

تحلیل ترموالاستیک مخازن دوار استوانه‌ای هدفمند درون بستر الاستیک

در تحقیق حاضر به بررسی یک مخزن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند که در معرض تغییرات درجه حرارت، اینرسی دورانی و همچنین فشار داخلی قرار دارد، پرداخته شده است. فرض بر آن است که مخزن استوانه‌ای دور تا دور در درون یک بستر الاستیک با مدل وینکلر قرار گرفته است. کلیه خواص ترموالاستیک به جز ضریب پواسون مخزن وابسته به شعاع بوده و با استفاده از مدل توانی ارائه شده‌اند. معادله انتقال حرارت و معادله ناویر حاکم بر جابجایی مخزن در راستای شعاعی تشکیل شده و به صورت تحلیلی و جواب بسته حل شده‌اند. با به دست آوردن توابع توزیع دما و جابجایی، عبارتهایی برای توزیع کرنش و تنش در مخزن به دست آمده است. با بررسی روابط به دست آمده و انجام مطالعات موردی به بررسی تاثیر سرعت دورانی و سفتی بستر الاستیک پرداخته شده است. نتایج حاصل از تحقیق نشان می‌دهد که در کنار دو پارامتر یاد شده، نمای توانی ماده هدفمند بر روی توزیع تنش، کرنش، دما و جابجایی مخزن بسیار تاثیرگذار است.

حمیدرضا باقری طادی^۱

دانشجوی کارشناسی

یاسر کیانی^۲

استادیار

واژه‌های راهنما: مخزن استوانه‌ای، ماده هدفمند، معادله ناویر، اینرسی دورانی

۱- مقدمه

با معرفی نسل جدیدی از مواد به عنوان مواد هدفمند، تحقیقات دهه اخیر بسیاری از محققان در حوزه آنالیز تنش به این مواد معطوف شده است. در این دسته از مواد که اصولاً برای تحمل بارهای حرارتی و مکانیکی همزمان ساخته شده‌اند، خواص حرارتی و مکانیکی به عنوان تابعی از مختصات مکانی تغییر می‌کند. به عنوان مثال در استوانه ساخته شده از این مواد که تغییرات خواص در راستای شعاع است، خواص حرارتی و مکانیکی مانند مدول الاستیستیه، ضریب انبساط حرارتی و ضریب انتقال حرارت هدایتی همگی می‌تواند به عنوان تابعی از شعاع پوسته در نظر گرفته شود.

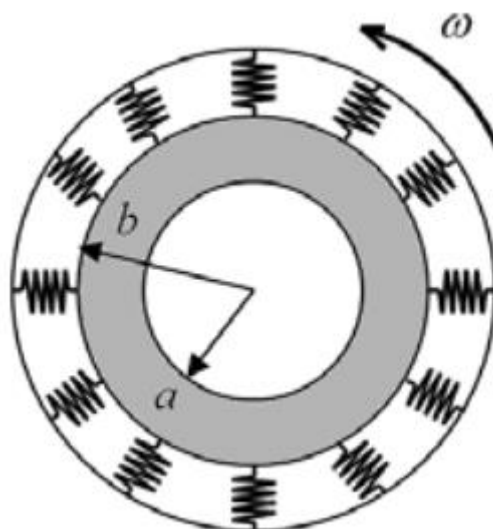
جباری و همکاران به تحلیل تنش در یک مخزن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند [۱]. در این تحقیق که خواص بر پایه یک مدل توانی در راستای ضخامت مخزن توزیع شده‌اند، معادله انتقال حرارت شعاعی و معادله حاکم بر جابجایی شعاعی پوسته به دست آمده است و به صورت تحلیلی حل شده‌اند. هر دو معادله انتقال حرارت و ناویر به صورت تک متغیره بوده و در راستای شعاع مخزن بررسی شده‌اند.

^۱دانشجوی کارشناسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد Hamidbt95@gmail.com
^۲نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد y.kiani@aut.ac.ir

در تحقیق دیگری، اسلامی و همکاران به بررسی یه مخزن کروی ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند [۲]. در این تحقیق نیز خواص ترمومکانیکی بر پایه یک مدل توانی در راستای شعاع پوسته توزیع شده‌اند و عبارتهایی جواب بسته برای بیان جابجایی و دمای کره بر حسب مختصات شعاعی به دست آمده است. ردی و چین [۳] به بررسی تحلیل تنش در مخازن ساخته شده از مواد هدفمند با در نظر گرفتن وابستگی خواص ترمومکانیکی به دما پرداختند. در تحلیل نامبرده از روش اجزای محدود برای حل معادلات حاکم استفاده شده است. لیو و همکاران [۴] نیز به تحلیل تنش در مخازن ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند. روش حل به کار رفته توسط این محققین بر پایه جواب‌های به دست آمده از تحلیل مخازن همگن می‌باشد. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که علاوه بر نمای ماده هدفمند، تغییرات خواص نیز تأثیرات عمده‌ای را بر تغییرات تنش در مخازن استوانه‌ای دارد.

توتونکو و تمل نیز به بررسی تحلیل تنش و جابجایی در مخازن استوانه‌ای، کروی و دیسک‌های ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند [۵]. در این تحقیق سعی بر آن شده تا با معرفی توابع کمکی و بهره‌گیری از معادلات دیفرانسیل با جواب‌های عمومی، پاسخ‌هایی برای توزیع متغیرهای اساسی به دست آید.

در راستای مسائل تحلیل تنش در مخازن هدفمند و تلاش برای ارائه پاسخ‌های تحلیلی که بتواند برای دیگر محققان، مورد اعتبارسنجی قرار گیرد، اثرات دوران و تماس مخزن تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. در این تحقیق این دو اثر به طور همزمان بر روی مخزن منظور گردیده است. بدین منظور فرض بر آن است که مخزن در جدار خارجی خود توسط یک محیط الاستیک احاطه شده است و مجموعه با سرعت زاویه‌ای ثابت در حال دوران است. خواص ترمومکانیکی در مخزن بر پایه یک مدل نمایی در نظر گرفته شده است. در این حالت کلیه خواص مانند مدول الاستیسیته، چگالی، ضریب انبساط حرارتی و ضریب انتقال حرارت هدایتی همگی متغیر و بر پایه یک تابع توانی نوشته می‌شوند. حل ارائه شده برای معادله انتقال حرارت و معادله حاکم بر جابجایی شعاعی در مخزن بر مبنای مرجع [۱] می‌باشد.



شکل ۱- شماتیک یک مخزن استوانه‌ای دوار ساخته شده از مواد هدفمند درون یک بستر الاستیک

بدین منظور سعی شده تا با حل تحلیلی معادلات ذکر شده با در نظر گرفتن آثار دوران و بستر الاستیک حل تحلیلی برای دما، جابجایی، کرنش‌ها و تنش‌ها در استوانه به دست آید. اثر نمای ماده هدفمند، سرعت دوران و سفتی بستر بر روی پارامترهای ذکر شده مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج و مثال‌های عددی ارائه شده نشان می‌دهد که در کنار دو فاکتور ذکر شده، نمای ماده هدفمند نیز تاثیر بالایی را بر روی توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها، جابجایی و دما دارد. با استفاده از مدل نمایی ارائه شده، وابستگی دما به نمای ماده هدفمند کمتر از وابستگی دیگر پارامترها می‌باشد.

۲- ارائه فرمولاسیون

در تحقیق حاضر یک مخزن استوانه‌ای در معرض بار حرارتی و مکانیکی قرار گرفته است. مخزن از جنس مواد هدفمند بوده و تغییرات خواص تنها در راستای شعاع در نظر گرفته شده است. به دلیل ماهیت بارهای حرارتی و مکانیکی که همگی به صورت متقارن محوری هستند توزیع دما و توزیع جابجایی در مخزن نیز به صورت تنها مولفه شعاعی در نظر گرفته شده است.

در طول این بخش استوانه توخالی ضخیم به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مدنظر است. همانگونه که اشاره شد، مخزن در حال دوران با سرعت زاویه‌ای ثابت ω است و همچنین در یک بستر الاستیک با سفتی C قرار گرفته است. شماتیک مخزن در شکل (۱) نشان داده شده است.

مولفه تغییر مکان در راستای شعاع u می‌باشد. در این صورت، در غیاب دو مولفه دیگر جابجایی روابط بین کرنش و جابه‌جایی به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{rr} = u', \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad (1)$$

روابط بین تنش-کرنش برای حالت کرنش صفحه‌ای به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{rr} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T(r) \\ \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T(r) \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه بالا $T(r)$ توزیع دما در جسم می‌باشد که از معادله انتقال گرمای هدایتی بدست می‌آید و α ضریب انبساط حرارتی می‌باشد. همچنین λ و μ ضرایب لامه می‌باشند که بر حسب ضریب پواسون و مدول الاستیسیته ماده به شکل زیر قابل محاسبه هستند.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

با در نظر گرفتن نیروی حجمی ناشی از دوران و صرفنظر از معادلات تعادل در دو راستای محیطی و طولی مخزن، معادله تعادل در راستای شعاعی به صورت زیر است [۶]

$$\sigma'_{rr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho r \omega^2 = 0 \quad (4)$$

که در رابطه بالا و نیز در روابط بعدی علامت "پریم" به معنای مشتق نسبت به پارامتر r است.

برای بدست آوردن معادله تعادل به صورت مولفه جابه‌جایی برای استوانه هدفمند باید رابطه خواص ماده شناخته شود. از آنجا که ماده استوانه در راستای شعاع دارای تغییرات است مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و چگالی بر حسب توان r را میتوان بر حسب یک مدل توانی به صورت زیر تعریف کرد

$$E(r) = E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{m_1}, \alpha(r) = \alpha_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2}, \rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{m_4} \quad (5)$$

در اینجا فرض می‌کنیم که نسبت پواسون برای استوانه ثابت است. در نتیجه با استفاده از روابط (۱) تا (۵) به معادله ناویر بر حسب جابه‌جایی شعاعی می‌رسیم

$$u'' + (m_1 + 1) \frac{1}{r} u' + \left(\frac{\nu m_1}{1 - \nu} - 1 \right) \frac{1}{r^2} u = \frac{(1 + \nu) \alpha_0}{1 - \nu} \left(\frac{m_1 + m_2}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2 - 1} T + \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2} T' \right) - \frac{\rho_0 a \omega^2 (1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E_0 (1 - \nu)} \left(\frac{r}{a}\right)^{m_4 - m_1 + 1} \quad (6)$$

برای حل معادله ناویر بالا ابتدا باید توزیع دما در درون استوانه را به دست آورد معادله انتقال حرارت هدایتی برای حالت پایا و یک بعدی در مختصات قطبی به همراه کلی‌ترین حالت شرایط مرزی به صورت زیر قابل بیان است [۶]

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (rK(r)T'(r))' &= 0, \quad a \leq r \leq b \\ C_{11}T(a) + C_{12}T'(a) &= f_1 \\ C_{21}T(b) + C_{22}T'(b) &= f_2 \end{aligned} \quad (7)$$

که در رابطه بالا ضریب انتقال حرارت هدایتی مشابه دیگر خواص به صورت نمایی مطابق با رابطه زیر تغییر می‌کند

$$K(r) = K_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{m_3} \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه (۸) در معادله انتقال حرارت (۷) داریم

$$\frac{1}{r} [r^{m_3+1} T'(r)]' = 0 \quad (9)$$

با انتگرال گیری مکرر از معادله بالا توزیع درجه حرارت در استوانه به شکل زیر حاصل می‌شود

$$T(r) = \frac{-A_1}{m_3} r^{-m_3} + A_2 \quad (10)$$

که ثابت‌های انتگرال گیری که در رابطه بالا هستند با استفاده از شرایط مرزی موجود در رابطه (۷) به صورت زیر به دست خواهند آمد

$$A_1 = \frac{C_{21}f_1 - C_{11}f_2}{C_{21} \left(C_{12}a^{-(m_3+1)} - \frac{C_{11}a^{-m_3}}{m_3} \right) - C_{11} \left(C_{22}b^{-(m_3+1)} - \frac{C_{21}b^{-m_3}}{m_3} \right)} \quad (11)$$

$$A_2 = \frac{\left(C_{12}a^{-(m_3+1)} - \frac{C_{11}a^{-m_3}}{m_3} \right) f_2 - \left(C_{22}b^{-(m_3+1)} - \frac{C_{21}b^{-m_3}}{m_3} \right) f_1}{C_{21} \left(C_{12}a^{-(m_3+1)} - \frac{C_{11}a^{-m_3}}{m_3} \right) - C_{11} \left(C_{22}b^{-(m_3+1)} - \frac{C_{21}b^{-m_3}}{m_3} \right)} \quad (12)$$

با محاسبه توزیع درجه حرارت از رابطه (۱۰) و قرار دادن نتایج در معادله ناویر (۶) خواهیم داشت

$$u'' + (m_1 + 1) \frac{1}{r} u' + \left(\frac{\nu m_1}{1 - \nu} - 1 \right) \frac{1}{r^2} u = A_3 r^{m_2 - 1} + A_4 r^{m_2 - m_3 - 1} + A_5 r^{m_4 - m_1 + 1} \quad (13)$$

که در رابطه بالا ثوابت به کار رفته به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$A_3 = \frac{(1 + \nu)(m_1 + m_2) \alpha_0 A_2}{(1 - \nu) a^{m_2}}$$

$$A_4 = \frac{(1 + \nu) \left(1 - \frac{m_1 + m_2}{m_3} \right) \alpha_0 A_1}{(1 - \nu) a^{m_2}} \quad (14)$$

$$A_5 = - \frac{\rho_0 \omega^2 (1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E_0 (1 - \nu) a^{m_4 - m_1}}$$

معادله دیفرانسیلی ارائه شده در رابطه (۱۲) یک معادله اویلر است که دارای جواب خصوصی و عمومی می‌باشد. جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱۳) به شکل زیر در نظر گرفته شده است

$$u^g(r) = Br^\eta \quad (15)$$

که با قرار دادن پاسخ بالا در بخش همگن رابطه (۱۳) خواهیم داشت

$$\eta^2 + m_1 \eta + \frac{\nu m_1}{1 - \nu} - 1 = 0 \quad (16)$$

از حل معادله بالا دو مقدار برای نمای توان به دست خواهد آمد که عبارتند از

$$\eta_{1,2} = -\frac{m_1}{2} \mp \left(\frac{m_1^2}{4} - \frac{\nu m_1}{1 - \nu} + 1 \right)^{0.5} \quad (17)$$

بنابراین جواب خصوصی معادله به صورت زیر است

$$u^g(r) = B_1 r^{\eta_1} + B_2 r^{\eta_2} \quad (18)$$

و ثابت‌های به کار رفته در رابطه بالا در ادامه از اعمال شرایط مرزی به دست خواهد آمد.

با توجه به ماهیت توابع در سمت راست تابع (۱۳) جواب خصوصی معادله (۱۳) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$u^p(r) = D_1 r^{m_2+1} + D_2 r^{m_2-m_3+1} + D_3 r^{m_4-m_1+3} \quad (19)$$

که با قرار دادن رابطه (۱۹) در رابطه (۱۳) ثابت‌های D_1, D_2, D_3 به صورت زیر محاسبه خواهند شد

$$D_1 = \frac{A_3}{(m_2+1)m_2 + (m_1+1)(m_2+1) + \frac{vm_1}{1-\nu} - 1}$$

$$D_2 = \frac{A_4}{(m_2-m_3+1)(m_2-m_3) + (m_1+1)(m_2-m_3+1) + \frac{vm_1}{1-\nu} - 1} \quad (20)$$

$$D_3 = \frac{A_5}{(m_4+3)(m_4-m_1+3) + \frac{vm_1}{1-\nu} - 1}$$

و در نتیجه جواب خصوصی معادله دیفرانسیلی نیز مشخص خواهد بود. با جمع کردن دو جواب عمومی و خصوصی که در دو رابطه (۱۸) و (۱۹) محاسبه شده‌اند. خواهیم داشت

$$u(r) = B_1 r^{\eta_1} + B_2 r^{\eta_2} + D_1 r^{m_2+1} + D_2 r^{m_2-m_3+1} + D_3 r^{m_4-m_1+3} \quad (21)$$

با جایگذاری تابع جابجایی بالا در رابطه (۱) دو مولفه کرنش در استوانه به صورت زیر محاسبه خواهند شد

$$\varepsilon_{rr} = \eta_1 B_1 r^{\eta_1-1} + \eta_2 B_2 r^{\eta_2-1} + (m_2+1)D_1 r^{m_2} + (m_2-m_3+1)D_2 r^{m_2-m_3} + (m_4-m_1+3)D_3 r^{m_4-m_1+2} \quad (22)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = B_1 r^{\eta_1-1} + B_2 r^{\eta_2-1} + D_1 r^{m_2} + D_2 r^{m_2-m_3} + D_3 r^{m_4-m_1+2}$$

و نهایتاً با قرار دادن دو مولفه کرنش (۲۲) در روابط (۲) می‌توان مولفه‌های تنش در مخزن را به صورت زیر محاسبه کرد

$$\sigma_{rr} = \frac{E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)a^{m_1}} \left[((1-\nu)\eta_1 + \nu)B_1 r^{\eta_1+m_1-1} + ((1-\nu)\eta_2 + \nu)B_2 r^{\eta_2+m_1-1} + \left(((1-\nu)m_2+1)D_1 - \frac{1}{a^{m_2}}(1+\nu)\alpha_0 A_2 \right) r^{m_2+m_1} \right. \quad (23)$$

$$\left. + \left(((1-\nu)(m_2-m_3)+1)D_2 + \frac{(1+\nu)\alpha_0 A_1}{m_3 a^{m_2}} \right) r^{m_2+m_1-m_3} + ((1-\nu)(m_4-m_1+3) + \nu)D_3 r^{m_4+2} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)a^{m_1}} \left[(\nu\eta_1 + 1-\nu)B_1 r^{\eta_1+m_1-1} + (\nu\eta_2 + 1-\nu)B_2 r^{\eta_2+m_1-1} + \left((\nu m_2 + 1)D_1 - \frac{1}{a^{m_2}}(1+\nu)\alpha_0 A_2 \right) r^{m_2+m_1} \right. \quad (24)$$

$$+ \left[\left(\nu(m_2 - m_3) + 1 \right) D_2 + \frac{(1 + \nu) \alpha_0 A_1}{m_3 a^{m_2}} \right] r^{m_2 + m_1 - m_3} \\ + \left[(1 - \nu) + \nu(m_4 - m_3 + 3) \right] D_3 r^{m_4 + 2}]$$

برای تعیین دو ثابت به کار رفته در روابط (۲۳) و (۲۴) از شرایط مرزی استوانه استفاده می‌کنیم. با این فرض که مخزن در معرض فشار داخلی بوده و دور تا دور توسط بستر الاستیک احاطه شده باشد، شرایط مرزی به صورت زیر خواهند بود

$$\sigma_r(a) = -p_i, \sigma_r(b) = -Cu(b) \quad (25)$$

که C معرف سفتی فنرهای وینکلر است.

با اعمال شرایط مرزی ارائه شده در رابطه (۲۵) به معادلات (۲۴) و (۲۱) می‌توان ثابت‌های معادله را به صورت زیر محاسبه کرد

$$B_1 = \frac{d_4 d_5 - d_2 d_6}{d_1 d_4 - d_2 d_3}, B_2 = \frac{d_1 d_6 - d_3 d_5}{d_1 d_4 - d_2 d_3} \quad (26)$$

که در رابطه (۲۶) از تعاریف زیر استفاده شده است

$$d_1 = ((1 - \nu)\eta_1 + \nu)a^{\eta_1 + m_1 - 1}$$

$$d_2 = ((1 - \nu)\eta_2 + \nu)a^{\eta_2 + m_1 - 1}$$

$$d_3 = ((1 - \nu)\eta_1 + \nu)b^{\eta_1 + m_1 - 1} + \frac{C(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E_0} a^{m_1} b^{\eta_1}$$

$$d_4 = ((1 - \nu)\eta_2 + \nu)b^{\eta_2 + m_1 - 1} + \frac{C(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E_0} a^{m_1} b^{\eta_2}$$

$$d_5 = -(1 + \nu)(1 - 2\nu) \frac{p_i a^{m_1}}{E_0} - \left[((1 - \nu)(m_2 + 1) + \nu) D_1 - \frac{1}{a^{m_2}} (1 + \nu) \alpha_0 A_2 \right] a^{m_2 + m_1} \\ - \left[((1 - \nu)(m_2 - m_3 + 1) + \nu) D_2 + \frac{(1 + \nu) \alpha_0 A_1}{m_3 a^{m_2}} \right] a^{m_2 + m_1 - m_3} \quad (27)$$

$$- [(1 - \nu)(m_4 - m_1 + 3) + \nu] D_3 a^{m_4 + 2}$$

$$d_6 = - \frac{C(1 + \nu)(1 - 2\nu) a^{m_1}}{E_0} (D_1 b^{m_2 + 1} + D_2 b^{m_2 - m_3 + 1} + D_3 b^{m_4 - m_1 + 3})$$

$$- \left[((1 - \nu)(m_2 + 1) + \nu) D_1 - \frac{1}{a^{m_2}} (1 + \nu) \alpha_0 A_2 \right] b^{m_2 + m_1}$$

$$- \left[((1 - \nu)(m_2 - m_3 + 1) + \nu) D_2 + \frac{(1 + \nu) \alpha_0 A_1}{m_3 a^{m_2}} \right] b^{m_2 + m_1 - m_3}$$

$$- [(1 - \nu)(m_4 - m_1 + 3) + \nu] D_3 b^{m_4 + 2}$$

۳-ارائه نتایج و بحث

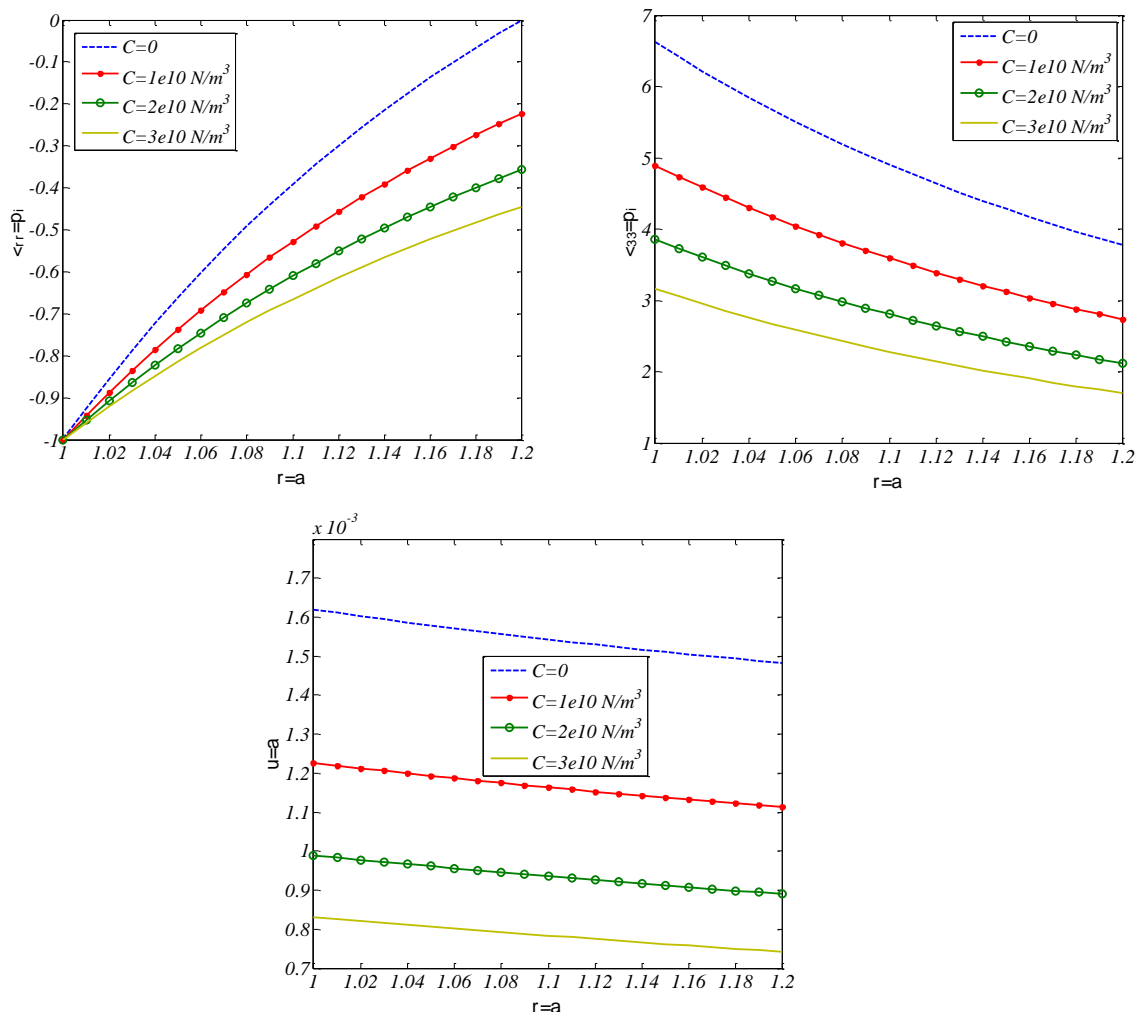
حل جواب بسته‌ای که در بخش قبل ارائه شد می‌تواند برای تحلیل تنش، کرنش، دما و جابجایی در یک مخزن استوانه‌ای ساخته شده از ماده هدفمند به کار رود. در کلیه نتایج این بخش از یک ماده ساخته شده که دارای خواص $E_0 = 200GPa$ ، $\rho_0 = 7800Kg/m^3$ ، $\alpha_0 = 1.2 \times 10^{-6} 1/K$ و $\nu = 0.3$ است استفاده شده است. در کلیه مثال‌های این بخش از مخزنی با ابعاد $a = 1m$ و $b = 1.2m$ استفاده شده است. چهار نمای مختلف برای ماده هدفمند معرفی شده است که در این بخش کلیه نماها با هم برابر انتخاب شده‌اند به عبارت دیگر $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$. فشار داخلی مخزن برابر با $p_i = 50GPa$ انتخاب شده است. اختلاف دمای سطح داخلی و خارجی با دمای مرجع به ترتیب برابر با $T(a) = T_a = 10K$ و $T(b) = 0K$ در نظر گرفته شده است.

۳-۱- بررسی سفتی بستر الاستیک

در اولین مثال از این بخش به بررسی تاثیر بستر الاستیک بر روی توزیع تنش و جابجایی‌های مخزن پرداخته شده است. بدین منظور با انتخاب مقادیر مختلفی برای ثابت فنرهای وینکلر تاثیر این بستر الاستیک بر روی تنش و جابجایی بررسی شده است. در این مثال مخزن به صورت ساکن در نظر گرفته شده است به عبارت دیگر مقدار سرعت زاویه‌ای برابر با صفر در نظر گرفته شده است و همچنین نمای ماده هدفمند برابر با واحد انتخاب شده است. نتایج به دست آمده از این مثال در شکل (۲) ارائه شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود شرط مرزی تنش شعاعی همواره در شعاع داخلی مخزن برقرار می‌باشد.

با بالارفتن سفتی بستر مقدار تنش شعاعی در مخزن افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که تنش شعاعی در کل مخزن نیز همواره به صورت فشاری است. این در حالی است که تنش محیطی به دست آمده در مخزن همواره به صورت کششی می‌باشد. این تنش نیز با بالارفتن سفتی بستر به شدت کاهش می‌یابد. مطالعه جابجایی به وجود آمده در مخزن نشان می‌دهد که مقدار جابجایی در مخزن همواره مثبت بوده و بیشینه جابجایی در شعاع داخلی رخ می‌دهد. مجدداً با افزایش سفتی بستر الاستیک که به نوعی سفتی سیستم را افزایش می‌دهد، جابجایی در مخزن کاهش می‌یابد.

لازم به ذکر است که به دلیل تغییرات خواص ماده هدفمند در راستای شعاع مخزن، نحوه تغییرات تنش و جابجایی با سفتی بستر به شکل خطی نمی‌باشد. درصد تغییرات جابجایی و تنش در مخزن در مقادیر کم بستر الاستیک بیشتر مشهود است.

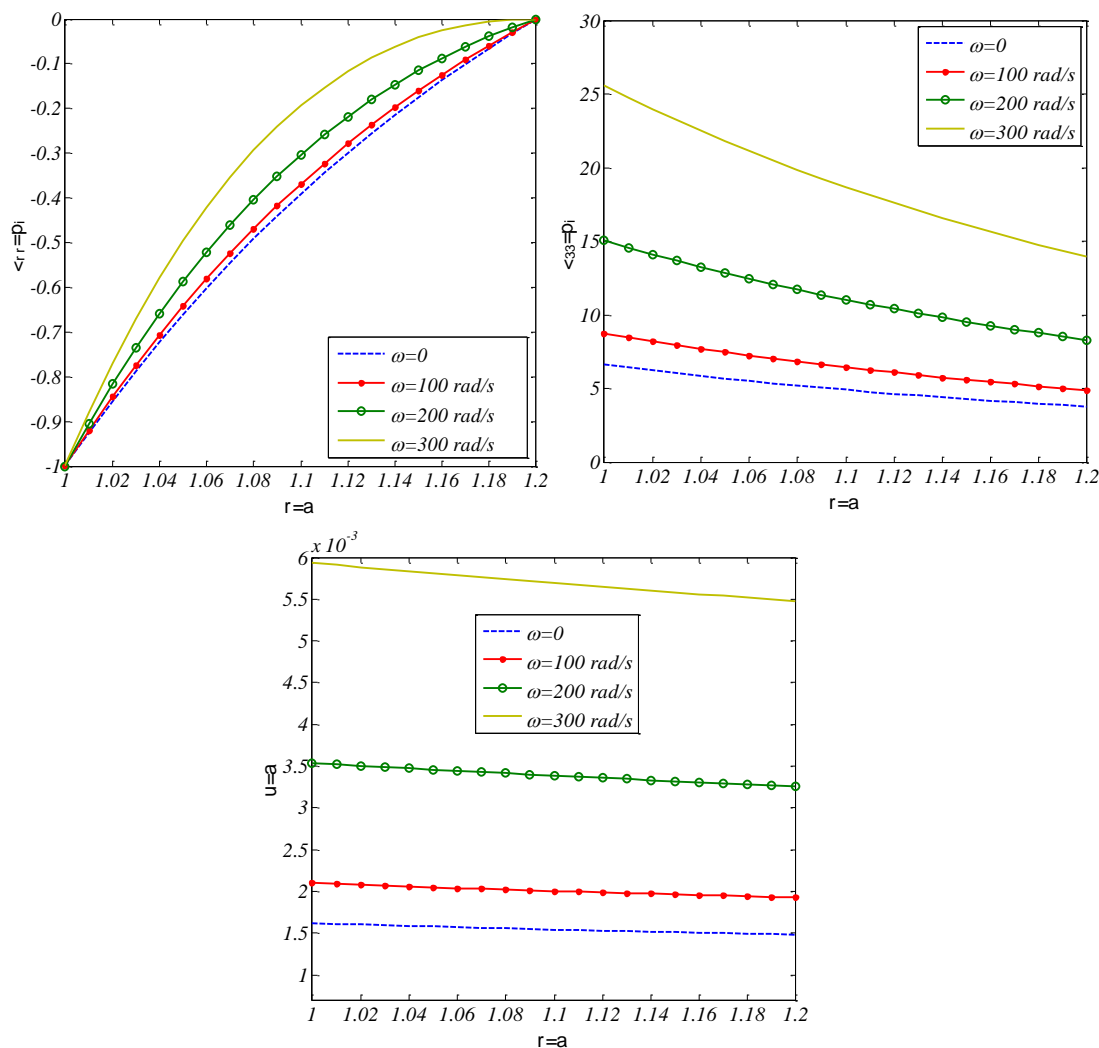


شکل ۲- بررسی اثر ثابت فنرهای وینکلر بر روی توزیع تنش و جابجایی استوانه در حالت بارگذاری ترمومکانیکی

۲-۳- بررسی سرعت دوران

در مثال دیگری از این بخش به بررسی تاثیر سرعت دوران بر روی توزیع تنش و جابجایی‌های مخزن پرداخته شده است و نتایج حاصل از آن در شکل (۳) نشان داده شده است. بدین منظور با انتخاب مقادیر مختلفی برای سرعت دوران تاثیر این پارامتر بر روی تنش و جابجایی بررسی شده است. در این مثال مخزن بدون تماس با بستر است. به عبارت دیگر سطح خارجی مخزن بدون تنش می‌باشد. همچنین نمای ماده هدفمند برابر با واحد انتخاب شده است. نتایج ارائه شده در شکل (۳) نشان می‌دهد که با بالا بردن سرعت دوران در استوانه، از شدت تنش شعاعی فشاری که به وجود آمده است کاسته می‌شود. هر چند مقدار تنش محیطی که ماهیتی کششی دارد به شدت تقویت می‌شود. با اضافه کردن سرعت دوران جابجایی شعاعی در مخزن در کلیه نقاط افزایش پیدا می‌کند.

در این حالت نیز جابجایی ماکزیمم در مخزن در شعاع داخلی که تحت تاثیر مستقیم بار اعمالی است مشاهده شده است. لازم به ذکر است که وابستگی تنش محیطی و جابجایی مخزن به سرعت دورانی به مراتب بیشتر از تنش شعاعی می‌باشد.

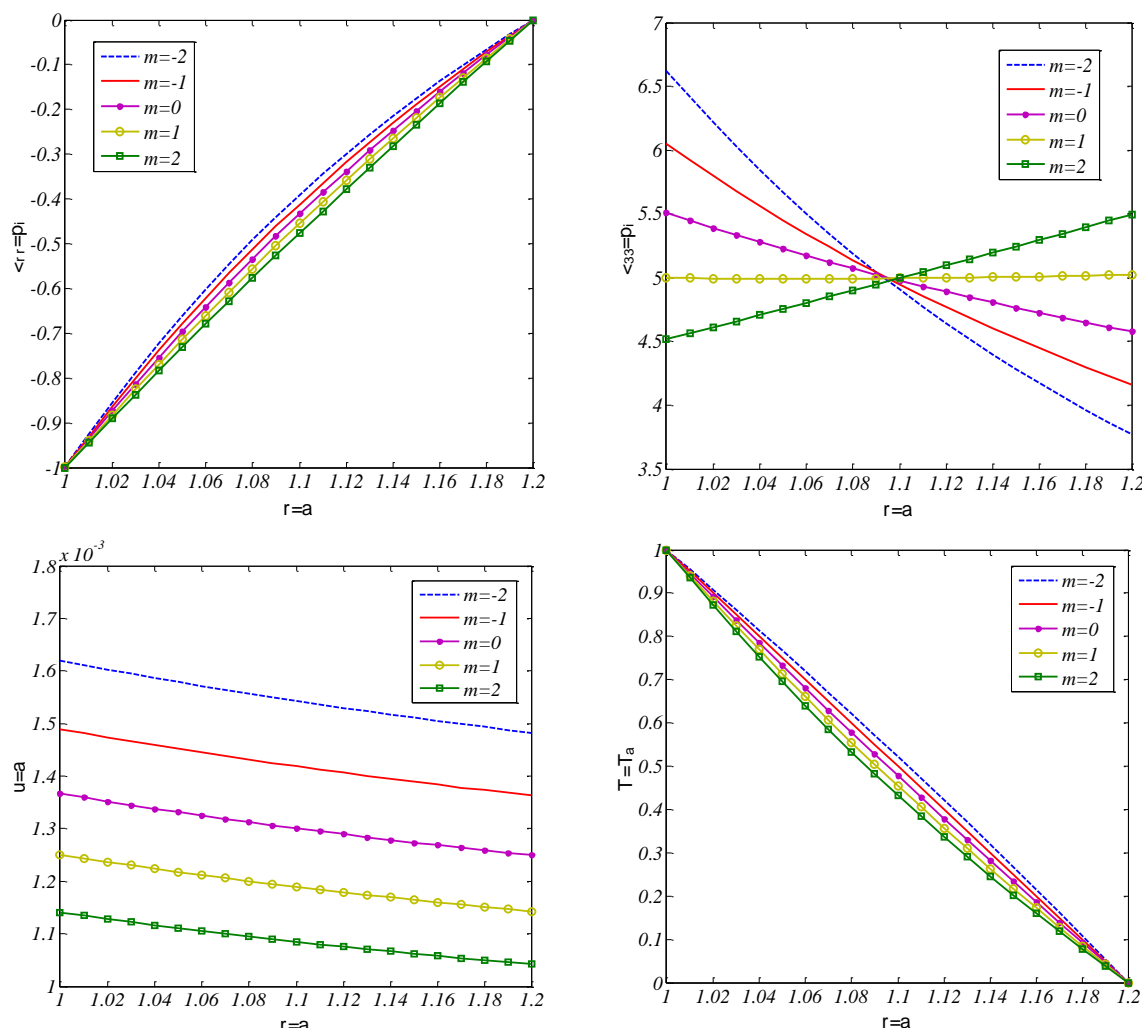


شکل ۳- بررسی اثر سرعت دوران بر روی توزیع تنش و جابجایی استوانه در حالت بارگذاری ترمومکانیکی

۳-۳- بررسی نمای ماده هدفمند

در این مثال به بررسی تاثیر نمای ماده هدفمند بر روی توزیع دما، مولفه جابجایی شعاعی و همچنین دو مولفه تنش پرداخته می‌شود. بدین منظور از دو اثر دوران و بستر الاستیک صرفنظر شده است. و مقادیر تنش، جابجایی و دما در راستای شعاع مخزن برای مقادیر مختلف نمای ماده هدفمند محاسبه گردیده است. نتایج حاصل در شکل (۴) نشان داده شده است. با توجه به مشاهدات شکل (۴) می‌توان نتیجه گرفت که بالارفتن نمای ماده هدفمند باعث کاهش تغییرات تنش محیطی در مخزن خواهد شد. هر چند تغییرات تنش شعاعی به شدت تنش محیطی وابسته به نمای ماده هدفمند نمی‌باشد. لازم به ذکر است که جابجایی در استوانه با بالارفتن نمای ماده هدفمند به شدت کاهش می‌یابد. زیرا با بالارفتن این نما، مدول الاستیسیته در سیستم به شدت افزایش می‌یابد که باعث بالارفتن سفتی مجموعه خواهد شد.

با بالارفتن نمای ماده هدفمند، دما در درون استوانه کاهش می‌یابد. هر چند پروفیل دما بر خلاف تنش فشاری وابستگی شدیدی به نمای ماده هدفمند ندارد.



شکل ۴- بررسی اثر نمای ماده هدفمند بر روی توزیع دما، تنش و جابجایی استوانه در حالت بارگذاری ترمومکانیکی

۴- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر با ارائه یک حل تحلیلی به بررسی ترموالاستیک مخازن تحت فشار ساخته شده از ماده هدفمند پرداخته شده است. بدین منظور اثر پارامترهایی همچون سرعت دورانی و بستر الاستیک نیز در فرمولاسیون گنجانده شده است. کلیه خواص ترمومکانیکی استوانه با استفاده از یک رابطه توانی بیان شده‌اند که نشان دهنده تغییرات خواص می‌باشد. معادله انتقال حرارت در مختصات قطبی و در حالت متقارن محوری و همچنین معادله ناویر حاکم بر جابجایی شعاعی در حالت متقارن محوری تشکیل شده و به صورت کاملا تحلیلی و جواب بسته حل شده‌اند. در پایان توابعی برای پیش‌بینی تنش، کرنش، دما و جابجایی مخزن ارائه شده است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که با معرفی بستر الاستیک می‌توان مقدار جابجایی و تنش‌ها را در مخزن به شکل موثری کنترل کرد. با بالا رفتن سفتی بستر جابجایی و تنش محیطی به شدت کاهش می‌یابد هر چند تنش شعاعی افزایش خواهد یافت. مقادیر تنش، جابجایی و دما به شدت وابسته به نمای ماده هدفمند، سرعت دوران و سفتی بستر الاستیک می‌باشند. برای مدل توانی ذکر شده، با بالا رفتن نمای ماده هدفمند، دما و جابجایی در مخزن کاهش می‌یابد.

مراجع

- [1] Jabbari, M., Sohrabpour, S., and Eslami, M.R., "Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Radially Symmetric Loads", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, pp. 493-497, (2002).
- [2] Eslami, M.R., Babaei, M.H., and Poultangari, R., "Thermal and Mechanical Stresses in a Functionally Graded Thick Sphere", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, pp. 522-527, (2005).
- [3] Reddy, J.N., and Chin, C.D., "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 21, pp. 593-626, (1998).
- [4] Liew, K.M., Kitipornchai, S., Zhang, X.Z., and Lim, C.W., "Analysis of the Thermal Stress Behavior of Functionally Graded Hollow Circular Cylinders", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 2355-2380, (2003).
- [5] Tutunku, N., and Temel, B., "A Novel Approach to Stress Analysis of Pressurized FGM Cylinders, Disks and Spheres", *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 385-390, (2009).
- [6] Hetnarski, R., and Eslami, M.R., "*Thermal Stresses Advanced Theory and Applications*", 1st Editions, Springer, Amsterdam, (2009).

فهرست نمادهای انگلیسی

- a : شعاع خارجی مخزن
 b : شعاع داخلی مخزن
 C : سفتی فنر وینکلر
 E : مدول الاستیسیته مخزن
 K : ضریب انبساط حرارت هدایتی مخزن
 m_i : نمای ماده هدفمند متناسب با هر خاصیت
 T : توزیع دمایی درون مخزن
 r : شعاع مخزن
 α : ضریب انبساط حرارتی مخزن
 $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$: مولفه‌های کرنش مخزن
 λ, μ : ثابت‌های الاستیک لامه
 ν : ضریب پواسون مخزن
 ρ : چگالی مخزن
 $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$: مولفه‌های تنش مخزن
 ω : سرعت زاویه‌ای مخزن

Abstract

In the present research, stress analysis of a functionally graded material cylindrical pressure vessel subjected to the simultaneous action of thermal loading, rotation and internal pressure is performed. Also it is assumed that vessel is located in an elastic medium which is designated according to the Winkler model. Except for Poisson's ratio, all of the thermomechanical properties of the vessel are assumed to follow a power law model and vary across the radius of the vessel. Heat conduction equation and Navier equation which govern the temperature and radial displacement distribution across the radius of vessel are established and solved analytically. Closed form expressions are obtained for temperature distribution, radial displacement profile, strains and stresses components in the vessel.

Parametric studies are provided to explore the effects of rotation and foundation stiffness on the structural responses of the vessel. It is shown that, foundation stiffness, power law index of the properties and angular speed all affect the stresses and displacement components of the vessel, significantly.