

## تأثیر پارامترهای هندسی روی فرکانسهای طبیعی تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله کربنی مدرج و دو نوع هسته سفت و انعطاف‌پذیر

در مقاله حاضر رفتار ارتعاشی تیر ساندویچی با هسته سفت و انعطاف‌پذیر و رویه‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی بررسی شده است. نانو لوله‌های کربنی به صورت موادی که تابع ضخامت رویه‌ها هستند مورد استفاده قرار گرفته است و خواص آن‌ها در راستای ضخامت تغییر میکنند. در این تحقیق جهت مدلسازی رفتار تیر ساندویچی از تئوری مرتبه بالای ساندویچی توسعه یافته استفاده شده است. نتایج حاصل با نتایج موجود مقایسه گردیده است که بیانگر دقت بالای مدل سازی حاضر میباشد. نتایج برای توزیع‌های مختلف نانو لوله‌های کربنی و تکیه‌گاه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق نتایج جدیدی برای شرایط مرزی مختلف بر حسب نسبت طول به ضخامت‌های مختلف تیر ارائه شده است. یکی از نتایج مهم در این تحقیق این است که نمی‌توان در حالت کلی گفت که چه نوع توزیعی از نانولوله کربنی منجر به بیشترین و یا کمترین فرکانس طبیعی سازه میشود و این امر به شدت به نسبت طول به ضخامت تیر و یا سفتی و انعطاف‌پذیری هسته وابسته می‌باشد.

سجاد اتحادی<sup>۱</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

محسن بت شکنان دهکردی<sup>۲</sup>

دانشیار

واژه‌های راهنما: تحلیل ارتعاشی، تیر ساندویچی، هسته سفت و انعطاف‌پذیر، نانو لوله‌های کربنی مدرج، تئوری مرتبه بالای توسعه یافته

### ۱- مقدمه

یک تیر ساندویچی از دو بخش اصلی تشکیل شده است. نخست هسته‌هایی که ضعیف و معمولاً حجیم است. دیگری رویه‌های واقع در دو طرف هسته که قوی و معمولاً نازک هستند [۱]. رویه‌ها معمولاً از ورق‌های فلزی یا ورق‌های کامپوزیتی ساخته می‌شوند و هسته می‌تواند از پلیمرهای سبک، فوم‌ها، سازه‌های لانه زنبوری یا مواد با خاصیت توزیع تابعی تشکیل شود. در سال‌های اخیر به منظور کاهش وزن و انعطاف‌پذیری بیشتر فوم‌های پلاستیکی به جای هسته مشبک استفاده شده است. هسته انعطاف‌پذیر باعث می‌شود که تیر قابلیت خمیده شدن را داشته باشد.

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه شهرکرد  
<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه شهرکرد

تاریخ دریافت: ۹۶/۱۰/۲۱، تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۲/۰۷

ماده هسته باید خصوصیاتمانند چگالی کم برای هرچه کمتر نمودن وزن سازه و مدول یانگ عمودی بالا برای ممانعت از تغییر شکل بیش از اندازه در راستای ضخامت و کاهش سریع سفتی خمشی داشته باشد. در بیشتر موارد رویه‌ها بارهای خمشی و هسته بارهای برشی را تحمل می‌کنند [۲]. اصول کلی حاکم بر سازه‌های ساندویچی با وجود تنوع بالای آن‌ها یکسان است. این ساختار به ظاهر ساده که به علت تشابه ظاهری با ساندویچ به همین نام خوانده می‌شود، مزیت‌ها و قابلیت‌های فوق‌العاده‌هایی از خود نشان می‌دهد. یک ساختار ساندویچی مقاومت بسیار بالاتری نسبت به تک تک اجزای خود دارد و از سبکی فوق‌العاده نیز برخوردار است. نانو کامپوزیت‌های نانو لوله کربنی دارای استحکام بیشتری نسبت به کامپوزیت‌های موجود و کامپوزیت‌های مبتنی بر نانو ذرات هستند. از نظر تئوری کاربرد نانو لوله‌ها در کامپوزیت‌ها به دلیل استحکام کششی بالا مانع مصرف الیاف کربنی در کامپوزیت‌ها خواهد شد. خواص رسانایی یا حفاظت در برابر اشعه نانو لوله‌ها می‌تواند برای کامپوزیت‌ها ارزشمند باشد. نانو لوله‌ها یکی از مستحکم‌ترین مواد به شمار می‌روند.

این موضوع، کاربرد نانو لوله‌های کربنی را به عنوان ماده‌ی پرکننده در تولید نانو کامپوزیت‌ها به خوبی روشن می‌سازد. مزیت اصلی استفاده از نانو لوله‌ها در کامپوزیت، افزایش سختی کامپوزیت در اثر جذب انرژی است که به دلیل رفتار الاستیک و انعطاف پذیر نانو لوله کربنی است. کامپوزیت‌های بر پایه نانو لوله‌ی کربنی دارای نسبت استحکام به وزن بالا هستند و مصارف گسترده‌ای را در صنعت خواهند داشت. مانند نمونه می‌توان به نانو کامپوزیت‌های بتن که در آنها موادی مانند نانو لوله کربنی استفاده شده، اشاره کرد.

افزودن پلیمر به صورت پراکنده به سیمان، خواص مکانیکی بتن را به مقدار قابل توجهی در دراز مدت افزایش می‌دهد. به کار بردن نانو مواد در سازه‌ها می‌تواند منجر به بهبود ریز ساخت بناها شود زیرا مقاومت مکانیکی و عمر سازه وابسته به ساختار میکرو و انتقال جرم و پایداری وابسته به ساختار نانو است. نانو لوله کربنی که اگر در سازه‌ها به مقدار صحیح استفاده شود، همانند میلگرد در بتن عمل کرده و مقاومت فشاری و خمشی سازه را افزایش می‌دهد. به علت انعطاف پذیری بالا، نانو لوله کربنی به عنوان جذب کننده‌ی شوک عمل کرده و مانع ویرانی ساختمان‌ها و سازه‌ها می‌شود.

فروستیگ [۳] در سال (۱۹۹۰) تئوری مشهور مرتبه بالای پانل‌های ساندویچی که از تئوری‌های چند لایه است را بدست آورد. در این تئوری رویه و هسته به طور جداگانه مدل شده‌اند. تفاوت اصلی این تئوری با تئوری‌های دیگر از جمله تئوری‌های کلاسیک در این است که در این تئوری هر لایه به صورت جداگانه مدل شده است ولی در دیگر تئوری‌ها کل تیر به صورت یک لایه مدل میشوند و این تفاوت باعث بالارفتن دقت نتایج در این مدلسازی میشود. همچنین در این تئوری انعطاف پذیری سازه در راستای ضخامت در نظر گرفته شده، که بسیاری از تئوری‌های تک لایه قادر به مدلسازی انعطاف پذیری نمی‌باشند.

در اکثر تحقیقات که از تئوری مرتبه بالا استفاده شده است به علت انعطاف پذیر بودن هسته از تنش درون صفحه‌ای در هسته صرف نظر شده است. این به خاطر کم بودن مدول الاستیسیته و سفتی خمشی هسته نرم در مقایسه با رویه می‌باشد. ولی در این مقاله روابط ارائه شده برای هسته سفت نیز کاربرد دارد و از تنش درون صفحه‌ای در هسته صرف نظر نشده است. نانو لوله‌های کربنی خواص مکانیکی قابل توجهی دارند [۴] چنانچه نانولوله‌ی کربنی فقط شامل یک لوله از گرافیت باشد، نانولوله تک دیواره و اگر شامل تعدادی از لوله‌های متحد‌المرکز باشد نانولوله چند دیواره نامیده می‌شود [۵].

استفاده از نانو لوله‌های کربنی به عنوان تقویت مواد مرکب در مقایسه با استفاده از فیبرهای کربنی سنتی، می‌تواند به طور قابل توجهی استحکام و سفتی کامپوزیت را افزایش دهد [۶] مواد تابعی مدرج<sup>۱</sup> کامپوزیت‌های ناهمگنی هستند که خواص مکانیکی آنها در راستای ضخامت تغییر می‌کنند. در سال‌های اخیر این موضوع به طور گسترده مطالعه‌ها را بر روی خمش، ارتعاشات و کماتش سازه‌هایی با مواد تابعی مدرج معطوف کرده است [۷]. بهنگل و گانسان [۸] به مطالعه رفتار خمشی و ارتعاشی تیر ساندویچی با رویه‌های تابعی مدرج پرداخته‌اند. شن [۹] به مقایسه و بررسی تاثیر توزیع یکنواخت و توزیع تابعی مدرج بر رفتار خمشی صفحه نانو لوله کربنی پرداخته است. نتایج او نشان می‌دهد که توزیع تابعی مدرج رفتار خمشی را بهبود می‌بخشد. شن و ژو [۱۰] از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا برای مطالعه کماتش صفحات ساندویچی با رویه نانو کربن استفاده نموده‌اند. نتایج نشان می‌دهد تغییر دما، کسر حجمی رویه‌های نانو لوله و ضخامت رویه‌ها بر روی بار کماتش صفحات ساندویچی تاثیر می‌گذارد.

وو و کیتیپورنچای [۷] به بررسی رفتار ارتعاشی و خمشی تیر ساندویچی با رویه‌هایی از جنس نانو کربن تابعی مدرج با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو پرداخته‌اند. آنها به این نتیجه رسیدند که توزیع تابعی مدرج نانولوله کربن فرکانس طبیعی بالاتر و رفتار خمشی بهتر نسبت به حالت توزیع یکنواخت دارد. انصاری و همکاران [۱۱] ارتعاشات غیر خطی صفحات کامپوزیتی که با نانو لوله‌های کربنی تقویت شده‌اند را بررسی نموده است. او از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روابط ون کارمن استفاده کرده است.

او دریافت با افزایش کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی، سختی خمشی صفحه افزایش می‌یابد و همچنین فرکانس طبیعی بزرگتر می‌شود. همچنین مشاهده نمود که توزیع نانو لوله‌ها تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار ارتعاشاتی صفحات می‌گذارد. یانگ و همکاران [۱۲] تاثیر کسر حجمی نانو لوله کربنی بر ارتعاشات آزاد غیر خطی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. نتایج او نشان داد که با افزایش کسر حجمی کربن فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. فروستینگ [۱۳] به بررسی رفتار تیر ساندویچی و ساختارهای لایه‌ای با هسته انعطاف پذیر پرداخته است. ایشان در مطالعات خود به مطالعه رویه‌های فلزی و کامپوزیتی و هسته ساخته شده از فوم پرداخته است و معادلات حاکم بر رفتار این ساختارها را محاسبه کرده است.

در این تحقیق رفتار ارتعاشی تیر ساندویچی با هسته‌ی سفت و انعطاف پذیر و رویه‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی بررسی شده است که در بررسی رویه‌ها از تئوری تیموشنکو و در بررسی هسته از الایسیسته سه بعدی با در نظر گرفتن تنش‌های درون صفحه‌ای استفاده شده است. برای حل معادلات حرکت بدست آمده از روش ریتز استفاده شده است و تاثیر توزیع های مختلف نانو لوله کربنی در تکیه گاه های مختلف برفرکانس طبیعی سیستم بررسی شده است. در این تحقیق بیشتر به بررسی اثر نسبت طول به ضخامت تیر برای دو نوع هسته سفت و انعطاف پذیر بررسی شده است.

<sup>1</sup> Functionally graded materials

## ۲- بدست آوردن روابط حاکم

تیر ساندویچی تشکیل شده است از دولایه‌ی کامپوزیتی نازک در بالا و پایین و همچنین هسته در وسط تیر قرار گرفته است و هسته و رویه‌ها کاملاً به یکدیگر چسبیده اند در این مقاله هسته سفت و انعطاف پذیر در نظر گرفته شده است. دولایه‌ی بالایی و پایینی توسط نانو لوله‌های کربنی تقویت شده است. طول تیر  $L$  و عرض تیر  $b$  و ضخامت هر لایه طبق شکل (۱) در نظر گرفته شده است همچنین مرکز مختصات را برای لایه‌ها و هسته هر کدام در وسط ضخامتشان در نظر گرفته شده است.

## ۳- خواص مواد مرکب

در این تحقیق رویه‌ها از جنس نانو لوله کربنی می‌باشند. لذا لازم است که خواص مکانیکی این مواد بیان شود. قانون هوک برای مخلوط‌ها به شکل زیر بیان می‌شود [۱۴]:

$$\sigma_{xx} = C_{11}^* \epsilon_{xx} \quad (۱)$$

$$\tau_{xz} = C_{55}^* \gamma_{xz} \quad (۲)$$

$$C_{11}^* = C_{11}m^4 + 2(C_{12} + C_{66})m^2n^2 + C_{22}n^4 \quad (۳)$$

$$C_{55}^* = C_{55}m^2 + C_{44}n^2 \quad (۴)$$

که در فرمول (۳) و (۴) داریم:

$$m = \cos\theta \quad (۵)$$

$$n = \sin\theta \quad (۶)$$

$\theta$  زاویه نانو لوله‌های کربنی با محور افقی است. چون که در این تحقیق نانو لوله‌ها به صورت افقی در رویه‌ها قرار گرفته‌اند، لذا  $\theta = 0$  و فرمول (۳) و (۴) به شکل زیر نوشته می‌شود:

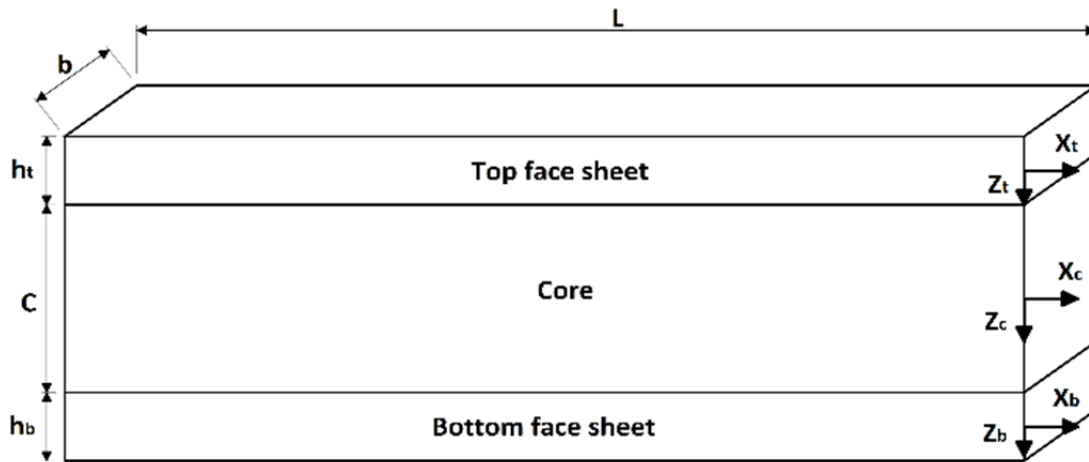
$$C_{11}^* = C_{11} = E_{11} \quad (۷)$$

$$C_{55}^* = C_{55} = G_{13} = G_{12} \quad (۸)$$

طبق قانون مخلوط‌ها برای خواص مکانیکی، مدول الاستیسیته و مدول برشی به شکل زیر نوشته می‌شود [۱۵]:

$$E_{11} = \eta_1 V_{cn} E_{11}^{cn} + V_m E_m \quad (۹)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{cn}}{G_{12}^{cn}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (۱۰)$$



شکل ۱- هندسه و ابعاد تیر ساندویچی

که  $V_{cn}$  کسر حجمی نانو لوله کربنی و  $V_m$  کسر حجمی زمینه و  $E_{11}^{cn}$  مدول الاستیسیته نانو لوله کربنی و  $E_m$  مدول الاستیسیته زمینه می‌باشد. و  $G_{12}^{cn}$  مدول برشی نانو لوله کربنی و  $G_m$  مدول برشی زمینه می‌باشد  $\eta_1$  و  $\eta_3$  پارامترهایی برای خواص وابسته به مقیاس است. رویه‌ها به شکل نانولوله کربنی تابعی مدرج در نظر گرفته شده‌اند که UD, FG-O, FG-X, FG-V و FG- $\Lambda$  مورد بررسی قرار گرفته‌اند و در شکل (۲) الگوی توزیع آن‌ها آورده شده است. کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی مدرج، تابعی از ضخامت رویه‌ها است که در جدول (۱) ارتباط کسر حجمی و ضخامت بیان شده است. در جدول (۱)،  $V_{cn}^*$  کسر حجمی ویژه می‌باشد. در این تحقیق کسر حجمی های ویژه استفاده شده و پارامترهای وابسته به مقیاس برای نانو لوله‌های کربنی به صورت زیر است:

برای  $v_{cn}^* = 0.12$  مقادیر  $\eta_1 = 0.137$  و  $\eta_3 = 0.715$  و برای کسر حجمی  $v_{cn}^* = 0.17$  مقادیر  $\eta_1 = 0.142$  و  $\eta_3 = 1.138$  و برای کسر حجمی  $v_{cn}^* = 0.28$  مقادیر  $\eta_1 = 0.141$  و  $\eta_3 = 1.109$  برقرار می‌باشد.

طبق قانون مواد مرکب چگالی رویه‌ها به شکل زیر نوشته می‌شود [۱۶]:

$$\rho = V_{cn}\rho^{cn} + V_m\rho^m \quad (11)$$

که  $\rho^{cn}$  چگالی نانو لوله کربنی و  $\rho^m$  چگالی زمینه است.

#### ۴- میدان‌های جابجایی

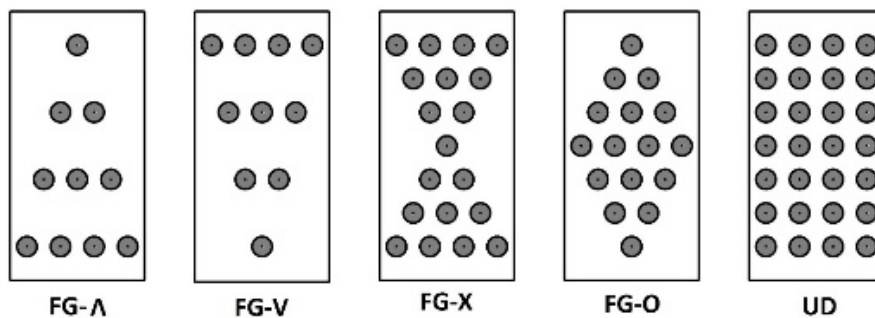
در این مقاله تئوری مرتبه بالای ساندویچی توسعه یافته است بدین صورت که برای مدل‌سازی رویه‌ها تئوری تیر تیموشنکو و همچنین برای مدل‌سازی هسته تنش‌های درون صفحه‌ای نیز، در نظر گرفته شده است لذا میدان جابجایی رویه‌ها به شکل زیر بیان می‌شود:

$$u^i(x, z, t) = u_0^i(x, t) + z_i \phi^i(x, t) \quad (i = t, b) \quad (12)$$

$$w^i(x, z, t) = w_0^i(x, t) \quad (i = t, b) \quad (13)$$

جدول ۱- رابطه کسر حجمی نانو لوله کربنی و ضخامت

کسر حجمی روپه پایین ( $V_{cn}$ )	کسر حجمی روپه بالا ( $V_{cn}$ )	الگوی توزیع نانو لوله‌های کربنی
$V_{cn}^*$	$V_{cn}^*$	UD
$2V_{cn}^*(1 - 2\frac{ z }{h_b})$	$2V_{cn}^*(1 - 2\frac{ z }{h_t})$	FG-O
$4V_{cn}^*(\frac{ z }{h_b})$	$4V_{cn}^*(\frac{ z }{h_t})$	FG-X
$2V_{cn}^*(0.5 + \frac{z}{h_b})$	$2V_{cn}^*(0.5 - \frac{z}{h_t})$	FG-V
$2V_{cn}^*(0.5 - \frac{z}{h_b})$	$2V_{cn}^*(0.5 + \frac{z}{h_t})$	FG-A



شکل ۲- الگوی توزیع نانو لوله‌های کربنی

و روابط کرنش برای روپه‌ها به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\epsilon_{xx}^i(x,z,t) = u_{,x}^i(x,z,t) = u_{0,x}^i(x,t) + z\phi_{,x}^i(x,t) \quad (14)$$

$$\gamma_{xz}^i(x,z,t) = u_{,x}^i(x,z,t) + w_{,x}^i(x,z,t) = \phi^i(x,t) + w_{0,x}^i(x,t) \quad (15)$$

فروستیک در تحقیقات خود نشان داد که جابجایی محوری در هسته به فرم درجه سه و جابجایی عرضی به فرم درجه دو میباشد [۱۷]. بنابراین میدان جابجایی برای هسته به شکل زیر بیان می‌شود:

$$u^c(x,z,t) = u_0^c(x,t) + u_1^c(x,t)z_c + u_2^c(x,t)z_c^2 + u_3^c(x,t)z_c^3 \quad (16)$$

$$w^c(x,z,t) = w_0^c(x,t) + w_1^c(x,t)z_c + w_2^c(x,t)z_c^2 \quad (17)$$

باتوجه به میدان جابجایی که برای خیز هسته در راستای ضخامت تابعی از درجه دو در نظر گرفته شده است میتوان هسته انعطاف پذیر را مورد بررسی قرار داد. باتوجه به پیوستگی میدان جابجایی بین هسته و رویه‌ها روابط سازگاری به شکل زیر بیان می‌شوند.

$$w^c\left(x, -\frac{c}{2}, t\right) = w^t(x, t) \quad (18)$$

$$u^c\left(x, -\frac{c}{2}, t\right) = u_0^t(x, t) + \frac{h_t}{2} \phi^t(x, t) \quad (19)$$

$$w^c\left(x, \frac{c}{2}, t\right) = w^b(x, t) \quad (20)$$

$$u^c\left(x, \frac{c}{2}, t\right) = u_0^b(x, t) - \frac{h_b}{2} \phi^b(x, t) \quad (21)$$

با اعمال یک سری روابط ریاضی می‌توانیم میدان جابجایی هسته را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$u^c(x, z, t) = u_0^c(x, t) + \phi_0^c(x, t)z_c + \left[ \frac{2}{c^2} \left( u_0^t(x, t) + u_0^b(x, t) - 2u_0^c(x, t) + \frac{h_t}{2} \phi^t(x, t) - \frac{h_b}{2} \phi^b(x, t) \right) \right] z_c^2 + \left[ \frac{4}{c^3} \left( -u_0^t(x, t) - \frac{h_t}{2} \phi^t(x, t) + u_0^b(x, t) - \frac{h_b}{2} \phi^b(x, t) - c\phi_0^c(x, t) \right) \right] z_c^3 \quad (22)$$

$$w^c(x, z, t) = w_0^c(x, t) + \frac{1}{c} [w_0^b(x, t) - w_0^t(x, t)]z_c + \frac{2}{c^2} [w_0^t(x, t) + w_0^b(x, t) - 2w_0^c(x, t)]z_c^2 \quad (23)$$

و روابط کرنش بر اساس کرنش‌های خطی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\epsilon_{xx}^c(x, z, t) = u_{,x}^c(x, z, t) \quad (24)$$

$$\gamma_{xz}^c(x, z, t) = u_{,z}^c(x, z, t) + w_{,x}^c(x, z, t) \quad (25)$$

$$\epsilon_{zz}^c(x, z, t) = w_{,z}^c(x, z, t) \quad (26)$$

روابط تنش و کرنش بر اساس رفتار الاستیک خطی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^c \\ \sigma_{zz}^c \\ \tau_{xz}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{13}^c & 0 \\ C_{13}^c & C_{33}^c & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^c \\ \epsilon_{zz}^c \\ \gamma_{xz}^c \end{bmatrix} \quad (27)$$

که  $C_{ij}^c$  ضرایب سختی برای مواد ارتوتروپیک می‌باشد. معادلات حرکت براساس اصل همپلتون بدون وجود نیروهای ناپایستار براساس معادله‌ی زیر حاصل می‌شوند.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\partial T - \partial U] dt = 0 \quad (28)$$

### ۵- محاسبه انرژی کرنشی

اولین تغییرات انرژی کرنشی به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta U = & \iiint_{v_{top}} \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} dv + \iiint_{v_{top}} k_s \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} dv + \iiint_{v_{bot}} \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} dv + \\ & \iiint_{v_{bot}} k_s \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} dv + \iiint_{v_{core}} \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} dv + \iiint_{v_{core}} \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} dv + \\ & \iiint_{v_{core}} \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} dv \end{aligned} \quad (29)$$

در فرمول (۲۹) به علت اینکه در این مقاله هسته سفت نیز بررسی شده است از ترم  $\sigma_{xx}^c$  که در معادله وجود دارد صرفه نظر نشده است. در صورتی که از تنش طولی درون صفحه‌ای هسته صرفه نظر بشود، در تحلیل هسته سفت خطا ایجاد میشود. در این تحقیق با توجه به اینکه قرار است هر دو نوع هسته سفت و انعطاف پذیر مورد بررسی قرار بگیرد، برای تحلیل هسته سفت تنش طولی هسته در فرمولاسیون لحاظ شده است و همچنین با توجه به میدان جابجایی فرض شده که برای خیز هسته در راستای ضخامت میدان جابجایی تابعی درجه دو در نظر گرفته شده است میتوان هسته انعطاف پذیر را مورد بررسی قرار داد.

### ۶- محاسبه انرژی جنبشی

$$\begin{aligned} \delta T = & - \int_{v_t} \rho^t (\ddot{u}_0^t \delta u_0^t + \ddot{w}_0^t \delta w_0^t) dv - \int_{v_b} \rho^b (\ddot{u}_0^b \delta u_0^b + \\ & \ddot{w}_0^b \delta w_0^b) dv - \int_{v_c} \rho_c \ddot{u}_c \delta u_c dv - \int_{v_c} \rho_c \ddot{w}_c \delta w_c dv \end{aligned} \quad (30)$$

در فرمول (۳۰) شتاب هسته و رویه‌ها به صورت زیر می‌باشد.

$$\ddot{u}^i = \ddot{u}_0^i + z \ddot{\phi}^i \quad (i = t, b) \quad (31)$$

$$\ddot{w}^i = \ddot{w}_0^i \quad (i = t, b) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_c = & \ddot{u}_0^c + \ddot{\phi}_0^c z_c + \left[ \frac{2}{c^2} \left( \ddot{u}_0^t + \ddot{u}_0^b - 2\ddot{u}_0^c + \frac{h_t}{2} \ddot{\phi}^t - \frac{h_b}{2} \ddot{\phi}^b \right) \right] z_c^2 \\ & + \left[ \frac{4}{c^3} \left( -\ddot{u}_0^t - \frac{h_t}{2} \ddot{\phi}^t + \ddot{u}_0^b - \frac{h_b}{2} \ddot{\phi}^b - c \ddot{\phi}_0^c \right) \right] z_c^3 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\ddot{w}_c = \ddot{w}_0^c + \frac{1}{c} [\ddot{w}_0^b - \ddot{w}_0^t] z_c + \frac{2}{c^2} [\ddot{w}_0^t + \ddot{w}_0^b - 2\ddot{w}_0^c] z_c^2 \quad (34)$$



با جایگذاری روابط (۳۱) تا (۳۴) در معادله‌ی (۳۰) انرژی جنبشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta T = - \int_0^l ([b(I_0^t \ddot{u}_0^t + I_1^t \ddot{\phi}^t) \delta u_0^t + b(I_1^t \ddot{u}_0^t + I_2^t \ddot{\phi}^t) \delta \phi^t + b I_0^t \ddot{w}_0^t \delta w_0^t] + [b(I_0^b \ddot{u}_0^b + I_1^b \ddot{\phi}^b) \delta u_0^b + b(I_1^b \ddot{u}_0^b + I_2^b \ddot{\phi}^b) \delta \phi^b + b I_0^b \ddot{w}_0^b \delta w_0^b]) dx - \int_{v_c} \rho_c \ddot{u}_c \delta u_c dv - \int_{v_c} \rho_c \ddot{w}_c \delta w_c dv \quad (35)$$

در معادله (۳۵) مقادیر  $I_0^i$  و  $I_1^i$  و  $I_2^i$  به صورت زیر برای توزیع‌های متفاوت نانو لوله کربنی بدست می‌آیند.

$$I_0^i = \int_{v_i} \rho_i dz \quad (i = t, b) \quad (36)$$

$$I_1^i = \int_{v_i} \rho_i z dz \quad (i = t, b) \quad (37)$$

$$I_2^i = \int_{v_i} \rho_i z^2 dz \quad (i = t, b) \quad (38)$$

## ۷- حل معادلات حرکت

برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی که معادلات حاکم بر حرکت آن بر اساس روش انرژی بدست آمده است روش ریتز روش خوبی بر مبنای روش انرژی است که با این روش فرکانس طبیعی تیر بدست می‌آید در ضمن در این روش تکیه گاه‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد از جمله تکیه گاه ساده لولایی و غلتکی، تکیه گاه گیردار، تکیه گاه گیردار- ساده لولایی و غلتکی، تکیه گاه آزاد-گیردار در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. دستگاه مختصات تیر را هم برای رویه‌ها و هم هسته در وسط تیر ساندویچی و برای هر کدام از آن‌ها هم در راستای  $z$  در وسط ضخامتشان در نظر می‌گیریم و پارامتر جدیدی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\zeta = \frac{2x}{L} \quad (39)$$

مطابق با روش ریتز میدان جابجایی را برای جابجایی‌های هارمونیک به صورت سری‌های زیر در نظر می‌گیریم که در این معادلات ضرایبی به اسم  $R$  را وارد می‌کنیم که این ضرایب برای ارضا کردن شرایط مرزی مساله می‌باشد که برای شرایط مرزی مختلف این مقدار متفاوت می‌باشد که در ادامه به مقدارهای این ضریب برای شرایط مختلف خواهیم پرداخت.

$$u_0^i(x, t) = e^{i\omega t} R^u \sum_{j=1}^M U_{0j}^i P_j(\zeta) \quad (i = t, b, c) \quad (40)$$

$$\phi^i(x, t) = e^{i\omega t} R^\phi \sum_{j=1}^M \phi_j^i P_j(\zeta) \quad (i = t, b, c) \quad (41)$$

$$w_0^i(x,t) = e^{i\omega t} R^w \sum_{j=1}^M W_{0j}^i P_j(\zeta) \quad (i = t, b, c) \quad (42)$$

در میدان جابجایی که معرفی شد مقدار  $P_j(\zeta), (j = 1, \dots, M)$  که به اسم ضرایب چبیشف مشهور هستند که در بازه  $[-1, 1]$  معرفی می‌شوند به صورت زیر می باشد:

$$P_j(\zeta) = \cos[(j - 1) \arccos(\zeta)] \quad (43)$$

در رابطه (۴۳) برای ابتدا و انتهای تیر مقدار این رابطه مخالف صفر است یعنی  $P_m(\pm 1) \neq 0$  پس برای ارضا کردن شرایط مرزی در تکیه گاه های مختلف باید ضرایب  $R$  را تعریف کنیم این ضرایب در جدول (۲) گردآوری شده است.

مقدار  $M$  در سری های میدان جابجایی تعداد ضرایب مجهول جابجایی برای هر کدام از میدان جابجایی را مشخص میکند و این مقدار باید به نحوی انتخاب شود که سری های میدان جابجایی همگرا بشوند و این مقدار بسته به نوع شرایط مرزی متفاوت می باشد.

با جایگذاری میدان جابجایی که تعریف شدند در تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات انرژی جنبشی ماتریس های سختی و جرم به صورت زیر بدست می آیند و با توجه به رابطه (۴۴) فرکانس های طبیعی تیر بدست خواهند آمد.

$$(-\omega^2 \bar{M} + \bar{K}) \bar{y} = 0 \quad (44)$$

$$\bar{y} = [ U_{0j}^t \ W_{0j}^t \ \phi_j^t \ U_{0j}^b \ W_{0j}^b \ \phi_j^b \ U_{0j}^c \ W_{0j}^c \ \phi_j^c ] \quad (45)$$

جدول ۲- مقادیر مختلف ضرایب  $R$  برای تکیه گاه های مختلف

$R^w$	$R^\phi$	$R^u$	شرایط مرزی تکیه گاه ها
$1 - \zeta^2$	$1 - \zeta^2$	$1 - \zeta^2$	C-C (گیردار)
$1 - \zeta^2$	$1 - \zeta$	$1 - \zeta^2$	S-C (ساده لولایی-گیردار)
$1 - \zeta^2$	$1 - \zeta$	$1 - \zeta$	S-C (ساده غلتکی-گیردار)
$1 - \zeta^2$	1	$1 - \zeta^2$	S-S (ساده لولایی)
$1 - \zeta^2$	1	1	S-S (ساده-غلتکی)
$1 - \zeta$	$1 - \zeta$	$1 - \zeta$	F-C (آزاد-گیردار)

ماتریس‌های  $\bar{K}$  و  $\bar{M}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} k_{mn}^{11} & k_{mn}^{12} & k_{mn}^{13} & k_{mn}^{14} & k_{mn}^{15} & k_{mn}^{16} & k_{mn}^{17} & k_{mn}^{18} & k_{mn}^{19} \\ k_{mn}^{21} & k_{mn}^{22} & k_{mn}^{23} & k_{mn}^{24} & k_{mn}^{25} & k_{mn}^{26} & k_{mn}^{27} & k_{mn}^{28} & k_{mn}^{29} \\ k_{mn}^{31} & k_{mn}^{32} & k_{mn}^{33} & k_{mn}^{34} & k_{mn}^{35} & k_{mn}^{36} & k_{mn}^{37} & k_{mn}^{38} & k_{mn}^{39} \\ k_{mn}^{41} & k_{mn}^{42} & k_{mn}^{43} & k_{mn}^{44} & k_{mn}^{45} & k_{mn}^{46} & k_{mn}^{47} & k_{mn}^{48} & k_{mn}^{49} \\ k_{mn}^{51} & k_{mn}^{52} & k_{mn}^{53} & k_{mn}^{54} & k_{mn}^{55} & k_{mn}^{56} & k_{mn}^{57} & k_{mn}^{58} & k_{mn}^{59} \\ k_{mn}^{61} & k_{mn}^{62} & k_{mn}^{63} & k_{mn}^{64} & k_{mn}^{65} & k_{mn}^{66} & k_{mn}^{67} & k_{mn}^{68} & k_{mn}^{69} \\ k_{mn}^{71} & k_{mn}^{72} & k_{mn}^{73} & k_{mn}^{74} & k_{mn}^{75} & k_{mn}^{76} & k_{mn}^{77} & k_{mn}^{78} & k_{mn}^{79} \\ k_{mn}^{81} & k_{mn}^{82} & k_{mn}^{83} & k_{mn}^{84} & k_{mn}^{85} & k_{mn}^{86} & k_{mn}^{87} & k_{mn}^{88} & k_{mn}^{89} \\ k_{mn}^{91} & k_{mn}^{92} & k_{mn}^{93} & k_{mn}^{94} & k_{mn}^{95} & k_{mn}^{96} & k_{mn}^{97} & k_{mn}^{98} & k_{mn}^{99} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m_{mn}^{11} & m_{mn}^{12} & m_{mn}^{13} & m_{mn}^{14} & m_{mn}^{15} & m_{mn}^{16} & m_{mn}^{17} & m_{mn}^{18} & m_{mn}^{19} \\ m_{mn}^{21} & m_{mn}^{22} & m_{mn}^{23} & m_{mn}^{24} & m_{mn}^{25} & m_{mn}^{26} & m_{mn}^{27} & m_{mn}^{28} & m_{mn}^{29} \\ m_{mn}^{31} & m_{mn}^{32} & m_{mn}^{33} & m_{mn}^{34} & m_{mn}^{35} & m_{mn}^{36} & m_{mn}^{37} & m_{mn}^{38} & m_{mn}^{39} \\ m_{mn}^{41} & m_{mn}^{42} & m_{mn}^{43} & m_{mn}^{44} & m_{mn}^{45} & m_{mn}^{46} & m_{mn}^{47} & m_{mn}^{48} & m_{mn}^{49} \\ m_{mn}^{51} & m_{mn}^{52} & m_{mn}^{53} & m_{mn}^{54} & m_{mn}^{55} & m_{mn}^{56} & m_{mn}^{57} & m_{mn}^{58} & m_{mn}^{59} \\ m_{mn}^{61} & m_{mn}^{62} & m_{mn}^{63} & m_{mn}^{64} & m_{mn}^{65} & m_{mn}^{66} & m_{mn}^{67} & m_{mn}^{68} & m_{mn}^{69} \\ m_{mn}^{71} & m_{mn}^{72} & m_{mn}^{73} & m_{mn}^{74} & m_{mn}^{75} & m_{mn}^{76} & m_{mn}^{77} & m_{mn}^{78} & m_{mn}^{79} \\ m_{mn}^{81} & m_{mn}^{82} & m_{mn}^{83} & m_{mn}^{84} & m_{mn}^{85} & m_{mn}^{86} & m_{mn}^{87} & m_{mn}^{88} & m_{mn}^{89} \\ m_{mn}^{91} & m_{mn}^{92} & m_{mn}^{93} & m_{mn}^{94} & m_{mn}^{95} & m_{mn}^{96} & m_{mn}^{97} & m_{mn}^{98} & m_{mn}^{99} \end{bmatrix} \quad (47)$$

که درایه‌های ماتریس جرم و سختی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$k_{mn}^{11} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\partial u_m^t}{\partial x} \frac{\partial u_n^t}{\partial x} \left( A_t h_t + \frac{3 C_{11}^c}{35} c \right) + \frac{47 C_{55}^c}{15c} u_m^t u_n^t \right) dx \quad (48)$$

$$k_{mn}^{12} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{11 C_{13}^c}{30} w_n^t \frac{\partial u_m^t}{\partial x} - \frac{19 C_{55}^c}{30} u_m^t \frac{\partial w_n^t}{\partial x} \right) dx \quad (49)$$

$$k_{mn}^{13} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \left( \frac{3 c C_{11}^c}{70} h_t + B_t h_t \right) \frac{\partial u_m^t}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^t}{\partial x} + \frac{47 C_{55}^c}{30c} h_t u_m^t \phi_n^t \right) dx \quad (50)$$

$$k_{mn}^{14} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c C_{11}^c}{70} \frac{\partial u_m^t}{\partial x} \frac{\partial u_n^b}{\partial x} - \frac{7 C_{55}^c}{15c} u_m^t u_n^b \right) dx \quad (51)$$

$$k_{mn}^{15} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{55}^c u_m^t}{30} \frac{\partial w_n^b}{\partial x} - \frac{C_{13}^c w_n^b}{30} \frac{\partial u_m^t}{\partial x} \right) dx \quad (52)$$

$$k_{mn}^{16} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{7C_{55}^c h_b u_m^t \phi_n^b}{30c} - \frac{c C_{11}^c h_b}{140} \frac{\partial u_m^t}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^b}{\partial x} \right) dx \quad (53)$$

$$k_{mn}^{17} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c C_{11}^c}{15} \frac{\partial u_m^t}{\partial x} \frac{\partial u_n^c}{\partial x} - \frac{8 C_{55}^c u_m^t u_n^c}{3c} \right) dx \quad (54)$$

$$k_{mn}^{18} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{13}^c w_n^c}{5} \frac{\partial u_m^t}{\partial x} - \frac{2 C_{55}^c u_m^t}{5} \frac{\partial w_n^c}{\partial x} \right) dx \quad (55)$$

$$k_{mn}^{19} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{4 C_{55}^c u_m^t \phi_n^c}{5} - \frac{c^2 C_{11}^c}{70} \frac{\partial u_m^t}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^c}{\partial x} \right) dx \quad (56)$$

$$k_{mn}^{21} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{19 C_{55}^c u_n^t}{30} \frac{\partial w_m^t}{\partial x} - \frac{11 C_{13}^c w_n^t}{30} \frac{\partial u_m^t}{\partial x} \right) dx \quad (57)$$

$$k_{mn}^{22} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{7C_{33}^c w_m^t w_n^t}{3c} \right) dx \quad (58)$$

$$- \frac{\partial w_m^t}{\partial x} \frac{\partial w_n^t}{\partial x} \left( -\frac{2 c C_{55}^c}{15} + h_t(-D_t) \right) dx$$

$$k_{mn}^{23} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\partial w_m^t}{\partial x} \phi_n^t \left( \frac{19 C_{55}^c h_t}{60} - D_t h_t \right) - \frac{11 C_{13}^c h_t w_m^t}{60} \frac{\partial \phi_n^t}{\partial x} \right) dx \quad (59)$$

$$k_{mn}^{24} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{13}^c w_m^t}{30} \frac{\partial u_n^b}{\partial x} - \frac{C_{55}^c u_n^b}{30} \frac{\partial w_m^t}{\partial x} \right) dx \quad (60)$$

$$k_{mn}^{25} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\partial w_m^t}{\partial x} \frac{\partial w_n^b}{\partial x} \left( -\frac{c C_{55}^c}{30} \right) + \frac{C_{33}^c w_m^t w_n^b}{3c} \right) dx \quad (61)$$

$$k_{mn}^{26} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{55}^c h_b \phi_n^b}{60} \frac{\partial w_m^t}{\partial x} - \frac{C_{13}^c h_b w_m^t}{60} \frac{\partial \phi_n^b}{\partial x} \right) dx \quad (62)$$

$$k_{mn}^{27} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{55}^c u_n^c}{3} \frac{\partial w_m^t}{\partial x} - \frac{2 C_{13}^c w_m^t}{3} \frac{\partial u_n^c}{\partial x} \right) dx \quad (63)$$

$$k_{mn}^{28} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( - \frac{\partial w_m^t}{\partial x} \frac{\partial w_n^c}{\partial x} \left( - \frac{c C_{55}^c}{15} \right) - \frac{8 C_{33}^c w_m^t w_n^c}{3c} \right) dx \quad (64)$$

$$k_{mn}^{29} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 c C_{13}^c w_m^t}{15} \frac{\partial \phi_n^c}{\partial x} - \frac{2 c C_{55}^c \phi_n^c}{15} \frac{\partial w_m^t}{\partial x} \right) dx \quad (65)$$

$$k_{mn}^{31} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{3c C_{11}^c h_t}{70} \frac{\partial \phi_m^t}{\partial x} \frac{\partial u_n^t}{\partial x} + \frac{47 C_{55}^c h_t \phi_m^t u_n^t}{30c} \right) dx \quad (66)$$

$$k_{mn}^{32} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( - \phi_m^t \frac{\partial w_n^t}{\partial x} \left( \frac{19 C_{55}^c h_t}{60} - D_t h_t \right) - \frac{11 C_{13}^c h_t w_n^t}{60} \frac{\partial \phi_m^t}{\partial x} \right) dx \quad (67)$$

$$k_{mn}^{33} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \phi_m^t \phi_n^t \left( \frac{47 C_{55}^c h_t^2}{60c} + D_t h_t \right) + \frac{\partial \phi_m^t}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^t}{\partial x} \left( \frac{3 c C_{11}^c h_t^2}{140} \right) \right) dx \quad (68)$$

$$k_{mn}^{34} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c C_{11}^c h_t}{140} \frac{\partial \phi_m^t}{\partial x} \frac{\partial u_n^b}{\partial x} - \frac{7 C_{55}^c h_t \phi_m^t u_n^b}{30c} \right) dx \quad (69)$$

$$k_{mn}^{35} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{55}^c h_t \phi_m^t}{60} \frac{\partial w_n^b}{\partial x} - \frac{C_{13}^c h_t w_n^b}{60} \frac{\partial \phi_m^t}{\partial x} \right) dx \quad (70)$$

$$k_{mn}^{36} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{7 C_{55}^c h_t h_b \phi_m^t \phi_n^b}{60c} - \frac{c C_{11}^c h_t h_b}{280} \frac{\partial \phi_m^t}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^b}{\partial x} \right) dx \quad (71)$$

$$k_{mn}^{37} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c C_{11}^c h_t}{30} \frac{\partial \phi_m^t}{\partial x} \frac{\partial u_n^c}{\partial x} - \frac{4 C_{55}^c h_t \phi_m^t u_n^c}{3c} \right) dx \quad (72)$$

$$k_{mn}^{38} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{13}^c h_t w_n^c}{5} \frac{\partial \phi_m^t}{\partial x} - \frac{C_{55}^c h_t \phi_m^t}{5} \frac{\partial w_n^c}{\partial x} \right) dx \quad (73)$$

$$k_{mn}^{39} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{55}^c h_t \phi_m^t \phi_n^c}{5} - \frac{c^2 C_{11}^c h_t}{140} \frac{\partial \phi_m^t}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^c}{\partial x} \right) dx \quad (74)$$

$$k_{mn}^{41} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c C_{11}^c}{70} \frac{\partial u_m^b}{\partial x} \frac{\partial u_n^t}{\partial x} - \frac{7 C_{55}^c u_m^b u_n^t}{15c} \right) dx \quad (75)$$

$$k_{mn}^{42} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{13}^c w_n^t}{30} \frac{\partial u_m^b}{\partial x} - \frac{C_{55}^c u_m^b}{30} \frac{\partial w_n^t}{\partial x} \right) dx \quad (76)$$

$$k_{mn}^{43} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c C_{11}^c h_t}{140} \frac{\partial u_m^b}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^t}{\partial x} - \frac{7 C_{55}^c h_t u_m^b \phi_n^t}{30c} \right) dx \quad (77)$$

$$k_{mn}^{44} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\partial u_m^b}{\partial x} \frac{\partial u_n^b}{\partial x} \left( A_b h_b + \frac{3 c C_{11}^c}{35} \right) + \frac{47 C_{55}^c u_m^b u_n^b}{15c} \right) dx \quad (78)$$

$$k_{mn}^{45} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{11 C_{13}^c w_n^b}{30} \frac{\partial u_m^b}{\partial x} + \frac{19 C_{55}^c u_m^b}{30} \frac{\partial w_n^b}{\partial x} \right) dx \quad (79)$$

$$k_{mn}^{46} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \left( B_b h_b - \frac{3 c C_{11}^c h_b}{70} \right) \frac{\partial u_m^b}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^b}{\partial x} - \frac{47 C_{55}^c h_b u_m^b \phi_n^b}{30c} \right) dx \quad (80)$$

$$k_{mn}^{47} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c C_{11}^c}{15} \frac{\partial u_m^b}{\partial x} \frac{\partial u_n^c}{\partial x} - \frac{8 C_{55}^c u_m^b u_n^c}{3c} \right) dx \quad (81)$$

$$k_{mn}^{48} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{55}^c u_m^b}{5} \frac{\partial w_n^c}{\partial x} - \frac{2 C_{13}^c w_n^c}{5} \frac{\partial u_m^b}{\partial x} \right) dx \quad (82)$$

$$k_{mn}^{49} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{11}^c c^2}{70} \frac{\partial u_m^b}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^c}{\partial x} - \frac{4 C_{55}^c u_m^b \phi_n^c}{5} \right) dx \quad (83)$$

$$k_{mn}^{51} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{55}^c u_n^t}{30} \frac{\partial w_m^b}{\partial x} - \frac{C_{13}^c w_m^b}{30} \frac{\partial u_n^t}{\partial x} \right) dx \quad (84)$$

$$k_{mn}^{52} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\partial w_m^b}{\partial x} \frac{\partial w_n^t}{\partial x} \left( -\frac{c C_{55}^c}{30} \right) + \frac{C_{33}^c w_m^b w_n^t}{3c} \right) dx \quad (85)$$

$$k_{mn}^{53} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{55}^c h_t \phi_n^t}{60} \frac{\partial w_m^b}{\partial x} - \frac{C_{13}^c h_t w_m^b}{60} \frac{\partial \phi_n^t}{\partial x} \right) dx \quad (86)$$

$$k_{mn}^{54} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{19 C_{55}^c u_n^b}{30} \frac{\partial w_m^b}{\partial x} + \frac{11 C_{13}^c w_m^b}{30} \frac{\partial u_n^b}{\partial x} \right) dx \quad (87)$$

$$k_{mn}^{55} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{7 C_{33}^c w_m^b w_n^b}{3c} - \frac{\partial w_m^b}{\partial x} \frac{\partial w_n^b}{\partial x} \left( -\frac{2c C_{55}^c}{15} + \frac{h_b(-D_b)}{12} \right) \right) dx \quad (88)$$

$$k_{mn}^{56} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\partial w_m^b}{\partial x} \phi_n^b \left( \frac{19 C_{55}^c h_b}{60} - D_b h_b \right) - \frac{11 C_{13}^c h_b w_m^b}{60} \frac{\partial \phi_n^b}{\partial x} \right) dx \quad (89)$$

$$k_{mn}^{57} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{13}^c w_m^b}{3} \frac{\partial u_n^c}{\partial x} - \frac{2 C_{55}^c u_n^c}{3} \frac{\partial w_m^b}{\partial x} \right) dx \quad (90)$$

$$k_{mn}^{58} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\partial w_m^b}{\partial x} \frac{\partial w_n^c}{\partial x} \left( -\frac{c C_{55}^c}{15} \right) - \frac{8 C_{33}^c w_m^b w_n^c}{3c} \right) dx \quad (91)$$

$$k_{mn}^{59} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2c C_{13}^c w_m^b}{15} \frac{\partial \phi_n^c}{\partial x} - \frac{2c C_{55}^c \phi_n^c}{15} \frac{\partial w_m^b}{\partial x} \right) dx \quad (92)$$

$$k_{mn}^{61} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{7 C_{55}^c h_b \phi_m^b u_n^t}{30c} - \frac{c C_{11}^c h_b}{140} \frac{\partial \phi_m^b}{\partial x} \frac{\partial u_n^t}{\partial x} \right) dx \quad (93)$$

$$k_{mn}^{62} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{55}^c h_b \phi_m^b}{60} \frac{\partial w_n^t}{\partial x} - \frac{C_{13}^c h_b w_n^t}{60} \frac{\partial \phi_m^b}{\partial x} \right) dx \quad (94)$$

$$k_{mn}^{63} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{7 C_{55}^c h_b h_t \phi_m^b \phi_n^t}{60c} - \frac{c C_{11}^c h_b h_t}{280} \frac{\partial \phi_m^b}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^t}{\partial x} \right) dx \quad (95)$$

$$k_{mn}^{64} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{3c C_{11}^c h_b}{70} \frac{\partial \phi_m^b}{\partial x} \frac{\partial u_n^b}{\partial x} - \frac{47 C_{55}^c h_b \phi_m^b u_n^b}{30c} \right) dx \quad (96)$$

$$k_{mn}^{65} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\phi_m^b \frac{\partial w_n^b}{\partial x} \left( \frac{19 C_{55}^c h_b}{60} - D_b h_b \right) - \frac{11 C_{13}^c h_b w_n^b}{60} \frac{\partial \phi_m^b}{\partial x} \right) dx \quad (97)$$

$$k_{mn}^{66} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \phi_m^b \phi_n^b \left( \frac{47 C_{55}^c h_b^2}{60c} + D_b h_b \right) + \frac{\partial \phi_m^b}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^b}{\partial x} \left( \frac{3 c C_{11}^c h_b^2}{140} \right) \right) dx \quad (98)$$

$$k_{mn}^{67} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{4 C_{55}^c h_b \phi_m^b u_n^c}{3c} - \frac{c C_{11}^c h_b}{30} \frac{\partial \phi_m^b}{\partial x} \frac{\partial u_n^c}{\partial x} \right) dx \quad (99)$$

$$k_{mn}^{68} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{13}^c h_b w_n^c}{5} \frac{\partial \phi_m^b}{\partial x} - \frac{C_{55}^c h_b \phi_m^b}{5} \frac{\partial w_n^c}{\partial x} \right) dx \quad (100)$$

$$k_{mn}^{69} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{55}^c h_b \phi_m^b \phi_n^c}{5} - \frac{c^2 C_{11}^c h_b}{140} \frac{\partial \phi_m^b}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^c}{\partial x} \right) dx \quad (101)$$

$$k_{mn}^{71} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c C_{11}^c}{15} \frac{\partial u_m^c}{\partial x} \frac{\partial u_n^t}{\partial x} - \frac{8 C_{55}^c u_m^c u_n^t}{3c} \right) dx \quad (102)$$

$$k_{mn}^{72} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{55}^c u_m^c}{3} \frac{\partial w_n^t}{\partial x} - \frac{2 C_{13}^c w_n^t}{3} \frac{\partial u_m^c}{\partial x} \right) dx \quad (103)$$

$$k_{mn}^{73} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c C_{11}^c h_t}{30} \frac{\partial u_m^c}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^t}{\partial x} - \frac{4 C_{55}^c h_t u_m^c \phi_n^t}{3c} \right) dx \quad (104)$$

$$k_{mn}^{74} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c C_{11}^c}{15} \frac{\partial u_m^c}{\partial x} \frac{\partial u_n^b}{\partial x} - \frac{8 C_{55}^c u_m^c u_n^b}{3c} \right) dx \quad (105)$$

$$k_{mn}^{75} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{13}^c w_n^b}{3} \frac{\partial u_m^c}{\partial x} - \frac{2 C_{55}^c u_m^c}{3} \frac{\partial w_n^b}{\partial x} \right) dx \quad (106)$$

$$k_{mn}^{76} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{4 C_{55}^c h_b u_m^c \phi_n^b}{3c} - \frac{c C_{11}^c h_b}{30} \frac{\partial u_m^c}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^b}{\partial x} \right) dx \quad (107)$$

$$k_{mn}^{77} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{16 C_{55}^c u_m^c u_n^c}{3c} + \frac{8 c C_{11}^c}{15} \frac{\partial u_m^c}{\partial x} \frac{\partial u_n^c}{\partial x} \right) dx \quad (108)$$

$$k_{mn}^{78} = 0 \quad (109)$$

$$k_{mn}^{79} = 0 \quad (110)$$



$$k_{mn}^{81} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{13}^c w_m^c \partial u_n^t}{5 \partial x} - \frac{2 C_{55}^c u_n^t \partial w_m^c}{5 \partial x} \right) dx \quad (111)$$

$$k_{mn}^{82} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( - \frac{\partial w_m^c \partial w_n^t}{\partial x \partial x} \left( - \frac{c C_{55}^c}{15} \right) - \frac{8 C_{33}^c w_m^c w_n^t}{3c} \right) dx \quad (112)$$

$$k_{mn}^{83} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{13}^c h_t w_m^c \partial \phi_n^t}{5 \partial x} - \frac{C_{55}^c h_t \phi_n^t \partial w_m^c}{5 \partial x} \right) dx \quad (113)$$

$$k_{mn}^{84} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{55}^c u_n^b \partial w_m^c}{5 \partial x} - \frac{2 C_{13}^c w_m^c \partial u_n^b}{5 \partial x} \right) dx \quad (114)$$

$$k_{mn}^{85} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( - \frac{\partial w_m^c \partial w_n^b}{\partial x \partial x} \left( - \frac{c C_{55}^c}{15} \right) - \frac{8 C_{33}^c w_m^c w_n^b}{3c} \right) dx \quad (115)$$

$$k_{mn}^{86} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{13}^c h_b w_m^c \partial \phi_n^b}{5 \partial x} - \frac{C_{55}^c h_b \phi_n^b \partial w_m^c}{5 \partial x} \right) dx \quad (116)$$

$$k_{mn}^{87} = 0 \quad (117)$$

$$k_{mn}^{88} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{16 C_{33}^c w_m^c w_n^c}{3c} - \frac{\partial w_m^c \partial w_n^c}{\partial x \partial x} \left( - \frac{8 c C_{55}^c}{15} \right) \right) dx \quad (118)$$

$$k_{mn}^{89} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{4 c C_{55}^c \phi_n^c \partial w_m^c}{15 \partial x} - \frac{4 c C_{13}^c w_m^c \partial \phi_n^c}{15 \partial x} \right) dx \quad (119)$$

$$k_{mn}^{91} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{4 C_{55}^c \phi_m^c u_n^t}{5} - \frac{c^2 C_{11}^c \partial \phi_m^c \partial u_n^t}{70 \partial x \partial x} \right) dx \quad (120)$$

$$k_{mn}^{92} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 c C_{13}^c w_n^t \partial \phi_m^c}{15 \partial x} - \frac{2 c C_{55}^c \phi_m^c \partial w_n^t}{15 \partial x} \right) dx \quad (121)$$

$$k_{mn}^{93} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{55}^c h_t \phi_m^c \phi_n^t}{5} - \frac{c^2 C_{11}^c h_t \partial \phi_m^c \partial \phi_n^t}{140 \partial x \partial x} \right) dx \quad (122)$$

$$k_{mn}^{94} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{C_{11}^c c^2 \partial \phi_m^c \partial u_n^b}{70 \partial x \partial x} - \frac{4 C_{55}^c \phi_m^c u_n^b}{5} \right) dx \quad (123)$$

$$k_{mn}^{95} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 c C_{13}^c w_n^b \partial \phi_m^c}{15 \partial x} - \frac{2 c C_{55}^c \phi_m^c \partial w_n^b}{15 \partial x} \right) dx \quad (124)$$

$$k_{mn}^{96} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 C_{55}^c h_b \phi_m^c \phi_n^b}{5} - \frac{c^2 C_{11}^c h_b}{140} \frac{\partial \phi_m^c}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^b}{\partial x} \right) dx \quad (125)$$

$$k_{mn}^{97} = 0 \quad (126)$$

$$k_{mn}^{98} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{4 c C_{55}^c \phi_m^c}{15} \frac{\partial w_n^c}{\partial x} - \frac{4 c C_{13}^c w_n^c}{15} \frac{\partial \phi_m^c}{\partial x} \right) dx \quad (127)$$

$$k_{mn}^{99} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 c^3 C_{11}^c}{105} \frac{\partial \phi_m^c}{\partial x} \frac{\partial \phi_n^c}{\partial x} + \frac{4 c C_{55}^c \phi_m^c \phi_n^c}{5} \right) dx \quad (128)$$

$$m_{mn}^{11} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( u_m^t u_n^t \left( \frac{3 c \rho_c}{35} + I_0^t \right) \right) dx \quad (129)$$

$$m_{mn}^{12} = 0 \quad (130)$$

$$m_{mn}^{13} = \int_{-l/2}^{l/2} u_m^t \phi_n^t \left( \frac{3 c \rho_c h_t}{70} + I_1^t \right) dx \quad (131)$$

$$m_{mn}^{14} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c \rho_c u_m^t u_n^b}{70} \right) dx \quad (132)$$

$$m_{mn}^{15} = 0 \quad (133)$$

$$m_{mn}^{16} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{c \rho_c h_b u_m^t \phi_n^b}{140} \right) dx \quad (134)$$

$$m_{mn}^{17} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{c \rho_c u_m^t u_n^c}{15} \right) dx \quad (135)$$

$$m_{mn}^{18} = 0 \quad (136)$$

$$m_{mn}^{19} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c^2 u_m^t \phi_n^c}{70} \right) dx \quad (137)$$

$$m_{mn}^{21} = 0 \quad (138)$$

$$m_{mn}^{22} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( w_m^t w_n^t \left( \frac{2 \rho_c c}{15} + I_0^t \right) \right) dx \quad (139)$$

$$m_{mn}^{23} = 0 \quad (140)$$

$$m_{mn}^{24} = 0 \quad (141)$$

$$m_{mn}^{25} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c w_m^t w_n^b}{30} \right) dx \quad (142)$$

$$m_{mn}^{26} = 0 \quad (143)$$

$$m_{mn}^{27} = 0 \quad (144)$$

$$m_{mn}^{28} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c w_m^t w_n^c}{15} \right) dx \quad (145)$$

$$m_{mn}^{29} = 0 \quad (146)$$

$$m_{mn}^{31} = \int_{-l/2}^{l/2} \phi_m^t u_n^t \left( \frac{3 \rho_c c h_t}{70} + I_1^t \right) dx \quad (147)$$

$$m_{mn}^{32} = 0 \quad (148)$$

$$m_{mn}^{33} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \phi_m^t \phi_n^t \left( I_2^t + \frac{3 \rho_c c h_t^2}{140} \right) \right) dx \quad (149)$$

$$m_{mn}^{34} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c h_t \phi_m^t u_n^b}{140} \right) dx \quad (150)$$

$$m_{mn}^{35} = 0 \quad (151)$$

$$m_{mn}^{36} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c h_t h_b \phi_m^t \phi_n^b}{280} \right) dx \quad (152)$$

$$m_{mn}^{37} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c h_t \phi_m^t u_n^c}{30} \right) dx \quad (153)$$

$$m_{mn}^{38} = 0 \quad (154)$$

$$m_{mn}^{39} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c^2 h_t \phi_m^t \phi_n^c}{140} \right) dx \quad (155)$$

$$m_{mn}^{41} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c u_m^b u_n^t}{70} \right) dx \quad (156)$$

$$m_{mn}^{42} = 0 \quad (157)$$

$$m_{mn}^{43} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c h_t u_m^b \phi_n^t}{140} \right) dx \quad (158)$$

$$m_{mn}^{44} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( u_m^b u_n^b \left( \frac{3 \rho_c c}{35} + I_0^b \right) \right) dx \quad (159)$$

$$m_{mn}^{45} = 0 \quad (160)$$

$$m_{mn}^{46} = \int_{-l/2}^{l/2} u_m^b \phi_n^b \left( I_1^b - \frac{3 \rho_c c h_b}{70} \right) dx \quad (161)$$

$$m_{mn}^{47} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c u_m^b u_n^c}{15} \right) dx \quad (162)$$

$$m_{mn}^{48} = 0 \quad (163)$$

$$m_{mn}^{49} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c^2 u_m^b \phi_n^c}{70} \right) dx \quad (164)$$

$$m_{mn}^{51} = 0 \quad (165)$$

$$m_{mn}^{52} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c w_m^b w_n^t}{30} \right) dx \quad (166)$$

$$m_{mn}^{53} = 0 \quad (167)$$

$$m_{mn}^{54} = 0 \quad (168)$$

$$m_{mn}^{55} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( w_m^b w_n^b \left( \frac{2 \rho_c c}{15} + I_0^b \right) \right) dx \quad (169)$$

$$m_{mn}^{56} = 0 \quad (170)$$

$$m_{mn}^{57} = 0 \quad (171)$$

$$m_{mn}^{58} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c w_m^b w_n^c}{15} \right) dx \quad (172)$$

$$m_{mn}^{59} = 0 \quad (173)$$

$$m_{mn}^{61} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c h_b c \phi_m^b u_n^t}{140} \right) dx \quad (174)$$

$$m_{mn}^{62} = 0 \quad (175)$$

$$m_{mn}^{63} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c h_b h_t c \phi_m^b \phi_n^t}{280} \right) dx \quad (176)$$

$$m_{mn}^{64} = \int_{-l/2}^{l/2} \phi_m^b u_n^b \left( I_1^b - \frac{3 \rho_c h_b c \phi_m^b u_n^b}{70} \right) dx \quad (177)$$

$$m_{mn}^{65} = 0 \quad (178)$$

$$m_{mn}^{66} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \phi_m^b \phi_n^b \left( I_2^b + \frac{3 \rho_c c h_b^2}{140} \right) \right) dx \quad (179)$$

$$m_{mn}^{67} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c h_b \phi_m^b u_n^c}{30} \right) dx \quad (180)$$

$$m_{mn}^{68} = 0 \quad (181)$$

$$m_{mn}^{69} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c^2 h_b \phi_m^b \phi_n^c}{140} \right) dx \quad (182)$$

$$m_{mn}^{71} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c u_m^c u_n^t}{15} \right) dx \quad (183)$$

$$m_{mn}^{72} = 0 \quad (184)$$

$$m_{mn}^{73} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c h_t u_m^c \phi_n^t}{30} \right) dx \quad (185)$$

$$m_{mn}^{74} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c u_m^c u_n^b}{15} \right) dx \quad (186)$$

$$m_{mn}^{75} = 0 \quad (187)$$

$$m_{mn}^{76} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c h_b u_m^c \phi_n^b}{30} \right) dx \quad (188)$$

$$m_{mn}^{77} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{8 \rho_c c u_m^c u_n^c}{15} \right) dx \quad (189)$$

$$m_{mn}^{78} = 0 \quad (190)$$

$$m_{mn}^{79} = 0 \quad (191)$$

$$m_{mn}^{81} = 0 \quad (192)$$

$$m_{mn}^{82} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c w_m^c w_n^t}{15} \right) dx \quad (193)$$

$$m_{mn}^{83} = 0 \quad (194)$$

$$m_{mn}^{84} = 0 \quad (195)$$

$$m_{mn}^{85} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c w_m^c w_n^b}{15} \right) dx \quad (196)$$

$$m_{mn}^{86} = 0 \quad (197)$$

$$m_{mn}^{87} = 0 \quad (198)$$

$$m_{mn}^{88} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{8 \rho_c c w_m^c w_n^c}{15} \right) dx \quad (199)$$

$$m_{mn}^{89} = 0 \quad (200)$$

$$m_{mn}^{91} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c^2 \phi_m^c u_n^t}{70} \right) dx \quad (201)$$

$$m_{mn}^{92} = 0 \quad (202)$$

$$m_{mn}^{93} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c^2 h_t \phi_m^c \phi_n^t}{140} \right) dx \quad (203)$$

$$m_{mn}^{94} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{\rho_c c^2 \phi_m^c u_n^b}{70} \right) dx \quad (204)$$

$$m_{mn}^{95} = 0 \quad (205)$$

$$m_{mn}^{96} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( -\frac{\rho_c c^2 h_b \phi_m^c \phi_n^b}{140} \right) dx \quad (206)$$

$$m_{mn}^{97} = 0 \quad (207)$$

$$m_{mn}^{98} = 0 \quad (208)$$

$$m_{mn}^{99} = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \frac{2 \rho_c c^3 \phi_m^c \phi_n^c}{105} \right) dx \quad (209)$$

روابط (۴۸) تا (۲۰۹) درایه‌های ماتریس سختی و جرم هستند. که هرکدام از آنها ماتریس مربعی است که اندازه این ماتریس همان همگرایی سری میدان جابجایی می‌باشد. برای توزیع‌های مختلف نانو لوله کربنی مقادیر  $A_i$  و  $B_i$  و  $C_i$  و  $D_i$  متفاوت می‌باشند و این مقادیر طبق روابط زیر بدست می‌آیند.

$$A_i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} b E_{11}^i dz \quad (i = t, b) \quad (210)$$

$$B_i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} b z E_{11}^i dz \quad (i = t, b) \quad (211)$$

$$C_i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} b z^2 E_{11}^i dz \quad (i = t, b) \quad (212)$$

$$D_i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} b k_s G_{12}^i dz \quad (i = t, b) \quad (213)$$

$k_s$  ضریب تصحیح بردار برشی می‌باشد که مقدار آن  $k_s = \pi^2/12$  می‌باشد.  $A_i$  سختی کششی،  $B_i$  سختی کوپل و  $C_i$  سختی خمشی و  $D_i$  سختی برشی رویه‌ها است.

## ۸- نتایج و بحث

در ابتدا برای کسب اطمینان از فرمولاسیون ارائه شده، صحت سنجی نتایج صورت گرفته است. بدین منظور نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج وو [۷] مقایسه شده است خواص هندسی و مکانیکی تیر با توجه به مرجع [۷] به صورت زیر می‌باشد مدول الاستیسیته زمینه  $E_m = 2.5 \text{ GPa}$  و چگالی زمینه  $\rho_m = 1190 \text{ kg/m}^3$  و  $\nu_m = 0.3$  برای نانولوله کربنی هم مقادیر  $E_{11}^{cn} = 5.6466 \text{ TPa}$ ،  $G_{12}^{cn} = 1.9445 \text{ TPa}$ ،  $\rho_{cn} = 1400 \text{ kg/m}^3$  و  $\nu_{cn} = 0.175$  تمامی این مقادیر در دمای اتاق است و برای هسته‌ی سفت مقادیر  $E_c = 113.8 \text{ GPa}$ ،  $\rho_c = 4430 \text{ kg/m}^3$  و  $\nu_c = 0.342$  می‌باشد.

مشخصات تیر ساندویچی به صورت  $L = 200 \text{ mm}$ ،  $b = 10 \text{ mm}$ ،  $c = 8 \text{ mm}$  و  $h_t = h_b = 1 \text{ mm}$  فرض شده است که  $L$  طول تیر و  $c$  ضخامت هسته و  $b$  عرض تیر می‌باشد. نتایج بر حسب رابطه  $\omega L \sqrt{\rho_c (1 - \nu_c^2)} / E_c$  بی‌بعد شده است. نتایج حاصل برای همگرایی محاسبات در جدول (۳) گزارش شده، همچنین نتایج برای صحت سنجی در جدول (۴) آورده شده است. همان‌طور که جدول (۴) نشان می‌دهد تطابق خوبی بین نتایج مشاهده می‌شود البته نتایج حاصل کمی کمتر از نتایج وو می‌باشد علت آن است که در تحقیق وو برای مدلسازی کل تیر، از تئوری تیموشنکو استفاده شده است که منجر به ایجاد خطا می‌شود در صورتیکه مدل تیر این تحقیق بر اساس تئوری مرتبه بالای توسعه یافته می‌باشد. با توجه به همگرایی بوجود آمده در نتایج مقدار همگرایی برابر ۵ در نظر گرفته شده است.

برای صحت سنجی هسته انعطاف پذیر نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج [۱۸] مقایسه شده است خواص هندسی و مکانیکی تیر با توجه به مرجع [۱۸] به صورت زیر می باشد مدول الاستیسیته رویه ها  $E_t = E_b = 210 \text{ GPa}$  و چگالی رویه ها  $\rho_t = \rho_b = 7900 \text{ kg/m}^3$  و تمامی این مقادیر در دمای اتاق است و برای هسته ی انعطاف پذیر مقادیر  $E_c = 56 \text{ MPa}$  و  $\rho_c = 60 \text{ kg/m}^3$  و  $G_c = 22 \text{ MPa}$  در نظر گرفته شده است. مشخصات تیر ساندویچی به صورت  $L = 30 \text{ cm}$  و  $b = 5 \text{ cm}$  و  $c = 3 \text{ cm}$  و  $h_t = h_b = 0.2 \text{ cm}$  فرض شده است. نتایج حاصل برای تکیه گاه ساده ساده غلتکی در پنج مود اول محاسبه و در جدول (۵) گزارش شده است.

**جدول ۳-** مقایسه مرجع [۷] و همگرایی فرکانس طبیعی بی بعد شده مقاله حاضر  $\left(\frac{L}{h}\right) = 20$  ،  $\left(\frac{c}{h_t}\right) = 8$  و  $V_{cn}^* = 0.12$

	فرکانس طبیعی اول				فرکانس طبیعی اول		
	M مقدار	UD	FG-V		M مقدار	UD	FG-V
<b>C-C</b>	1	1.7579	1.7579	<b>S-S</b>	1	1.7579	0.7579
	2	0.9908	0.9913		2	0.1530	0.1551
	3	0.3080	0.3108		3	0.1529	0.1550
	4	0.3074	0.3100		4	0.1379	0.1400
	5	0.3066	0.3095		5	0.1379	0.1400
Wu [γ]		0.3195	0.3240	Wu [γ]		0.1432	0.1453

**جدول ۴-** مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد شده مرجع [۷] و مقاله حاضر  $\left(\frac{L}{h}\right) = 20$  و  $\left(\frac{c}{h_t}\right) = 8$

	$V_{cn}^* = 0.12$		$V_{cn}^* = 0.17$		$V_{cn}^* = 0.28$	
	UD	FG-V	UD	FG-V	UD	FG-V
<b>C-C</b>						
مقاله حاضر	0.3066	0.3095	0.3353	0.3393	0.3825	0.3872
Wu [γ]	0.3195	0.3240	0.3470	0.3530	0.3949	0.4032
اختلاف (%)	4.03	4.46	3.34	3.87	3.12	3.95
<b>S-S</b>						
مقاله حاضر	0.1379	0.1400	0.1511	0.1538	0.1741	0.1776
Wu [γ]	0.1432	0.1453	0.1560	0.1588	0.1785	0.1825
اختلاف (%)	3.66	3.63	3.07	3.13	2.45	2.63



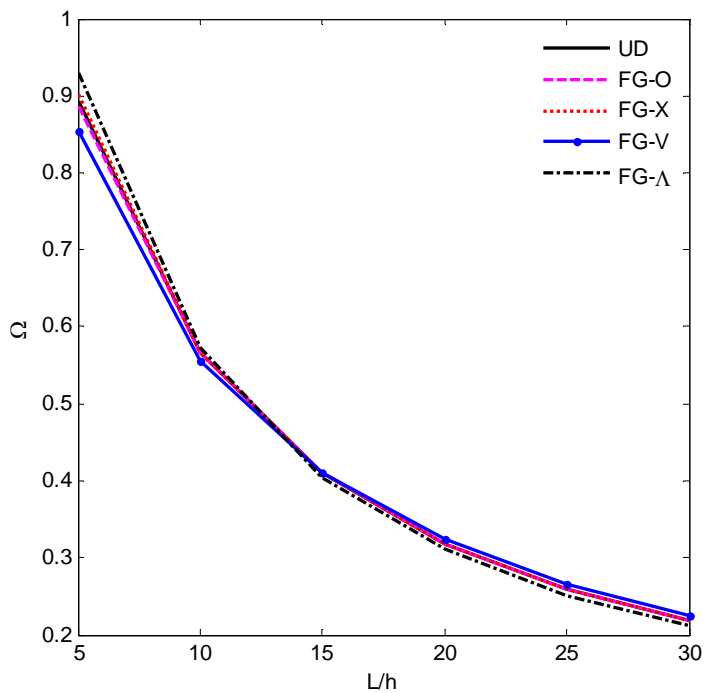
جدول ۵- مقایسه فرکانس طبیعی (Hz) مرجع [۱۸] و مقاله حاضر

مُد	مقاله حاضر	مرجع [۱۸]	اختلاف (%)
اول	250	251	0.39
دوم	535	537	0.37
سوم	873	874	0.11
چهارم	1280	1282	0.15
پنجم	1769	1771	0.11

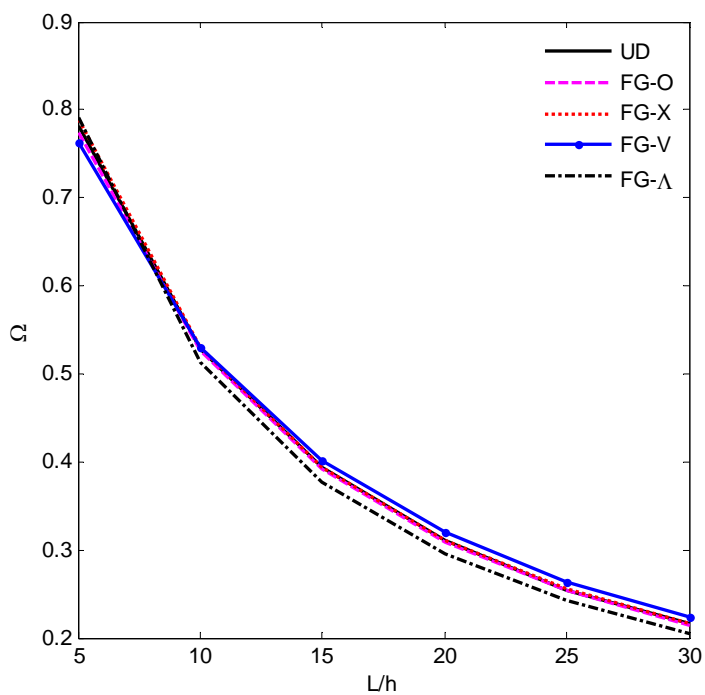
### ۹- نتایج عددی

بعد از اینکه از صحت و همگرایی نتایج اطمینان حاصل شد، تاثیر عامل طول تیر در توزیع‌ها و تکیه گاه‌های مختلف بر فرکانس طبیعی بررسی شده است. بدین منظور مشخصات تیر ساندویچی در این تحقیق به صورت  $b = 30 \text{ mm}$  و  $c = 8 \text{ mm}$  فرض شده است. در شکل‌های (۳) تا (۸) تاثیر نسبت طول تیر به ضخامت کل تیر  $\left(\frac{L}{h}\right)$  بر فرکانس طبیعی اول بی بعد شده با رابطه  $\omega L \sqrt{\rho_c(1 - v_c^2)}/E_c$  برای تمام شرایط مرزی و توزیع‌های مختلف نانو لوله کربنی برای هسته‌ی سفت بیان شده است. در این شکل‌ها کسر حجمی کربن برابر با  $V_{cn}^* = 0.12$  در نظر گرفته شده است و نسبت ضخامت هسته به رویه برابر با  $\left(\frac{c}{h_t}\right) = 4$  در نظر گرفته شده است. با توجه به نمودارهای (۳) تا (۸) با افزایش طول تیر در تمام تکیه گاه‌ها کاهش فرکانس طبیعی سیستم مشاهده شده است.

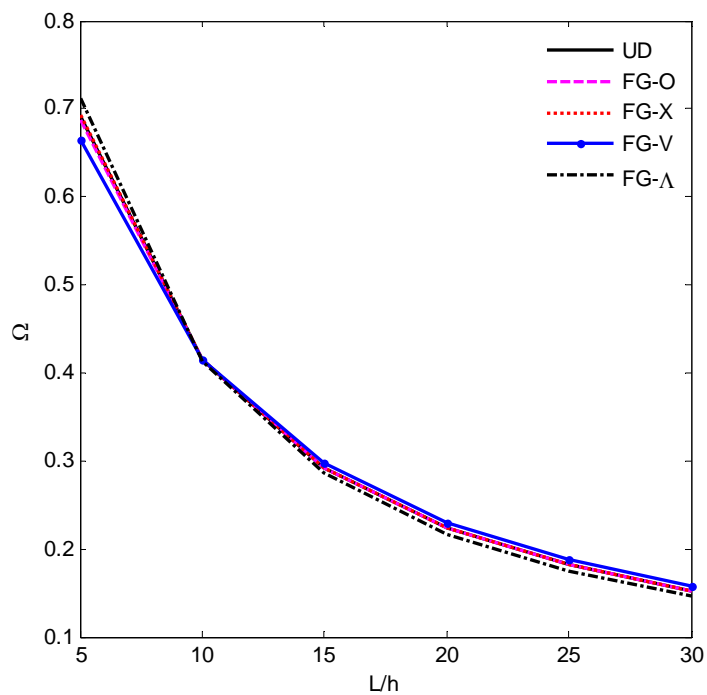
همچنین با افزایش طول تیر اختلاف مقدار فرکانس طبیعی برای توزیع‌های مختلف بسیار کم شده است. بیشترین و کمترین فرکانس طبیعی در ازای طول‌های متفاوت بین الگوی توزیع‌های نانو لوله کربنی متغیر است ولی از یک طول به بعد بیشترین و کمترین فرکانس طبیعی تقریباً بین الگوی توزیع‌های نانو لوله کربنی ثابت میشود که در جدول (۶) مقدار فرکانس طبیعی بی بعد شده که از روی نمودارها بدست آمده است برای دو طول مختلف نوشته شده است.



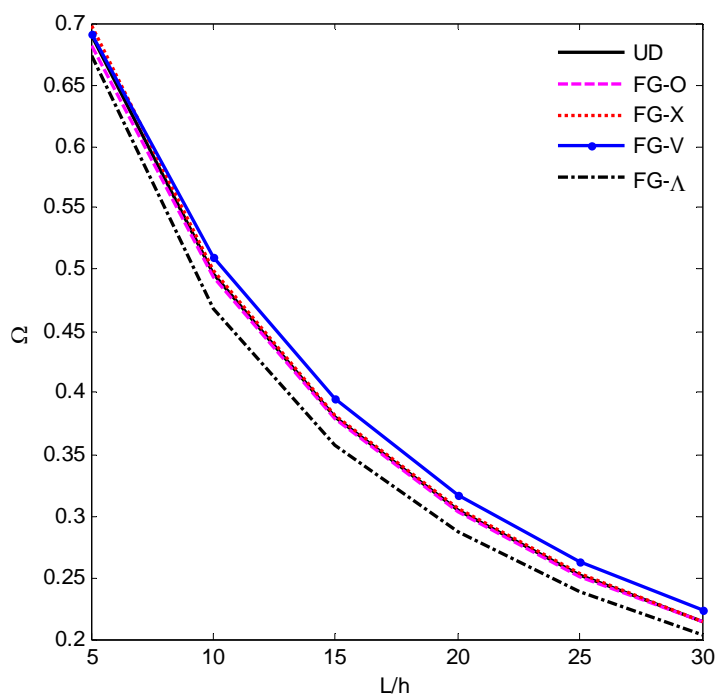
شکل ۳- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته سفت و تکیه گاه گیردار گیردار



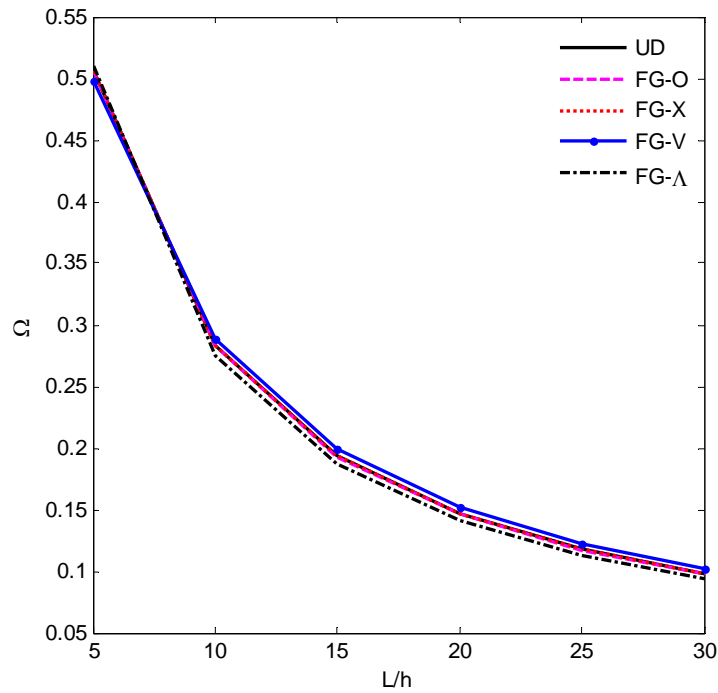
شکل ۴- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته سفت و تکیه گاه گیردار ساده لولایی



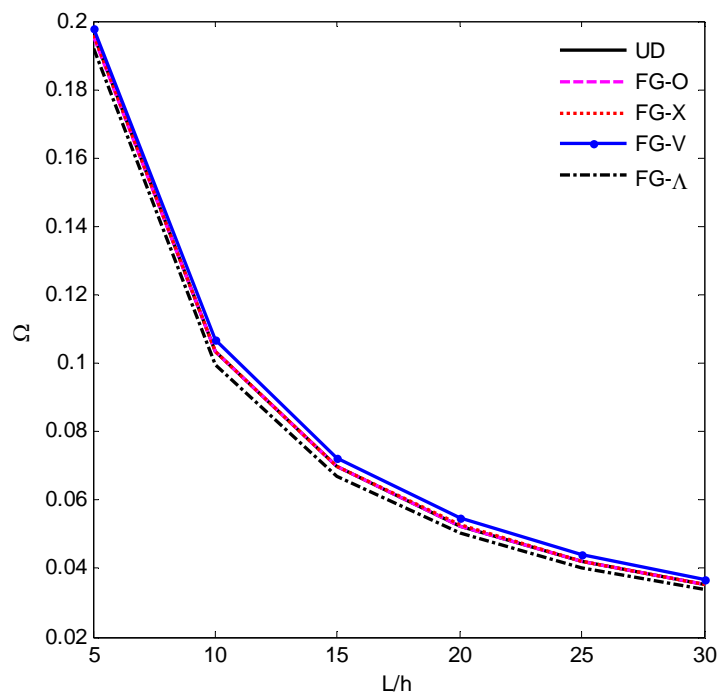
شکل ۵- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته سفت و تکیه گاه گیردار ساده غلتکی



شکل ۶- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته سفت و تکیه گاه ساده ساده لولایی



شکل ۷- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته سفت و تکیه گاه ساده ساده غلتکی



شکل ۸- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته سفت و تکیه گاه آزاد گیردار

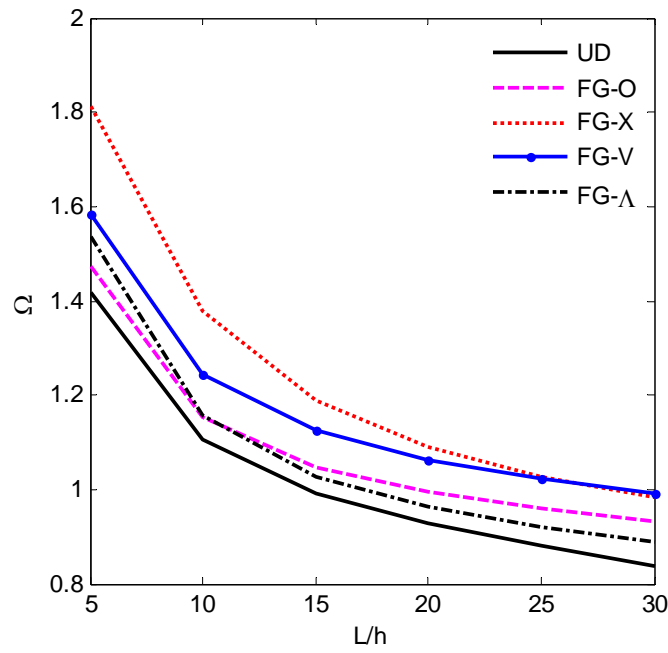
**جدول ۶-** فرکانس طبیعی اول بی بعد شده برای توزیع های مختلف نانو لوله کربنی و تکیه گاه های مختلف

برای هسته سفت و  $V_{cn}^* = 0.12$  و  $\left(\frac{c}{h_t}\right) = 4$

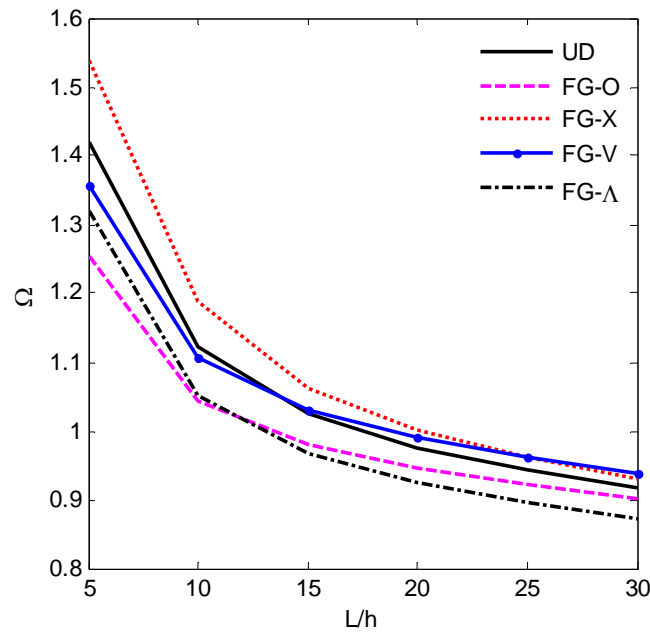
F-C	S-S غلتهکی	S-S لولایی	S-C غلتهکی	S-C لولایی	C-C	توزیع نانو لوله	$\left(\frac{L}{h}\right)$
0.1958	0.5062	0.6892	0.6906	0.7821	0.8940	UD	5
0.1956	0.5062	0.6820	0.6877	0.7750	0.8861	FG-O	
0.1960	0.5066	0.6975	0.6937	0.7896	0.9012	FG-X	
0.1979	0.4975	0.6908	0.6651	0.7635	0.8540	FG-V	
0.1920	0.5102	0.6740	0.7119	0.7916	0.9298	FG- $\Lambda$	
0.0351	0.0984	0.2141	0.1523	0.2156	0.2186	UD	30
0.0350	0.0982	0.2136	0.1520	0.2151	0.2183	FG-O	
0.0352	0.0985	0.2148	0.1525	0.2161	0.2189	FG-X	
0.0366	0.1022	0.2232	0.1576	0.2237	0.2250	FG-V	
0.0336	0.0942	0.2030	0.1464	0.2052	0.2110	FG- $\Lambda$	

با توجه به نمودار ها و جدول (۵) در  $\left(\frac{L}{h}\right) = 30$  توزیع FG-V در تمام تکیه گاه ها دارای بیشترین فرکانس طبیعی و توزیع FG- $\Lambda$  در تمام تکیه گاه ها دارای کمترین فرکانس طبیعی است. در صورتی که در  $\left(\frac{L}{h}\right) = 5$  بیشترین فرکانس طبیعی در بین تکیه گاه های متفاوت است به طور مثال برای گیردار گیردار و گیردار ساده لولایی و گیردار ساده غلتهکی و ساده ساده غلتهکی توزیع FG- $\Lambda$  دارای بیشترین فرکانس طبیعی است در صورتیکه در تکیه گاه آزاد گیردار توزیع FG-V و تکیه گاه ساده ساده لولایی توزیع FG-X دارای بیشترین فرکانس طبیعی است.

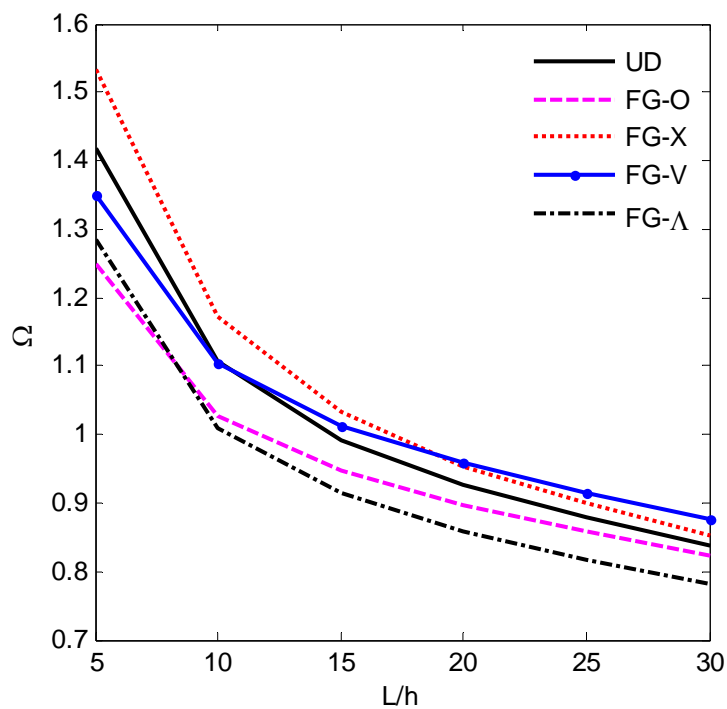
در ادامه نمودار فرکانس طبیعی اول بی بعد شده را برای تمام توزیع های نانو لوله کربنی و در تکیه گاه های متفاوت برای هسته انعطاف پذیر بر حسب افزایش طول تیر رسم شده است. و برای هسته انعطاف پذیر مقادیر  $E_c = 84.4 \text{ MPa}$  و  $\rho_c = 100 \text{ kg/m}^3$  و  $\nu_c = 0.25$  برقرار می باشد. در نمودارهای (۹) تا (۱۴) کسر حجمی کربن برابر با  $V_{cn}^* = 0.12$  میباشد و همچنین نسبت ضخامت هسته به رویه ها برابر با  $\left(\frac{c}{h_t}\right) = 4$  در نظر گرفته شده است.



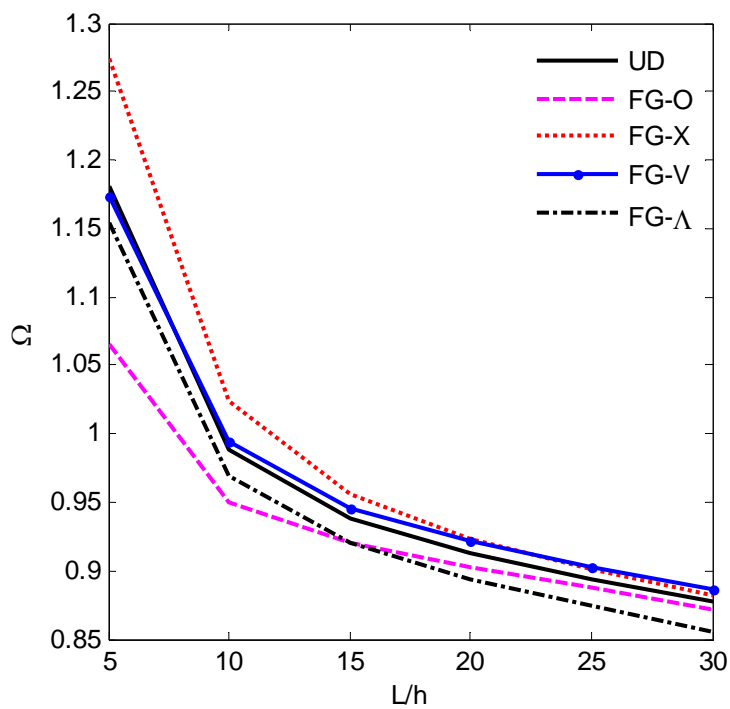
شکل ۹- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته انعطاف پذیر و تکیه گاه گیردار گیردار



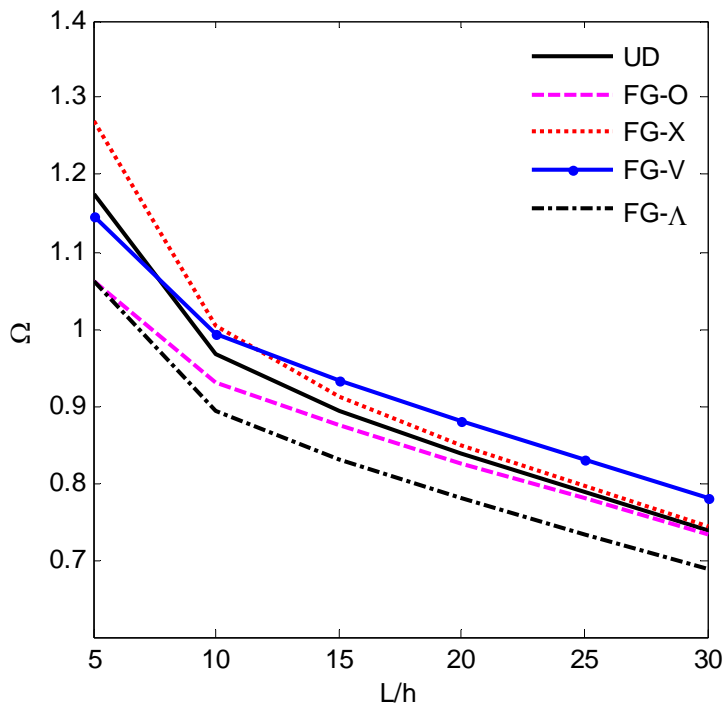
شکل ۱۰- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته انعطاف پذیر و تکیه گاه گیردار ساده لولایی



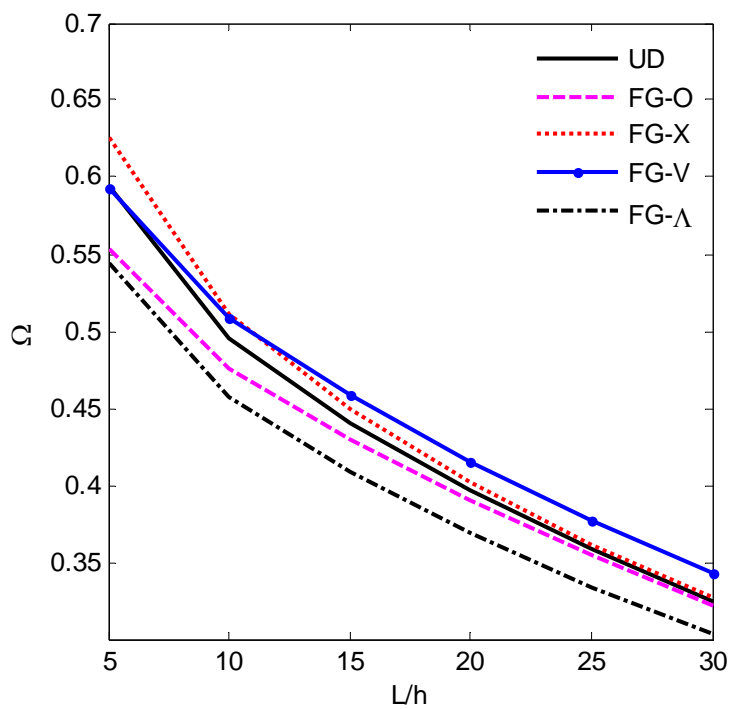
شکل ۱۱- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته انعطاف پذیر و تکیه گاه گیردار ساده غلتکی



شکل ۱۲- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته انعطاف پذیر و تکیه گاه ساده ساده لولایی



شکل ۱۳- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته انعطاف پذیر و تکیه گاه ساده ساده غلتکی



شکل ۱۴- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی برای هسته انعطاف پذیر و تکیه گاه آزاد گیردار



با توجه به نمودارهای (۹) تا (۱۴) با افزایش طول تیر در تمام تکیه گاه ها کاهش فرکانس طبیعی سیستم مشاهده شده است. همچنین هر چقدر که طول تیر افزایش میابد اختلاف فرکانس طبیعی بین توزیع های مختلف نانو لوله کربنی کمتر میشود. بیشترین و کمترین فرکانس طبیعی در ازای طول های متفاوت بین الگوی توزیع های نانو لوله کربنی متغیر است ولی از یک طول به بعد بیشترین و کمترین فرکانس طبیعی تقریباً بین الگوی توزیع های نانو لوله کربنی ثابت میشود که در جدول (۷) مقدار فرکانس طبیعی بی بعد شده که از روی نمودار ها بدست آمده است برای دو طول مختلف نوشته شده است.

با توجه به نمودارهای (۹) تا (۱۴) و جدول (۷) در  $(\frac{L}{h}) = 30$  توزیع FG-V در تمام تکیه گاه ها دارای بیشترین فرکانس طبیعی و توزیع FG-A در تمام تکیه گاه ها به جز گیردار گیردار دارای کمترین فرکانس طبیعی است و در تکیه گاه گیردار گیردار توزیع UD کمترین فرکانس طبیعی است. در صورتیکه در  $(\frac{L}{h}) = 5$  توزیع FG-X در تمام تکیه گاه ها دارای بیشترین فرکانس طبیعی است و توزیع FG-O در تمام تکیه گاه ها بجز آزاد گیردار و گیردار گیردار دارای کمترین فرکانس طبیعی است و در تکیه گاه آزاد گیردار توزیع FG-A و در تکیه گاه گیردار گیردار توزیع UD دارای کمترین فرکانس طبیعی است.

**جدول ۷-** فرکانس طبیعی اول بی بعد شده برای توزیع های مختلف نانو لوله کربنی و تکیه گاه های مختلف

برای هسته انعطاف پذیر و  $V_{cn}^* = 0.12$  و  $(\frac{c}{h_t}) = 4$

F-C	S-S غلتکی	S-S لولایی	S-C غلتکی	S-C لولایی	C-C	توزیع نانو لوله	$(\frac{L}{h})$
0.5941	1.1761	1.1804	1.4174	1.4208	1.4174	UD	5
0.5526	1.0610	1.0660	1.2506	1.2545	1.4723	FG-O	
0.6252	1.2701	1.2740	1.5338	1.5369	1.8126	FG-X	
0.5932	1.1465	1.1732	1.3512	1.3554	1.5853	FG-V	
0.5446	1.0626	1.1534	1.2845	1.3197	1.5379	FG-A	
0.3246	0.7383	0.8766	0.8390	0.9166	0.8390	UD	30
0.3219	0.7323	0.8715	0.8233	0.9019	0.9311	FG-O	
0.3271	0.7443	0.8817	0.8535	0.9303	0.9833	FG-X	
0.3428	0.7797	0.8863	0.8773	0.9393	0.9932	FG-V	
0.3028	0.6888	0.8556	0.7802	0.8713	0.8883	FG-A	

## ۱۰- نتیجه گیری

تحلیل ارتعاشات آزاد یک تیرساندویچی شامل دو رویه و یک هسته در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت. تیر ساندویچی شامل هسته انعطاف پذیر و سفت می باشد و رویه‌ها به صورت کامپوزیت در نظر گرفته شد. در رویه‌ها برای کامپوزیت های مورد استفاده از نانو لوله های کربنی به عنوان تقویت کننده استفاده شد. و توزیع های مختلف نانو لوله کربنی در تکیه گاه های متفاوت مورد بررسی قرار گرفت.

برخی از نتایج مهم بدست آمده در این تحقیق به شرح زیر بیان می شود:

- در تمام توزیع ها و تکیه گاه های متفاوت با افزایش طول تیر در تیر ساندویچی که شامل هسته سفت و یا هسته انعطاف پذیر باشد کاهش فرکانس طبیعی مشاهده شده است.
- در طول های بزرگتر اختلاف فرکانس طبیعی بین توزیع های متفاوت و در تکیه گاه های متفاوت بسیار کم می باشد.
- در طول های بزرگتر یعنی  $(\frac{L}{h}) = 30$  در تمام تکیه گاه ها برای هر دو نوع هسته مورد بررسی توزیع FG-V دارای بیشترین فرکانس طبیعی است.
- در طول های بزرگتر یعنی  $(\frac{L}{h}) = 30$  در تمام تکیه گاه ها برای هسته سفت توزیع FG-A دارای کمترین فرکانس طبیعی است.
- در طول های بزرگتر یعنی  $(\frac{L}{h}) = 30$  در تمام تکیه گاه ها به جز گیردار گیردار برای هسته انعطاف پذیر توزیع FG-A دارای کمترین فرکانس طبیعی است، و در تکیه گاه گیردار گیردار هسته انعطاف پذیر توزیع UD دارای کمترین فرکانس طبیعی است.
- در طول های کوچکتر یعنی  $(\frac{L}{h}) = 5$  در تمام تکیه گاه ها برای هسته انعطاف پذیر توزیع FG-X دارای بیشترین فرکانس طبیعی است.
- در طول های کوچکتر یعنی  $(\frac{L}{h}) = 5$  در دو نوع هسته بیشترین و کمترین فرکانس طبیعی بین تکیه گاه های مختلف متفاوت است.

## مراجع

- [1] Lasy, T. E., and Hwang, Y., "Numerical Modeling of Impact Damaged Sandwich Composites Subjected to Compression after Impact Loading", Composite Structure, Vol. 61, pp. 115-128, (2003).
- [2] Evans, K. E., "The Design of Doubly Curved Sandwich Panels with Honeycomb Cores", Composite Structures, Vol. 17, pp. 95-111, (1991).
- [3] Frostig, Y., Baruch, M., Vilnay, O., and Sheinman, I., "High Order Theory for Sandwich Beam Behavior with Transversely Flexible Core", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 118, pp. 1-16, (1992).

- [4] Thostenson, E. T., Ren, Z., and Chou, T. W., “Advances in the Science and Technology of Carbon Nanotubes and their Composites”, *Composites Science and Technology*, Vol. 61, pp. 1899-1912, (2001).
- [5] Meyyappan, M., “*Carbon Nanotubes Science & Applications*”, CRC Press, (2004).
- [6] Shen, H. S., and Xiang, Y., “Nonlinear Bending of Nanotube Reinforced Composite Cylindrical Panels Resting on Elastic Foundations in Thermal Environments”, *Engineering Structures*, Vol. 80, pp. 163–172, (2014).
- [7] Wu, H., Kitipornchai, S., and Yang, J., “Free Vibration and Buckling Analysis of Sandwich Beams with Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Face Sheets”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 15, pp. 1-17, (2015).
- [8] Bhangale, R. K., and Ganesan, N., “Thermoplastic Buckling and Vibration Behavior of a Functionally Graded Sandwich Beam with Constrained Viscoelastic Core”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, pp. 294–316, (2006).
- [9] Shen, H. S., “Nonlinear Bending of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Plates in Thermal Environments”, *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 9–19, (2009).
- [10] Shen, H. S., and Zhu, Z. H., “Post Buckling of Sandwich Plates with Nanotube-Reinforced Composite Face Sheets Resting on Elastic Foundations”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 35, pp. 10–21, (2012).
- [11] Ansari, R., Hasrati, E., Faghieh Shojaei, M., and Ghola, R., “Forced Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Plates using a Numerical Strategy”, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 69, pp. 294–305, (2015).
- [12] Ke, L. L., Yang, J., and Kitipornchai, S., “Nonlinear Free Vibration of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Beams”, *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 676-683, (2010).
- [13] Frostig, Y., “Behavior of Delaminated Sandwich Beam with Transversely Flexible Core-High Order Theory”, *Composite Structures*, Vol. 51, pp. 1–16, (1992).
- [14] Reddy, J. N., “*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*”, New York, Oxford University, Press Inc, (1997).
- [15] Shen, H. S., “Postbuckling of Nanotube-reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments”, Part I, Axially-loaded Shells, *Composite Structures*, Vol. 93, Issue. 8, pp. 2096-2108, (2011).
- [16] Wang, Z. X., Xu, J., and Qiao, P., “Nonlinear Low Velocity Impact Analysis of Temperature Dependent Nanotube Reinforced Composite Plates”, *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 423-434, (2014).

- [17] Frostig, Y., and Thomsen, O. T., "High-order Free Vibration of Sandwich Panels with a Flexible Core", International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 1697–1724, (2004).
- [18] Khalili, S. M. R., Botshekanan Dehkordi, M., Carrera, E., and Shariyat, M., "Non-linear Dynamic Analysis of a Sandwich Beam with Pseudoelastic SMA Hybrid Composite Faces Based on Higher Order Finite Element Theory", Composite Structures, Vol. 96, pp. 243–255, (2013).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$E$	مدول الاستیسیته
$G$	مدول برشی
$V$	کسر حجمی
$h$	ضخامت تیر
$u$	جابجایی طولی
$w$	جابجایی عرضی
$C$	ضرایب سختی مواد
$T$	انرژی جنبشی
$U$	انرژی کرنشی
$I$	ممان اینرسی
$L$	طول تیر
$c$	ضخامت هسته
$b$	عرض تیر
$M$	ماتریس جرمی
$K$	ماتریس سختی

### نمادهای یونانی

$\sigma$	تنش طولی
$\epsilon$	کرنش طولی
$\tau$	تنش برشی
$\gamma$	کرنش برشی
$\eta$	پارامتر خواص وابسته به مقیاس
$\rho$	چگالی
$\phi$	چرخش
$\omega$	فرکانس طبیعی

### **Abstract**

In this article, the vibrational behavior of sandwich beams with stiff and flexible core and face sheets reinforced with carbon nanotubes has been investigated. Carbon nanotubes are used as materials that their properties change along the thickness. In this research for modelling the sandwich beam an extended high order sandwich theory is used. In order to model the behavior of faces the Timoshenko beam's theory is employed and also for modeling the behavior of the core, three-degree displacement field is used considering the axial stresses and also compatibility conditions of the core. The equations of motion are derived using the variations of energy and the Ritz method is used to solve the equations of motion.

The obtained results are compared with available results that show the high accuracy of the present modelling. The results for different distributions of carbon nanotubes and different boundary conditions have been investigated. In this research new results are presented for different boundary conditions in terms of different length to thickness ratio.

One of the important result of this research is that, generally it cannot be say that what distribution of CNT leads to maximum or minimum natural frequency of the structure and this problem is strongly depended on the length to thickness ratio of the bam and also stiffness or flexibility of the core.