

حل دقیق سرعت و فشار سیال لزج ناشی از اثر سینماتیکی موج حرکتی مرزی دوبعدی

در پژوهش حاضر، برای توسعه‌ی مسأله استوکس نوع دوم، مرز پایین سیال لزج تراکم‌ناپذیر نیمه‌بی‌نهایت ساکن، همزمان در دو جهت تحریک می‌شود. این تحریک دوبعدی که ناشی از اثر سرعت موج متحرک است، شرط مرزی معادله‌های ناویر-استوکس خطی دوبعدی است. حل دقیق زمانی-مکانی میدان‌های سرعت و فشار نشان می‌دهد، دامنه‌ی نوسانی سرعت تا فاصله $1/87$ میکرومتر از مرز تحریک، دارای میرایی سریع است. سپس، تا ارتفاع یک میلی‌متر از مرز پایین، دامنه‌ی نوسان‌های کمیت‌ها دارای میرایی کند می‌باشد. همچنین در ناحیه با میرایی سریع، اختلاف فاز بین کمیت‌های فشار و سرعت، متغیر است اما پس از آن، ناحیه‌ای با اختلاف فاز ثابت بین کمیت‌ها وجود دارد. با توجه به نتایج پژوهش، فرض ثابت یا ناچیز بودن فشار در حالتی که فقط جابجایی افقی از نوع ارتعاش است، فرض مناسبی است. اما در صورتی که تحریک مرز از نوع عمودی باشد، در نظر گرفتن فشار ثابت در راستای عمود بر سطح، صحیح نیست. تغییرات مکانی در مؤلفه‌های سرعت موج مرزی تحریکی، به همراه تأثیر مؤلفه‌های سرعت بر یکدیگر، باعث تشکیل موج فشاری می‌شود. در ضمن، تحریک مرزی در دو جهت عمودی و افقی باعث حرکت چرخشی میراشونده ذره‌های سیال می‌شود.

محمد احسان خدائی

میدانشاه^۱

دانشجوی دکترا

خسرو نادران طحان^۲

استاد

مجتبی دهقان منشادی^۳

دانشیار

امین یاقوتیان^۴

استادیار

واژه‌های راهنما: حل تحلیلی دقیق، سیال تراکم‌ناپذیر، انتشار موج، اختلاف فاز، گردابه

۱- مقدمه

بررسی دینامیک سیالی که در تماس با اجسام صلب یا الاستیک است، از اساسی‌ترین مسائل مکانیک و ریاضیات کاربردی است. این مسأله در حالت پایا (مستقل از زمان) و ناپایا (متغیر با زمان) مطرح است. مرسوم‌ترین حالت‌های حرکت ناپایا، هنگامی است که حرکت از حالت سکون شروع یا نوسانی باشد. بعد از شروع حرکت، لایه‌ای در سیال نزدیک مرز جامد تشکیل می‌شود که با توجه به اصل عدم لغزش، سرعت سیال با سرعت مرز جامد، یکسان است.

^۱ دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز a.khodaei@phdstu.scu.ac.ir

^۲ نویسنده مسئول، استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز naderan_k@scu.ac.ir

^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان mdmanshadi@mut-es.ac.ir

^۴ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز a.yaghootian@scu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۵/۳۰، تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۲۷

در این فاصله سرعت سیال از سرعت روی مرز در یک ضخامت معلوم به مقدار مشخصی تغییر می‌کند (مقدار مشخص یعنی، اگر سیال ساکن باشد سرعت سیال در دوردست به صفر و در صورتی که دارای حرکت افقی باشد به مقدار سرعت سیال در بی‌نهایت، می‌رسد). در نتیجه به دلیل وجود گرادیان سرعت در این لایه، نیروهای برشی دارای اهمیت شده و می‌توان سیال نزدیک به مرز جسم را لزج و سیال دور از این لایه را غیرلزج یا ایده‌آل در نظر گرفت.

حرکت در حالت ناپایا می‌تواند ناشی از حرکت تمام جسم صلب (حرکت کشتی در آب) یا حرکت مرز جسم الاستیک (پمپ شدن خون در رگ) باشد که هر دو باعث تغییراتی در سیال نزدیک جسم می‌شود. نوسان اجسام صلب یا حرکت نوسانی مرز اجسام الاستیک، حالت خاصی از پدیده‌ی انتشار موج^۱ در محیط‌های مکانیکی است. موج‌های مکانیکی که در محیط مرزدار منتشر می‌شوند، موج‌های هدایت‌شده نام دارند. به طور مثال موج‌های شولت^۲ [۱]، دسته‌ای از موج‌های هدایت‌شده‌اند که بین مرز جامد و سیال در حال انتشار هستند. این موج‌ها به دو صورت موج‌های نوسانی ایستاده^۳ و موج‌های متحرک^۴ در محیط‌های مکانیکی ظاهر می‌شوند. موج‌های نوسانی ایستاده به طور جداگانه در زمان یا فضا ولی موج‌های متحرک به طور همزمان در فضا و مکان منتشر می‌شوند. به طور مثال حرکت صفحه تخت در مسأله استوکس نوع دوم [۲]، از نوع حرکت موج‌های نوسانی ایستاده‌ی منتشر شونده در طول زمان است. تعداد قابل توجهی مطالعه‌ی عددی، دینامیک سیالات در تماس با مرز جامد الاستیک دارای انتشار موج را بررسی کرده‌اند.

بوگارد و همکاران [۳] و کوادریو و ریکو [۴] با استفاده از روش حل عددی مستقیم^۵ معادله‌های ناویر-استوکس، با در نظر گرفتن این‌که مرز سیال در معرض موج‌های نوسانی ایستاده که در طول زمان گسترش یافته است، دینامیک سیالات حاکم بر مسأله را تحلیل کرده‌اند. اما ویوتی و همکاران [۵]، اسکات [۶] و کیمارلی و همکاران [۷] با در نظر گرفتن موج‌های نوسانی ایستاده که در طول مکان گسترش پیدا کرده، حل عددی برای سیالات حاکم ارائه داده‌اند.

شن و همکاران [۸]، کوادریو و همکاران [۹]، کوادریو و ریکو [۱۰]، احمد و همکاران [۱۱] با استفاده از روش حل عددی مستقیم و تیان و همکاران [۱۲] با استفاده از روش عددی المان محدود زمان-فضایی، حل دینامیک سیالاتی را ارائه داده‌اند که مرز آن در معرض موج‌های متحرک قرار دارند. حل دقیق^۶ برای مسائل دینامیک سیالات به دلیل ماهیت غیرخطی آن‌ها، محدود است.

با توجه به دسته‌بندی ارائه شده در [۲] حل‌های دقیق به دو دسته تقسیم می‌شوند. در دسته اول، مانند مسأله استوکس نوع دوم، با فرضیه‌های منطقی، جمله غیرخطی معادله‌های حاکم صفر یا در مقابل جمله‌های دیگر ناچیز فرض می‌شود و حل دقیق مسأله ارائه می‌شود. اما در دسته دوم با فرضیه‌های مناسب حل مجانبی برای مسأله مورد نظر، مانند ریکو و هیکس [۱۳]، ارائه می‌شود.

¹ Wave Propagation

² Scholte Waves

³ Standing Oscillating Waves

⁴ Travelling Waves

⁵ Direct Numerical Solution

⁶ Exact Solution

مارتین و هاگر [۱۴] مانند مسأله استوکس نوع دوم، معادله‌ی پروفیل سرعت سیال بالای یک صفحه که در معرض موج نوسانی ایستاده گسترش یافته در طول زمان است، را ارائه داد. با این تفاوت که موج برشی دارای دامنه‌ی میراشونده است. کی [۱۵] با در نظر گرفتن موج متحرک بین مرزی که دارای مؤلفه‌ی سرعت در جهت مماس و عمود بر سطح است، اثر ویسکوزیته و انتقال حرارت بر انتشار موج در جامد را بررسی کرد. ایسدن و سادر [۱۶] با استفاده از تبدیل فوریه و ژو و همکاران [۱۷] با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله‌های خطی ناویر-استوکس، حل دقیقی برای سرعت و فشار سیال، هنگامی که سیال در تماس با مرز جامد در معرض موج متحرکی است که دارای مؤلفه عمودی باشد، ارائه داده‌اند. گوسیو و سیمونوا [۱۸] با در نظر گرفتن موج بین مرزی متحرکی که دارای سرعت در جهت مماس و عمود بر سطح است، اثر وجود مؤلفه برشی در سیال را به صورت تحلیلی بررسی کرده‌اند. کوچیما و همکاران [۱۹] با استفاده از نظریه آکوستیک، مقدار قله فشار مرزی و با استفاده از پایستاری مومنتوم، پروفیل میانگین فشار سیال روی مرز را در حضور موج مرزی ناشی از ضربه، استخراج کرده‌اند.

هدف این پژوهش ارائه و بررسی حل دقیق توزیع بخش نوسانی میدان سرعت و فشار سیال تراکم‌ناپذیر لزج ساکنی می‌باشد که مرز آن (مرز در تماس با جامد) دارای حرکت نوسانی در دو جهت افقی و عمودی است. برای ارائه حل دقیق، معادله‌های ناویر-استوکس خطی شده در حالت دو بعدی، بدون فرض فشار ثابت در راستای عمود بر سطح، استفاده می‌شود. نوآوری در این پژوهش در سه حوزه‌ی (الف) شرط مرزی تحریک کننده، (ب) نوع ساده‌سازی معادله‌های اصلی و (ج) فضای رابطه‌های تحلیلی ارائه شده، است. اول نوع شرط مرزی تحریک کننده؛ با توجه به این‌که در مسأله‌های انتشار موج‌های مرزی در اجسام الاستیک خطی (مانند موج‌های رایلی^۱)، موج‌های رسیده به مرز در دو جهت افقی و عمودی مرز را تحریک می‌کنند [۱]، در این پژوهش، هر دو جهت عمود و مماس بر سطح سیال، تحریک شده و همچنین اثر موج مرزی از نوع منتشرشونده در زمان و مکان است. البته در این تحقیق، چگونگی تولید، انتشار و کوپل شدن این موج‌ها به سیال مورد نظر، بررسی نمی‌شود و تنها اثر سینماتیکی آن، یعنی سرعت حرکت افقی و عمودی، در نظر گرفته می‌شود. حوزه‌ی دوم، معادله‌های اصلی حل؛ بررسی‌ها [۱۶، ۱۷، ۱۹] نشان می‌دهد که در نظر گرفتن فشار ثابت در راستای عمود بر سطح، در حالتی که تحریک فقط دارای مؤلفه‌ی عمودی است، فرض مناسبی نیست. بنابراین، در این پژوهش، از فرض ثابت بودن فشار در راستای عمود بر سطح استفاده نشده است. سومین نوآوری، فضای رابطه‌های تحلیلی میدان سرعت و فشار است که به دلیل لحاظ نمودن مستقیم فرض نوسانی بودن حرکت ذره‌های سیال در معادله‌ها، رابطه‌ها برحسب زمان به دست آمده‌اند. این موضوع می‌تواند در بررسی دستگاه‌های بخارساز فراصوت که در آن‌ها یک صفحه مرتعش است، کاربرد داشته باشد.

۲- معادله‌ها و شرط‌های مرزی حاکم بر مسأله

با توجه به شکل (۱)، سیستم مورد استفاده در این پژوهش، محیط دوبعدی نیمه‌بی‌نهایت سیال لزج تراکم-ناپذیر ساکن است. هدف در این پژوهش استفاده از معادله‌های ناویر-استوکس خطی شده در حالت دو بعدی،

^۱ Rayleigh

بدون فرض فشار ثابت در راستای عمود بر سطح و ارائه حل دقیق توزیع بخش نوسانی میدان سرعت و فشار این سیستم در حالی که مرز آن دارای حرکت نوسانی در دو جهت افقی و عمودی باشد، است. به دلیل این که مرز سیال به صورت عمودی و افقی در حرکت است از معادله‌های اصلی ناویر-استوکس و معادله پیوستگی برای جریان دو بعدی، ناپایا (۱-۳) [۲] شروع و با اعمال فرضیه‌های ساده کننده رابطه‌های حاکم بر سیال تراکم‌ناپذیر لزج که در تماس با یک سطح افقی جامد است ارائه می‌شود. با توجه به شکل (۱) سیال لزج تراکم‌ناپذیر در نیم فضای بالایی ($y > 0$) قرار گرفته است که x در جهت مماس بر سطح و y به عنوان مؤلفه عمود بر سطح است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_f \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

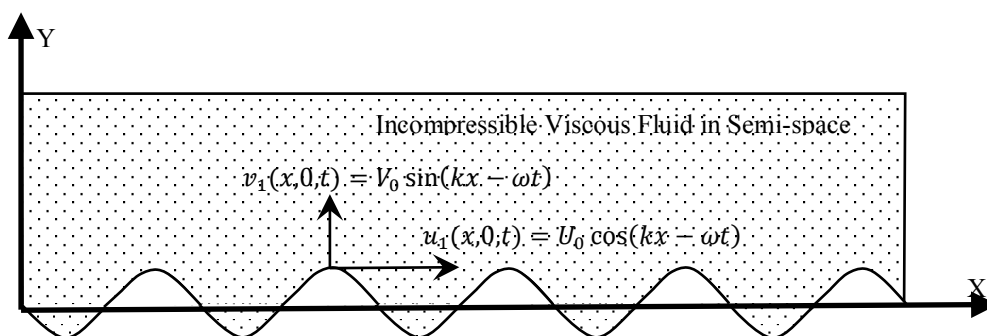
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_f \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) معادله‌های حرکت در جهت x و y و رابطه‌ی (۳)، معادله پیوستگی سیال است. در این رابطه‌ها، u ، مؤلفه افقی سرعت ذره‌های سیال بر حسب متر بر ثانیه، ν ، مؤلفه عمود بر سطح سرعت ذره-های سیال بر حسب متر بر ثانیه، p ، فشار ترمودینامیکی سیال بر حسب پاسکال، ρ ، چگالی سیال بر حسب کیلوگرم بر مترمکعب و ν_f ، لزجت سینماتیکی سیال بر حسب متر مربع بر ثانیه است. فرض می‌شود که سرعت ذره‌های سیال و فشار سیال دارای دو بخش متوسط $(\bar{u}(x, y), \bar{v}(x, y), \bar{p}(x, y))$ و نوسانی $(u_1(x, y, t), v_1(x, y, t), p_1(x, y, t))$ به صورت (۴) است. ناپایا بودن سیستم به دلیل حضور بخش نوسانی است به همین دلیل بخش متوسط مستقل از زمان می‌باشد.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \bar{u}(x, y) + u_1(x, y, t) \\ v(x, y, t) &= \bar{v}(x, y) + v_1(x, y, t) \\ p(x, y, t) &= \bar{p}(x, y) + p_1(x, y, t) \end{aligned} \quad (4)$$

با جاگذاری (۴) در (۱)، معادله مؤلفه سرعت در جهت x به صورت (۵) به دست می‌آید.



شکل ۱- سیستم مختصه‌ها و شرط مرزی تحریک کننده برای محیط سیال لزج تراکم‌ناپذیر نیمه بی نهایت ساکن

$$\left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \nu_f \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial u_1}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \nu_f \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (5)$$

لازم به ذکر است که بخش متوسط سرعت و فشار، همان حل پایه‌ای معادله‌های ناویر-استوکس حاکم بر صفحه تخت می‌باشد (عبارت داخل کروشه). از این رو با کسر کردن این حل پایه‌ای از رابطه‌ی (۵)، معادله غیرخطی بخش نوسانی مؤلفه سرعت در جهت مماس بر سطح به صورت (۶) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \left\{ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\} + \bar{v} \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \nu_f \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (6)$$

همچنین به دلیل این که در عمل سرعت موجی که توسط عملگرهای در محدوده‌ی فرکانسی کیلوهرتز یا مگاهرتز، مرز سیال را تحریک می‌کند، دارای دامنه‌ای از مرتبه‌ی میلی‌متر بر ثانیه است. از طرفی سرعت متوسط جریان از مرتبه‌ی متر بر ثانیه فرض می‌شود، بنابراین می‌توان از ضرب دو بخش نوسانی در یکدیگر $(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y})$ در رابطه‌ی (۶) در مقابل جملات دیگر، صرف نظر کرد (فرض خطی‌سازی). با این فرض، معادله خطی شده بخش نوسانی مؤلفه سرعت در جهت x ، برای ذره‌های سیال به صورت (۷)، بدست می‌آید. به طور مشابه، معادله خطی شده بخش نوسانی مؤلفه سرعت در جهت عمود بر سطح به صورت (۸) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \nu_f \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y} - \nu_f \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (8)$$

با در نظر گرفتن این که سیال مورد نظر ساکن ($\bar{u} = \bar{v} = 0$) و دارای چگالی ثابت است، معادله‌های حرکت و پیوستگی خطی شده بخش نوسانی حاکم بر سیال لزج تراکم‌ناپذیر به صورت (۹-۱۱) تبدیل می‌شوند. در این رابطه‌ها μ_f ، لزجت دینامیکی برحسب پاسکال ثانیه است.

$$\bar{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = \mu_f \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial y} = \mu_f \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

با توجه به شکل (۱)، سیال در $y=0$ در معرض اثر سینماتیکی موج حرکتی پیش‌رونده در زمان و فضا است. بردار سرعت این موج مرزی، دارای دو مؤلفه، در دو جهت عمود و مماس بر سطح است.

مؤلفه‌های این سرعت به صورت رابطه‌های (۱۲) و (۱۳) می‌باشد. همچنین با توجه به اصل انتشار، فرض می‌شود سرعت حرکت سیال در بی‌نهایت، محدود است.

$$@ y = 0 : u_1 = U_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (12)$$

$$@ y = 0 : v_1 = V_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi)} \quad (13)$$

در رابطه‌های (۱۲) و (۱۳)، U_0 و V_0 به ترتیب دامنه‌ی سرعت نوسانی در جهت مماس و عمود بر سطح بر حسب متر بر ثانیه هستند. همچنین k ، عدد موج بر حسب معکوس متر، ω ، فرکانس زاویه‌ای بر حسب رادیان بر ثانیه و φ ، اختلاف فاز بین مؤلفه‌های سرعت بر حسب رادیان می‌باشد. فرض بر این است که رابطه‌های (۱۲) و (۱۳)، به کمک نظریه الاستیک خطی برای موج‌های مرزی، جایی که در $y=0$ جامد با سیال در تماس است، به دست آمده‌اند. به این ترتیب روابط (۹) الی (۱۱) به همراه شرایط مرزی (۱۲) و (۱۳) و این که سرعت سیال در بی‌نهایت محدود است (اصل انتشار)، معادله‌های حاکم بر محیط دوبعدی نیمه‌بی‌نهایت سیال لزج تراکم‌ناپذیر ساکن که مرز آن دارای حرکت نوسانی در دو جهت افقی و عمودی است را تشکیل می‌دهند.

۳- حل مسأله

۳-۱- روش حل مسأله

با توجه به شرط‌های مرزی حاکم بر سیال ساکن لزج، مؤلفه‌های سرعت حرکت ذره‌های داخل سیال و فشار حاکم بر آن‌ها به صورت $u_1(x, y, t) = U(y)e^{i(kx - \omega t)}$ ، $v_1(x, y, t) = iV(y)e^{i(kx - \omega t)}$ و $p_1(x, y, t) = P(y)e^{i(kx - \omega t)}$ فرض می‌شوند. توجه شود که برای سادگی محاسبات، رابطه‌ها به صورت نمایی در نظر گرفته شده است، اما از نظر فیزیکی، بخش حقیقی شرط‌های مرزی و رابطه‌های سرعت و فشار نهایی، قابل انتشار می‌باشند. با در نظر گرفتن این فرضیه‌ها در معادله‌های (۹-۱۱)، انجام عملیات ساده‌سازی و تعریف پارامتر α_f^2 به صورت (۱۷)، رابطه‌های (۱۴-۱۶) حاصل می‌شود.

$$U'''(y) - \alpha_f^2 U(y) = \frac{ik}{\mu_f} P(y) \quad (14)$$

$$V''(y) - \alpha_f^2 V(y) = \frac{-i}{\mu_f} P'(y) \quad (15)$$

$$V'(y) = -kU(y) \quad (16)$$

$$\alpha_f^2 = k^2 - \frac{i\omega}{\nu_f} \quad (17)$$

رابطه‌های (۱۴-۱۶)، معادله‌های حاکم بر دامنه‌ی بخش نوسانی سرعت و فشار سیال لزج است. برای حل معادله‌ها، دامنه‌ی فشار از رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) حذف می‌شود. برای حذف جمله فشار، ابتدا از رابطه‌ی (۱۴) نسبت به متغیر y مشتق گرفته می‌شود تا عبارت سمت راست تساوی، بر حسب مشتق فشار، به دست آید. سپس با فرض این که عدد موج مخالف صفر است (به تعبیری حتما در مرز تحریک کننده سیال،

تغییرات در جهت x وجود دارد، رابطه‌ی (۱۵) در k ضرب می‌شود. در نهایت با تجمیع دو عبارت حاصل از این عملیات، فشار از طرفین حذف می‌شود. سپس با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۱۶) و تعریف پارامترهای (۱۹)، معادله دیفرانسیل مرتبه چهار (۱۸) برای دامنه‌ی سرعت نوسانی در جهت عمود بر سطح به دست می‌آید.

$$V''''(y) - \gamma_f V'''(y) + \beta_f V(y) = 0 \quad (18)$$

$$\gamma_f = k^2 + \alpha_f^2, \quad \beta_f = k^2 \alpha_f^2 \quad (19)$$

رابطه‌ی (۱۸)، یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار با ضریب‌های معلوم است. برای حل این معادله دیفرانسیل، دامنه‌ی سرعت در جهت عمود بر سطح به صورت $V(y) = e^{\gamma y}$ فرض و در رابطه‌ی (۱۸)، جاگذاری می‌شود. پس از انجام عملیات ریاضی و همچنین با در نظر گرفتن شرط محدود بودن سرعت با فاصله گرفتن از سطح، دامنه‌ی سرعت در جهت y ، به صورت (۲۰) به دست می‌آید. A_2 و A_4 ضریب‌های دلخواه سرعت ناشی از حل معادله دیفرانسیل هستند که مقادیر آن با استفاده از شرط‌های مرزی به دست می‌آید.

$$V(y) = A_2 e^{-ky} + A_4 e^{-\alpha_f y} \quad (20)$$

در رابطه‌ی (۲۰)، α_f ریشه دوم عدد مختلط α_f^2 است که به صورت (۲۱) تعریف می‌شود.

$$\alpha_f = B \left[\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \right] = B e^{i\frac{\theta'}{2}}, \quad B = \sqrt[4]{k^4 + \frac{\omega^2}{\nu_f^2}}, \quad \theta' = \tan^{-1} \frac{-\omega}{k^2 \nu_f} \quad (21)$$

با جاگذاری (۲۰) در فرض $v_1(x, y, t) = iV(y)e^{i(kx-\omega t)}$ ، مؤلفه در جهت y سرعت ذره‌های سیال به صورت (۲۲) به دست می‌آید. همچنین با جاگذاری دامنه‌ی عمودی سرعت (۲۰) در رابطه‌ی (۱۶) و در نظر گرفتن فرض $u_1(x, y, t) = U(y)e^{i(kx-\omega t)}$ ، مؤلفه در جهت x سرعت ذره‌های سیال به صورت (۲۳) به دست می‌آید.

$$v_1(x, y, t) = i(A_2 e^{-ky} + A_4 e^{-\alpha_f y}) e^{i(kx-\omega t)} \quad (22)$$

$$u_1(x, y, t) = (A_2 e^{-ky} + \frac{\alpha_f}{k} A_4 e^{-\alpha_f y}) e^{i(kx-\omega t)} \quad (23)$$

در ادامه رابطه فشار حاکم بر مسأله بررسی می‌شود. اگر دامنه‌ی مؤلفه x سرعت ذره‌های سیال در رابطه-ی (۲۳) در نظر گرفته شود و در رابطه‌ی (۱۴) جاگذاری شود، پس از مرتب‌سازی رابطه‌ی فشار نوسانی ناشی از حرکت نوسانی مرز به صورت (۲۶) به دست می‌آید.

$$\left[k^2 A_2 e^{-ky} + \frac{\alpha_f^3}{k} A_4 e^{-\alpha_f y} \right] - \alpha_f^2 \left[A_2 e^{-ky} + \frac{\alpha_f}{k} A_4 e^{-\alpha_f y} \right] = \frac{ik}{\mu_f} P(y) \quad (24)$$

$$(24) \Rightarrow (-\alpha_f^2 + k^2) A_2 e^{-ky} = \frac{ik}{\mu_f} P(y) \quad (25)$$

$$(25) \stackrel{(17)}{\Rightarrow} \left(-k^2 + \frac{i\omega}{\nu_f} + k^2 \right) A_2 e^{-ky} = \frac{ik}{\mu_f} P(y) \Rightarrow P(y) = \frac{\omega \rho}{k} A_2 e^{-ky} \quad (26)$$

از طرفی با جاگذاری رابطه‌ی (۲۰) در (۱۵) رابطه‌ای (۲۹) برای فشار به دست می‌آید.

$$k^2 A_2 e^{-ky} + \alpha_f^2 A_4 e^{-\alpha_f y} - \alpha_f^2 A_2 e^{-ky} - \alpha_f^2 A_4 e^{-\alpha_f y} = -\frac{i}{\mu_f} P'(y)$$

$$\Rightarrow (k^2 - \alpha_f^2) A_2 e^{-ky} = -\frac{i}{\mu_f} P'(y) \quad (27)$$

$$\Rightarrow -\frac{i}{\mu_f} P'(y) = (k^2 - k^2 + \frac{i\omega}{\nu_f}) A_2 e^{-ky} \Rightarrow P'(y) = -\omega \rho A_2 e^{-ky} \quad (28)$$

$$\int^{(28)} dy \rightarrow P(y) = -\frac{\omega \rho}{-k} A_2 e^{-ky} + Constant \quad (29)$$

با توجه به این که فشار به دست آمده از هر دو روش باید با یکدیگر برابر باشند، ثابت به دست آمده در رابطه‌ی (۲۹) برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین دامنه‌ی فشار نوسانی به صورت رابطه‌ی (۲۶) به دست می‌آید.

۲-۳- رابطه‌های تحلیلی سرعت و فشار قابل انتشار در سیال

از نظر ریاضی مقدار دامنه و اختلاف فاز شرط‌های مرزی (۱۲) و (۱۳)، می‌توانند هر عددی باشند. اما از نظر فیزیک انتشار موج مرزی [۱]، نسبت دامنه‌ها محدود و اختلاف فاز $\frac{3\pi}{2}$ است. در ادامه اختلاف فاز $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ در نظر گرفته می‌شود. حال اگر مؤلفه‌های سرعت (۲۲) و (۲۳) در $y=0$ محاسبه شوند و شرط‌های مرزی (۱۲) و (۱۳) در نظر گرفته شوند، ضریب‌های A_2 و A_4 به دست می‌آیند. در ادامه با جاگذاری مقادیر این ضریب‌ها و بخش حقیقی و موهومی پارامتر α_f از (۲۱) در (۲۲)، (۲۳) و (۲۶) و همچنین در نظر گرفتن بخش حقیقی، رابطه‌های تحلیلی مؤلفه‌های سرعت در دو جهت عمود و مماس بر سطح و فشار قابل انتشار در سیال به صورت (۳۰-۳۲) به دست می‌آیند. توجه شود که پارامترهای a ، b و θ به صورت (۳۳) تعریف شده است.

$$v_{1-Re}(x, y, t) = \frac{1}{k^2 + B^2 - 2ka} \{[-(V_0 + U_0)kb \cos(\theta) - [k^2 U_0 - V_0 B^2 + (V_0 - U_0)ak] \sin(\theta)] e^{-ky} + \{[-ka + k^2](V_0 + U_0) \sin(\theta - by) + kb(V_0 + U_0) \cos(\theta - by)\} e^{-ay}\} \quad (30)$$

$$u_{1-Re}(x, y, t) = \frac{1}{k^2 + B^2 - 2ka} \{[-(V_0 + U_0)kb \sin(\theta) + [k^2 U_0 - V_0 B^2 + (V_0 - U_0)ak] \cos(\theta)] e^{-ky} - \{[ka - B^2](V_0 + U_0) \cos(\theta - by) - kb(V_0 + U_0) \sin(\theta - by)\} e^{-ay}\} \quad (31)$$

$$p_{1-Re}(x, y, t) = \frac{\omega \rho}{k^2 + B^2 - 2ka} \{-(V_0 + U_0)b \sin(\theta) + [kU_0 - V_0 \sqrt{k^2 + (\omega/k\nu)^2} + (V_0 - U_0)a] \cos \theta\} e^{-ky} \quad (32)$$

$$a = \sqrt[4]{k^4 + \omega^2/\nu_f^2} \cos(0.5 \tan^{-1}(-\omega/k^2 \nu_f)) \quad (33)$$

$$b = \sqrt[4]{k^4 + \omega^2/v_f^2} \sin(0.5 \tan^{-1}(-\omega/k^2 v_f))$$

$$\theta = kx - \omega t$$

۳-۳-صحت‌سنجی رابطه‌ها

در این پژوهش رابطه‌های تحلیلی برای سرعت و فشار سیال لزج تراکم‌ناپذیر، با لحاظ کردن فرض نوسانی بودن حرکت ذره‌های سیال در معادله‌های (۹-۱۱) با تأمین شرط‌های مرزی (۱۲)، (۱۳) و اصل انتشار، به صورت (۳۰-۳۲) ارائه شد. با توجه به جستجوهای انجام شده استفاده از روش جاگذاری مستقیم و استخراج روابط به صورت (۳۰-۳۲)، در پژوهشی دیده نشده است.

اما با روش‌های دیگری مانند تجزیه بردار سرعت به توابع پتانسیل برداری و عددی [۱۵، ۱۸، ۲۰] یا در نظر گرفتن سیال لزج به شکل جامد فرضی [۲۱، ۲۲]، رابطه‌ها ارائه شده است.

رابطه‌های تحلیلی این پژوهش، قابل مقایسه با دو روش دیگر است. به تعبیری، با بررسی دقیق‌تر رابطه‌ها، مشاهده می‌شود که روش‌های تجزیه بردار سرعت یا جامد فرضی، در این پژوهش نهفته هستند. جمله شامل ضریب A_2 در رابطه‌های (۲۲) و (۲۳)، بخش پتانسیل سرعت و جمله شامل ضریب A_4 با توجه به تعریف (۱۷) که مشابه مدول برشی فرضی در [۲۱] یا κ در رابطه‌ی (۱۳) مرجع [۱۸] است، بخش چرخشی^۱ است. علاوه بر این مقایسه، در ادامه برای بررسی بیشتر رابطه‌های تحلیلی، با اعمال فرضیه‌های ساده‌کننده به رابطه‌های (۳۰-۳۲)، دو حالت خاص به دست می‌آیند.

حالت خاص ۱: فرض می‌شود که مرز سیال لزج فقط به صورت افقی مرتعش است یعنی شرط مرزی در $y=0$ به صورت $u_1 = U_0 \cos(-\omega t)$ است. در این صورت مؤلفه‌های سرعت سیال به صورت (۳۴-۳۵) به دست می‌آیند.

$$(۳۰) \xrightarrow{V_0=0, k \rightarrow 0} v_{1-Re}(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2/v_f^2}} [0] \Rightarrow v_1 = 0 \quad (۳۴)$$

$$(۳۱) \xrightarrow{V_0=0, k \rightarrow 0} u_{1-Re}(x, y, t) = U_0 \cos\left(-\omega t + \sqrt[4]{\omega^2/v_f^2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) y\right) e^{-\sqrt[4]{\omega^2/v_f^2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) y}$$

$$\Rightarrow u_{1-Re}(x, y, t) = U_0 \cos\left(\omega t - \sqrt{\omega/2v_f} y\right) e^{-\sqrt{\omega/2v_f} y} \quad (۳۵)$$

رابطه‌های (۳۴) و (۳۵)، با رابطه‌های سرعت مسأله استوکس نوع دوم [۲] یکسان است. اما فشار ناشی از تحریک سطح زیرین سیال به شکل ارتعاش افقی، به صورت (۳۶) به دست می‌آید.

$$(۳۲) \xrightarrow{k \rightarrow 0, V_0=0} p_{1-Re}(x, y, t) = \sqrt{\frac{\omega \mu_f \rho}{2}} U_0 (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \quad (۳۶)$$

^۱ Vortex

حالت خاص ۲: حالتی که می‌توان در نظر گرفت این است که مرز سیال لزج دارای حرکت موج متحرکی باشد که فقط دارای مؤلفه عمودی است. به تعبیری فقط شرط مرزی (۱۳) به همراه اصل انتشار، بر مسأله حاکم است. در این صورت مؤلفه‌های سرعت و فشار حاکم بر سیال به صورت (۳۷-۳۹) است.

$$v_{1-Re}(x, y, t) = \frac{V_0}{k^2 + B^2 - 2ka} \{[-kb \cos(\theta) + [B^2 - ak] \sin(\theta)]e^{-ky} + \{[-ka + k^2] \sin(\theta - by) + kb \cos(\theta - by)\}e^{-ay}\} \quad (37)$$

$$u_{1-Re}(x, y, t) = \frac{V_0}{k^2 + B^2 - 2ka} \{[-kb \sin(\theta) + [-B^2 + ak] \cos(\theta)]e^{-ky} - \{[ka - B^2] \cos(\theta - by) - kb \sin(\theta - by)\}e^{-ay}\} \quad (38)$$

$$p_{1-Re}(x, y, t) = \frac{\omega \rho V_0}{k^2 + B^2 - 2ka} \{-b \sin(\theta) + [-\sqrt{k^2 + (\omega/kv)^2} + a] \cos \theta\} e^{-ky} \quad (39)$$

رابطه‌های (۳۷-۳۹) با رابطه‌های تحلیلی سرعت و فشار در [۱۶] یکسان می‌باشد. با این تفاوت که رابطه‌های موجود در [۱۶] برحسب جابجایی و در حوزه فرکانس است.

۴- نتایج و تفسیر حل میدان سرعت و فشار در سیال

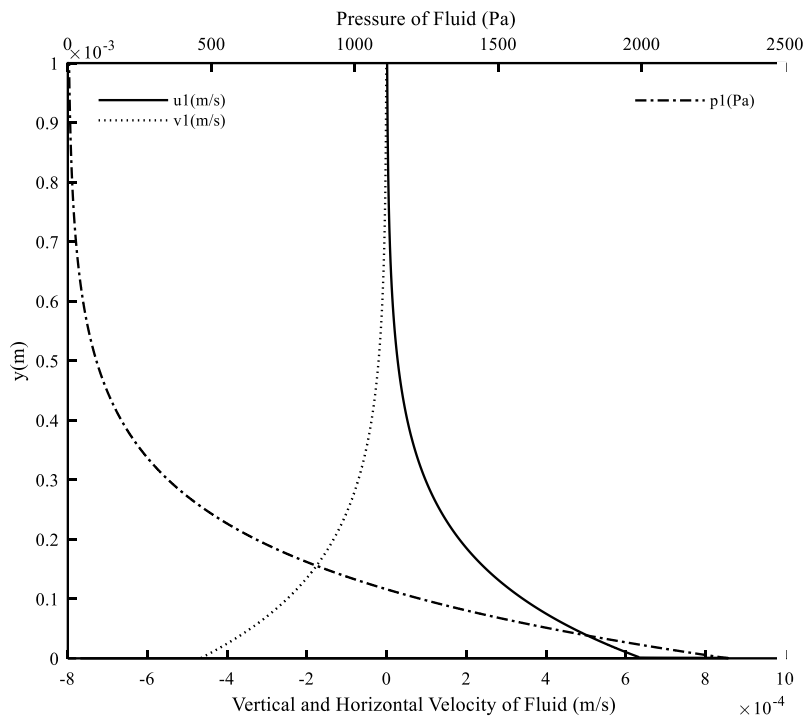
برای درک رفتار سیال ساکن در حضور مرز نوسانی، رابطه‌های تحلیلی میدان سرعت (۳۰) و (۳۱)، تغییرات فشار (۳۲) در فضا و زمان و همچنین برآیند بردار سرعت ذره‌های سیال در صفحه، در ادامه ترسیم شده است. برای ترسیم این نمودارها، از مقادیر عددی دامنه‌ی عمودی (V₀) ۰/۸ میلی‌متر بر ثانیه، دامنه‌ی افقی (U₀) ۰/۹۵ میلی‌متر بر ثانیه، فرکانس (f) ۳/۶ مگاهرتز و طول موج مرز نوسانی (λ) ۱ میلی‌متر و از مشخصه‌های فیزیکی آب به عنوان سیال لزج تراکم‌ناپذیر استفاده می‌شود.

لازم به ذکر است که از نظر ریاضی مشخصه‌های مرز نوسانی، می‌تواند، هر مقدار عددی باشد اما از نظر فیزیک انتشار موج مرزی و راه‌های تولید موج مرزی، نسبت دامنه‌ی افقی سرعت به عمودی محدود است [۱]. در ضمن، مقادیر عددی برای ترسیم به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که حداکثر فشاری که روی مرز سیال ایجاد می‌شود از فشار تبخیر آب (حدود سه کیلوپاسکال [۱۹])، تجاوز نکند.

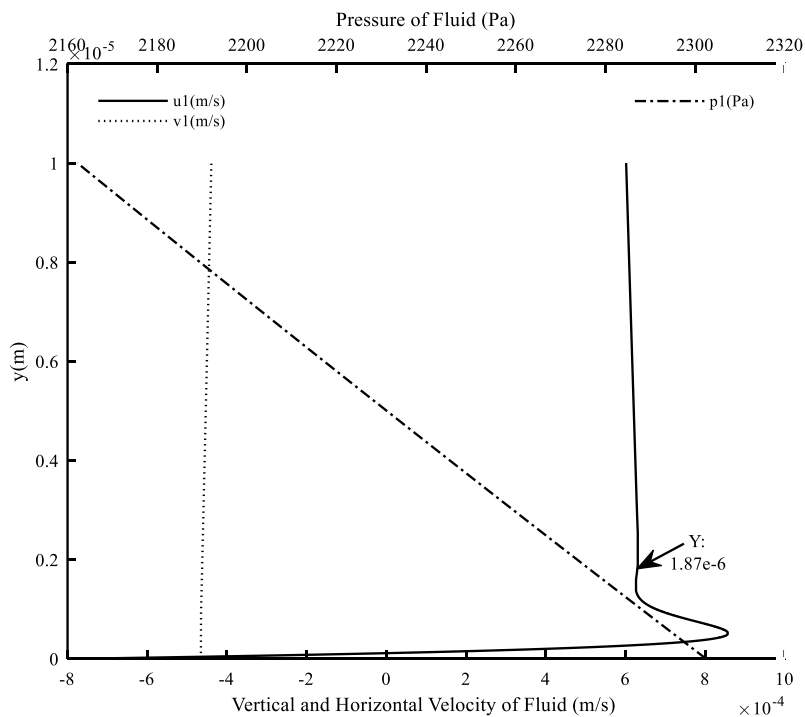
۴-۱- تغییرات مکانی میدان سرعت ذره‌ها و فشار سیال

در این بخش برای بررسی تأثیر تغییرات مکانی بر میدان‌های سرعت ذره‌ها و فشار سیال، نمودارهایی در زمان دلخواه ۱/۵ میکروثانیه ترسیم شده‌اند. شکل (۲) تغییرات مؤلفه‌های سرعت و فشار در راستای ضخامت سیال را در یک نمودار در فاصله دور از مرز تحریک نشان می‌دهد. به این ترتیب، عددهای محور افقی بالایی نشان‌گر فشار بر حسب پاسکال، عددهای محور افقی پایینی نمایان‌گر مؤلفه‌های سرعت با واحد متر بر ثانیه و محور عمودی، ضخامت سیال بر حسب متر است. با توجه به شکل (۲)، دامنه‌ی هر دو کمیت سرعت و فشار در راستای ضخامت در فاصله یک میلی‌متر از کف سیال، میرا شده و به صفر میل می‌کنند. اما با توجه به

شکل (۳)، که در فاصله ۱۰ میکرونی از کف ترسیم شده است، مؤلفه افقی سرعت، در نزدیکی سطح، دچار تغییرات سریعی شده است (خط ممتد).



شکل ۲- پروفیل فشار و مؤلفه‌های سرعت در راستای عمود بر سطح - دور از انتها



شکل ۳- پروفیل فشار و مؤلفه‌های سرعت در راستای عمود بر سطح - نزدیک مرز

البته پروفیل مؤلفه عمودی هم دچار تغییری مشابه پروفیل مؤلفه افقی شده است اما به دلیل این که این تغییر در مقایسه با آن چه در شکل (۳) برای مؤلفه افقی روی داده است، کوچک است، به نظر می رسد که پروفیل مؤلفه عمودی بدون تغییر است. همچنین پروفیل فشار همان طور که در شکل (۲) مشخص است، از ۲۵۸۰ پاسکال روی سطح شروع و بدون شکستگی در پروفیل آن، در فاصله یک میلی متری میرا شده است. برای بررسی و دلیل ایجاد چنین شکستگی در مؤلفه های سرعت و این که چرا این شکستگی برای پروفیل فشار وجود ندارد، می توان به رابطه های تحلیلی (۳۰-۳۲) توجه کرد. حرکت دوبعدی که در سیال قابل انتشار است، در جهت x در حال گسترش یافتن است.

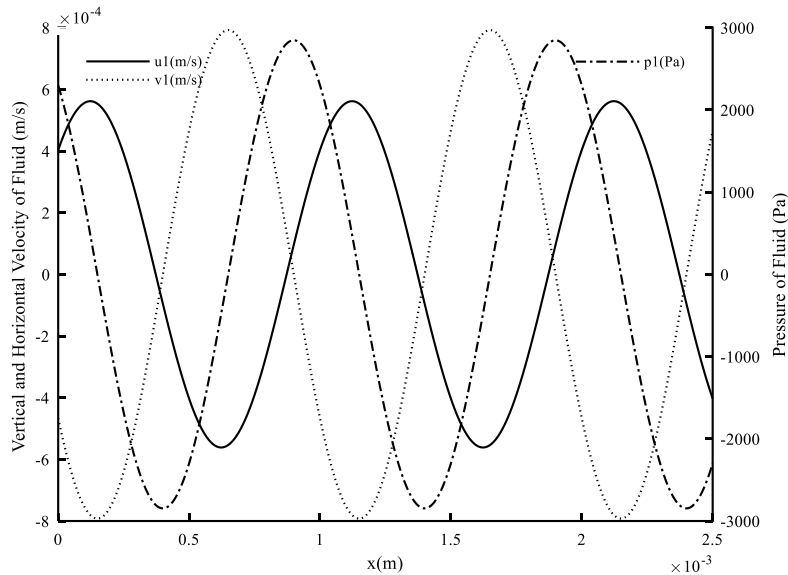
این حرکت ترکیب دو حرکت است. بخش اول شامل ضریب های جمله e^{-ky} و بخش دوم شامل ضرایب جمله $\exp(- (k^4 + \omega^2/v_f^2)^{1/4} \cos(0.5 \tan^{-1}(-\omega/k^2 v_f)) y)$ است.

در بخش اول حرکت، به دلیل وجود k در جمله نمایی، که عدد موج در جهت x در مرز تحریک شده است، می توان در نظر گرفت که بخش اول، ناشی از تغییرات فضایی مرز متحرک در راستای x است. اما در بخش دوم حرکت، علاوه بر عدد موج، ضریب لزجت سیال هم در جمله نمایی وجود دارد.

وجود این جمله های نمایی، بیان گر میرایی در راستای عمود بر سطح است که خود را در شکل (۲) و (۳) نشان داده است. این جمله ها به شکل مشابه، در رابطه های سرعت و فشار در حوزه فرکانس [۱۶] دیده می شود. در این پژوهش، میرایی ناشی از بخش اول، میرایی کند و میرایی ناشی از بخش دوم، میرایی سریع، تعریف می شود. میرایی سریع در نزدیک (شکل ۳) و میرایی کند در فاصله دور از سطح (شکل ۲) باعث کاهش دامنه ی نوسان ها می شوند.

اثر تحریک سطح، ابتدا در $(- (k^4 + \omega^2/v_f^2)^{1/4} \cos(0.5 \tan^{-1}(-\omega/k^2 v_f)))$ و سپس در فاصله $2\pi/k$ از بین می رود. در این پژوهش، فاصله ی اول، $1/87$ میکرون (شکل ۳) و فاصله دوم، یک میلی متر می باشد. این دو میرایی در رابطه های مؤلفه های سرعت وجود دارند اما به دلیل ضریب های متفاوت، میزان تأثیر آن ها متفاوت است اما در فشار، تنها اثر ناشی از میرایی کند وجود دارد. به همین دلیل است که در شکل (۳)، تغییری در پروفیل فشار وجود ندارد اما در پروفیل مؤلفه های سرعت، تغییر سرعت وجود دارد. در مورد حالت خاص اول، با توجه به رابطه ی (۳۵) که حالت خاصی از رابطه ی (۳۱) است، می توان بیان کرد که مسأله استوکس نوع دوم، فقط دارای میرایی سریع است اما به دلیل این که k در مسأله استوکس نوع دوم صفر است و نوعی ارتعاش است، میرایی کند وجود ندارد یا به تعبیر ریاضی در بی نهایت اتفاق می افتد.

وجود فقط جمله ی $\exp(-ky)$ ، در رابطه ی فشار نشان می دهد که تغییرات این کمیت، به دلیل تغییرات فضایی مرز متحرک است. به تعبیری، فشار ایجاد شده در سیال به دلیل انتشار موج مرزی در فضا است. فشار ناشی از تحریک (۳۶)، در حالتی که سیال آب یا هوا باشد، در محدوده ی فرکانس های معمول ارتعاشی که از مرتبه کیلوهرتز و دارای سرعت تحریک مرز از مرتبه میلی متر بر ثانیه است، دارای دامنه ی پایین و در حد پاسکال می باشد. به این ترتیب با توجه به رابطه ی (۳۶) فرض ثابت بودن فشار در عرض لایه مرزی و حتی ناچیز بودن آن در حالتی که فقط جابجایی افقی از نوع ارتعاش وجود داشته باشد، فرض معقولی است.



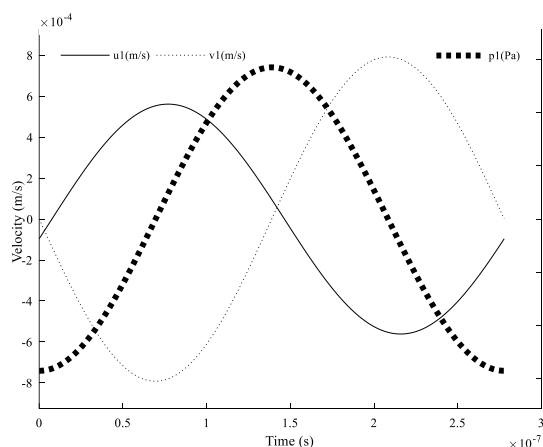
شکل ۴- پروفیل فشار و مؤلفه‌های سرعت در جهت مماس بر سطح در فاصله ۰/۲ میکرون از کف

حالت دیگری که می‌توان تأثیر تغییرات مکانی را بررسی نمود، ترسیم تغییرات مؤلفه‌های سرعت و فشار در راستای افق در یک نمودار است. در شکل (۴)، در لجه‌ی دلخواه ۱/۵ میکروثانیه و ارتفاع از کف دلخواه ۰/۲ میکرون، این تغییرات، ترسیم شده است. عددهای محور عمودی سمت راست نشان‌گر فشار بر حسب پاسکال، عددهای محور عمودی سمت چپ نمایان‌گر مؤلفه‌های سرعت با واحد متر بر ثانیه و محور افقی، طول سیال بر حسب متر است. شکل (۴) در طول سیال، برای دو و نیم برابر طول موج تحریکی ترسیم شده است. با توجه به شکل (۴)، تغییرات مکانی در جهت افقی، سینوسی و نامیرا است.

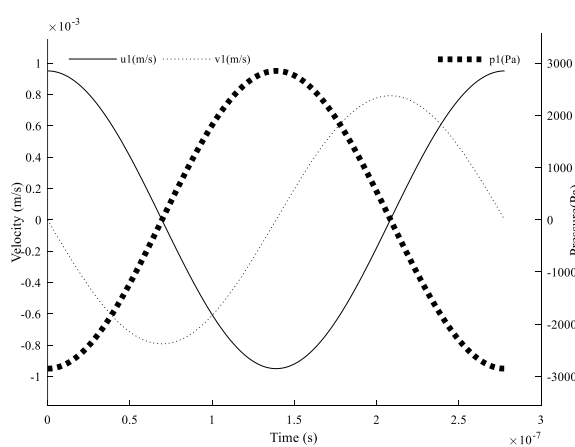
۴-۲- تغییرات میدان سرعت ذره‌ها و فشار سیال در یک دوره زمانی

در این بخش تغییرات زمانی میدان سرعت و فشار سیال در طول یک دوره زمان تناوب در ادامه بررسی می‌شود. ابتدا، برای بررسی همزمان تأثیر زمان و ارتفاع بر تغییرات سرعت و فشار، در یک دوره زمانی، تغییرات کمیت‌ها، علاوه بر کف، در سه ارتفاع ۰/۲، ۰/۶ و ۱/۸ میکرون از مرز پایینی سیال در شکل (۵) ترسیم شده است. واحد مؤلفه‌های سرعت (محور سمت چپ) بر حسب متر بر ثانیه و واحد تغییرات فشار (محور سمت راست) بر حسب پاسکال، است.

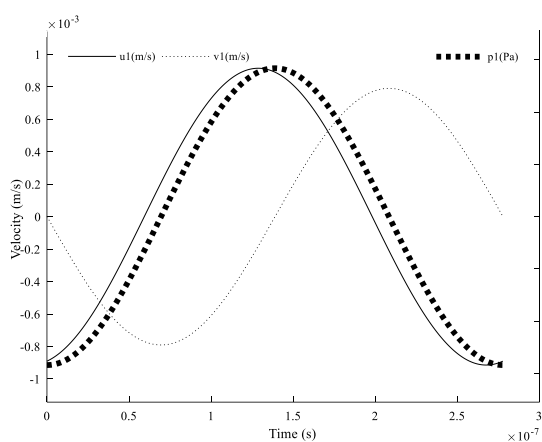
با توجه به شکل (۵)، با افزایش ارتفاع از مرز تحریک شده، به دلیل به وجود میرایی در جهت عمود بر مرز، میزان حداکثر دامنه‌ی تغییر متغیرها کمتر می‌شود. در ارتفاع‌های ترسیم شده، میزان تغییر حداکثر دامنه‌ی مؤلفه‌ی افقی از دو کمیت دیگر بیشتر است. علاوه بر حداکثر دامنه‌ی تغییرات، میزان اختلاف فاز بین کمیت‌ها هم با یکدیگر در حال تغییر است. البته این اختلاف فاز بین فشار و هر کدام از مؤلفه‌ها و همچنین دو مؤلفه با یکدیگر متفاوت است. به این مفهوم که با توجه به شکل (۵-الف)، اختلاف فاز فشار نسبت به مؤلفه افقی، روی مرز ۱۸۰- درجه، اختلاف فاز فشار نسبت به مؤلفه عمودی ۹۰- درجه و اختلاف فاز بین مؤلفه عمودی نسبت به افقی، ۹۰- درجه است (دلیل منفی بودن، نسبی بودن تعریف اختلاف فاز است).



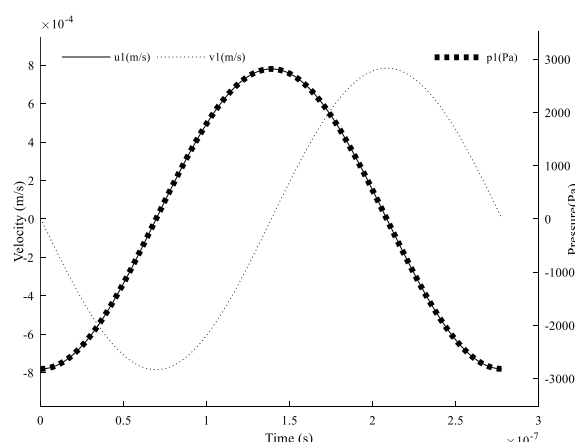
شکل ۵-ب - ۰/۲ میکرون فاصله از کف



شکل ۵-الف - روی مرز پایینی



شکل ۵-د - ۱/۸ میکرون فاصله از کف

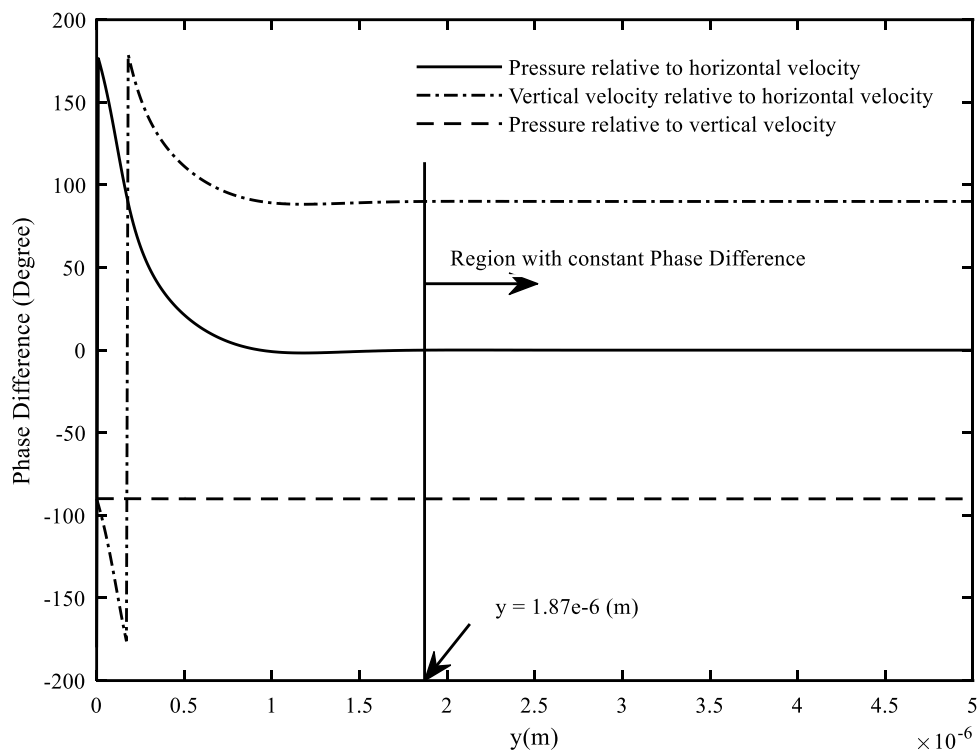


شکل ۵-ج - ۰/۶ میکرون فاصله از کف

شکل ۵- تغییرات زمانی مؤلفه‌های سرعت و فشار در فواصل عمودی مختلف از مرز تحریک شده

اما با مشاهده شکل‌های (۵-ب)، (۵-ج) و (۵-د)، می‌توان دریافت که با فاصله گرفتن از مرز تحریک و حرکت در عمق سیال، اختلاف فاز بین فشار و مؤلفه‌ی افقی سرعت ذره‌ها دچار تغییر شده و از یک ارتفاعی به بعد، تغییرات دو منحنی مؤلفه افقی سرعت ذره‌ها و فشار در طول زمان، بر یکدیگر منطبق می‌شوند. برای بررسی بهتر موضوع، اختلاف فاز در طول ارتفاع از کف سیال در شکل (۶) ترسیم شده است.

برای استخراج مقدار اختلاف فاز از روی نمودار زمانی، ابتدا تبدیل فوریه سریع هر کمیت در طول زمان به دست آمده است. سپس تابع همبستگی متقابل بین دو کمیت که تبدیل فوریه آن‌ها در مرحله‌ی قبل به دست آمده، استخراج می‌شود. با توجه به تعریف تابع همبستگی مختلط [۲۳]، زاویه فاز این تابع، بیان‌گر اختلاف فاز بین دو کمیت می‌باشد. بر اساس شیوه بیان شده، کدی در نرم‌افزار متلب نوشته شد و اختلاف فاز بین کمیت‌ها به صورت شکل (۶) در طول ارتفاع از کف سیال ترسیم شده است.

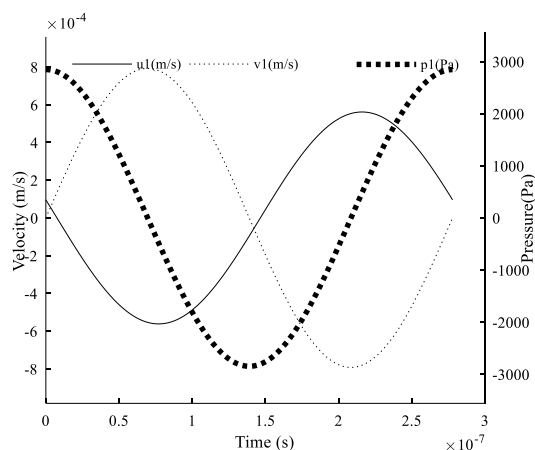


شکل ۶- تغییرات اختلاف فاز نسبی متغیرها در راستای عمود بر سطح تحریک شده

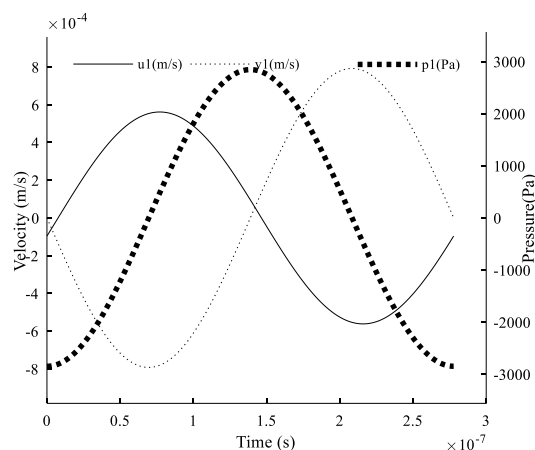
در نمودار شکل (۶)، محور عمودی اختلاف فاز بر حسب درجه و محور افقی فاصله از کف سیال را نشان می‌دهد. اختلاف فاز فشار نسبت به مؤلفه افقی با خط ممتد، اختلاف فاز فشار نسبت به مؤلفه عمودی با خط-چین و اختلاف فاز مؤلفه عمودی سرعت نسبت به مؤلفه افقی با نقطه-خط در شکل (۶) ارائه شده است. با توجه به شکل (۶)، اختلاف فاز بین فشار نسبت به مؤلفه عمودی سرعت در تمام ارتفاعها ثابت و برابر با مقدار 90° - درجه است. اما ثابت بودن اختلاف فاز برای دو حالت دیگر، در ناحیه‌ی خاص اتفاق می‌افتد.

این ناحیه خاص، از خط عمودی که در شکل (۶) نشان داده شده است، شروع می‌شود. خط عمودی در شکل (۶) ارتفاعی است که از آن به بعد، میزان تغییرات اختلاف فاز نسبی برای هر سه حالت صفر می‌شود. این ارتفاع با توجه به شکل (۶) در این مسأله، $1/87$ میکرون است. اما مقدار عددی اختلاف فاز در این ناحیه برای سه حالت متفاوت است. با توجه به نمودار شکل (۶)، در ناحیه با اختلاف فاز ثابت، اختلاف فاز بین فشار و مؤلفه‌ی افقی سرعت صفر و اختلاف فاز بین دو مؤلفه سرعت 90° درجه است.

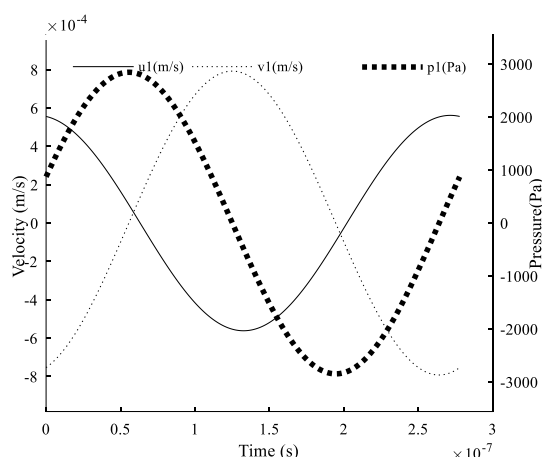
در پایان این بخش، تغییرات زمانی مؤلفه‌های عمودی و افقی سرعت و فشار سیال در چهار نقطه از طول افقی سیال در ارتفاع دلخواه $0/2$ میکرون از کف در شکل (۷) ترسیم شده است. لازم به ذکر است که واحدهای عددی روی نمودار با شکل (۵) یکسان است. توجه شود چهار نقطه طوری انتخاب شده است که چهار نمودار در یک طول موج ترسیم شده و پروفیل‌ها از این فاصله به بعد تکرار می‌شود. نکته دیگری که در مورد این شکل وجود دارد این است که حداکثر دامنه‌ی کمیت‌ها با تغییر فاصله در جهت افقی ثابت است.



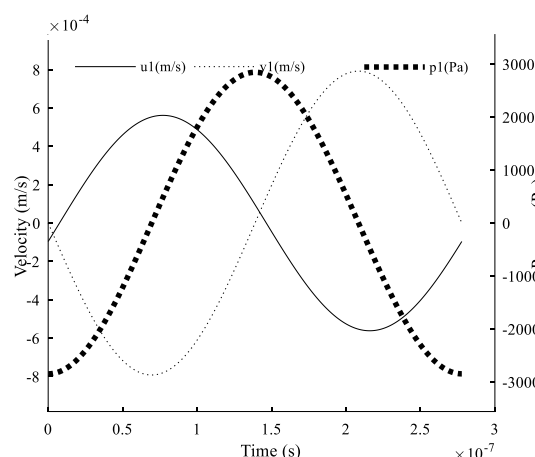
شکل ۷-ب- در فاصله افقی ۰/۵ میلی‌متر از مبدأ



شکل ۷-الف- در فاصله افقی صفر از مبدأ



شکل ۷-د- در فاصله افقی یک میلی‌متر از مبدأ

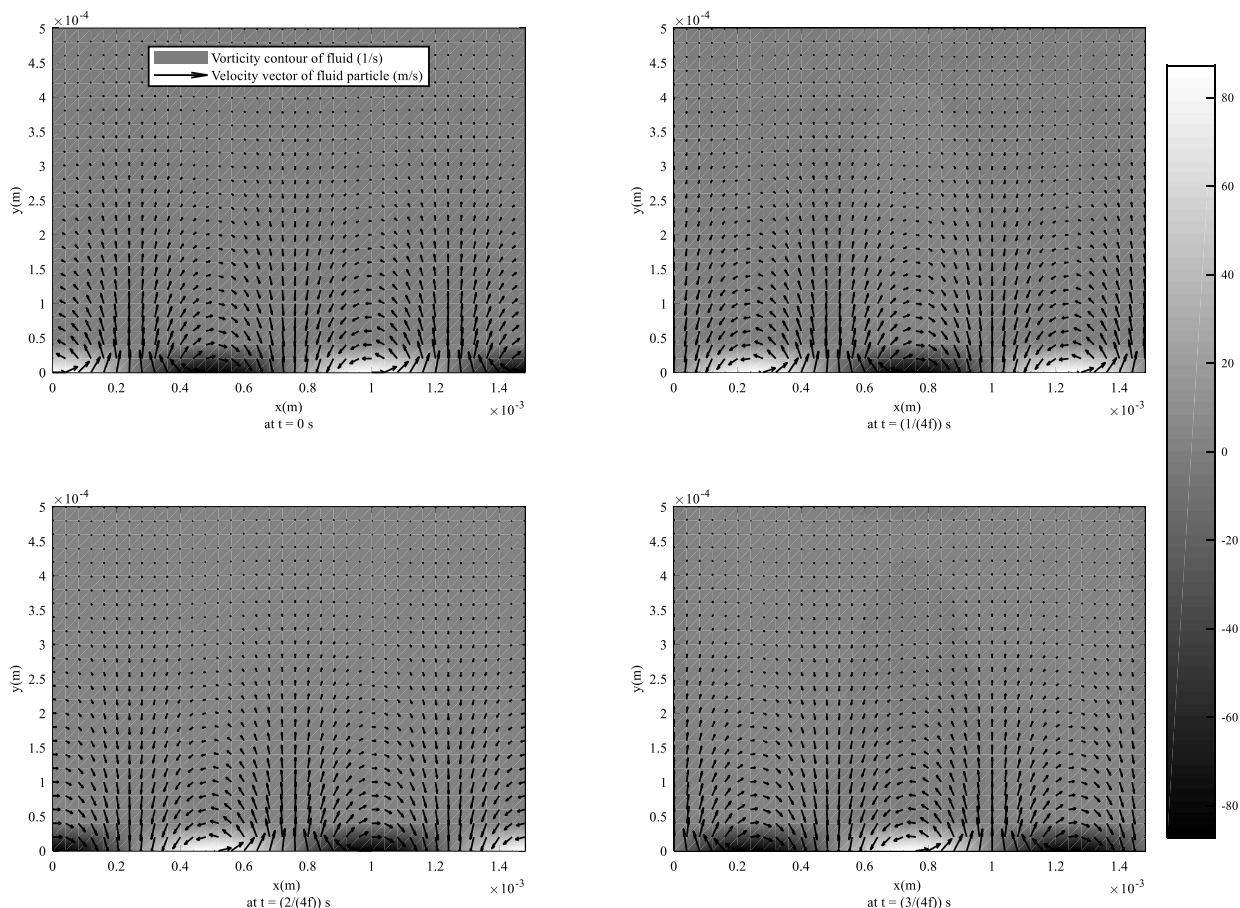


شکل ۷-ج- در فاصله افقی ۰/۷ میلی‌متر از مبدأ

شکل ۷- تغییرات زمانی مؤلفه‌های سرعت و فشار در فواصل افقی در ارتفاع دلخواه ۰/۲ میکرون از کف

با توجه به شکل (۴) و (۷)، تغییرات زمانی و مکانی مؤلفه‌های سرعت عمودی و افقی و فشار در فواصل افقی یکسان و از نوع سینوسی و بدون میرایی هستند. دلیل این موضوع هم انتخاب موج با دامنه‌ی نامیرا در جهت افقی است. به این تعبیر که با توجه به شرط مرزی (۱۲) و (۱۳)، از ابتدا حرکت ذره‌های داخل سیال و فشار حاکم بر آنها به صورت $u_1(x, y, t) = U(y)e^{i(kx-\omega t)}$ ، $v_1(x, y, t) = iV(y)e^{i(kx-\omega t)}$ و $p_1(x, y, t) = P(y)e^{i(kx-\omega t)}$ فرض و در معادله‌ها لحاظ شدند.

در این جا فرض بر این است که عدد موج و فرکانس هر دو اعداد حقیقی هستند. از این رو پس از جاگذاری در معادله‌ها، از داخل آرگومان خارج نمی‌شوند و در نتیجه تغییرات دامنه، تنها وابسته به y می‌شود و به گونه‌ای تغییرات در جهت افقی مطابق با تحریک مرز سیال و نامیرا است.



شکل ۸- توزیع دو بعدی بردارهای برآیند مؤلفه‌های سرعت و کانتور گردابه سیال در لحظات مختلف با حل تحلیلی

۳-۴- توزیع بردارهای برآیند مؤلفه‌های سرعت ذره‌ها در محیط سیال

در شکل (۸)، توزیع لحظه‌ای بردار برآیند مؤلفه‌های سرعت در طول و ضخامت سیال، در زمان‌های مختلف ترسیم شده است. هر بردار نشان داده شده، بردار برآیند دو مؤلفه سرعت در هر نقطه از سیال بر حسب متر بر ثانیه می‌باشد. همچنین در شکل (۸)، چگونگی توزیع دو بعدی کانتور گردابه در محیط سیال بر حسب معکوس زمان، در پس‌زمینه با مقدار طیف رنگی واقع در سمت راست شکل (۸)، ارائه شده است.

لازم به ذکر است که مقادیر گردابه موجود با استفاده از تعریف [۲]، به وسیله‌ی میدان سرعت (۳۰) و (۳۱) به دست آمده‌اند. زمان‌های رسم شده در شکل (۸)، 0.27 میکروثانیه با یکدیگر اختلاف دارند. شکل (۸)، تصویری از چرخش بردارهای سرعت ذره‌های سیال در ضخامت و طول سیال را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۸)، با افزایش فاصله از سطح تحریک، بردار برآیند سرعت ذره‌ها در فضا میرا می‌شود. با مقایسه حرکت ایجاد شده در شکل (۸) با مسأله استوکس نوع دوم، می‌توان دریافت که تحریک همزمان در دو جهت موازی و عمود بر سطح، باعث حرکت چرخشی در سیال می‌شود در حالی که در استوکس نوع دوم تنها لایه‌های سیال به صورت موازی حرکت کرده و چرخشی ایجاد نمی‌شود.

همچنین با توجه به شکل (۸)، جهت چرخش بردار برآیند سرعت ذره‌ها در فضا تغییر می‌کند. به طور مثال در لحظه‌ی صفر، با حرکت از چپ به راست روی سطح، چرخش بردار برآیند سرعت ذره‌ها خلاف ساعتگرد، اما به طور مثال در ارتفاع ۰/۱ میلی‌متر از مرز تحریک، با حرکت از چپ به راست چرخش بردار برآیند سرعت ذره‌ها، ساعتگرد است. در مسأله حاضر این ارتفاع با توجه به شکل (۸)، برابر با ۰/۱۸ میکرومتر است. با مقایسه شکل (۲)، (۳) و (۸) می‌توان بیان کرد که ارتفاع تغییر جهت چرخش بردار برآیند مؤلفه‌های سرعت، ارتفاعی است که مؤلفه افقی سرعت صفر می‌شود. با توجه به شکل (۲) و (۳)، مؤلفه عمودی سرعت همواره منفی است اما مؤلفه افقی سرعت در ارتفاعی تغییر علامت می‌دهد. صحت این موضوع با حل معادله (۴۰) که از صفر قرار دادن رابطه‌ی (۳۱) می‌باشد، بررسی شده است. با حل عددی رابطه‌ی (۴۰) برای شکل (۸)، محل تغییر علامت چرخش بردار برآیند سرعت، ۱/۸۷ میکرون به دست می‌آید.

$$\Gamma = (k - a)^{-1} [\ln\{- (V_0 + U_0)kb \sin(\theta) + [k^2 U_0 - V_0 B^2 + (V_0 - U_0)ak] \cos(\theta)\}]$$

$$f(y) = - [k a - B^2] (V_0 + U_0) \cos(\theta - by) - k b (V_0 + U_0) \sin(\theta - by)$$

$$y - (k - a)^{(-1)} \ln(f(y)) = \Gamma \quad (40)$$

با توجه به شکل (۸)، کانتور گردابه سیال در نزدیکی سطح تشکیل می‌شود. همچنین محل ارتفاع تغییر جهت چرخش سرعت، با مرکز گردابه یکسان است. این کانتور گردابه در طول زمان بر روی سطح حرکت می‌کند اما بیشترین مقدار گردابه در نزدیکی سطح تشکیل شده و با افزایش ارتفاع از مرز تحریک شده، میرا می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش از رابطه‌های اصلی ناویر-استوکس و معادله پیوستگی برای جریان دو بعدی، ناپایا شروع کرده و سپس با استفاده از سه فرض الف) سرعت ذره‌های سیال و فشار سیال دارای دو بخش نوسانی و متوسط است، ب) بخش متوسط سرعت و فشار، همان حل پایه‌ای معادله‌های ناویر-استوکس حاکم بر صفحه تخت می‌باشد و ج) کوچک بودن اندازه دامنه‌ی بخش نوسانی، معادله‌های خطی بخش نوسانی مؤلفه‌های سرعت در دو جهت افقی و عمودی استخراج شد. در ادامه با توجه به ساکن بودن سیال اولیه و این که سیال تراکم‌ناپذیر است، معادله‌های حاکم بر سیستم ارائه شد. رابطه‌های تحلیلی سرعت و فشار بر حسب زمان و مکان برای سیال لزج تراکم‌ناپذیر با در نظر گرفتن فرض هارمونیک بودن حرکت ذره‌ها و فشار سیال، ارائه شد. با استفاده از این رابطه‌های تحلیلی که ناشی از تحریک همزمان در دو جهت افقی و عمودی مرز پایینی سیال می‌باشد، تغییرات میدان سرعت و فشار در طول زمان و فضا ارائه شد.

تحلیل رفتار سیال با استفاده از این رابطه‌ها نشان می‌دهد که دامنه‌ی نوسان‌های سرعت و فشار در جهت عمود بر سطح مستهلک و در جهت افقی نامیرا است. این میرایی در جهت عمود بر سطح در دو ارتفاع اتفاق می‌افتد. میرایی سریع در نزدیکی سطح و میرایی ناشی از تغییرات کند، در فاصله دور از سطح تا ارتفاع یک

برابر طول موج تحریک مرزی، اتفاق می‌افتد. تغییر دامنه‌ی مؤلفه افقی سرعت در نزدیکی سطح و میزان نفوذ آن در سیال، نسبت به مؤلفه‌ی عمودی سرعت بیشتر است. اختلاف فاز بین کمیت‌های فشار و سرعت با یکدیگر و تغییر این پارامتر با ارتفاع با استفاده از تابع همبستگی متقابل، در این پژوهش بررسی شد. با توجه به نتایج نشان داد شد که تا ارتفاعی که میرایی سریع وجود دارد، اختلاف فاز بین کمیت‌ها متغیر است اما از این ارتفاع به بعد اختلاف فاز بین کمیت‌ها ثابت است. نشان داده شد که فرض ثابت بودن فشار در عرض لایه مرزی و حتی ناچیز بودن آن در حالتی که فقط جابجایی افقی از نوع ارتعاش وجود داشته باشد، فرض معقولی است. اما در صورتی که تحریک مرز از نوع عمودی باشد، در نظر گرفتن فشار ثابت در راستای عمود بر سطح، صحیح نیست. دلیل تشکیل چنین فشاری، کوپل بودن سرعت عمودی و افقی در معادله‌ها می‌باشد که در این پژوهش از آن صرف نظر نشده است. همچنین تغییر فضایی در مرز تحریک شده باعث تولید موج فشاری می‌شود. به تعبیری رابطه‌ی (۳۲) که در عمل بیان‌گر موج‌های فشاری در سیال لزج تراکم‌ناپذیر می‌باشد، ناشی از تغییرات مکانی موج مرزی به همراه کوپل بودن مؤلفه‌های سرعت است.

از نظر عملی میدان سرعت (۳۰) و (۳۱)، نوعی موج پیشرونده میرا است که از روی سطح تحریک شده و با فاصله گرفتن از سطح این موج میرا می‌شود. این حرکت چرخشی میراشده ناشی از تحریک زمانی-مکانی همزمان در دو جهت عمودی و افقی مرز است. ارتفاع تغییر جهت چرخش بردارهای سرعت در سیال که همان مرکز گردابه سیال است، به صورت تحلیلی ارائه شد. نشان داده شد که در نتیجه وجود دو حرکت افقی و عمودی، در نزدیکی سطح گردابه‌های تشکیل می‌شوند که این ناحیه بین مرز سیال و سیال با سرعت کمتر را جدا می‌کند، به تعبیری مانند یک بالشتک جداکننده عمل کند. یکی از کاربردهای عملیاتی نتایج حاصل از این پژوهش، می‌تواند بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر میدان سرعت و فشار برای ساخت دستگاه‌های بخارساز فراصوت و میکروسکوپ‌های آکوستیکی یا بررسی شرایط لازم برای جدایش سیال با استفاده از موج-های متحرک، قبل از اجرای عملیات ساخت باشد. در ضمن کاربرد نظری رابطه‌های حاضر این است که این رابطه‌ها می‌تواند پایه و اساس برای شرایطی باشد که سیال در حال حرکت است.

مراجع

- [1] Rose, J. L., "Ultrasonic Guided Waves in Solid Media", 1st Edition., Cambridge University Press, the United States of America, (2014).
- [2] Currie, I. G., "Fundamental Mechanics of Fluids", 4th Edition., CRC Press, (2013).
- [3] Bogard, D. G., Ball, K. S., and Wassen, E., "Drag Reduction for Turbulent Boundary Layer Flows using an Oscillating Wall", Report. No. TTCRL 00-2, Mechanical Engineering Department, The University of Texas at Austin, October (2000).
- [4] Quadrio, M., And Ricco, P., "Critical Assessment of Turbulent Drag Reduction through Spanwise Wall Oscillations", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 521, pp. 251-271, (2004).

- [5] Viotti, C., Quadrio, M., and Luchini, P., "Streamwise Oscillation of Spanwise Velocity at the Wall of a Channel for Turbulent Drag Reduction", *Physics of Fluids*, Vol. 21, No. 11, pp. 115101-115109, (2009).
- [6] Skote, M., "Turbulent Boundary Layer Flow Subject to Streamwise Oscillation of Spanwise Wall-velocity", *Physics of Fluids*, Vol. 23, No. 8, pp. 081701-081704, (2011).
- [7] Cimarelli, A., Frohnafel, B., Hasegawa, Y., De Angelis, E., and Quadrio, M., "Non-sinusoidal Wall Oscillation for Drag Reduction", *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)* Vol. 12, No. 1, pp. 565-566, (2012).
- [8] Shen, L., Zhang, X., Yue, D. K. P., and Triantafyllou, M. S., "Turbulent Flow over a Flexible Wall Undergoing a Streamwise Travelling Wave Motion", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 484, pp. 197-221, (2003).
- [9] Quadrio, M., Ricco, P., and Viotti, C., "Streamwise-travelling Waves of Spanwise Wall Velocity for Turbulent Drag Reduction", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 627, pp. 161-178, (2009).
- [10] Quadrio, M., and Ricco, P., "The Laminar Generalized Stokes Layer and Turbulent Drag Reduction", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 667, pp. 135-157, (2011).
- [11] Ahmad, H., Baig, M. F., and Fuaad, P. A., "Numerical Investigation of Turbulent-Drag Reduction Induced by Active Control of Streamwise Travelling Waves of Wall-Normal Velocity", *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, Vol. 49, pp. 250-263, (2015).
- [12] Tian, F. B., Lu, X. Y., and Luo, H., "Propulsive Performance of a Body with a Traveling-Wave Surface", *Physical Review E*, Vol. 86, No. 1, pp. 016304, (2012).
- [13] Ricco, P., and Hicks, P. D., "Streamwise-travelling Viscous Waves in Channel Flows", *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 111, No. 1, pp. 23-49, (2018).
- [14] Martin, B. A., and Hager, H. E., "Flow Profile above a Quartz Crystal Vibrating in Liquid", *Journal of Applied Physics*, Vol. 65, No. 7, pp. 2627-2629, (1989).
- [15] Qi, Q., "Attenuated Leaky Rayleigh Waves", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 95, No. 6, pp. 3222-3231, (1994).
- [16] Eysden, C. A. V., and Sader, J. E., "Small Amplitude Oscillations of a Flexible Thin Blade in a Viscous Fluid: Exact Analytical Solution", *Physics of Fluids*, Vol. 18, No. 12, pp. 123102, (2006).
- [17] Xu, Y. Q., Tian, F. B., Tang, X. Y., and Peng, Y. H., "A Mathematical Model for Micro-and Nano-swimmers", *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, Vol. 13, No. 6, pp. 1340013, (2013).
- [18] Gusev, V. A., and Simonova, P. A., "Effect of Shear Components of the Acoustic Field in the Viscous Liquid on the Structure of the Stoneley Wave at the Interface between the Liquid and Elastic Half-spaces", *Physics of Wave Phenomena*, Vol. 23, No. 4, pp. 268-272, (2015).

- [19] Tomohisa Kojima, K. I., Kosuke Takahashi, Farid Triawan and Kikuo Kishimoto, "Dynamics of Wave Propagation Across Solid–fluid Movable Interface in Fluid–structure Interaction", Journal of Pressure Vessel Technology Vol. 139, No. 3, pp. 031308, (2017).
- [20] Takiy, A. E., Granja, S. C. G., Higuti, R. T., Kitano, C., Elvira, L., Martinez-Graullera, O. F., and Espinosa, F. M. D., "Theoretical Analysis and Experimental Validation of the Scholte Wave Propagation in Immersed Plates for the Characterization of Viscous Fluids", Published, Proc. 2013 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS), pp. 1614-1617, (2013).
- [21] Nayfeh, A. H., and Nagy, P. B., "Excess Attenuation of Leaky Lamb Waves Due to Viscous Fluid Loading", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 101, No. 5, pp. 2649-2658, (1997).
- [22] Wu, J., and Zhu, Z., "An Alternative Approach for Solving Attenuated Leaky Rayleigh Waves", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 97, No. 5, pp. 3191-3193, (1995).
- [23] Randall, R. B., "Vibration-Based Condition Monitoring", 1st Edition., John Wiley and Sons, (2011).

فهرست نمادهای انگلیسی

A_2, A_4	: ضرایب دلخواه سرعت ناشی از حل معادله دیفرانسیل سرعت (m/s)
a	: پارامتر کمکی، تعریف شده به وسیلهی رابطهی (۳۳)
B	: دامنهی ریشه دوم عدد مختلط α_f^2 ، تعریف شده در رابطهی (۲۱)
b	: پارامتر کمکی، تعریف شده به وسیلهی رابطهی (۳۳)
i	: یکه موهومی (برابر با $\sqrt{-1}$)
k	: عدد موج، (m^{-1})
P	: دامنهی بخش نوسانی فشار سیال، (Pa)
p	: فشار سیال، (Pa)
\bar{p}	: بخش متوسط فشار سیال، (Pa)
p_1	: بخش نوسانی فشار سیال، (Pa)
p_{1-Re}	: بخش حقیقی بخش نوسانی فشار سیال، (Pa)
t	: زمان، (s)
U_0	: دامنهی بخش نوسانی مؤلفه سرعت در جهت x ، (m/s)
u	: مؤلفه سرعت در جهت مماس بر سطح پایینی سیال (x)، (m/s)
u_1	: بخش نوسانی مؤلفه سرعت در جهت x ، (m/s)
u_{1-Re}	: قسمت حقیقی بخش نوسانی مؤلفه سرعت در جهت x ، (m/s)

\bar{u}	: بخش متوسط مؤلفه سرعت در جهت x , (m/s)
V_0	: دامنه‌ی بخش نوسانی مؤلفه سرعت در جهت y , (m/s)
v	: مؤلفه سرعت در جهت عمود بر سطح پایینی سیال (y), (m/s)
v_1	: بخش نوسانی مؤلفه سرعت در جهت y , (m/s)
v_{1-Re}	: قسمت حقیقی بخش نوسانی مؤلفه سرعت در جهت y , (m/s)
\bar{v}	: بخش متوسط مؤلفه سرعت در جهت y , (m/s)
x	: مختصات مماس بر سطح پایینی سیال، (m)
y	: مختصات عمود بر سطح پایینی سیال، (m)

نمادهای یونانی

α_f	: پارامتر کمکی، تعریف شده به وسیله‌ی رابطه‌ی (۱۷)
β_f	: پارامتر کمکی، تعریف شده به وسیله‌ی رابطه‌ی (۱۹)
γ_f	: پارامتر کمکی، تعریف شده به وسیله‌ی رابطه‌ی (۱۹)
θ	: پارامتر کمکی، تعریف شده به وسیله‌ی رابطه‌ی (۳۳)
θ'	: آرگومان ریشه دوم عدد مختلط α_f^2 ، تعریف شده در رابطه‌ی (۲۱)
λ	: طول موج، (m)
μ_f	: لزجت دینامیکی سیال، ($pa.s$)
ν_f	: لزجت سینماتیکی سیال، (m^2/s)
ρ	: چگالی سیال، (kg/m^3)
φ	: اختلاف فاز (rad)
ω	: فرکانس زاویه‌ای (rad/s)

Abstract

In the present study, to extend the Stokes' second problem, the bottom edge of viscous incompressible semi-space resting fluid is excited in two dimension, simultaneously. This two-dimensional excitation which is the effect of velocity of two-dimensional travelling wave, is boundary condition for the two-dimensional linear Navier-Stokes equations. The time-space exact solution for fluid velocity and pressure show that the amplitude of oscillating velocity has fast damping in space till 1.87 micron from excited surface. After this height, the amplitude of oscillating quantities has a slowly damping. In the first region (in fast damping region), phase difference between pressure and velocity is changing, but after that there is a region with constant phase difference. The space variation in velocity components of surface wave, together with the coupling of velocity components in main equations, produces pressure wave. It has been found that kinematic effect of vertical and horizontal harmonic motion cause damped rotational motion in fluid.