

## تحلیل کمانش میکروتیر دو پیونده براساس مدل ردی - لوینسون با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی

هادی محمدی هویه<sup>۱</sup>

استاد

علیرضا نداف اسکویی<sup>۲</sup>

دانشیار

در این مقاله، کمانش خطی یک میکروتیر دو پیونده بر اساس مدل ردی - لوینسون و تئوری گرادپان کرنشی اصلاح شده بررسی شده است. این سیستم شامل یک میکروتیر ایزوتروپ و یک میکروتیر کامپوزیتی با خاصیت الاستیک، الکتریکی و مغناطیسی می‌باشد. این تیرها توسط فنرهای الاستیک که با دو مدل وینکلر و پاسترناک شبیه سازی شده‌اند به یکدیگر متصل گردیده‌اند. برای اطمینان از صحت نتایج بدست آمده، نتایج کار حاضر با نتایج محققان دیگر مقایسه و مشاهده می‌گردد که تطابق بسیار خوبی بین نتایج وجود دارد. با افزایش ثوابت وینکلر و پاسترناک بار کمانش در راستای نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول، افزایش می‌یابد. همچنین افزودن میکروتیر کامپوزیتی با خواص الاستیک، الکتریکی و مغناطیسی در کنار میکروتیر همگن، کاهش بار کمانش را به همراه دارد.

واژه های راهنما: کمانش خطی، میکروتیر دو پیونده، تئوری گرادپان کرنشی اصلاح شده

### ۱- مقدمه

میکروتیرها به شکل گسترده‌ای در سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی کاربرد دارند. آنها به دلیل خصوصیات مکانیکی و الکتریکی جزء میکرو ساختارهای هوشمند محسوب می‌شوند. امروزه تحقیق در زمینه‌ی تحلیل ارتعاشات، کمانش و خمش نانو/ میکرو تیرها از اهمیت فراوانی برخوردار است. به دلیل اینکه سازه در ابعاد خیلی کوچک بررسی می‌شود و از ابعاد ماکرو به میکرو کاهش پیدا می‌کند نظریه‌های کلاسیک در این میکروسازه‌ها صدق نمی‌کنند. به همین دلیل برای بررسی و تحلیل دقیق تر این نوع سازه‌ها از تئوری‌های غیر کلاسیک استفاده می‌کنند. نظریه‌ی تنش کوپل در دهه‌ی (۶۰) میلادی توسط میندلین، توپلن ارائه شد [۱]. در این نظریه علاوه بر تنش‌های کلاسیک، تنش‌های گشتاوری نیز به عنوان تنش‌های مرتبه بالاتر در نظر گرفته شده‌اند.

<sup>۱</sup> مری مدعو، دانشگاه ایوانکی، گروه مهندسی مکانیک h mohammadihooyeh@eyc.ac.ir

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، گروه مهندسی مکانیک anadaf@ihu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۶/۳۰، تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۵/۱۱

یانگ [۲] با ارائه‌ی یک معادله‌ی غیر کلاسیک علاوه بر معادلات تعادل معمول، فرم ساده تری از این نظریه را ارائه کرد که به نظریه‌ی تنش کوپل اصلاح شده معروف است. نظریه‌ی گرادیان کرنش نیز در سال (۱۹۶۵) توسط میندلین [۳] به عنوان یک نظریه‌ی غیر کلاسیک دیگر ارائه گردید. در این نظریه علاوه بر کرنش، اثر مشتق اول و دوم کرنش نیز اضافه شده است. بعدها لم و همکارانش [۴] با در نظر گرفتن فقط مشتق اول کرنش و در نظر گرفتن معادله گشتاور کوپل ها فرم ساده تری از این نظریه را ارائه کردند که این نظریه به نظریه گرادیان کرنش اصلاح شده معروف شد. شیمشک و همکاران در تحقیقی به بررسی خمش استاتیکی میکروتیر هدفمند تیموشنکو با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداختند [۵]. آنها معادلات تعادل و شرایط مرزی مربوطه را به کمک اصل حداقل انرژی پتانسیل استخراج، و با استفاده از روش ناویر حل نمودند. نتایج آنها نشان می‌دهد که مقادیر تغییر شکل عرضی ناشی از خمش استاتیکی میکروتیر در تئوری کلاسیک بیشتر از تئوری تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد. تحلیل ارتعاشات و خمش میکرو ورق چند لایه با خواص ترمو، الاستیک، الکتریکی و مغناطیسی بر روی بستر ویسکوالاستیک توسط عارفی و همکاران بررسی شد [۶]. آنها با استفاده از تئوری گرادیان کرنش و اصل همیلتون معادلات حرکت را استخراج کردند.

نتایج آن‌ها نشان می‌دهد با افزایش پارامترهای مربوط به مقیاس طول و بستر ویسکوالاستیک مقادیر فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. انصاری و سهمانی به بررسی رفتارهای خمش و کمانش نانوتیرها با در نظر گرفتن اثر تنش سطحی پرداختند [۷]. بدین منظور، تئوری الاستیسیته گرتین-مرداک را با تئوری‌های گوناگون تیر ترکیب کرده و رابطه غیر کلاسیکی برای بار بحرانی بدست آوردند. در تحقیق دیگری انصاری و همکارانش بر اساس کلی‌ترین تئوری گرادیان کرنشی، رفتار کمانش، ارتعاشات و خمش میکروتیر هدفمند را بررسی نمودند [۸]. آنها با استفاده از روش کلی تربیع دیفرانسیلی معادلات تعادل حاصله را حل نمودند. آنها نشان دادند که بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی در تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده بیشترین و در تئوری کلاسیک کمترین مقدار را دارد. آل طاه و همکاران تحلیل استاتیکی کمانش و پایداری نانوتیرهای هدفمند را به کمک روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند [۹]. نتایج آنها نشان می‌دهد پارامتر غیرمحملی ارینگن تاثیر چندانی بر روی جابجایی و بار کمانش بحرانی تیر ندارد.

محمدی مهر و محمودیان نجف آبادی به تحلیل خمش و ارتعاش آزاد الکتروترمو مکانیکی تیر تیموشنکو تقویت شده با نانو لوله‌ی نیتريد - بور واقع بر بستر الاستیک بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداختند [۱۰]. آنها اثر توزیع مواد مختلف، تغییرات دما، ضریب لاغری، اثر مقیاس کوچک، ضرایب وینکلر و پاسترناک، ضریب پیژوالکتریک، پارامتر مقیاس طول ماده و ضریب تابع توانی بر روی فرکانس تیر را بررسی نمودند. عارفی و زنکور به بررسی خمش میکروتیر ساندویچی با خواص الاستیک و الکتریکی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی سینوسی مرتبه بالا و گرادیان کرنش پرداختند [۱۱]. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد با افزایش ضرائب بستر پاسترناک جابه جایی عرضی، چرخش، چرخش‌های مرتبه بالای میکروتیر کاهش می‌یابد. تحلیل کمانش، ارتعاشات آزاد و خمش نانوتیرها به کمک تئوری غیرموضعی ارینگن توسط تالی مطرح گردید [۱۲]. نتایج وی با تئوری‌های مختلف تیر مقایسه و اعتبارسنجی گردید. او نشان داد که گنجاندن پارامتر غیرمحملی افزایش جابجایی و کاهش بار کمانش را در پی دارد.

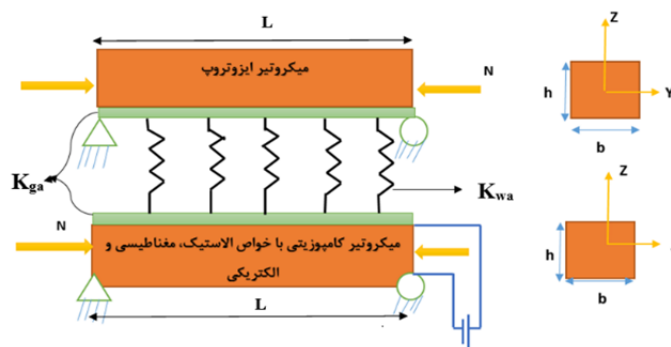
در تحقیق دیگری نیز لی و فنگ براساس تئوری گرادیان کرنشی تحلیل ارتعاشات و خمش میکروتیر پیزوالکتریک را بررسی نمودند [۱۳]. سیمسک و ردی با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده کمانش میکروتیر هدفمند واقع در محیط الاستیک را به کمک تئوری مرتبه بالای یکپارچه ارائه نمودند [۱۴]. معادلات تعادل در تحقیق آنها از اصل حداقل انرژی بدست آمده و به کمک روش ناویر در شرایط مرزی دو سر ساده حل می‌گردد. محمد آبادی و دانش مهر در پژوهشی به تحلیل کمانش میکروتیرها براساس تنش کوپل اصلاح شده و تئوری مرتبه بالا در شرایط مرزی مختلف پرداختند [۱۵]. آنها در این کار از روش عمومی تربیع دیفرانسیلی برای حل معادلات تعادل استفاده نمودند و تاثیر ضخامت میکروتیر، پارامتر مقیاس طول و ضریب پواسون را بر روی بار کمانش بحرانی بررسی نمودند. آگوز و سیوالک با استفاده از مدل مثلثاتی جدیدی به کمانش میکروتیر با استفاده از تئوری تنش کوپل پرداختند [۱۶]. نتایج آنها نشان می‌دهد که اثرات اندازه هنگامی که ضخامت تیر به مقدار پارامتر مقیاس طول نزدیک می‌گردد، اهمیت می‌یابد.

ابراهیمی و سالاری کمانش حرارتی و ارتعاشات نانوتیر هدفمند واقع در محیط حرارتی را به کمک روش تحلیلی ناویر بررسی کردند [۱۷]. آنها کلیه خواص نانومواد هدفمند را به صورت متغیر با دما در نظر گرفتند. پارامتر مقیاس کوچک به کمک تئوری غیرمحملی اربینگن وارد مسئله گردید و تاثیر آن به همراه ضخامت نانوتیر بر روی دمای بحرانی و فرکانس طبیعی بررسی گردید. عارفی و همکاران ارتعاشات آزاد میکرو ورق با هسته ولایه های پیزو مگنتیک را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده مورد بررسی قرار دادند [۱۸].

آنها برای حل معادلات حرکت از روش تحلیلی ناویر استفاده کردند و نشان دادند فرکانس‌های طبیعی با افزایش پتانسیل مغناطیسی افزایش یافته در حالی که با افزایش پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابند. محمدآبادی و همکاران در تحقیق دیگری کمانش حرارتی میکروتیرهای کامپوزیتی لایه‌ای را به کمک تئوری تنش کوپل اصلاح شده بررسی نمودند [۱۹]. آنها معادلات تعادل را با استفاده از روش عددی تربیع دیفرانسیلی و روش تحلیلی بسط سری فوریه حل نمودند و نتایج تحقیقشان را در دو روش با یکدیگر مقایسه نمودند. لای کمانش حرارتی تیر سه بعدی را با در نظر گرفتن نقص هندسی تحت توزیع دماهای مختلف مورد بررسی قرار داد [۲۰]. نتایج وی نشان داد که توزیع دما، پارامترهای هندسه، درصد حجمی الیاف، نقص هندسی و زاویه الیاف روی رفتار کمانشی تیر کامپوزیتی تاثیر می‌گذارد.

در تمامی پژوهش‌های پیشین کمانش، ارتعاشات و یا خمش میکروتیر تنها بررسی گردیده است. در این پژوهش کمانش خطی تیر دو پیونده که یکی از آنها کامپوزیتی با خواص الاستیک، مغناطیسی و الکتریکی بوده و دیگری ساده و همگن می‌باشد، بررسی می‌گردد. به دلیل در نظر گرفتن سه پارامتر مقیاس طول و اثرات مشتق اول و دوم کرنش برای تئوری گرادیان کرنش و برای رسیدن به این مهم از تئوری غیر کلاسیک گرادیان کرنشی اصلاح شده و مدل مرتبه بالای ردی-لوینسون به همراه روش تربیع دیفرانسیلی استفاده خواهد شد.

نتایج این تحقیق می‌تواند در طراحی سازه‌های هوشمند و همچنین سیستم‌های نانو/ میکرو الکترومکانیکی بکار گرفته شود.



شکل ۱- میکرو تیر دوپیونده تحت بارگذاری

## ۲- هندسه مسئله

یک میکرو تیر از جنس اپوکسی به ارتفاع  $h$  و عرض  $b$  به وسیله فنرهای برشی و عرضی (محیط الاستیک) با ثوابت بستر  $K_{ga}$  و  $K_{wa}$  به میکرو تیر کامپوزیتی با خواص الاستیک، مغناطیسی و الکتریکی به همان عرض و ارتفاع متصل گردیده است. طول هر دو میکرو تیر نیز برابر  $L$  فرض گردیده است. میکرو تیرها در معرض بار خارجی محوری قرار دارد که این بار می تواند از نوع حرارتی، الکتریکی و یا مغناطیسی باشند. شکل (۱) شمایی از هندسه مسئله را نشان می دهد.

## ۳- معادلات حاکم

### ۳-۱- میدان جابجایی برای مدل ردی - لوینسون

مدل تیر ردی- لوینسون با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی و پیچشی، توانایی تحلیل رفتار تیرهای در معرض بارهای متنوع را دارد. میدان جابجایی در این مدل به صورت زیر تعریف می گردد [۲۱-۲۳]:

$$\bar{u}_1(x, z, t) = -z \varphi(x, t) - c_1 z^3 \left( -\varphi(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\bar{u}_2(x, z, t) = 0 \quad (2)$$

$$\bar{u}_3(x, z, t) = w(x, t) \quad (3)$$

که در آن  $\bar{u}_i$  مولفه های بردار جابجایی در سه راستای  $x, y, z$  بوده و  $w$  جابجایی عرضی تیر می باشد.  $\varphi$  چرخش حول محور طولی تیر  $x$  می باشد و  $c_1$  ثابتی بوده که به صورت زیر تعریف می شود:

$$c_1 = \frac{4}{3h^2} \quad (4)$$

### ۳-۲- مولفه های غیر صفر کرنش

با داشتن میدان جابجایی مولفه های غیر صفر کرنش- جابجایی برای تیر ردی- لوینسون به صورت زیر بدست می آید:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_1 z^3 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi - 3c_1 z^2 \left( -\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \quad (۶)$$

که در این روابط و از این به بعد به دلیل اختصار نویسی جمله  $(x, t)$  از معادلات حذف خواهد شد.

### ۳-۳- انرژی پتانسیل کرنشی

تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی اصلاح شده ابتدا در سال (۲۰۰۳) توسط لام و همکارانش [۲۴] ارائه گردید. انرژی کرنشی براساس این تئوری برای میکروتیر ایزوتروپیک الاستیک خطی با در نظر گرفتن ناحیه پیوسته اشغال شده  $\Omega$  بصورت زیر تعریف می گردد [۲۷-۲۵]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (۷)$$

این رابطه برای میکروتیر با خواص الکتریکی - مغناطیسی به صورت زیر اصلاح می گردد [۲۵] و [۲۶]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij} \chi_{ij} - D_i E_i - B_i H_i) dV \quad (۸)$$

که در این رابطه  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\gamma_i$ ,  $\eta_{ijk}^{(1)}$  و  $\chi_{ij}$  به ترتیب تانسور کرنش، بردار گرادیان گسترش پذیر، تانسور گرادیان کشش انحرافی و تانسور گرادیان چرخش متقارن بوده و توسط رابطه های زیر بدست می آیند [۲۸-۲۷]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (۹)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (۱۰)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15} \delta_{ij} (\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) - \frac{1}{15} \delta_{jk} (\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) - \frac{1}{15} \delta_{ki} (\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m}) \quad (۱۱)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\kappa_{i,j} + \kappa_{j,i}) \quad \kappa_i = \frac{1}{2} (\text{curl}(u))_i \quad (۱۲)$$

که در آن  $K$  بردار چرخش بوده و  $\delta_{ij}$  بیانگر تانسور دلتای کرونیگر می باشد.  $p_i$ ،  $\tau_{ijk}^{(1)}$  و  $m_{ij}$  به ترتیب تانسور کوشی و تانسورهای مرتبه بالاتر می باشند. توسط رابطه های زیر بیان می گردد:

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (۱۳-الف)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (۱۳-ب)$$

$$m_{ij} = 2\mu l_2^2 \chi_{ij} \quad (۱۳-ج)$$

که در این روابط  $\mu$  و  $\lambda$  ثوابت لامه و  $l_0$ ،  $l_1$  و  $l_2$  نیز به ترتیب پارامترهای مقیاس طول وابسته به گرادیان گسترش پذیر، گرادیان کشش انحرافی و گرادیان چرخش می باشند.

همچنین در رابطه (۸) پارامترهای  $H_i$  و  $E_i$  به ترتیب میدان های مغناطیسی و الکتریکی بوده که بصورت زیر تعریف می گردند:

$$E_i = -\theta_i \quad (14)$$

$$H_i = -\Gamma_i \quad (15)$$

$\theta$  و  $\Gamma$  بیانگر پتانسیل‌های مغناطیسی و الکتریکی بوده که توزیع این پتانسیل‌ها در راستای ضخامت به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۹]:

$$\theta(x, z, t) = -\cos(\beta z) \phi_E(x, t) + \frac{2z V_E}{h} \quad (16)$$

$$\Gamma(x, z, t) = -\cos(\beta z) \Upsilon_H(x, t) + \frac{2z \Omega_H}{h}$$

که در آن  $\beta = \frac{\pi}{h}$  می‌باشد و  $\phi_E(x, t)$  و  $\Upsilon_H(x, t)$  تغییرات میدان الکتریکی و مغناطیسی در راستای محور  $x$  بوده که می‌بایست شرایط مرزی مغناطیسی و الکتریکی را ارضا نمایند.  $V_E$  و  $\Omega_H$  نیز به ترتیب ولتاژ الکتریکی خارجی و پارامتر مغناطیسی خارجی می‌باشد.

اگر فرض شود که میکروتیرها در شرایط تنش صفحه‌ای قرار دارند، معادلات اساسی حاکم بر مواد مگنتوالکتروالاستیک به صورت زیر حاصل می‌گردد [۲۹]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \bar{c}_{11} \varepsilon_{xx} + \bar{e}_{31} (\beta \sin(\beta z) \phi_E + \frac{2V_E}{h}) + \bar{q}_{31} (\beta \sin(\beta z) \Upsilon_H + \frac{2\Omega_H}{h}) - \bar{\beta}_1 \Delta T \\ \sigma_{xz} &= \bar{c}_{44} \gamma_{xz} - \bar{e}_{15} \cos(\beta z) \frac{\partial \phi_E}{\partial x} - \bar{q}_{15} \cos(\beta z) \frac{\partial \Upsilon_H}{\partial x} \\ D_x &= \bar{e}_{15} \gamma_{xz} + \bar{s}_{11} \cos(\beta z) \frac{\partial \phi_E}{\partial x} + \bar{d}_{11} \cos(\beta z) \frac{\partial \Upsilon_H}{\partial x} \end{aligned} \quad (17)$$

$$D_z = \bar{e}_{31} \varepsilon_{xx} - \bar{s}_{33} (\beta \sin(\beta z) \phi_E + \frac{2V_E}{h}) - \bar{d}_{33} (\beta \sin(\beta z) \Upsilon_H + \frac{2\Omega_H}{h}) + \bar{v}_3 \Delta T$$

$$B_x = \bar{q}_{15} \gamma_{xz} + \bar{d}_{11} \cos(\beta z) \frac{\partial \phi_E}{\partial x} + \bar{\alpha}_{15} \cos(\beta z) \frac{\partial \Upsilon_H}{\partial x}$$

$$B_z = \bar{q}_{31} \varepsilon_{xx} - \bar{d}_{33} (\beta \sin(\beta z) \phi_E + \frac{2V_E}{h}) - \bar{\alpha}_{33} (\beta \sin(\beta z) \Upsilon_H + \frac{2\Omega_H}{h}) + \bar{\lambda}_3 \Delta T$$

در رابطه فوق  $\bar{c}_{ij}$ ،  $\bar{e}_{ij}$ ،  $\bar{q}_{ij}$ ،  $\bar{s}_{ij}$ ،  $\bar{\beta}_{ij}$ ،  $\bar{d}_{ij}$ ،  $\bar{\alpha}_{ij}$ ،  $\bar{v}_i$  و  $\bar{\lambda}_i$  به ترتیب نشان دهنده ثوابت الاستیک، پیزوالکتریک، پیزومغناطیس، دی الکتریک، ضریب حرارتی، مگنتوالکتریک، مغناطیس، پیروالکتریک و پیرومغناطیس می‌باشند که در شرایط تنش صفحه‌ای برای میکروتیرها در پیوست (الف) آمده است.

تانسور کلاسیک تنش برای میکروتیر نیز بصورت رابطه (۱۸) در نظر گرفته می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (18)$$

که در آن:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (19)$$

پارامترهای  $E$  و  $V$  در رابطه (۱۸) و (۱۹) معرف مدول الاستیسیته و ضریب پواسون می‌باشند. با استفاده از روابط (۵)، (۶) و (۱۰) مولفه‌های غیر صفر بردار گرادیان گسترش پذیر برای مدل ردی-لویسون بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\gamma_x = -z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - c_1 z^3 \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (20)$$

$$\gamma_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - 3c_1 z^2 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (21)$$

با استفاده از روابط (۵) و (۶) و (۱۱) مولفه‌های غیر صفر تانسور گرادیان کشش انحرافی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= -\frac{2}{5} z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2}{5} c_1 z^3 \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + \frac{6}{5} c_1 z \left( -\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \eta_{333}^{(1)} &= \frac{2}{5} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{6}{5} c_1 z^2 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \eta_{113}^{(1)} &= \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = -\frac{8}{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{8}{5} c_1 z^2 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \eta_{313}^{(1)} &= \eta_{331}^{(1)} = \eta_{133}^{(1)} = -\frac{8}{5} c_1 z \left( -\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{z}{5} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{z^3}{5} c_1 \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \\ \eta_{122}^{(1)} &= \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \frac{2}{5} c_1 z \left( -\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{z}{5} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{z^3}{5} c_1 \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \\ \eta_{322}^{(1)} &= \eta_{232}^{(1)} = \eta_{223}^{(1)} = \frac{2}{5} c_1 z^2 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{15} \left( -2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

با جایگذاری از روابط (۵) و (۶) در رابطه (۱۲) تانسورگرادیان چرخش متقارن دارای مولفه‌های غیر صفر بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \chi_{xy} &= \chi_{yx} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{3}{4} c_1 z^2 \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ \chi_{yz} &= \chi_{zy} = -\frac{3}{2} c_1 z \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \end{aligned} \quad (23)$$

تنش‌های مرتبه بالاتر با جایگذاری روابط (۲۰) تا (۲۳) در رابطه (۱۳) بدست خواهند آمد. انرژی پتانسیل کرنشی  $U$  برای میکروتیرها با جایگذاری روابط بدست آمده در رابطه انرژی پتانسیل کرنشی (۷) و (۸) حاصل خواهند شد.

لازم به ذکر است که از این جا به بعد اندیس صفر بیانگر میکروتیر کامپوزیتی با خواص الاستیک، الکتریکی و مغناطیسی و اندیس ۱ بیانگر میکروتیر ساده و همگن می‌باشد. همچنین جهت تمایز خواص مکانیکی دو تیر از یکدیگر از بالانویس \* برای خواص میکروتیر ساده و همگن استفاده خواهد شد. روابط پتانسیل کرنشی برای هر میکروتیر بصورت رابطه (۲۴) خواهد بود:

$$\begin{aligned}
U_1 = & \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ (-M^* + c_1 R^* - P_3^{*(0)} + 3c_1 P_3^{*(2)} - \frac{8}{5} T_{113}^{*(0)} + \frac{24}{5} c_1 T_{113}^{*(2)} + \frac{2}{5} T_{322}^{*(0)} - \frac{6}{5} c_1 T_{322}^{*(2)} \right. \\
& + \frac{2}{5} T_{333}^{*(0)} - \frac{6}{5} c_1 T_{333}^{*(2)} - \frac{Y_{12}^{*(0)}}{2} + \frac{3c_1 Y_{12}^{*(2)}}{2} \left. \right) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + (-Q^* + 3c_1 F^* - \frac{6}{5} c_1 T_{111}^{*(1)} + \frac{24}{5} c_1 T_{133}^{*(1)} \\
& - \frac{6}{5} c_1 T_{122}^{*(1)} + 3c_1 Y_{32}^{*(1)}) (\varphi_1) + (-P_1^{*(1)} + c_1 P_1^{*(3)} - \frac{2}{5} T_{111}^{*(1)} + \frac{2}{5} c_1 T_{111}^{*(3)} + \frac{3}{5} T_{133}^{*(1)} - \frac{3}{5} c_1 T_{133}^{*(3)} \\
& + \frac{3}{5} T_{122}^{*(1)} - \frac{3}{5} c_1 T_{122}^{*(3)}) \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) + (Q^* - 3c_1 F^* + \frac{6}{5} c_1 T_{111}^{*(1)} - \frac{24}{5} c_1 T_{133}^{*(1)} + \frac{6}{5} c_1 T_{122}^{*(1)} \\
& - 3c_1 Y_{32}^{*(1)}) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + (-c_1 R^* - 3c_1 P_3^{*(2)} + \frac{4}{5} T_{113}^{*(0)} - \frac{24}{5} c_1 T_{113}^{*(2)} - \frac{3}{15} T_{322}^{*(0)} + \frac{6}{5} c_1 T_{322}^{*(2)} \\
& - \frac{1}{5} T_{333}^{*(0)} + \frac{6}{5} c_1 T_{333}^{*(2)} - \frac{Y_{12}^{*(0)}}{2} - \frac{3c_1 Y_{12}^{*(2)}}{2} \left. \right) \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + (-c_1 P_1^{*(3)} - \frac{2}{5} c_1 T_{111}^{*(3)} + \frac{3}{5} c_1 T_{133}^{*(3)} \\
& + \frac{3}{5} c_1 T_{122}^{*(3)}) \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} \right) \Big\} dx \\
U_0 = & \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ (-M + c_1 R - P_3^{(0)} + 3c_1 P_3^{(2)} - \frac{8}{5} T_{113}^{(0)} + \frac{24}{5} c_1 T_{113}^{(2)} + \frac{2}{5} T_{322}^{(0)} - \frac{6}{5} c_1 T_{322}^{(2)} \right. \\
& + \frac{2}{5} T_{333}^{(0)} - \frac{6}{5} c_1 T_{333}^{(2)} - \frac{Y_{12}^{(0)}}{2} + \frac{3c_1 Y_{12}^{(2)}}{2} \left. \right) \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + (-Q + 3c_1 F - \frac{6}{5} c_1 T_{111}^{(1)} + \frac{24}{5} c_1 T_{133}^{(1)} \\
& - \frac{6}{5} c_1 T_{122}^{(1)} + 3c_1 Y_{32}^{(1)}) (\varphi_0) + (-P_1^{(1)} + c_1 P_1^{(3)} - \frac{2}{5} T_{111}^{(1)} + \frac{2}{5} c_1 T_{111}^{(3)} + \frac{3}{5} T_{133}^{(1)} - \frac{3}{5} c_1 T_{133}^{(3)} \\
& + \frac{3}{5} T_{122}^{(1)} - \frac{3}{5} c_1 T_{122}^{(3)}) \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \right) + (Q - 3c_1 F + \frac{6}{5} c_1 T_{111}^{(1)} - \frac{24}{5} c_1 T_{133}^{(1)} + \frac{6}{5} c_1 T_{122}^{(1)} \\
& - 3c_1 Y_{32}^{(1)}) \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + (-c_1 R - 3c_1 P_3^{(2)} + \frac{4}{5} T_{113}^{(0)} - \frac{24}{5} c_1 T_{113}^{(2)} - \frac{3}{15} T_{322}^{(0)} + \frac{6}{5} c_1 T_{322}^{(2)} \\
& - \frac{1}{5} T_{333}^{(0)} + \frac{6}{5} c_1 T_{333}^{(2)} - \frac{Y_{12}^{(0)}}{2} - \frac{3c_1 Y_{12}^{(2)}}{2} \left. \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + (-c_1 P_1^{(3)} - \frac{2}{5} c_1 T_{111}^{(3)} + \frac{3}{5} c_1 T_{133}^{(3)} \\
& + \frac{3}{5} c_1 T_{122}^{(3)}) \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \Big\} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^A \left\{ D_z \left( \beta \sin(\beta z) (\phi_E) + \frac{2\mathcal{N}_E}{h} \right) \right. \\
& - D_x \cos(\beta z) \left( \frac{\partial \phi_E}{\partial x} \right) \Big\} dA dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^A \left\{ B_z \left( \beta \sin(\beta z) (\gamma_H) + \frac{2\Omega_H}{h} \right) \right. \\
& \left. - B_x \cos(\beta z) \left( \frac{\partial \gamma_H}{\partial x} \right) \right\} dA dx
\end{aligned} \tag{24}$$



که در روابط (۲۴) کلیه پارامترهای در نظر گرفته شده به صورت رابطه (۲۵) معرفی گردیده‌اند.

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{matrix} M, M^* \\ R, R^* \end{matrix} \right\} &= \int_A \begin{Bmatrix} z \\ z^3 \end{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx}, \sigma_{xx}^* \end{matrix} \right\} dA, & \left\{ \begin{matrix} Q, Q^* \\ F, F^* \end{matrix} \right\} &= \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xz}, \sigma_{xz}^* \end{matrix} \right\} dA \\
 \left\{ \begin{matrix} P_1^{(1)}, P_1^{*(1)} \\ P_1^{(3)}, P_1^{*(3)} \end{matrix} \right\} &= \int_A \begin{Bmatrix} z \\ z^3 \end{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} P_x, P_x^* \end{matrix} \right\} dA, & \left\{ \begin{matrix} P_3^{(0)}, P_3^{*(0)} \\ P_3^{(2)}, P_3^{*(2)} \end{matrix} \right\} &= \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} P_z, P_z^* \end{matrix} \right\} dA \\
 \left\{ \begin{matrix} Y_{12}^{(0)}, Y_{12}^{*(0)} \\ Y_{12}^{(2)}, Y_{12}^{*(2)} \end{matrix} \right\} &= \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} m_{xy}, m_{xy}^* \end{matrix} \right\} dA, & \left\{ \begin{matrix} Y_{32}^{(1)}, Y_{32}^{*(1)} \end{matrix} \right\} &= \int_A z \left\{ \begin{matrix} m_{yz}, m_{yz}^* \end{matrix} \right\} dA \\
 \left\{ \begin{matrix} T_{111}^{(1)}, T_{111}^{*(1)} \\ T_{133}^{(1)}, T_{133}^{*(1)} \\ T_{122}^{(1)}, T_{122}^{*(1)} \end{matrix} \right\} &= \int_A z \begin{Bmatrix} \tau_{111}^{(1)}, \tau_{111}^{*(1)} \\ \tau_{133}^{(1)}, \tau_{133}^{*(1)} \\ \tau_{122}^{(1)}, \tau_{122}^{*(1)} \end{Bmatrix} dA, & \left\{ \begin{matrix} T_{333}^{(1)}, T_{333}^{*(1)} \\ T_{113}^{(0)}, T_{113}^{*(0)} \\ T_{322}^{(0)}, T_{322}^{*(0)} \end{matrix} \right\} &= \int_A \begin{Bmatrix} \tau_{333}^{(1)}, \tau_{333}^{*(1)} \\ \tau_{113}^{(1)}, \tau_{113}^{*(1)} \\ \tau_{322}^{(1)}, \tau_{322}^{*(1)} \end{Bmatrix} dA \\
 \left\{ \begin{matrix} T_{333}^{(2)}, T_{333}^{*(2)} \\ T_{113}^{(2)}, T_{113}^{*(2)} \\ T_{322}^{(2)}, T_{322}^{*(2)} \end{matrix} \right\} &= \int_A z^2 \begin{Bmatrix} \tau_{333}^{(1)}, \tau_{333}^{*(1)} \\ \tau_{113}^{(1)}, \tau_{113}^{*(1)} \\ \tau_{322}^{(1)}, \tau_{322}^{*(1)} \end{Bmatrix} dA, & \left\{ \begin{matrix} T_{111}^{(1)}, T_{111}^{*(1)} \\ T_{133}^{(1)}, T_{133}^{*(1)} \\ T_{122}^{(1)}, T_{122}^{*(1)} \end{matrix} \right\} &= \int_A z^3 \begin{Bmatrix} \tau_{111}^{(1)}, \tau_{111}^{*(1)} \\ \tau_{133}^{(1)}, \tau_{133}^{*(1)} \\ \tau_{122}^{(1)}, \tau_{122}^{*(1)} \end{Bmatrix} dA
 \end{aligned} \tag{25}$$

### ۳-۴- کار خارجی

برای مدل‌سازی اثرالاستیک بین تیرها از مدل وینکلر و پاسترناک استفاده شده است. بنابراین نیروی خارجی از طرف محیط خارجی به تیرها برابر است با:

$$F_{elastic\ medium} = (K_w w - K_g \nabla^2 w) \tag{26}$$

که در آن  $K_{wa}$  بیانگر ثابت فنر خطی برای مدل وینکلر،  $K_{ga}$  مدول برشی مربوط به مدل پاسترناک و همچنین  $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2}$  عملگر لاپلاس می‌باشد. با توجه به رابطه (۲۶) کار خارجی وارد بر هر میکروتیر به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\delta V_e = -\frac{1}{2} \int_0^L \left( \begin{Bmatrix} K_{wa} (w_0 - w_1) \\ -K_{ga} \nabla^2 (w_0 - w_1) \end{Bmatrix} \times \delta (w_0 - w_1) \right) dx \tag{27}$$

نیروی محوری  $N$  وارد به میکروتیر می‌تواند نیروی حرارتی، مغناطیسی و الکتریکی باشد. کار خارجی که بوسیله این نیرو به هریک از میکروتیرها ایجاد می‌گردد بصورت زیر بدست می‌آید. باشد:

$$\delta V_{external\ load} = \frac{1}{2} \int_0^L N \left( \frac{\partial \delta w_j}{\partial x} \right)^2 dx \tag{28}$$

## ۳-۵- اصل همیلتون

معادلات تعادل را می‌توان با بکارگیری اصل مینیمم انرژی پتانسیل کل برای تیر دوپیونده بدست آورد. این اصل بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta\Pi = \delta(U_0 + U_1 - V_e - V_{external\ load}) \quad (29)$$

با جایگذاری روابط قبلی در رابطه (۲۹) معادلات تعادل بصورت روابط زیر حاصل می‌شوند که تعریف ضرایب آنها در پیوست (ب) موجود است.

$\delta\varphi_0$  :

$$\begin{aligned} & \{(A - 6c_1I + 9c_1^2J)\bar{c}_{44} + (\frac{96}{5}l_1^2 + 9l_2^2)c_1^2\mu I\}(\varphi_0 - \frac{\partial w_0}{\partial x}) \\ & + \{-(I - 2c_1J + c_1^2K)\bar{c}_{11} - (2l_0^2 + \frac{32}{15}l_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2)(\mu A) \\ & + (12l_0^2 + \frac{88}{5}l_1^2 + \frac{3}{2}l_2^2)(c_1\mu I) - (18l_0^2 + 24l_1^2 + \frac{9}{4}l_2^2)(c_1^2\mu J)\}(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}) \\ & + \{(c_1^2K - c_1J)\bar{c}_{11} + (\frac{16}{15}l_1^2 - \frac{1}{4}l_2^2)(\mu A) - (6l_0^2 + 12l_1^2)(c_1\mu I) \\ & + (18l_0^2 + 24l_1^2 + \frac{9}{4}l_2^2)(c_1^2\mu J)\}(\frac{\partial^3w_0}{\partial x^3}) + \{(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2)(\mu I + \\ & c_1^2\mu K - 2c_1\mu J)\}(\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4}) - \{(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2)(c_1^2\mu K - c_1\mu J)\}(\frac{\partial^5w_0}{\partial x^5}) \\ & + \{E_{31}^{(1)} - E_{31}^{(3)}c_{131} - 3c_1E_{15}^{(2)} + E_{15}^{(0)}\}(\frac{\partial\phi_E}{\partial x}) \\ & + \{Q_{31}^{(1)} - c_1Q_{31}^{(3)} - 3c_1Q_{15}^{(2)} + Q_{15}^{(0)}\}(\frac{\partial\Upsilon_H}{\partial x}) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$\delta w_0$  :

$$\begin{aligned}
 & \{(A - 6c_1I + 9c_1^2J)\bar{c}_{44} + (\frac{96}{5}l_1^2 + 9l_2^2)c_1^2\mu I\}(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - \frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}) + \{(c_1J - c_1^2K)\bar{c}_{11} \\
 & + (-\frac{16}{15}l_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2)(\mu A) + (6l_0^2 + 12l_1^2)(c_1\mu I) - (18l_0^2 + 24l_1^2 + \frac{9}{4}l_2^2)(c_1^2\mu J)\}(\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3}) \\
 & + \{(c_1^2K)\bar{c}_{11} + (\frac{8}{15}l_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2)(\mu A) + (\frac{3}{2}l_2^2 - \frac{32}{5}l_1^2)(c_1\mu I) \\
 & + (18l_0^2 + 24l_1^2 + \frac{9}{4}l_2^2)(c_1^2\mu J)\}(\frac{\partial^4w_0}{\partial x^4}) + \{(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2)(c_1^2\mu K - c_1\mu J)\}(\frac{\partial^5\varphi_0}{\partial x^5}) \\
 & - \{(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2)(c_1^2\mu K)\}(\frac{\partial^6w_0}{\partial x^6}) + \{-c_1E_{31}^{(3)} - 3c_1E_{15}^{(2)} + E_{15}^{(0)}\}(\frac{\partial^2\phi_E}{\partial x^2}) \\
 & + \{-c_1Q_{31}^{(3)} - 3c_1Q_{15}^{(2)} + Q_{15}^{(0)}\}(\frac{\partial^2\Upsilon_H}{\partial x^2}) + K_{wa}(w_0 - w_1) - K_{ga}\nabla^2(w_0 - w_1) = -(N)\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}
 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

$\delta\phi_E$  :

$$\begin{aligned}
 & -E_{31}^{(1)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - (3c_1E_{15}^{(2)} + c_1E_{31}^{(3)} - E_{15}^{(0)})\left(\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right) \\
 & + X_{11}\frac{\partial^2\phi_E}{\partial x^2} + Y_{11}\frac{\partial^2\Upsilon_H}{\partial x^2} - X_{33}\phi_E - Y_{33}\Upsilon_H = 0
 \end{aligned} \tag{۳۲}$$

$\delta\Upsilon_H$  :

$$\begin{aligned}
 & -Q_{31}^{(1)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - (3c_1Q_{15}^{(2)} + c_1Q_{31}^{(2)} - Q_{15}^{(0)})\left(\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right) \\
 & + Y_{11}\frac{\partial^2\phi_E}{\partial x^2} + T_{11}\frac{\partial^2\Upsilon_H}{\partial x^2} - Y_{33}\phi_E - T_{33}\Upsilon_H = 0
 \end{aligned}$$

$\delta\varphi_1$ :

$$\begin{aligned}
& \{(A^* - 6c_1I^* + 9c_1^2J^*)\bar{c}_{44}^* + (\frac{96}{5}l_1^{*2} + 9l_2^{*2})c_1^2\mu^*I^*\}(\varphi_1 - \frac{\partial w_1}{\partial x}) \\
& + \{-(I^* - 2c_1J^* + c_1^2K^*)\bar{c}_{11}^* - (2l_0^{*2} + \frac{32}{15}l_1^{*2} + \frac{1}{4}l_2^{*2})(\mu^*A^*) \\
& + (12l_0^{*2} + \frac{88}{5}l_1^{*2} + \frac{3}{2}l_2^{*2})(c_1\mu^*I^*) - (18l_0^{*2} + 24l_1^{*2} + \frac{9}{4}l_2^{*2})(c_1^2\mu^*J^*)\}(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}) \\
& + \{(c_1^2K^* - c_1J^*)\bar{c}_{11}^* + (\frac{16}{15}l_1^{*2} - \frac{1}{4}l_2^{*2})(\mu^*A^*) - (6l_0^{*2} + 12l_1^{*2})(c_1\mu^*I^*) \\
& + (18l_0^{*2} + 24l_1^{*2} + \frac{9}{4}l_2^{*2})(c_1^2\mu^*J^*)\}(\frac{\partial^3w_1}{\partial x^3}) \\
& + \{(2l_0^{*2} + \frac{4}{5}l_1^{*2})(\mu^*I^* + c_1^2\mu^*K^* - 2c_1\mu^*J^*)\}(\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial x^4}) \\
& - \{(2l_0^{*2} + \frac{4}{5}l_1^{*2})(c_1^2\mu^*K^* - c_1\mu^*J^*)\}(\frac{\partial^5w_1}{\partial x^5}) = 0
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

 $\delta w_1$ :

$$\begin{aligned}
& \{(A^* - 6c_1I^* + 9c_1^2J^*)\bar{c}_{44}^* + (\frac{96}{5}l_1^{*2} + 9l_2^{*2})c_1^2\mu^*I^*\}(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}) \\
& + \{(c_1J^* - c_1^2K^*)\bar{c}_{11}^* + (-\frac{16}{15}l_1^{*2} + \frac{1}{4}l_2^{*2})(\mu^*A^*) \\
& + (6l_0^{*2} + 12l_1^{*2})(c_1\mu^*I^*) - (18l_0^{*2} + 24l_1^{*2} + \frac{9}{4}l_2^{*2})(c_1^2\mu^*J^*)\}(\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x^3}) \\
& + \{(c_1^2K^*)\bar{c}_{11}^* + (\frac{8}{15}l_1^{*2} + \frac{1}{4}l_2^{*2})(\mu^*A^*) + (\frac{3}{2}l_2^{*2} - \frac{32}{5}l_1^{*2})(c_1\mu^*I^*) \\
& + (18l_0^{*2} + 24l_1^{*2} + \frac{9}{4}l_2^{*2})(c_1^2\mu^*J^*)\}(\frac{\partial^4w_1}{\partial x^4}) \\
& + \{(2l_0^{*2} + \frac{4}{5}l_1^{*2})(c_1^2\mu^*K^* - c_1\mu^*J^*)\}(\frac{\partial^5\varphi_1}{\partial x^5}) \\
& - \{(2l_0^{*2} + \frac{4}{5}l_1^{*2})(c_1^2\mu^*K^*)\}(\frac{\partial^6w_1}{\partial x^6}) \\
& - K_{wa}(w_0 - w_1) + K_{ga}\nabla^2(w_0 - w_1) + K_{wb}(w_1 - w_2) \\
& - K_{gb}\nabla^2(w_1 - w_2) = -(N)\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

شرایط مرزی نیز در حالت دوسر ساده و دوسرگیردار به ترتیب بصورت روابط (۳۵) و (۳۶) در نظر گرفته

می‌شوند:

$$w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = \psi_i = \phi_E = \gamma_H = 0, (x=0, L)(i=0,1) \quad (35)$$

$$w_i = \frac{\partial w_i}{\partial x} = \psi_i = \phi_E = \gamma_H = 0, (x=0, L)(i=0,1) \quad (36)$$

#### ۴- روش حل

##### ۴-۱- روش تربیع دیفرانسیلی

روش تربیع دیفرانسیلی از جمله روش‌های عددی است که در آن با استفاده از ضرایب وزنی، معادلات دیفرانسیل حاکم، به دسته‌ای از معادلات جبری خطی تبدیل می‌شوند. بدین ترتیب که در هر نقطه، مشتق به صورت یک مجموع خطی از ضرایب وزنی و مقادیر تابع در آن نقطه و دیگر نقاط دامنه و در جهت محورهای مختصات بیان خواهند شد. رابطه اصلی این روش برای حالت یک بعدی، به شکل زیر بیان می‌شود [۳۰] و [۳۱]:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij} f(x_j) \quad i=1,2,\dots,N \quad (37)$$

که در آن  $f(x)$  تابع مورد نظر،  $N$  تعداد نقاط نمونه،  $x_i$  نقطه نمونه  $i$ ام از بازه تابع و  $C_{ij}$  ضرایب وزنی برای بدست آوردن مشتق تابع در نقطه نمونه  $i$ ام است.

به طور کلی در این روش، مشتق  $n$ ام تابع در حالت یک بعدی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad i=1,2,\dots,N \quad (38)$$

برای تعیین نقاط نمونه از ریشه‌های چند جمله‌ای چیشو که در حل مسائل مهندسی کاربرد زیادی دارند، استفاده می‌شود. این فاصله گذاری به صورت زیر بیان می‌گردد [۲۸]:

$$x_i = \frac{L}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2i-1}{N-1} \pi \right) \right] \quad i=1,2,\dots,N \quad (39)$$

با تعریف بردار جابجایی به شکل زیر:

$$\{U\} = \{\{w\}, \{\psi\}, \{\phi\}, \{\gamma\}\}^T \quad (40)$$

معادلات حاکم (۳۱) تا (۳۴) را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$[K]\{U\} = N[P]\{U\} \quad (41)$$

و شرایط مرزی (۳۵) یا (۳۶) را نیز می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$[T]\{U\} = \{0\} \quad (42)$$

حل همزمان معادلات (۴۱) و (۴۲) منجر به افزایش تعداد معادلات نسبت به مجهولات خواهد شد. به منظور رفع این مشکل از ارضای معادلات حاکم در نقاط مرزی صرف نظر خواهد شد. تعداد این نقاط برابر با تعداد شرایط مرزی خواهد بود.

با حذف معادلات حاکم (۴۱) در نقاط مرزی می‌توان این رابطه را به شکل زیر بیان نمود:

$$[\bar{K}] \{U\} = N [\bar{P}] \{U\} \quad (43)$$

که در این رابطه علامت بار بیانگر ماتریس های غیرمربعی متناظر می باشد. با تفکیک ستونی ماتریس ها در روابط (۴۲) و (۴۳) می توان این دو رابطه را به شکل زیر بیان نمود:

$$[\bar{K}]_d \{U\}_d + [\bar{K}]_b \{U\}_b = N \left( [\bar{P}]_d \{U\}_d + [\bar{P}]_b \{U\}_b \right) \quad (44)$$

$$[T]_d \{U\}_d + [T]_b \{U\}_b = \{0\} \quad (45)$$

حل همزمان معادلات (۴۱) و (۴۲) منجر به افزایش تعداد معادلات نسبت به مجهولات خواهد شد. فرض کنید نقاط حل مساله به دو دسته نقاط مرزی (boundary) و نقاط میانی (domain) تقسیم شوند به گونه ای که تعداد نقاط مرزی دقیقاً برابر با تعداد شرایط مرزی خواهد بود. با توجه به این که برای متغیر  $W_i$  در هر طرف تیر دو شرط مرزی وجود دارد، لازم است برای این متغیر از هر طرف تیر دو نقطه به عنوان نقاط مرزی انتخاب شوند و برای سایر متغیرها در هر طرف تیر یک شرط مرزی وجود داشته و در نتیجه یک نقطه به عنوان نقطه مرزی انتخاب خواهد شد. بنابراین در بین 10N نقطه ی حل مساله ۲۶ نقطه به عنوان نقاط مرزی بوده که دقیقاً با تعداد شرایط مرزی مساله برابر است. سایر نقاط حل مساله نیز به عنوان نقاط میانی در نظر گرفته خواهند شد که تعداد آنها برابر با 10N-26 می باشند.

به منظور رفع مشکل ازدیاد از ارضای معادلات حاکم در نقاط مرزی صرف نظر خواهد شد. با حذف معادلات حاکم (۴۱) در نقاط مرزی می توان این رابطه را به شکل زیر بیان نمود:

$$\{U\}_b = -[T]_b^{-1} [T]_d \{U\}_d \quad (46)$$

و با قرار دادن این تساوی در معادله حاکم (۴۲) می توان رابطه ی مقدار ویژه ی زیر را بیان نمود:

$$[F_1] \{U\}_d = N [F_2] \{U\}_d \quad (47)$$

که در این رابطه:

$$[F_1] = [\bar{K}]_d - [\bar{K}]_b [T]_b^{-1} [T]_d \quad (48)$$

$$[F_2] = [\bar{P}]_d - [\bar{P}]_b [T]_b^{-1} [T]_d$$

با حل مساله ی مقدار ویژه ی (۴۷) بار بحرانی به عنوان مقدار ویژه بدست خواهد آمد.

## ۵- نتایج عددی

### ۵-۱- اعتبارسنجی نتایج

برای اعتبار سنجی نتایج این پژوهش و مقایسه آن ها با نتایج ارائه شده در پایگاه های معتبر علمی جدول های (۱) و (۲) ارائه گردیده است. برای نتایج هر دو جدول تیر شماره صفر در پژوهش حاضر حذف گردیده و همچنین محیط الاستیک نیز در نظر گرفته نمی شود.

برای بار کمانش در جدول (۱) پارامترهای مقیاس طول در حالت تنش کوپل اصلاح شده  $(l_0 = l_1 = 0, l_2 = l)$  به همراه داده‌های عددی در تحقیق محمدآبادی و دانش‌مهر [۱۵] مورد استفاده قرار گرفته است. در جدول (۲) نیز نتایج بار بحرانی بدون بعد برای تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده  $(l_0 = l_1 = l_2 = l)$  مطابق داده‌های عددی تحقیق انصاری و همکاران [۳۲] بدست آمده است. همانگونه که از نتایج هر دو جدول مشهود است قرابت قابل قبولی بین نتایج موجود در کار حاضر با تحقیقات گذشته وجود دارد.

### ۵-۲- نمودارها و جداول

برای ترسیم نمودارهای ارائه شده در این بخش شرایط مرزی دو سر ساده در نظر گرفته شده است. همچنین جهت ترسیم نمودارها از داده‌های عددی زیر استفاده می‌گردد [۱۵]:

$$l = 17.6(\mu m), h = 2l, L = 10h, b = 2h, \quad (49)$$

$$K_{ga} = 10(N), K_{wa} = 10^{12}(Pa)$$

هرگونه تغییر در مقادیر رابطه (۴۹) در انتهای توضیحات نمودار مربوطه آورده شده است. باتوجه به اینکه جنس میکروتیر شماره صفر از کامپوزیت ارتوتروپیک  $BiTiO_3-CoFe_2O_4$  در نظر گرفته شده است، لذا خواص کامپوزیت مذکور از جدول موجود در مرجع [۲۹] انتخاب شده است. همچنین میکروتیر شماره ۱ از جنس اپوکسی بوده که خواص آن در جدول (۳) آمده است:

در ابتدا تاثیر تعداد نقاط شبکه بر روی دقت و همگرایی حل، توسط نمودار شکل (۲) بررسی شده است. این نمودار بار کمانش بر حسب تعداد کل نقاط گسسته  $N$  را برای تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده نشان می‌دهد. همانگونه که مشهود است، تعداد نقاط برای رسیدن به همگرایی و دقت قابل قبول نتایج  $N = 11$  می‌باشد که در ترسیم تمامی نتایج از این مقدار استفاده شده است.

#### جدول ۱- مقایسه بارکمانش در تحقیق حاضر با کار محمدآبادی و دانش‌مهر [۱۵]

مدل ردی	مدل تیموشنکو	$h = l$
۶۰/۳۵۷۹	۶۱/۱۲۸۴	کار حاضر
۶۰/۳۵۷۱	۶۱/۱۲۷۹	محمدآبادی و دانش‌مهر [۱۵]

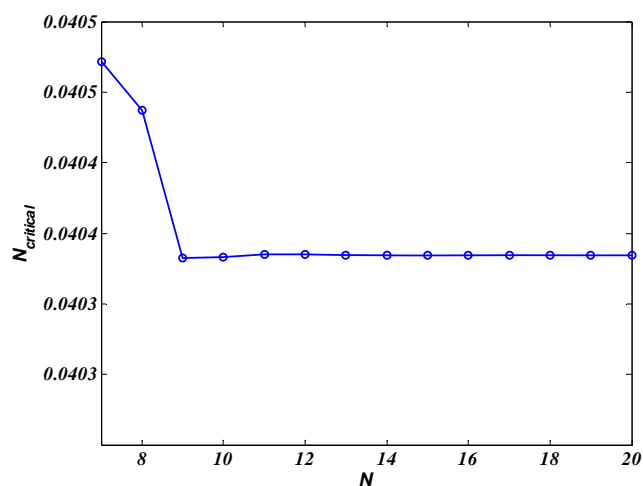
#### جدول ۲- مقایسه بارکمانش بدون بعد در تحقیق حاضر با تحقیق انصاری و همکاران [۳۲]

$SiC$	$Al$	مدل تیموشنکو
۰/۴۶۳۵	۰/۰۷۲۶	کار حاضر
۰/۴۶۲۴	۰/۰۷۱۹	انصاری و همکاران [۳۲]

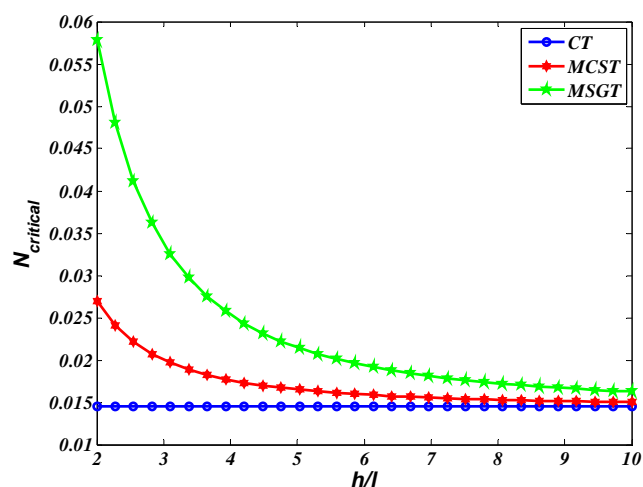
نمودار شکل (۳) بارکمانش را برحسب نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول نشان می‌دهد. این نمودار که برای سه تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده، تنش کوپل اصلاح شده و کلاسیک رسم گردیده است، نشان می‌دهد که مقادیر بار بحرانی در تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده از تئوری‌های دیگر بیشتر و این مقادیر در تئوری تنش کوپل اصلاح شده از تئوری کلاسیک که مقدار ثابتی دارد، بیشتر می‌باشد. همچنین مشاهده می‌گردد که با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول به جز تئوری کلاسیک که مقدار بار بحرانی ثابت است، در تئوری‌های دیگر این مقدار کاهش می‌یابد.

جدول ۳- خواص فیزیکی و مکانیکی اپوکسی [۲۳]

$E$	$\rho$	$\nu$
1.44GPa	1220kg / m <sup>3</sup>	0.38

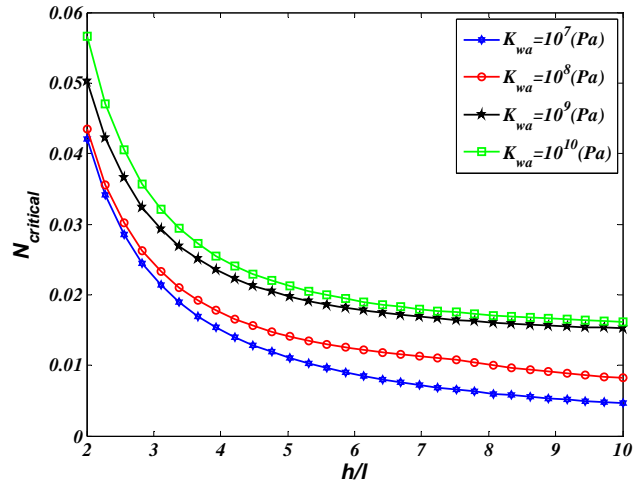


شکل ۲- بارکمانش بر حسب تعداد نقاط شبکه



شکل ۳- بارکمانش به ازای تئوری‌های مختلف بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول



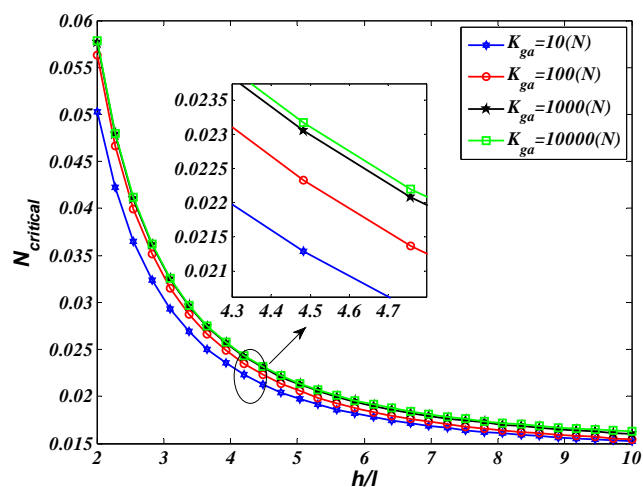


شکل ۴- بارکمانش به ازای ثابت مختلف وینکلر بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول

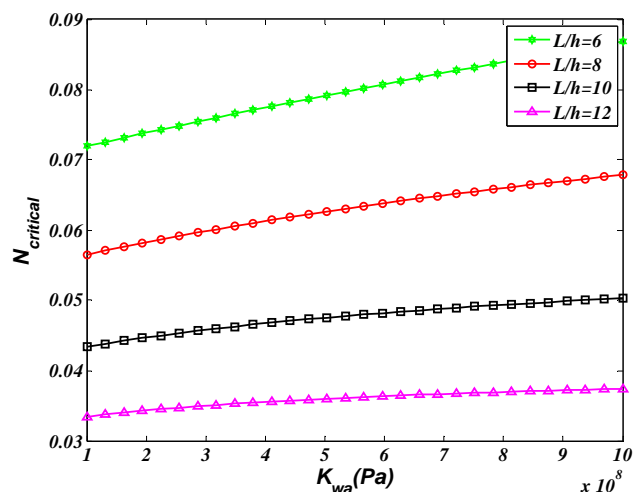
شکل (۴) بار کمانش میکروتیر دو پیونده را بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول به ازای ثابت وینکلر فنر متفاوت نمایش می‌دهد. همانگونه که مشهود است با افزایش ثابت وینکلر مقدار بار کمانش افزایش می‌یابد. شکل (۵) بار کمانش میکروتیر دو پیونده را بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول به ازای ثابت مختلف پاسترناک فنر نمایش می‌دهد. همانگونه که برداشت می‌شود با افزایش ضریب پاسترناک

مقدار بار بحرانی در تئوری گرادیان کرنشی افزایش می‌یابد.  $K_{wa} = 10^9 (Pa)$

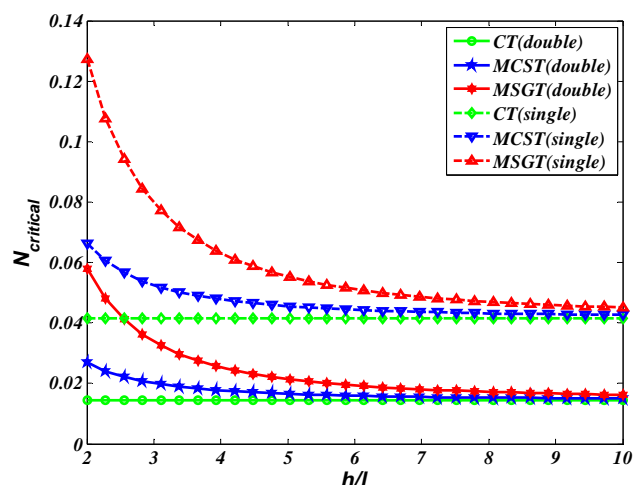
بررسی تاثیر افزایش نسبت طول به ضخامت میکروتیر بر روی بارکمانش در نمودار شکل (۶) ارائه گردیده است. این نمودار که برای تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده و بر حسب ثابت وینکلر ترسیم گردیده نشان می‌دهد که با افزایش نسبت طول به ضخامت در راستای افزایش ثابت وینکلر مقادیر بارکمانش کاهش می‌یابد. شکل (۷) بار کمانش میکروتیر دو پیونده (کار حاضر) و میکروتیر تنها (در صورت نبودن میکروتیر کامپوزیتی و محیط الاستیک) را برای تئوری‌های متفاوت نشان می‌دهد.



شکل ۵- بارکمانش به ازای ثابت مختلف پاسترناک بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول



شکل ۶- بارکمانش به ازای ثابت مختلف نسبت طول به ضخامت تیر بر حسب ثابت وینکلر



شکل ۷- بارکمانش برای سیستم های میکروتیری متفاوت و تئوری های مختلف

این منحنی که بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول رسم گردیده نشان می‌دهد که افزودن میکروتیر کامپوزیتی با خواص الاستیک، الکتریکی، مغناطیسی بار بحرانی را کاهش می‌دهد. جدول (۴) و (۵) مقادیر بارکمانش را به ازای شرایط مرزی مختلف و تئوری های متفاوت نشان می‌دهد. جدول (۴) این موارد را برای مدل تیر ردی- لوینسون و جدول (۵) برای مدل تیر تیموشنکو نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر بار بحرانی در مدل ردی- لوینسون بیشتر از مدل تیموشنکو می‌باشد. همچنین مشاهده می‌گردد که شرایط مرزی دوسر گیردار بیشترین بار بحرانی را دارا می‌باشد. همچنین در مورد تئوری‌ها نیز نتایج نمودار شکل (۲) تصدیق می‌شود.

جدول (۶) مقادیر بار کمانش را به ازای ثابت وینکلر متفاوت برای تئوری‌های مختلف نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ثابت وینکلر بار کمانش در هر سه تئوری افزایش خواهد یافت. جدول (۷) بار کمانش برای نسبت طول به ضخامت مختلف را نمایش می‌دهد. با دقت در نتایج مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت مذکور، بار بحرانی در همه تئوری‌ها کاهش خواهد یافت.

**جدول ۴- بارکمانش بدون بعد برای مدل ردی- لوینسون**

ابتدا	ساده	گیردار	ساده
انتها	ساده	گیردار	گیردار
$(l_0 = l_1 = l_2 = 0)$ کلاسیک	۰/۰۱۴۵	۰/۰۵۵۲	۰/۰۲۹۱
$(l_0 = l_1 = 0, l_2 = l(\mu m))$ تنش کوپل اصلاحی	۰/۰۲۶۹	۰/۱۰۳۵	۰/۰۵۴۲
$(l_0 = l_1 = l_2 = l(\mu m))$ گرادیان کرنشی اصلاحی	۰/۰۵۷۸	۰/۲۱۹۲	۰/۱۱۵۶

**جدول ۵- بارکمانش بدون بعد برای مدل تیموشنکو**

ابتدا	ساده	گیردار	ساده
انتها	ساده	گیردار	گیردار
$(l_0 = l_1 = l_2 = 0)$ کلاسیک	۰/۰۱۴۴	۰/۰۵۳۰	۰/۰۲۸۴
$(l_0 = l_1 = 0, l_2 = l(\mu m))$ تنش کوپل اصلاحی	۰/۰۲۶۴	۰/۰۹۶۹	۰/۰۵۲۱
$(l_0 = l_1 = l_2 = l(\mu m))$ گرادیان کرنشی اصلاحی	۰/۰۵۳۱	۰/۱۶۶۲	۰/۰۹۷۰

**جدول ۶- بارکمانش بدون بعد بر حسب ثابت وینکلر (بر حسب پاسکال) مختلف**

نوع تئوری	$K_{\text{wz}} = 10^8$	$K_{\text{wz}} = 10^9$	$K_{\text{wz}} = 10^{10}$
$(l_0 = l_1 = l_2 = 0)$ کلاسیک	۰/۰۱۳۶	۰/۰۱۴۱	۰/۰۱۴۵
$(l_0 = l_1 = 0, l_2 = l(\mu m))$ تنش کوپل اصلاحی	۰/۰۲۳۶	۰/۰۲۵۳	۰/۰۲۶۶
$(l_0 = l_1 = l_2 = l(\mu m))$ گرادیان کرنشی اصلاحی	۰/۰۴۳۴	۰/۰۵۰۳	۰/۰۵۶۶

**جدول ۷- بارکمانش بدون بعد بر حسب نسبت طول به ارتفاع مختلف**

نوع تئوری	$\frac{L}{h} = 5$	$\frac{L}{h} = 10$	$\frac{L}{h} = 15$
$(l_0 = l_1 = l_2 = 0)$ کلاسیک	۰/۰۵۵۳	۰/۰۱۴۵	۰/۰۰۶۵
$(l_0 = l_1 = 0, l_2 = l(\mu m))$ تنش کوپل اصلاحی	۰/۱۰۳۵	۰/۰۲۶۹	۰/۰۱۲۱
$(l_0 = l_1 = l_2 = l(\mu m))$ گرادیان کرنشی اصلاحی	۰/۲۱۹	۰/۰۵۸۷	۰/۰۲۶۰

## ۶- نتیجه گیری

در این پژوهش کماتش خطی تیر دوپیونده ردی- لوینسون به کمک تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده و روش تربیع دیفرانسیلی بررسی گردید. این سیستم شامل یک میکروتیر از جنس اپوکسی و میکروتیر کامپوزیتی با خواص الاستیک، مغناطیسی و الکتریکی که با محیط الاستیک به یکدیگر متصل گردیده‌اند، می‌شود. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که:

- مقادیر بار بحرانی در تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده از سایر تئوری‌ها بیشتر و این مقادیر در تئوری تنش کوپل اصلاح شده از تئوری کلاسیک که مقدار ثابتی دارد بیشتر می‌باشد. علت این رویداد آن است که در تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده تعداد پارامترهای مقیاس کوچک بیشتر از تئوری تنش کوپل اصلاحی و در آن بیش از تئوری کلاسیک می‌باشد.

- با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول، مقدار بار بحرانی در تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده و تنش کوپل اصلاحی کاهش و در تئوری کلاسیک ثابت می‌ماند. این نسبت به علت وجود پارامتر مقیاس طول در دو تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده و تنش کوپل اصلاحی باعث کاهش مقاومت سیستم شده و در نتیجه کاهش بار بحرانی را به همراه دارد. در تئوری کلاسیک نیز به علت صفر بودن پارامتر مقیاس طول تاثیری در بار بحرانی ندارد.

- با افزایش ثابت وینکلر و پاسترناک بار بحرانی افزایش می‌یابد. این نسبت مستقیم به علت آن است که با افزایش ثوابت محیط الاستیک، سختی سیستم افزایش و در نتیجه بار بحرانی افزایش می‌یابد.

- با افزایش نسبت طول به ضخامت در راستای افزایش ثابت وینکلر، مقاومت سیستم کمتر شده و در نتیجه بار بحرانی کاهش می‌یابد.

- افزودن میکروتیر کامپوزیتی با خواص الاستیک، مغناطیسی و الکتریکی در کنار میکروتیر همگن، باعث کاهش مقاومت سیستم و در نتیجه کاهش بار بحرانی می‌گردد.

- مقادیر بار بحرانی در مدل ردی- لوینسون بیشتر از مدل تیموشنکو می‌باشد. همچنین شرایط مرزی دوسر گیردار به دلیل مقیدتر بودن بیشترین بار بحرانی و شرایط مرزی دوسر ساده کمترین مقدار را دارا می‌باشد.

## مراجع

- [1] Mindlin, R.D., and Tiersten, H.F., "Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, pp. 415-448, (1962).
- [2] Yang, A.C.M., Chong, D.C.C., and Tong, P., "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2731-2743, (2002).
- [3] Mindlin, R.D., "Second Gradient of Strain and Surface-tension in Linear Elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, pp. 417-438, (1965).
- [4] Lam, D.C.C., ang F. Y., Chong A.C.M., Wang J., and Tong P., "Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity", *Journal of Mechanics Physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1477-1508, (2003).

- [5] Şimşek, M., Kocatürk, T., and Akbaş, S. D., "Static Bending of a Functionally Graded Microscale Timoshenko Beam Based on the Modified Couple Stress Theory", *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 740-747, (2013).
- [6] Arefi, M., and Zenkour, A. M., "Vibration and Bending Analyses of Magneto–electro–thermo-elastic Sandwich Microplates Resting on Viscoelastic Foundation", *Applied Physics A*, pp. 123-550, (2017).
- [7] Ansari, R., and Sahmani, S., "Bending Behavior and Buckling of Nanobeams Including Surface Stress Effects Corresponding to Different Beam Theories", *Composite Structures*, Vol. 49, pp. 1244-1255, (2011).
- [8] Ansari, R., Gholami, R., Faghih Shojaei, M., Mohammadi, V., and Sahmani, S., "Size-dependent Bending, Buckling and Free Vibration of Functionally Graded Timoshenko Microbeams Based on the Most General Strain Gradient Theory", *Composite Structures*, Vol. 100, pp. 385-397, (2013).
- [9] Eltahir, M. A., Emam Samir, A., and Mahmoud, F. F., "Static and Stability Analysis of Nonlocal Functionally Graded Nanobeams", *Int. J. Composite Structures*, Vol. 96, pp. 82-88, (2013).
- [10] Mohammadimehr, M., and Mahmudian-Najafabadi, M., "Bending and Free Vibration Analysis of Nonlocal Functionally Graded Nanocomposite Timoshenko Beam Model Reinforced by SWBNNT Based on Modified Coupled Stress Theory", *Department of Solid Mechanics, University of Kashan, Iran*, (2013).
- [11] Arefi, M., and Zenkour, A. M., "Size-dependent Electro-elastic Analysis of a Sandwich Microbeam Based on Higher-order Sinusoidal Shear Deformation Theory and Strain gradient Theory", *J. Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 29, pp. 1394-1406, (2017).
- [12] Thai, H.T., "A Nonlocal Beam Theory for Bending, Buckling, and Vibration of Nanobeams", *Int. J. Engineering Science*, Vol. 52, pp. 56-64, (2012).
- [13] Li, Y.S., Feng, W.J., and Cai, Z.Y., "Bending and Free Vibration of Functionally Graded Piezoelectric Beam Based on Modified Strain Gradient Theory", *Composite Structures*, Vol. 115, pp. 41-50, (2014).
- [14] Şimşek, M., and Reddy, J. N., "A Unified Higher Order Beam Theory for Buckling of a Functionally Graded Microbeam Embedded in Elastic Medium using Modified Couple Stress Theory", *Composite Structures*, Vol. 101, pp. 47-58, (2013).
- [15] Mohammadabadi M., and Daneshmehr A. R., "Size Dependent Buckling Analysis of Microbeams Based on Modified Couple Stress Theory with High Order Theories and General Boundary Conditions", *Int. J. Engineering Science*, Vol. 74, pp. 1-14, (2014).
- [16] Akgöz B., and Civalek Ö., "A New Trigonometric Beam Model for Buckling of Strain Gradient Microbeams", *Int. J. Mechanical Sciences*, Vol. 81, pp. 88-94, (2014).
- [17] Ebrahimi F., and Salari E., "Thermal Buckling and Free Vibration Analysis of Size Dependent Timoshenko FG Nanobeams in Thermal Environments", *Int. J. Composite Structures*, Vol. 128, pp. 363-380, (2015).

- [18] Arefi, M., Kiani, M., and Zenkour, A. M., " Size-dependent Free Vibration Analysis of a Three-layered Exponentially Graded Nano-/micro-plate with Piezomagnetic Face Sheets Resting on Pasternak's Foundation Via MCST ", *J. Sandwich Structures and Materials*, 1099636217734279, (2017).
- [19] Mohammadabadi, M., Daneshmehr, A. R., and Homayounfar, M., "Size-dependent Thermal Buckling Analysis of Micro Composite Laminated Beams using Modified Couple Stress Theory", *Int. J. Engineering Science*, Vol. 92, pp. 47-62, (2015).
- [20] Li, Y.S., Feng, W.J., and Cai, Z.Y., "Bending and Free Vibration of Functionally Graded Piezoelectric Beam Based on Modified Strain Gradient Theory", *Composite Structures*, Vol. 115, pp. 41-50, (2014).
- [21] Levinson, M., "A New Rectangular Beam Theory", *J. Sound and Vibration*, Vol. 74, pp. 81-87, (1981).
- [22] Reddy, J.N., "A Simple Higher-order Theory for Laminated Composite Plates", *J. Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 745-752, (1984).
- [23] Wang, B., Liu, M., Zhao, J., and Zhou, Sh., "A Size-dependent Reddy-Levinson Beam Model Based on a Strain Gradient Elasticity Theory", *Meccanica*, Vol. 49, pp. 1427-1441, (2014).
- [24] Lam, D.D.C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J., and Tong, P., "Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity", *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1477-1508, (2003).
- [25] Mohammadimehr M., Roustavi Navi, B., and Ghorbanpour Arani, A., "Free Vibration of Viscoelastic Double-bonded Polymeric Nanocomposite Plates Reinforced by FG-SWCNTs using MSGT, Sinusoidal Shear Deformation Theory and Meshless Method", *Composite Structure*, Vol. 131, pp. 654-671, (2015).
- [26] Liu, Y., Han, Q., Li, C., Liu, X., and Wu, B., "Guided Wave Propagation and Mode Differentiation in the Layered Magneto-electro-elastic Hollow Cylinder", *Composite Structure*, Vol. 132, pp. 558-566, (2015).
- [27] Akgöz, B., and Civalek, Ö., "A Size-dependent Shear Deformation Beam Model Based on the Strain Gradient Elasticity Theory", *Int. J. Engineering Science*, Vol. 70, pp. 1-14, (2013).
- [28] Li, Y.S., Cai, Z.Y., and Shi, S.Y., "Buckling and Free Vibration of Magneto-electro-elastic Nanoplate Based on Nonlocal Theory", *Composite Structure*, Vol. 111, pp. 522-529, (2014).
- [29] Ansari, R., Gholami, R., and Rouhi, H., "Size-dependent Nonlinear Forced Vibration Analysis of Magneto-electro-thermo-elastic Timoshenko Nanobeams Based upon the Nonlocal Elasticity Theory", *Composite Structure*, Vol. 126 pp. 216-226, (2015).
- [30] Ghorbanpour Arani, A., Atabakhshian, V., Loghman, A., Shajari, A.R., and Amir, S., "Nonlinear Vibration of Embedded SWBNNTs Based on Nonlocal Timoshenko Beam Theory using DQ Method", *Physica. B*, Vol. 407, pp. 2549-2555, (2012).

- [31] Murmu, T., and Pradhan, S.C., "Buckling Analysis of a Single-walled Carbon Nanotube Embedded in an Elastic Medium Based on Nonlocal Elasticity and Timoshenko Beam Theory and using DQM", Phisyca E, Vol. 41, pp. 1232-1239, (2009).
- [32] Ansari, R., Gholami, R., Faghieh Shojaei, M., Mohammadi, V., and Sahmani, S., "Size-dependent Bending, Buckling and Free Vibration of Functionally Graded Timoshenko Micro Beams Based on the most General Strain Gradient Theory", Composite Structure, Vol. 100 pp. 385–397, (2013).

### فهرست نمادهای انگلیسی

- b: عرض میکروتیر  
 c: ثوابت  
 E: میدان الکتریکی  
 h: ارتفاع میکروتیر  
 H: میدان مغناطیسی  
 K: ثوابت محیط الاستیک  
 L: طول میکروتیر  
 m: تانسور مرتبه بالا  
 N: نیروی محوری وارد به میکروتیر  
 U: انرژی پتانسیل کرنشی  
 u: مولفه های بردار جابه جایی  
 W: جابجایی عرضی میکروتیر  
 X, Y, Z: راستاهای جابه جایی

### نمادهای یونانی

- $\varphi$ : چرخش طولی تیر  
 $\Omega$ : ناحیه پیوسته  
 $\varepsilon_{ij}$ : تانسور کرنش  
 $\gamma_i$ : بردار گرادیان گسترش پذیر  
 $\eta_{ijk}^{(1)}$ : تانسور گرادیان کشش انحرافی  
 $\chi_{ij}$ : تانسور گرادیان چرخش  
 $\mathcal{K}$ : بردار چرخش بوده  
 $\delta_{ij}$ : تانسور دلتای کرونیکر  
 $\tau_{ijk}^{(1)}$ : تانسورهای مرتبه بالاتر

$\Gamma$ : پتانسیل‌های مغناطیسی

$\theta$ : پتانسیل‌های الکتریکی

$\phi_E$ : تغییرات میدان الکتریکی

$\Upsilon_H$ : تغییرات میدان مغناطیسی

$\bar{\beta}_{ij}$ : ثابت مگنتوالکتریک

$\bar{\lambda}_i$ : ثابت پیرو مغناطیس

$\nu$ : ضریب پواسون

$\mu$  و  $\lambda$ : ثوابت لامه

## پیوست

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \bar{c}_{44} = c_{44}, \bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}}$$

$$\bar{e}_{15} = e_{15}, \bar{q}_{31} = q_{31} - \frac{c_{13}q_{33}}{c_{33}}, \bar{d}_{11} = d_{11}$$

$$\bar{s}_{11} = s_{11}, \bar{s}_{33} = s_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}, \bar{\alpha}_{11} = \alpha_{11}, \bar{\nu}_3 = \nu_3 + \frac{e_{33}\beta_3}{c_{33}} \quad (\text{الف})$$

$$\bar{d}_{33} = d_{33} + \frac{e_{33}q_{33}}{c_{33}}, \bar{q}_{15} = q_{15}, \bar{\lambda}_3 = \lambda_3 + \frac{q_{33}\beta_3}{c_{33}}$$

$$\bar{\alpha}_{33} = \alpha_{33} + \frac{q_{33}^2}{c_{33}}, \bar{\beta}_1 = \beta_1 - \frac{c_{13}\beta_3}{c_{33}}$$



$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} E_{15}^{(0)} \\ E_{15}^{(2)} \end{Bmatrix} &= \int_A \bar{e}_{15} \cos(\beta z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} dA \\
 \begin{Bmatrix} Q_{15}^{(0)} \\ Q_{15}^{(2)} \end{Bmatrix} &= \int_A \bar{q}_{15} \cos(\beta z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} dA \\
 \begin{Bmatrix} E_{31}^{(1)} \\ E_{31}^{(3)} \end{Bmatrix} &= \int_A \bar{e}_{31} \beta \sin(\beta z) \begin{Bmatrix} z \\ z^3 \end{Bmatrix} dA \\
 \begin{Bmatrix} Q_{31}^{(1)} \\ Q_{31}^{(3)} \end{Bmatrix} &= \int_A \bar{q}_{31} \beta \sin(\beta z) \begin{Bmatrix} z \\ z^3 \end{Bmatrix} dA \\
 \{X_{11}, Y_{11}, T_{11}\} &= \int_A \{\bar{s}_{11}, \bar{d}_{11}, \bar{\mu}_{11}\} \cos^2(\beta z) dA, \\
 \{X_{33}, Y_{33}, T_{33}\} &= \int_A \{\bar{s}_{33}, \bar{d}_{33}, \bar{\mu}_{33}\} [\beta \sin(\beta z) z]^2 dA \\
 \left\{ \begin{aligned} \bar{c}_{44} A &= A_{44} \\ \mu A &= A_{55}, c_1 \mu I = I_{44}, c_1 \bar{c}_{11} J = J_{22} \\ I c_1 \bar{c}_{44} &= I_{55}, I \mu = I_{33}, c_1 \mu J = J_{33} \\ I \mu c_1^2 &= I_{66}, I \bar{c}_{11} = I_{22}, J \mu c_1^2 = J_{44} \\ K \mu c_1^2 &= K_{22}, c_1^2 \bar{c}_{11} K = K_{33}, c_1^2 \bar{c}_{44} J = J_{55} \\ A &= bh, I = \frac{bh^3}{12}, J = \frac{bh^5}{80}, K = \frac{bh^7}{448} \end{aligned} \right. \quad \text{also for } *
 \end{aligned}
 \tag{ب}$$

## **Abstract**

In this paper, the linear buckling analysis of double – bonded micro beam was carried out based on the Reddy-Levinson model and the modified strain gradient theory. The studied system consists of an isotropic micro beam and a magneto-electro-elastic composite micro beam. The beams are connected by an enclosing elastic medium and were simulated according to the both Winkler and Pasternak models. In order to verify the outcomes, they were compared with the available published data. The comparison shows that the results are in a good agreement with other research outcomes. The results show that as the Winkler and Pasternak constants increase, the critical buckling load decreases along the ratio of the thickness to the material length scale parameter. Moreover, the results confirm that the addition of a magneto-electro-elastic composite micro beam of the system, including anisotropic micro beam lead to the reduction of the critical buckling load.