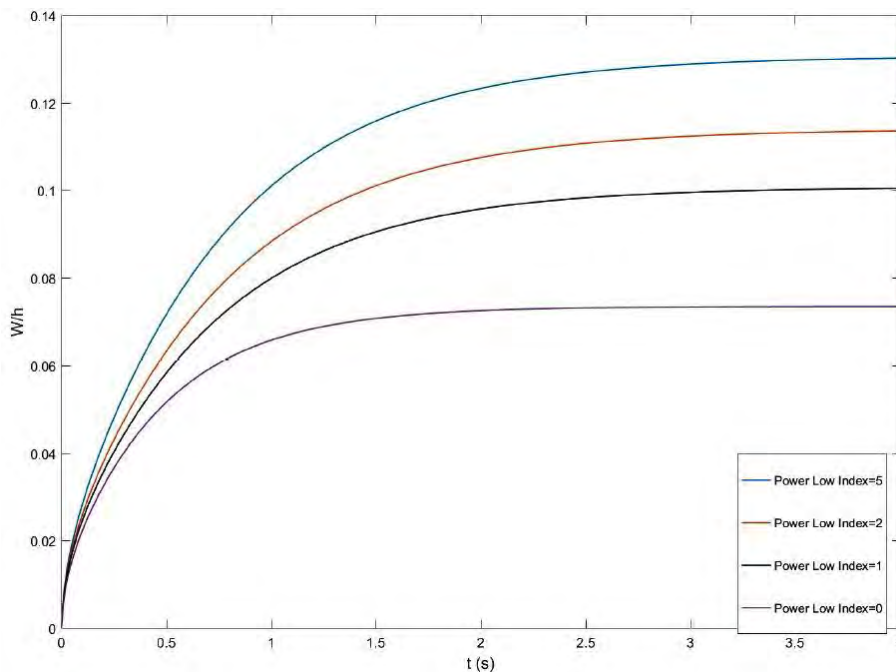


شکل ۱۶- تغییرات نیروی حرارتی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول و به ازای نمای ماده‌ی هدفمند متفاوت.



شکل ۱۷- تغییرات ممان حرارتی پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول و به ازای نمای ماده‌ی هدفمند متفاوت.

همان‌گونه که در نمودارها قابل مشاهده است، مدت‌زمان به تعادل رسیدن پوسته در بارگذاری حالت اول به دلیل ماهیت بارگذاری و ثابت بودن دمای سطوح فوقانی و تحتانی پوسته کمتر است. در شکل (۱۶) مشاهده می‌شود که روند تغییرات نیروی حرارتی پوسته تحت تحریک حرارتی حالت اول تفاوت چندانی با تغییرات نیروی حرارتی ناشی از بارگذاری حرارتی حالت دوم نداشته و تنها مقادیر نیروی حرارتی حاصل از تحریک حالت دوم، به علت افزایش درجه حرارت نقاط مختلف پوسته به درجه حرارت سطح فوقانی، بیشتر خواهد بود. در شکل (۱۷) ملاحظه می‌شود که ممان حرارتی با توجه به مدت‌زمان سریع رسیدن به تعادل دمایی در نقاط مختلف پوسته در بارگذاری حرارتی حالت اول، به مراتب سریع‌تر از ممان حرارتی ناشی از بارگذاری حرارتی حالت دوم به تعادل می‌رسد. میزان ممان حرارتی بیشینه در دو حالت بارگذاری، تفاوت چندانی با یکدیگر نداشته ولی تحریک حرارتی حالت دوم، گرم شدن تدریجی دمای نقاط پایینی پوسته و به تبع آن کاهش ممان حرارتی را به همراه دارد. لذا دمای نقاط مختلف پوسته به درجه حرارت یکسان میل خواهد نمود. با توجه به اینکه در پوسته‌ها علاوه بر ممان، نیروی حرارتی نیز بر جابجایی موثر است، علیرغم صفر شدن ممان حرارتی تفاوت آشکاری در پاسخ دینامیکی پوسته FGM به تحریک‌های حرارتی حالت اول و دوم از مقایسه شکل‌های (۱۸) و (۱۴) مشاهده نمی‌شود. در این نمودار پاسخ شبه‌استاتیکی حاکم بوده و ارتعاشات بسیار ریزی مشاهده می‌شود که با افزایش نمای ماده هدفمند، افزایش می‌یابد.



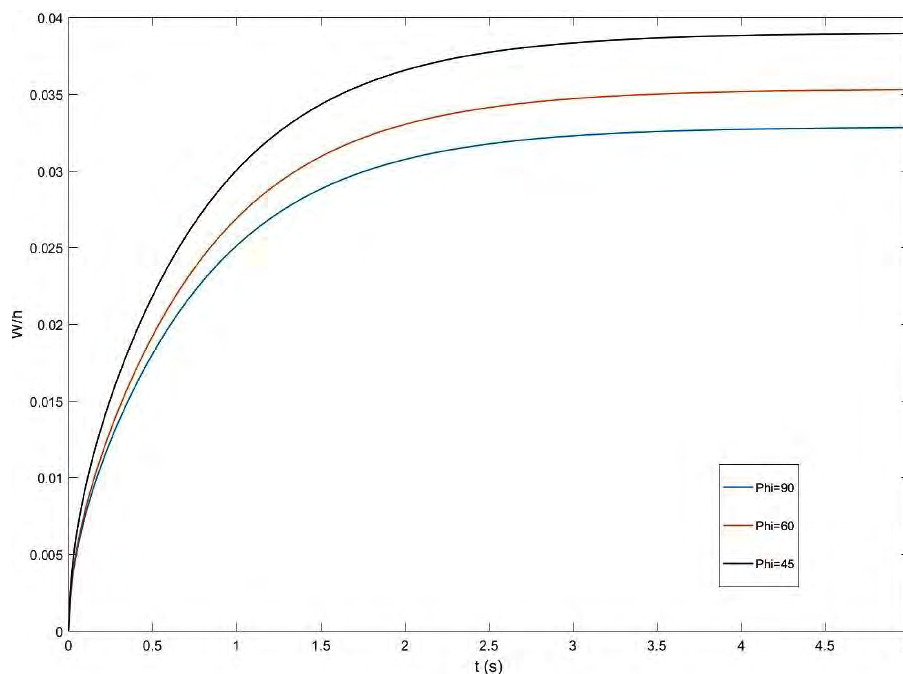
شکل ۱۸- نسبت جابجایی عرضی نقطه مرکزی به ضخامت پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول و به ازای نمای ماده‌ی هدفمند متفاوت.

• تأثیر اندازه زاویه پوسته

در این قسمت تأثیر زاویه پوسته بر میزان و چگونگی ارتعاشات حرارتی پوسته FGM بررسی می‌شود. در اولین مقایسه، پوسته‌ای با مشخصات زیر و با دو شرط مرزی مختلف به صورت جدول (۱۱) در نظر گرفته شده است:

جدول ۱۱- مشخصات پوسته FGM در بررسی تأثیر اندازه زاویه پوسته

تکیه‌گاه ساده	شرط مرزی
حالت اول	حالت اعمال بار حرارتی
۱	نمای ماده‌ی هدفمند
۶۰۰K	T_c
۳۰۰ K	T_m
۵ mm	H
۰/۱m	R
۴۵ و ۶۰ و ۹۰	φ



شکل ۱۹- نسبت جابجایی عرضی نقطه مرکزی به ضخامت پوسته FGM تحت تحریک حرارتی حالت اول و به ازای زوایای متفاوت.

در شکل (۱۹) مقایسه‌ی میان نسبت جابجایی عرضی به ضخامت در زوایای مختلف و در اثر تحریک حرارتی حالت اول آورده شده است. نکته‌ی مهمی که در این نمودار وجود دارد این است که به دلیل انحنای کمتر، جابجایی عرضی در حالتی که زوایا کمتر باشد، بیشتر است.

۱۰- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

ارتعاشات حرارتی پوسته ساخته‌شده از مواد هدفمند، در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت. معادلات حرکت پوسته FGM با استفاده از روابط کرنش-تغییر مکان فون-کارمن و تئوری برشی مرتبه اول پوسته به‌دست‌آمده اند. در این پژوهش کلیه خواص ترمومکانیکی پوسته در راستای ضخامت توزیع یافته و همچنین وابستگی حرارتی این خواص با استفاده از رابطه تولوکیان در نظر گرفته شد. سطح سرامیکی پوسته در معرض دما و یا شار حرارتی قرار گرفته و سطح دیگر آن در دمای نسبتاً پایین‌تر و یا به‌صورت عایق حرارتی در نظر گرفته شد. از آنجاکه قبل از تحلیل معادلات حرکت نیاز به یافتن پاسخ معادله انتقال حرارت در پوسته می‌باشد، با استفاده از توزیع دمای حاصل از این معادله، نیروها و ممان‌های حرارتی محاسبه شده و در معادلات حرکت پوسته و شرایط مرزی آن قرار داده شد. معادله گذرای انتقال حرارت یک‌بعدی و غیرکوپل در راستای ضخامت به جهت یافتن توزیع درجه حرارت در پوسته مورد استفاده قرار گرفت.

لحاظ نمودن اثر وابستگی حرارتی خواص ترمودینامیکی پوسته سبب شد این معادله تبدیل به معادله‌ای غیرخطی شود. گسسته‌سازی مکانی معادله انتقال حرارت با استفاده از روش تفاضل محدود مرکزی صورت پذیرفت. درنهایت دستگاه معادلات حاصل از این گسسته‌سازی مکانی با استفاده از روش کرنک-نیکلسون تحلیل شده و توزیع درجه حرارت به دست آمد.

معادلات حرکت و شرایط مرزی پوسته نیز با استفاده از روش ریتز گسسته‌سازی مکانی شده و دستگاه معادلات حاصل از این گسسته‌سازی مکانی با استفاده از روش گام‌به‌گام زمانی نیومارک تحلیل شد. به این ترتیب پاسخ ارتعاشات حرارتی پوسته ساخته‌شده از مواد هدفمند به دست آمد.

برای یافتن پاسخ شبه‌استاتیکی نیز که در آن اثرات اینرسی در معادلات حرکت پوسته در نظر گرفته‌شده است، دستگاه معادلات حاصل از گسسته‌سازی مکانی معادلات حرکت و شرایط مرزی آن که در تحلیل شبه‌استاتیکی پوسته FGM معادله انتقال حرارت نیز همانند معادلات حرکت پوسته با استفاده از روش گاوس تحلیل شده و پاسخ استاتیکی پوسته به دست آمد.

در این مطالعه به بررسی تأثیر عوامل مختلف در ارتعاشات حرارتی پوسته FGM پرداخته شد. این نتایج به‌صورت نمودار در بخش (۹) مطرح شده و تحلیل نتایج نیز در همان قسمت ارائه گردیده است. نتایج اصلی حاصل از این نمودارها را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه نمود:

۱- نتیجه نخست این پژوهش وجود ارتعاشات حرارتی در پوسته‌های نازک ساخته‌شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری حرارتی می‌باشد. در پوسته‌های نازک می‌بایست تأثیر اینرسی پوسته موردتوجه قرار گرفته و در صورت نادیده گرفتن این تأثیر و بسنده نمودن به تحلیل شبه‌استاتیکی، خطای قابل‌توجهی مشاهده می‌شود.

۲- هرچه پوسته FGM ضخیم‌تر شود، تأثیر اینرسی در آن کاهش یافته و با کمتر شدن دامنه ارتعاشات ناشی از تحریک حرارتی پاسخ حاصل از تحلیل دینامیکی بر پاسخ شبه‌استاتیکی منطبق خواهد شد. لذا در پوسته‌های ضخیم و حتی در پوسته‌های نسبتاً ضخیم نیز نیازی به تحلیل دینامیکی نبوده و پاسخ شبه‌استاتیکی دقت مطلوب را برآورده خواهد نمود.

۳- اهمیت تأثیر در نظر گرفتن وابستگی خواص ترمودینامیکی پوسته FGM مخصوصاً در بارگذاری‌های حرارتی با شدت بالا مشهود بوده و در نظر نگرفتن این تأثیر سبب کمتر تخمین زدن جابجایی عرضی پوسته خواهد شد.

۴- تغییر نمای ماده هدفمند که سبب تغییر نسبت حجمی اجزای تشکیل‌دهنده پوسته FGM می‌شود نیز بر ارتعاشات پوسته تأثیرگذار خواهد بود. هرچه نمای ماده هدفمند افزایش یابد، به‌تبع آن نسبت حجمی افزایش خواهد یافت. این امر باعث می‌شود بزرگی پاسخ‌های ناشی از سه نوع تحلیل استاتیکی، شبه‌استاتیکی و دینامیکی افزایش یابد. همچنین افزایش نمای ماده هدفمند سبب افزایش پریود نوسانات نیز خواهد شد. این نتایج به‌ازای در نظر گرفتن سیلیکون نیتريد (Si_3N_4) و فولاد ضدزنگ (SUS_{304}) به ترتیب به‌عنوان جزء فلزی و جزء سرامیکی ماده هدفمند به‌دست‌آمده است.

۵- نحوه اعمال بارگذاری حرارتی نیز می‌تواند بر پاسخ پوسته FGM تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای داشته باشد. نکته حائز اهمیت در بارگذاری حالت دوم که در آن سطح فوقانی پوسته در دمای ثابت و سطح تحتانی آن عایق حرارتی شده است، این بوده که در پوسته نسبتاً ضخیم با نمای ماده هدفمند برابر صفر، ممان حرارتی به صفر میل می‌کند. علت این امر یکسان شدن دمای تمام نقاط در انتهای بارگذاری می‌باشد. اما در پوسته FGM به‌ازای سایر مقادیر ماده هدفمند و با توجه به یکسان نبودن

خواص پوسته در سطوح مختلف، علی‌رغم یکسان نبودن درجه حرارت در انتهای بارگذاری، ممان حرارتی پوسته به عددی منفی و غیر صفر (به علت بیشتر بودن ضرایب انبساط و حرارتی فلز نسبت به سرامیک) میل خواهند کرد.

۶- پوسته‌های با زاویه کوچکتر جابجایی عرضی بیشتری خواهند داشت. این پدیده به انحنای کمتر این پوسته‌ها مربوط است.

در پایان می‌توان با استفاده از نتایج حاصل از این پژوهش، این‌گونه نتیجه‌گیری نمود که تحلیل دینامیکی و در نظر گرفتن تأثیر اینرسی پوسته در پوسته‌های نسبتاً ضخیم و ضخم، ضرورتی نداشته و حل شبه‌استاتیکی دقت مطلوب را فراهم خواهد آورد. اما در بررسی پوسته‌های نازک استفاده از تحلیل دینامیکی ضرورت خواهد داشت. همچنین در نظر نگرفتن تأثیر وابستگی خواص ترمومکانیکی پوسته در بارگذاری‌هایی با شدت حرارتی بالا، می‌تواند خطای قابل توجهی ایجاد نماید.

مراجع

- [1] Boley, B.A., "Thermally Induced Vibrations of Beams", Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 2, pp. 179-181, (1956).
- [2] Boley, B.A., and Barber, A.D., "Dynamic Response of Beams and Plates to Rapid Heating", Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, No. 5, pp. 413-425, (1957).
- [3] Boley, B.A., Weiner, J.H., and Dill, E.H., "Theory of Thermal Stresses", Courier Corporation, New York, United States, pp. 58-60, (1961).
- [4] Lyons, W.C., "Comments on Heat Induced Vibrations of Elastic Beams, Plates, and Shells", AIAA Journal, Vol. 4, No. 8, pp. 1502-1503, (1966).
- [5] Beam, R.M., "On the Phenomenon of Thermoelastic Instability/thermal Flutter/of Booms with Open Cross Section", NASA TN D5222, (1969).
- [6] Rimrott, F.P.J., and Abdelsayed, R., "Flexural Thermal Flutter under Laboratory Conditions", Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, Vol. 4, No. 4, pp. 189-196, (1977).
- [7] Kraus, H., "Thermally Induced Vibrations of Thin Non Shallow Spherical Shells", AIAA Journal, Vol. 4, No. 3, pp. 500-505, (1966).
- [8] Mayers, J., and Stroud, R.C., "Dynamic Response of Rapidly Heated Plate Elements", AIAA Journal, Vol. 9, No. 1, pp. 76-83, (1971).
- [9] Venkataramana, J., and Jana, M.K., "Thermally Forced Vibrations of Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 37, No. 2, pp. 291-295, (1974).

- [10] Manolis, G.D., and Beskos, D.E., "Thermally Induced Vibrations of Beam Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 21, No. 3, pp. 337-355, (1980).
- [11] Mazumdar, J., Hill, D., and Clements, D.L., "Thermally Induced Vibrations of a Viscoelastic Plate", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 73, No. 1, pp. 31-39, (1980).
- [12] Hill, D., Mazumdar, J., and Clements, D.L., "Dynamic Response of Viscoelastic Plates of Arbitrary Shape to Rapid Heating", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 18, No. 11, pp. 937-945, (1982).
- [13] Mazumdar, J., and Hill, D., "Thermally Induced Vibrations of Viscoelastic Shallow Shells", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 93, No. 2, pp. 189-200, (1984).
- [14] Hill, D.L., and Mazumdar, J., "A Study of the Thermally Induced Large Amplitude Vibrations of Viscoelastic Plates and Shallow Shells", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 116, No. 2, pp. 323-337, (1987).
- [15] Nakajo, Y., and Hayashi, K., "Response of Circular Plates to Thermal Impact", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 95, No. 2, pp. 213-222, (1984).
- [16] Bruch Jr, J.C., Adali, S., Sadek, I.S., and Sloss, J.M., "Structural Control of Thermoelastic Beams for Vibration Suppression", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 16, No. 3, pp. 249-263, (1993).
- [17] Tauchert, T. R., "Thermal Shock of Orthotropic Rectangular Plates", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 12, No. 2, pp. 241-258, (1989).
- [18] Jeng-Shian, C., Jiunn-Hsiung, W., and Tseng-Zong, T., "Thermally Induced Vibration of Thin Laminated Plates by Finite Element Method", *Computers & Structures*, Vol. 42, No. 1, pp. 117-128, (1992).
- [19] Huang, N.N., and Tauchert, T.R., "Thermally Induced Vibration of Doubly Curved Cross-ply Laminated Panels", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 154, No. 3, pp. 485-494, (1992).
- [20] Huang, N. N., and Tauchert, T.R., "Large-amplitude Vibration of Graphite-reinforced Aluminum Cylindrical Panels Subjected to Rapid Heating", *Composites Engineering*, Vol. 3, No. 6, pp. 557-566, (1993).
- [21] Khdeir, A. A., "Thermally Induced Vibrations of Cross-ply Laminated Shallow Shells", *Acta. Mechanica*, Vol. 151, No. 3, pp. 135-147, (2001).
- [22] Khdeir, A. A., "Thermally Induced Vibration of Cross-ply Laminated Shallow Arches", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 24, No. 11, pp. 1085-1096, (2001).
- [23] Kiani, Y., and Eslami, M.R., "Geometrically Non-linear Rapid Heating of Temperature-dependent Circular FGM Plates", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 37, No. 12, pp. 1495-1518, (2014).

- [24] Ghiasian, S.E., Kiani, Y., and Eslami, M.R., "Non-linear Rapid Heating of FGM Beams", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 67, pp. 74-84, (2014).
- [25] Alipour, S.M., Kiani, Y., and Eslami, M.R., "Rapid Heating of FGM Rectangular Plates", *Acta. Mechanica*, Vol. 227, No. 2, pp. 421-436, (2016).
- [26] Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*", CRC Press, (2004).
- [27] Hetnarski, R.B., Eslami, M.R., and Gladwell, G.M.L., "*Thermal Stresses: Advanced Theory and Applications*", Vol. 41, Springer, New York, (2009).
- [28] Reddy, J.N., "An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with Applications to Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Solid Mechanics", OUP Oxford, (2014).
- [29] Lee, J., "Free Vibration Analysis of Spherical Caps by the Pseudo Spectral Method", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, No. 1, pp. 221-228, (2009).
- [30] Reddy, J.N., and Chin, C.D., "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 21, No. 6, pp. 593-626, (1998).

فهرست نمادهای انگلیسی

A : ماتریس سفتی کششی - فشاری

B : پارامتر اینرسی و ماتریس سفتی جفت شدگی کشش و خمش

C, C_T : ماتریس میرایی

C_v : ظرفیت گرمایی ویژه

D : سفتی خمشی

E : مدول الاستیسیته

F, F_T : بردار نیرو

h : ضخامت پوسته

I_0, I_1, I_2 : پارامترهای اینرسی پوسته

K : ضریب هدایت حرارتی

K^2 : ضریب تصحیح برشی

M : ممان خمشی و ماتریس جرم

M^T : ممان حرارتی

N : نیروی محوری

N^T : نیروی حرارتی P_m : خواص جز فلزی در ماده هدفمند P_c : خواص جز سرامیکی در ماده هدفمند Q : ماتریس سفتی کاهش یافته R : شعاع پوسته T : دما t_M : زمان مشخصه دمایی t_r : زمان مشخصه مکانیکی U : انرژی کرنشی u_0 : جابجایی صفحه میانی در راستای x V : بردار سرعت پوسته V_m : نسبت حجمی جز فلزی در ماده هدفمند V_c : نسبت حجمی جز سرامیکی در ماده هدفمند v_0 : جابجایی صفحه میانی در راستای y w_0 : جابجایی صفحه میانی در راستای z

نمادهای یونانی

 β, α : انحنای پوسته $\alpha_\theta, \alpha_\varphi$: ضرایب انبساط حرارتی γ : کرنش برشی پوسته δ : اپراتور تغییرات ϵ : تنسور کرنش ζ : نمای ماده هدفمند κ : تغییر انحنای ورق ν : ضریب پواسون ρ : چگالی σ : تنسور تنش ϕ : زاویه مرکزی پوسته

Abstract

In this study, thermally induced vibrations of a Functionally Graded Material (FGM) Spherical Cap discussed. Distribution of shell properties in the direction of thickness is calculated from volume fraction relationship. Dependency to temperature is expressed based on the Touloukian formula. Thermal loading on the shell is axisymmetric and the response of the shell have been considered axially symmetric. Ceramic rich surface of the shell is subjected to temperature rise, whereas the metal rich surface of the shell is kept at reference temperature or thermally insulated. Temporal evolution of temperature profile across the shell thickness is obtained through solution of one-dimensional heat conduction equation. This equation is originally nonlinear since temperature dependency of thermal conductivity is taken into account.

The first-order shear theory and Von-Karman compatibility relations has been used for deriving the equation. Dynamics equations are derived using Hamilton's principle and with the application of Ritz method has become a set of nonlinear time-dependent algebraic equations. Solving this set of equations is done with Newmark integral method help with numerical method Newton-Raphson. Solution of the transient one dimensional heat conduction equation with the arbitrary type of time-dependent boundary conditions is carried out employing the central finite difference method combined with the Crank–Nicolson time marching scheme. After validating the developed computer code, some parametric studies are accomplished to show the influences of various involved parameters. It is shown that temperature dependency, geometrical non-linearity, shell thickness, power law index, and the type of thermal loading, all affect the temporal evolution of plate characteristics.