



کنترل زوایای اویلر هواپیما با استفاده از وارون دینامیک غیرخطی افزایشی مقاوم

وارون دینامیک غیرخطی یکی از روش‌های مطرح در زمینه کنترل دینامیک پرواز است که از توسعه آن به عنوان وارون دینامیک غیرخطی افزایشی (INDI) یاد می‌شود. بر این اساس، در این مقاله ابتدا مودهای غیرخطی تند و کند هواپیما به دو بخش مجزا تقسیم و برای هر یک از بخش‌ها کنترل جداگانه‌ای طراحی می‌گردد که در حلقه خارجی از کنترل‌کننده PID و در حلقه داخلی از کنترل‌کننده مود لغزشی استفاده می‌شود. علاوه بر اثبات پایداری، نتایج شبیه‌سازی به همراه مقایسه با حالت‌های مدل مرجع و INDI مرسوم برای هواپیمای بویینگ ۷۴۷ ارائه می‌شود.

رضا تمسکنی^۱

دانشجوی دکتری

علیرضا الفی^۲

استاد

محمدعلی صدرنیا^۳

دانشیار

واژه‌های راهنما: وارون دینامیک، کنترل دینامیک پرواز، مود لغزشی، PID

۱- مقدمه

پرواز خودکار یکی از مسایل مهم در سیستم‌های کنترل هواپیما می‌باشد که موجب افزایش کیفیت پروازی و ایمنی بالاتر می‌شود [۱]. به طور معمول در طراحی سیستم‌های کنترل پرواز از مدل خطی معادلات پرواز استفاده می‌شود. همچنین، با جداسازی حالت‌های طولی و عرضی، طراحی کنترل‌کننده ساده‌تر می‌شود که در بیشتر این پژوهش‌ها، هواپیما در حالت تریم (تعادل) در نظر گرفته شده است. هنگامی که اغتشاش به هواپیما وارد می‌شود یا خلبان به صورت دستی فرمانی صادر می‌کند یا سیستم هدایت خودکار فرمان کنترل جدیدی مانند یک فرمان متغیر صادر می‌کند، هواپیما از حالت تریم خارج شده و می‌بایست از روش‌های غیرخطی به منظور کنترل آن استفاده کرد. از طرفی در این حالت، جدا کردن حالت‌های طولی و عرضی مجاز نیست، زیرا پاسخ‌های حاصل از سیستم دکوپله بسیار متفاوت از سیستم عملی خواهد بود. از اینرو کنترل هواپیما بدون دکوپله کردن مودهای طولی و عرضی مطرح می‌شود که در حقیقت مساله طراحی کنترل متمرکز یک سیستم چند متغیره می‌باشد. کنترل سیستم‌های غیرخطی با استفاده از دینامیک‌های وارون موضوعی است که توجه بسیاری از محققین را در سال‌های اخیر به خود جلب کرده است. وارون دینامیک یکی از روش

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران r.tamaskani@shahroodut.ac.ir

^۲ استاد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران a_alfi@shahroodut.ac.ir

^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران msadrdnia@shahroodut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۶، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۲۴

های مورد استفاده برای سیستم های غیرخطی کمینه فاز است [۲]. کاربرد NDI بیشتر برای سیستم های هوافضا است. به طور معمول کنترل سرعت های زاویه‌ای در حلقه داخلی و کنترل زاویه ها در حلقه خارجی انجام می‌شود [۳، ۴]. تحقیقاتی در مورد NDI برای کنترل اولیه با مود لغزشی مرتبه اول در [۵-۱۳] گزارش شده است. مودهای لغزشی مرتبه بالاتر در [۱۴-۱۶] مطالعه شده است. در [۱۷] روشی مقاوم با استفاده از مقادیر ویژه ساختار یافته برای کنترل پرواز ارائه شده است. از دهه (۱۹۹۰)، روش وارون دینامیک مطرح شده است. از توسعه این روش به عنوان وارون دینامیک افزایشی (INDI) نام برده می‌شود [۱۸]. تحلیل پایداری برای INDI در [۱۹، ۲۰] انجام شده است. در واقع، در INDI از عملیات های مختلف بر روی خطای بین سیگنال خروجی و فرمان ورودی استفاده می‌شود. روش های کنترل پرواز مقاوم مختلفی برای INDI در [۲۱-۲۴] بررسی شده است. بهینه سازی برای NDI در [۲۵] مطرح شده است. ترکیب روش های INDI با روش های فازی در [۲۶-۲۸] بررسی شده است. یکی دیگر از تکنیک های INDI استفاده از مود لغزشی است، که یک روش کنترلی غیرخطی مقاوم به حساب می‌آید. کنترل کننده مود لغزشی افزایشی با روش NDI در [۲۹] مطالعه شده است. استفاده از کنترل تطبیقی به همراه INDI در [۳۰] مطرح شده است. همچنین از AINDI در [۳۱] برای وسیله‌های هوایی کوچک استفاده شده است. روش AINDI دیگری بر اساس شبکه عصبی در [۳۲] و برای هواپیمای بدون سرنشین در [۳۳] پیشنهاد شده است. هنگام استفاده از INDI با مود لغزشی، با وجود غلبه بر نامعینی‌ها، مشکلاتی وجود دارد. پدیده چترینگ برای تلاش کنترل یکی از این مشکلات شناخته شده در کنترل مود لغزشی است که ضمن به وجود آوردن مشکلاتی برای عملگر، باعث خرابی زودتر آنها می‌شود. یکی از روش های کاهش چترینگ استفاده از تقریب تابع علامت مانند تابع اشباع است که در [۳۴-۴۰] به این مورد پرداخته شده است.

با توجه به توضیحات فوق، در این مقاله ابتدا روابط شش درجه آزادی هواپیما از قوانین فیزیکی استخراج می‌شود. جزییات بسط این روابط در بخش (۲) بیان شده است. سپس در بخش (۳) به تئوری روش NDI و توسعه آن به یک روش مقاوم INDI و اثبات آن پرداخته می‌شود. کاهش چترینگ هم در این بخش انجام می‌شود. در بخش (۴) شبیه سازی‌های مربوط به عملکرد هواپیما به فرمان‌های ورودی در حضور نامعینی و اغتشاش آمده است. برای مقایسه بهتر، در شبیه سازی، هم زمان نتایج روش مرسوم INDI با روش ارائه شده این مقاله (RINDI) آورده شده است. برای ردگیری زوایای اوپلر، فرمان های مرجع به صورت کاملاً مجزا در نظر گرفته می‌شوند، یعنی مادامی که زاویه مرجع یک محور در حال تغییر است، زاویه مرجع محور دیگر هم در حال تغییر است. علت این کار، به چالش کشیدن مودهای دکوپله در حالت طولی و عرضی است. نتیجه‌گیری حاصل از شبیه‌سازی‌ها در بخش (۵) ارائه می‌شود.

نوآوری و بخش‌های برجسته: الف) در INDI های پیشین که از مود لغزشی در حلقه داخلی استفاده شده است به پدیده چترینگ توجه‌ای نشده است. ب) در کنترل هواپیما با استفاده از روش های مقاوم، نامعینی یا اغتشاش به تنهایی در نظر گرفته شده است. در این مقاله هر دو مورد با هم بررسی می‌شوند، به طوری که به هر سه محور در زمان های جداگانه اغتشاش اعمال و نامعینی برای تمامی ضرایب آیرودینامیکی طولی و عرضی در نظر گرفته می‌شود. پ) تدوین روابط برای محاسبه بیشینه حالت های مغشوش برای اولین بار. دانستن مقدار بیشینه متغیرهای حالت می‌تواند نقش مفیدی در عملکرد بهتر کنترل کننده لغزشی ایفا کند. از طرفی

مقدار اغتشاش و نامعینی کران دار است ولی مقدار آن مشخص نیست. شایان ذکر است که بیشینه حالت مغشوش لزوماً با جایگذاری کران معلوم اغتشاش بدست نمی آید و ممکن است با مقادیری کمتر از اغتشاش و نامعینی وارده، حالت مغشوش بیشینه شود. روش تدوین این روابط در متن مقاله ارائه شده است.

۲- مدلسازی روابط حرکت هواپیما به صورت معادلات شش درجه آزادی

در این قسمت از روابط شش درجه آزادی جسم پرنده سلب مانند روابط (۱) تا (۶) استفاده می شود. سه معادله اول مربوط به حرکت خطی در امتداد سه محور بدنه و سه معادله دوم مربوط به گشتاور حاصله از دوران حول همان سه محور می باشد.

$$\dot{u} = -C_D \cdot \bar{q} \cdot S - g \cdot \sin\theta - q \cdot w + r \cdot v + T \quad (۱)$$

$$\dot{v} = C_Y \cdot \bar{q} \cdot S + g \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta - r \cdot u + p \cdot w \quad (۲)$$

$$\dot{w} = -C_L \cdot \bar{q} \cdot S + g \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta - p \cdot v + q \cdot u \quad (۳)$$

$$\dot{p} = j_1 \cdot L + j_2 \cdot N + j_3 \cdot p \cdot q + j_4 \cdot q \cdot r \quad (۴)$$

$$\dot{q} = j_5 \cdot M + j_9 \cdot p \cdot r + j_{10} \cdot (r^2 - p^2) \quad (۵)$$

$$\dot{r} = j_2 \cdot L + j_6 \cdot N + j_7 \cdot p \cdot q + j_8 \cdot q \cdot r \quad (۶)$$

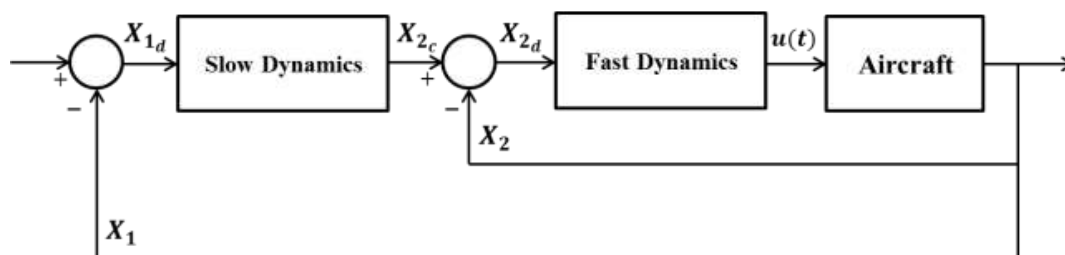
از طرفی می توان رابطه بین زوایای اویلر را به صورت (۷) بیان کرد.

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin\varphi \cdot \tan\theta & \cos\varphi \cdot \tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi \cdot \sec\theta & \cos\varphi \cdot \sec\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (۷)$$

نحوه تدوین این روابط به صورت کامل در پیوست (۱) آمده است.

۳- کنترل غیرخطی وارون دینامیک افزوده مقاوم RINDI

در حالت حلقه باز حالت های هواپیما نمی توانند ورودی مرجع را دنبال کنند. به همین خاطر پیش از هرکاری به یک کنترل کننده پایه نیاز داریم. به دلیل وجود اغتشاش، عیب و فرمان مرجع متغیر، نقطه کار مدام در حال تغییر است. لذا کنترل پایه براساس معادلات غیرخطی طراحی می شود. از آن جا که فرمان های ورودی برای زوایای اویلر همزمان داده می شود، نباید معادلات پرواز را از هم دکوپله کرد. برای عملکرد بهتر در حالت واقعی، معادلات غیرخطی بدون جداسازی حالت های طولی و عرضی حل می شوند. برای کنترل پایه از روش های گوناگونی استفاده می شود. در این مقاله نوع جدیدی از روش وارون دینامیک افزایشی ارائه می شود. همانطور که در مقدمه ذکر شد، INDI به روش های متفاوتی طراحی می شود. در ابتدا NDI مرسوم معرفی و سپس طرح جدید INDI ارائه می گردد. در NDI مرسوم برای کنترل پرواز، عموماً مودهای تند و کند را از هم جدا می کنند. طبق قضیه جداسازی (separation)، برای هر حلقه به طور جداگانه کنترل کننده ای طراحی می شود. p, q, r به عنوان مودهای تند در حلقه داخلی و φ, θ, ψ به عنوان مودهای کند در حلقه خارجی در نظر گرفته



شکل ۱- بلوک دیاگرام روش NDI

می‌شوند. بلوک دیاگرام NDI مرسوم در شکل (۱) نشان داده شده است. در این شکل، X_{1c} و X_{2c} معرف فرمان های ورودی و X_{1d} و X_{2d} مقادیر مطلوب هستند که از اصلاح فرمان ورودی بدست می‌آیند.

۳-۱- طراحی حلقه خارجی

شکل کلی معادلات در حلقه خارجی به صورت رابطه (۸) در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{X}_1 = f_1(X_1) \cdot X_2 \quad (۸)$$

که در آن

$$X_1 = (\varphi \quad \theta \quad \psi)^T \quad (۹)$$

$$X_2 = (p \quad q \quad r)^T \quad (۱۰)$$

$$f_1(X_1) = \begin{pmatrix} 1 & \sin\varphi \cdot \tan\theta & \cos\varphi \cdot \tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi \cdot \sec\theta & \cos\varphi \cdot \sec\theta \end{pmatrix} \quad (۱۱)$$

۳-۲- طراحی حلقه داخلی

شکل کلی معادلات در حلقه داخلی به شکل یک سیستم افاین همانند (۱۲) در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{X}_2 = f_2(X_2) + g \cdot u(t) \quad (۱۲)$$

با بیان روابط (۴)-(۶) به صورت (۱۲) داریم:

$$f_2 = \begin{pmatrix} j_1 \cdot \hat{L} + j_2 \cdot \hat{N} + j_3 \cdot p \cdot q + j_4 \cdot q \cdot r \\ j_5 \cdot \hat{M} + (j_1 - j_6) \cdot p \cdot r + j_1 \cdot (r^2 - p^2) \\ j_2 \cdot \hat{L} + j_6 \cdot \hat{N} + j_7 \cdot p \cdot q + j_8 \cdot q \cdot r \end{pmatrix} \quad (۱۳)$$

$$g = \begin{pmatrix} L_{\delta_a} & 0 & L_{\delta_r} \\ 0 & M_{\delta_e} & 0 \\ N_{\delta_a} & 0 & N_{\delta_r} \end{pmatrix} \quad (۱۴)$$

که در آن بردار ورودی کنترل (u) برابر است با

$$u = (\delta_a \quad \delta_e \quad \delta_r)^T \quad (۱۵)$$

در ادامه طراحی کنترل کننده INDI توضیح داده می‌شود. برای عملکرد بهتر کنترل کننده فرمان های X_{1d} و X_{2d} را اصلاح می‌کنیم. X_{1d} با کنترل کننده PID، برای حلقه خارجی تولید می‌شود و برای حلقه داخلی از کنترل کننده مود لغزشی بهره می‌بریم. در بخش بعدی پایداری سیستم کنترلی اثبات می‌شود.

۳-۳- اثبات پایداری

بلوک دیاگرام کلی این روش در شکل (۲) آورده شده است.

ابتدا متغیرهای جدید زیر تعریف می‌شوند:

$$X_{1e} = X_{1d} = (X_{1c} - X_1) \quad (16)$$

$$X_{2e} = X_{2d} = (X_{2c} - X_2) \quad (17)$$

$$e_1 = k_p \cdot X_{1e} + k_I \cdot \int X_{1e} \cdot dt + k_d \cdot \dot{X}_{1e} \quad (18)$$

$$e_2 = X_{2e} + \int X_{2e} \cdot dt = S \quad (19)$$

که در روابط فوق، S سطح لغزش را نشان می‌دهد و تمامی متغیرهای تعریف شده به صورت بردار سه در یک هستند. مطلوب آن است که دینامیک خطا در حلقه خارجی به صورت $\dot{e}_1 = -k_1 \cdot e_1$ رفتار کند که در آن k_1 یک ماتریس مربعی مثبت معین با بعد (۳) است. تابع لیاپانوف را به صورت $V = V_1 + V_2$ در نظر می‌گیریم که در آن

$$V_1 = \frac{1}{2} (e_1^T \cdot e_1) \quad (20)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} S^T \cdot S \quad (21)$$

واضح است که V ، مثبت معین است. از مشتق‌گیری V_1 نسبت به زمان داریم

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2} (e_1^T \cdot \dot{e}_1 + \dot{e}_1^T \cdot e_1) \quad (22)$$

$$\dot{V}_1 = -e_1^T \cdot k_1 \cdot e_1 \quad (23)$$

با انتخاب $k_1 > 0$ ، \dot{V}_1 منفی معین خواهد بود. با مشتق‌گیری از V_2 نسبت به زمان داریم

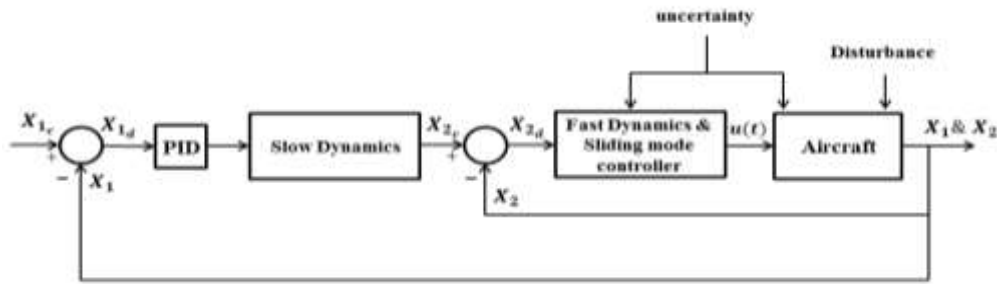
$$\begin{cases} \dot{V}_2 = \frac{1}{2} (S^T \cdot \dot{S} + \dot{S}^T \cdot S) \leq -\gamma_1 \cdot \|S\| \\ \rightarrow \dot{V}_2 = S^T \cdot \dot{S} \leq -\gamma_1 \|S\| \end{cases} \quad (24)$$

که $\|S\|$ ، نرم S را نشان می‌دهد. همچنین با انتخاب $\gamma_1 > 0$ ، \dot{V}_2 نیز منفی معین خواهد بود. در ادامه سیستم (۱۲) را به صورت (۲۵) در نظر می‌گیریم.

$$\dot{X}_2 = \hat{f}_2(X_2) + g \cdot u(t) + d(X) + \Delta(X) \quad (25)$$

که $d(X)$ اغتشاش وارد بر سیستم با کران معلوم $|d(x)| < D$ و $\Delta(X)$ نامعینی برای تمامی ضرایب آیرودینامیکی هواپیما در مود طولی و عرضی می‌باشد. همچنین، $\hat{f}_2(X_2)$ مقدار نامی از تابع $f_2(X_2)$ است. از (۱۹)، تقسیم طرفین (۲۴) بر $\|S\|$ و شکل (۲) داریم:

$$\begin{cases} S^T \cdot \text{sgn}(S) \leq -\gamma_1 \\ S = X_{2e} + \int X_{2e} \cdot dt \\ \dot{S} = \dot{X}_{2e} + X_{2e} \end{cases} \quad (26)$$



شکل ۲- بلوک دیاگرام روش پیشنهادی RINDI

$$\rightarrow (\dot{X}_{2e} + X_{2e})^T \cdot \text{sgn}(S) + \gamma_1 \leq 0 \quad (27)$$

$$\rightarrow (\dot{X}_{2c} - \hat{f} - g \cdot u(t) - \Delta(x) - d(x) + X_{2c} - X_2)^T \cdot \text{sgn}(S) + \gamma_1 \leq 0 \quad (28)$$

که sgn معرف تابع علامت می باشد. اینک سیگنال کنترل u را به صورت (۲۹) در نظر می گیریم:

$$u = g^{-1}[\dot{X}_{2c} - \hat{f} + X_{2c} - X_2 + k \cdot \text{sgn}(S)] \quad (29)$$

پس از جایگذاری (۲۹) در (۲۸) داریم:

$$(-k \cdot \text{sgn}(S) - \Delta(x) - d(x))^T \cdot \text{sgn}(S) + \gamma_1 \leq 0 \quad (30)$$

$$\rightarrow k - \gamma_1 + (\Delta(x) + d(x))^T \cdot \text{sgn}(S) \geq 0 \quad (31)$$

با تعریف $\zeta = \Delta(x) + d(x)$ داریم:

$$k = \gamma_1 + \sup\{\zeta\} \quad (32)$$

لذا با توجه به پایداری همزمان حلقه های داخلی و خارجی و استفاده از قضیه جداسازی زمانی (چون ثابت زمانی حلقه داخلی چند برابر کوچک تر از حلقه خارجی است) می توان نتیجه گرفت سیستم کنترل حلقه بسته پایدار است. در ادامه، نحوه بدست آوردن $\sup\{\zeta\}$ تشریح می شود. این مقدار نشان دهنده بیشترین تاثیر اغتشاش و نامعینی بر روی حالتها است. از آنجا که اغتشاش وارده موجب افزایش یا کاهش سرعت زاویه ای در محور مورد نظر می شود، آن را به صورت (۳۳) که یک مقدار Δ به سرعت زاویه ای مربوطه در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} p_p = p_m + \Delta p \\ q_p = q_m + \Delta q \\ r_p = r_m + \Delta r \end{cases} \quad (33)$$

که اندیس m نشان دهنده مقدار نامی (مدل) و اندیس p نشان دهنده مقدار واقعی (پلنت) متغیرهای حالت می باشد. همچنین برای سرعت های زاویه ای (۳۳) به صورت برداری داریم:

$$\dot{\omega}_p = \dot{\omega}_m + \zeta \quad (34)$$

برای سادگی محاسبات با تبدیل بردار ω به ماتریس پادمتقارن Ω می توان از ضرب داخلی به جای ضرب خارجی (رابطه (۵۹) در پیوست ۱) استفاده کرد. به بیانی دیگر، این رابطه به (۳۵) تبدیل می شود.

$$\dot{\omega} = I^{-1}(m_B - \Omega \cdot (I \cdot \omega)) \quad (35)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

پس از جایگذاری (۳۳)، (۳۵) و (۳۶) در (۳۴) و جایگذاری هر متغیر بر حسب مقدار مدل و تغییرات حاصل از نامعینی و اغتشاش، رابطه (۳۷) بدست می‌آید. Δ نشان‌دهنده تغییر به علت نامعینی و اغتشاش است.

$$\dot{\omega}_p = I^{-1}[(\mathbf{m}_{Bm} + \Delta \mathbf{m}) - (\Omega_m + \Delta \Omega) \cdot ((I_m + \Delta I) \cdot (\omega_m + \Delta \omega))] \quad (37)$$

$$\Delta \omega = (\Delta p \quad q \Delta \quad \Delta r)^T \quad (38)$$

$$\Delta \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \Delta L_A \\ \Delta M_A \\ \Delta N_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta C_l \cdot \bar{q} \cdot S \cdot b \\ \Delta C_m \cdot \bar{q} \cdot S \cdot \bar{c} \\ \Delta C_n \cdot \bar{q} \cdot S \cdot b \end{pmatrix} \quad (39)$$

با فرض این که در هر لحظه فقط به یک محور اغتشاش وارد شود، می‌توان از حاصل ضرب اغتشاش دو محور صرف نظر کرد. به عبارتی دیگر،

$$\Delta p \cdot \Delta q, \Delta p \cdot \Delta r, \Delta q \cdot \Delta r = 0 \quad (40)$$

فرض دیگر صرف نظر کردن از ضرب هر اغتشاش در خودش است، زیرا توان دوم یک عدد کوچک از خود همان عدد کوچک‌تر است. یعنی داریم

$$\Delta p^2, \Delta q^2, \Delta r^2 = 0 \quad (41)$$

با بسط رابطه (۳۷) و فرضیات در نظر گرفته شده به رابطه (۴۲) می‌رسیم:

$$\dot{\omega}_p = I^{-1}(\mathbf{m}_B - \Omega_m \cdot I \cdot \omega) - I^{-1}(\Omega_m \cdot I \cdot \Delta \omega + \Delta \Omega \cdot I \cdot \omega_m) + \Delta I^{-1}(\Delta \mathbf{m} - \omega \times (\Delta I \cdot \omega)) \quad (42)$$

که رابطه (۴۲) از سه بخش پاسخ مدل، پاسخ به اغتشاش و پاسخ به نامعینی تشکیل شده است. بخش پاسخ به اغتشاش را با $d(X)$ و پاسخ به نامعینی را با $\Delta(x)$ نشان می‌دهیم.

$$d(x) = -I^{-1}(\Omega_m \cdot I \cdot \Delta \omega + \Delta \Omega \cdot I \cdot \omega_m) \quad (43)$$

$$\Delta(x) = \Delta I^{-1}(\Delta \mathbf{m} - \omega \times (\Delta I \cdot \omega)) \quad (44)$$

هرچند اندازه‌گیری مقدار (۴۳) و (۴۴) ممکن نیست ولی مقدار بیشینه این دو رابطه با روش‌های عددی قابل محاسبه است. روال محاسبه بر این اساس است که به ازای بازه نامعینی و اغتشاش مجاز در هر لحظه می‌توان مقدار $\sup\{\zeta\}$ را تعیین کرد به گونه‌ای که $\sup\{\zeta\} \leq D$ یک مقدار کراندار در هر لحظه می‌باشد. جزئیات نامعینی در ضرایب آیرودینامیکی به صورت (۴۵)-(۴۷) در نظر گرفته می‌شود.

$$\Delta C_l = \Delta C_{l_0} + \Delta C_{l_\beta} \cdot \beta + \Delta C_{l_p} \cdot \left(\frac{p \cdot b}{2V_T}\right) + \Delta C_{l_r} \cdot \left(\frac{r \cdot b}{2V_T}\right) \quad (45)$$

$$\Delta C_m = \Delta C_{m_0} + \Delta C_{l_\alpha} \cdot \alpha + \Delta C_{m_{ih}} \cdot i_h + \Delta C_{m_q} \cdot \left(\frac{q \cdot c}{2V_T}\right) + \Delta C_{m_u} \cdot \left(\frac{V_T - u_1}{V_T}\right) \quad (46)$$

$$\Delta C_n = \Delta C_{n_0} + \Delta C_{n_\beta} \cdot \beta + \Delta C_{n_p} \cdot \left(\frac{p \cdot b}{2V_T}\right) + \Delta C_{n_r} \cdot \left(\frac{r \cdot b}{2V_T}\right) \quad (47)$$

لذا قانون کنترلی برابر است با

$$u = g^{-1}[\dot{X}_{2c} - \hat{f} + X_{2c} - X_2 + (\gamma_1 + \sup\{\zeta\}) \cdot \text{sgn}(S)] \quad (48)$$

که با جایگذاری مقادیر مربوطه به صورت رابطه (۴۹) قابل بیان است.

$$u = g^{-1}[\dot{X}_{2c} - \hat{f} + X_{2c} - X_2 + (\gamma_1 + \sup\{\zeta\}) \cdot \text{sgn}(X_{2e} + \int X_{2e} \cdot dt)] \quad (49)$$

همچنین ضرایب کنترل کننده PID در بردار X_{2c} نهفته است.

۳-۴- کاهش چترینگ در تلاش کنترلی حلقه داخلی

برای حذف چترینگ از لایه مرزی متغیر استفاده شده است. به جای تابع علامت از تابع تانژانت سیگموئید متقارن با شیب متغیر a ، طبق رابطه (۵۰) استفاده می‌شود. با کم شدن خطا مقدار a به همان نسبت زیاد می‌شود، به بیانی دیگر به تابع علامت نزدیک‌تر می‌شود. نمودار این تابع به ازای مقادیر مختلف a در شکل (۳) رسم شده است.

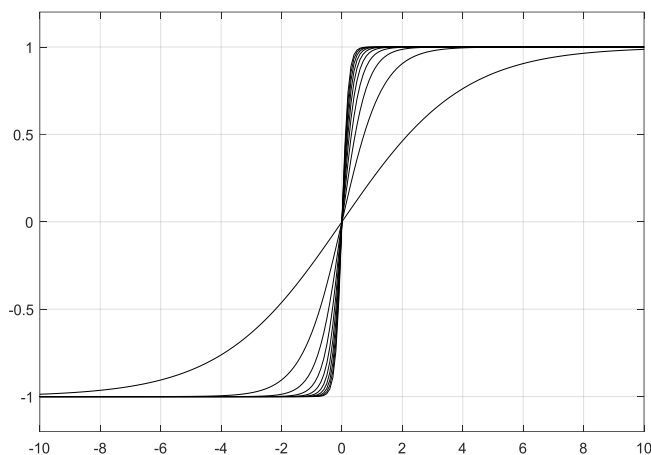
$$sts = \frac{2}{1 + e^{-a.s}} - 1 \quad (50)$$

۴- شبیه‌سازی

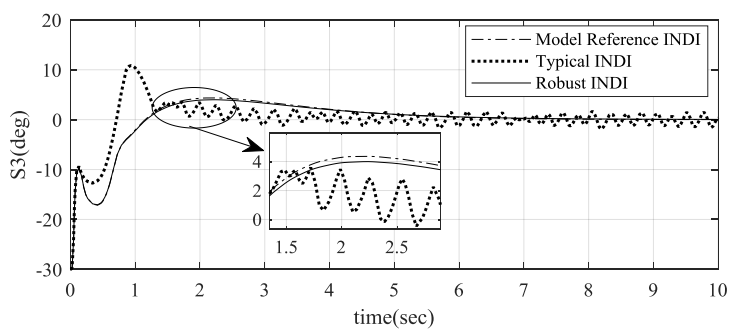
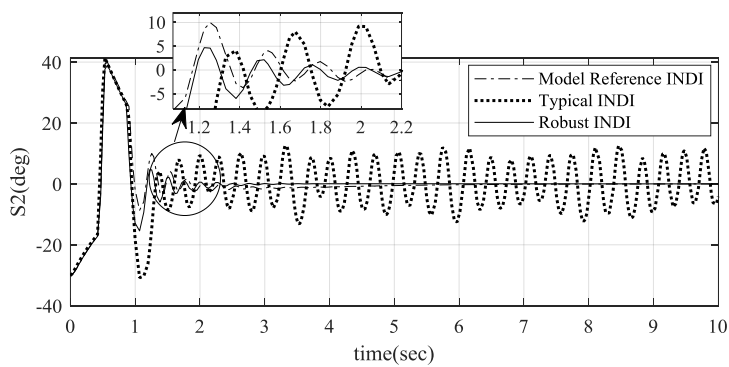
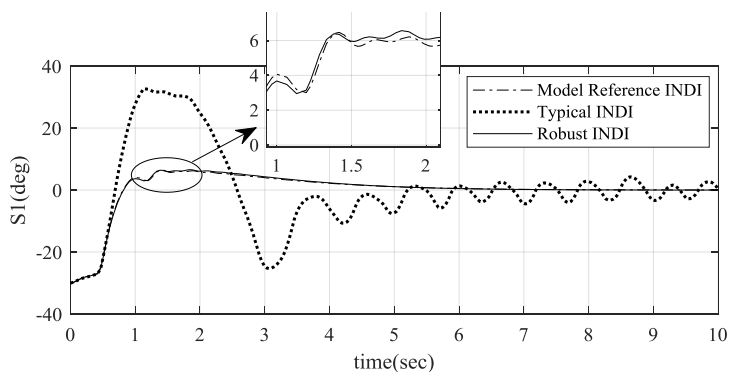
در بخش قبلی بردار کنترلی u به گونه‌ای انتخاب شده است که در حضور نامعینی و اغتشاش سیستم پایدار باشد. در این قسمت به شبیه‌سازی روش ارائه شده پرداخته شده است. این روش روی دینامیک غیرخطی هواپیمای بوئینگ-۷۴۷ شبیه‌سازی شده است. تمامی ضرایب لازم برای روابط این هواپیما در [۴۱] آمده است. این ضرایب متعلق به این هواپیما برای پرواز در ارتفاع ۱۳ کیلومتری از سطح دریا می‌باشد. در اینجا از یک حالت اولیه دلخواه سیستم شبیه‌سازی شده است. متغیرهای مورد بررسی، زوایای اویلر هستند. زوایای اویلر که فرمان‌های مرجع ورودی هستند، بایستی صفر در نظر گرفته شود. زیرا بررسی پایداری لیاپانوفی برای سیستم‌های بدون ورودی می‌باشد. ابتدا سطح لغزش برای هر سه متغیر در شکل (۴) نشان داده شده است. نامعینی به اندازه $\pm 30\%$ درصد به تمامی ضرایب آیرودینامیکی طولی و عرضی داده شده است. در این شکل برای هر سطح لغزش سه مدل بررسی می‌شود. (۱) مدل مرجع INDI که به آن نامعینی اعمال نشده است و می‌خواهیم روش پیشنهادی همانند این مدل رفتار کند، (۲) روش INDI مرسوم که در پژوهش‌های اخیر انجام شده است. قسمت افزایشی این روش همان مود لغزشی است و برای حلقه بیرونی از کنترل کننده PID استفاده شده است، (۳) روش پیشنهادی این مقاله که با عنوان Robust INDI از آن نامبرده می‌شود.

در تمامی زوایا، بر اساس شکل‌های بدست‌آمده برای هر سه روش، مشاهده می‌شود که پدیده چترینگ در روش پیشنهادی وجود ندارد و به خوبی سطح لغزش به سمت صفر میل کرده است. با وجود نامعینی در ضرایب آیرودینامیکی، به علت مقاوم نبودن روش مرسوم، پاسخ آن نوسانی می‌باشد. در ادامه منحنی فاز متغیرهای حالت مورد نظر یعنی زوایای اویلر ترسیم شده است. این ترسیم به صورت رفتار هر متغیر نسبت به مشتق خودش انجام شده است. نتایج این تحلیل در شکل (۵) نشان داده شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، تمامی زوایای اویلر و مشتق آن‌ها پس از حرکت از یک حالت اولیه غیرصفر به مقدار صفر می‌رسند. این امر نشان‌دهنده رسیدن سیستم به نقطه تعادل و ماندن در این نقطه می‌باشد، زیرا هم متغیر و هم تغییرات آن صفر شده‌اند. در ادامه، خطا بر حسب تغییرات آن برای هر سه زاویه اویلر ترسیم و سپس رفتار آن نسبت

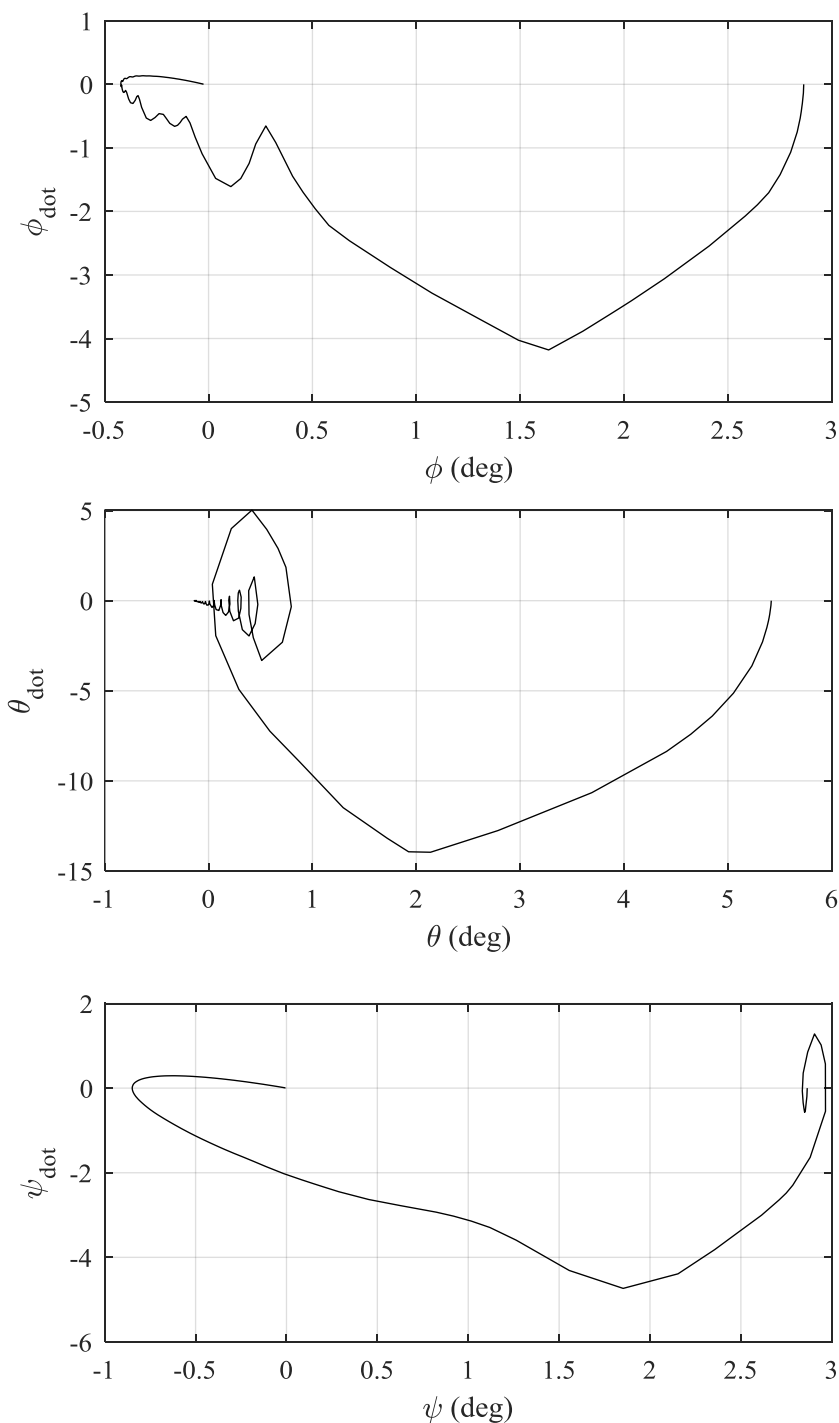
به مدل مرجع در شکل (۶) نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود، این فرمان‌ها همزمان در حال تغییر هستند.



شکل ۲- نمودار شبه تانزانت سیگموئید متغیر

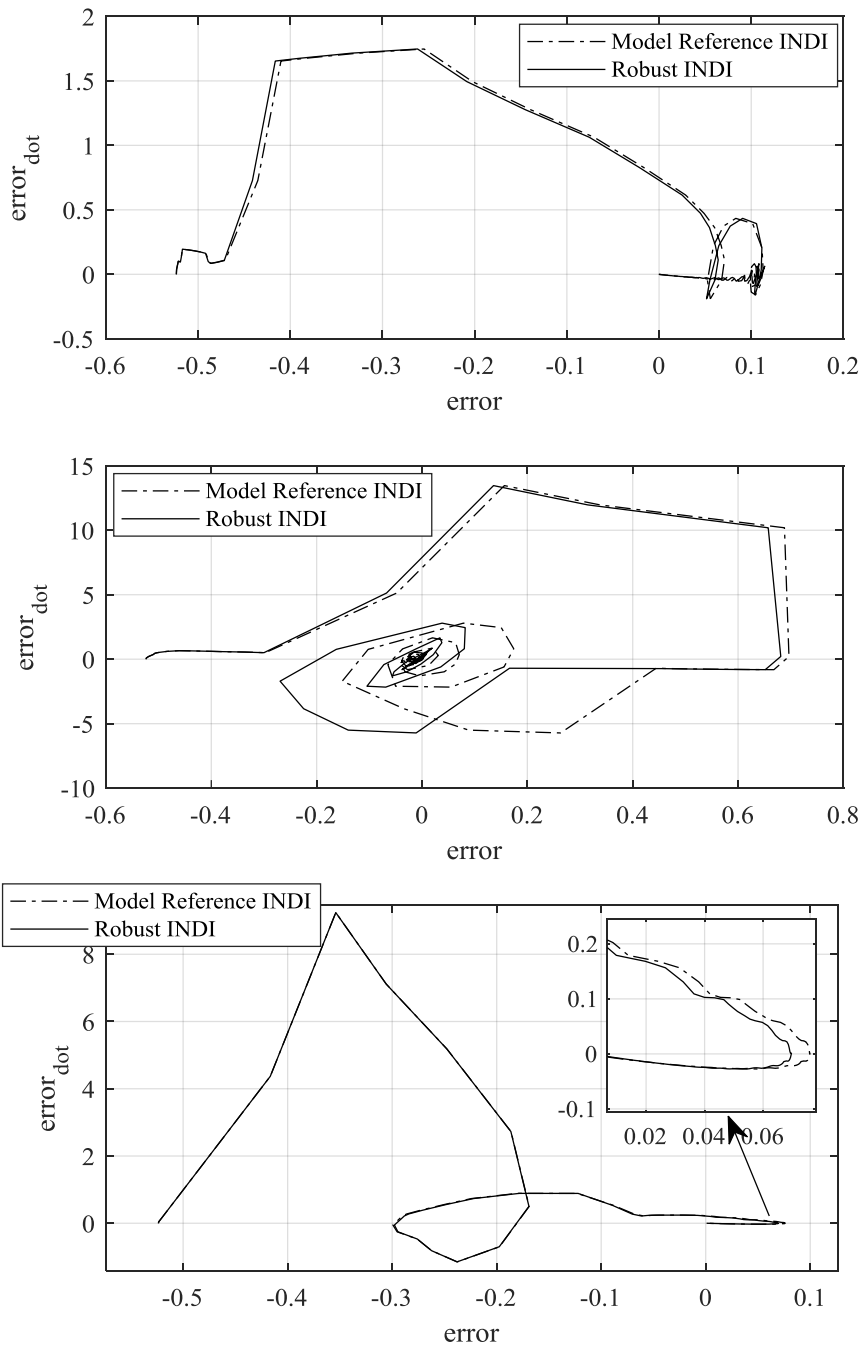


شکل ۳- سطح لغزش برای سه متغیر حالت



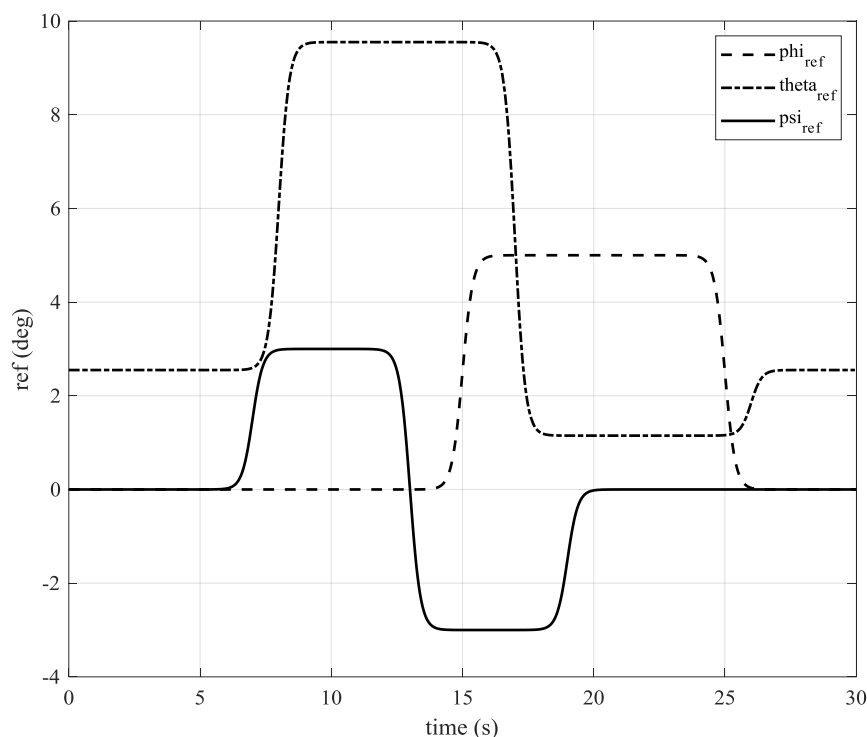
شکل ۵- منحنی فاز هر متغیر حالت نسبت به تغییرات آن‌ها

با این کار عملکرد سیستم در شرایط سخت تری به چالش کشیده می‌شود به طوری که در زمان ۱۵ الی ۱۸ ثانیه هر سه فرمان به طور هم زمان در حال تغییر هستند. توجه شود در هنگام تغییر فرمان‌ها به طور همزمان، تزویج شدیدی در تاثیرپذیری مودهای طولی از فرمان عرضی و به عکس مشاهده می‌شود. در صورتی که از روش‌های تزویج‌زدایی مودهای طولی و عرضی استفاده شود، پاسخ سیستم کنترل، تفاوت زیادی با واقعیت خواهد داشت. زیرا تزویج معادلات برداشته شده و سپس کنترل‌کننده طراحی شده است. مقدار $\pm 30\%$ درصد نامعینی برای تمامی ضرایب آیرودینامیکی طولی و عرضی در نظر گرفته شده است.



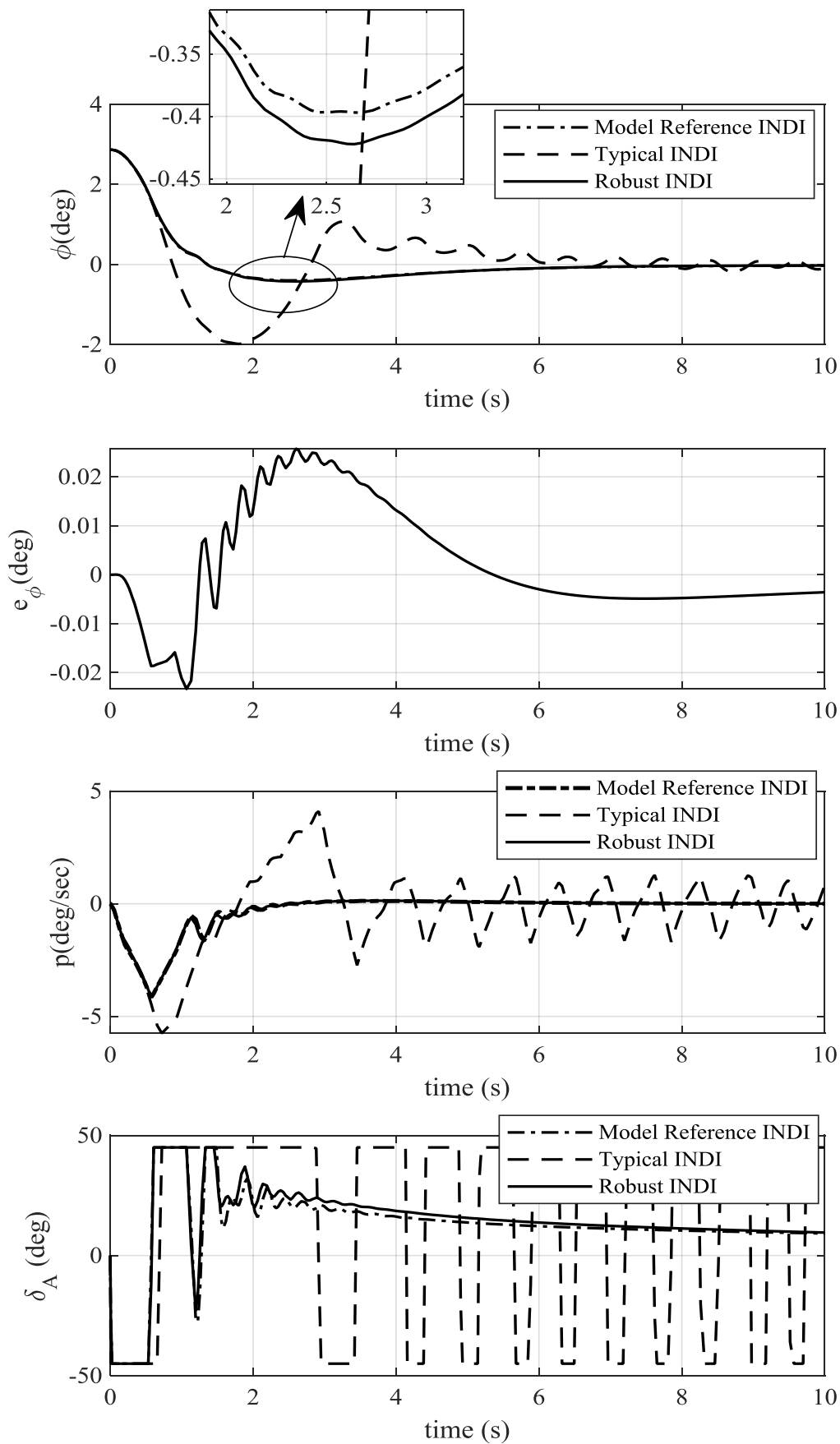
شکل ۶- منحنی خطا نسبت به تغییرات خطا برای هر سه متغیر حالت به ترتیب ϕ ، θ و ψ

با آن که در روش پیشنهادی نامعینی در تمامی ضرایب آیرودینامیکی طولی و عرضی وجود دارد، مشاهده می‌شود مدل مرجع بدون نامعینی را به خوبی دنبال کرده است. علت نوسانات بیشتر در زاویه تتا به خاطر تاثیرپذیری بیشتر این زاویه از مقادیر ممان اینرسی و ساختار فیزیکی هواپیما است. یعنی با یک اغتشاش یا نامعینی برابر به هر یک از محورها، محور y که زاویه تتا را تشکیل می‌دهد بیشترین واکنش را نشان می‌دهد. در این بخش رفتار هواپیما به فرمان‌های مرجع متغیر با روش پیشنهادی بررسی می‌شود. برای ارزیابی بهتر، فرمان‌های مرجع برای زوایای اوپلر (ψ ، ϕ ، θ) به صورت پالس‌هایی که با تابع سیگموئیدی نرم شده است در نظر گرفته شده‌اند. این فرمان‌ها در شکل (۷) نشان داده شده است.

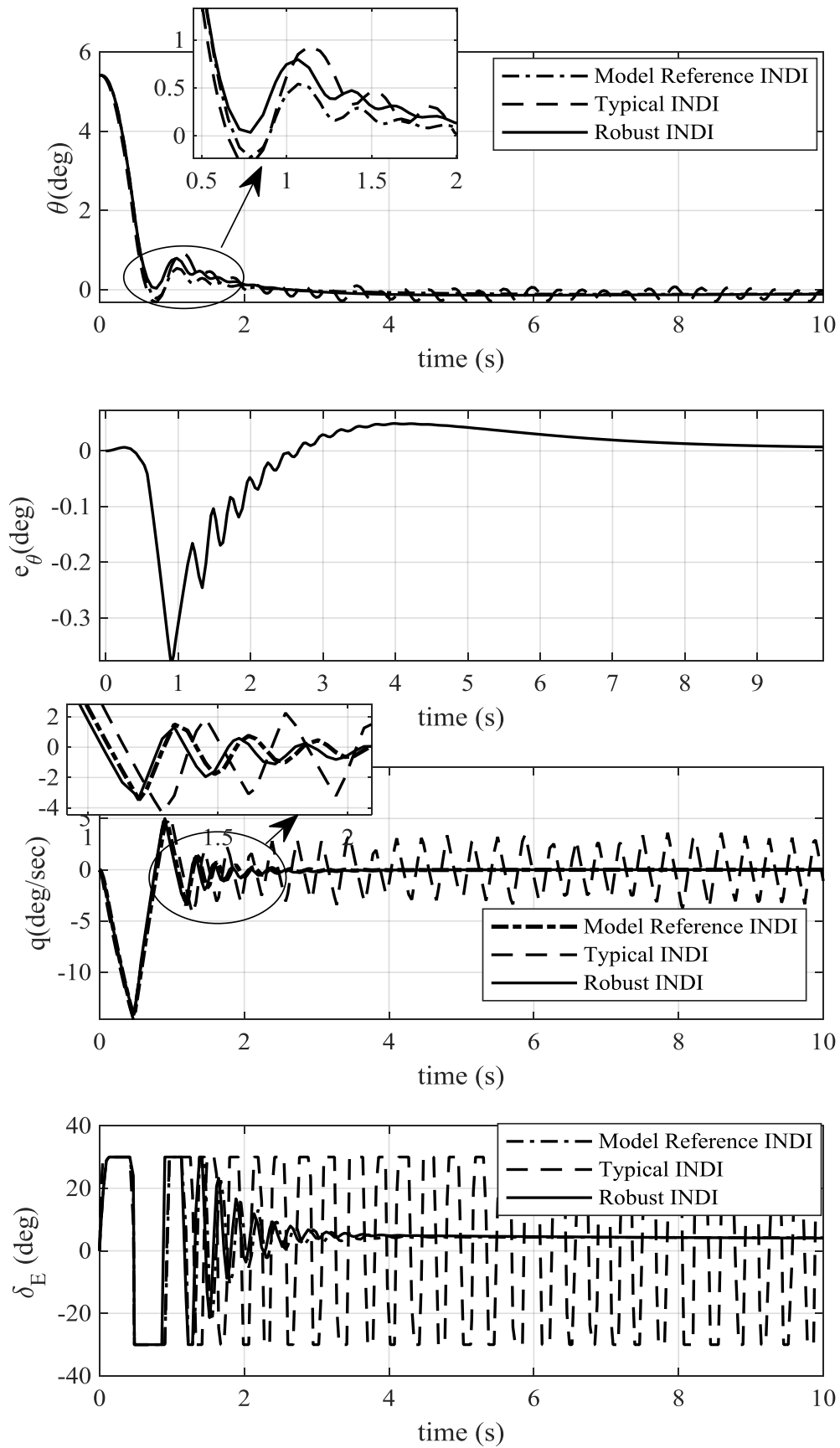


شکل ۷- فرمان‌های مرجع ورودی

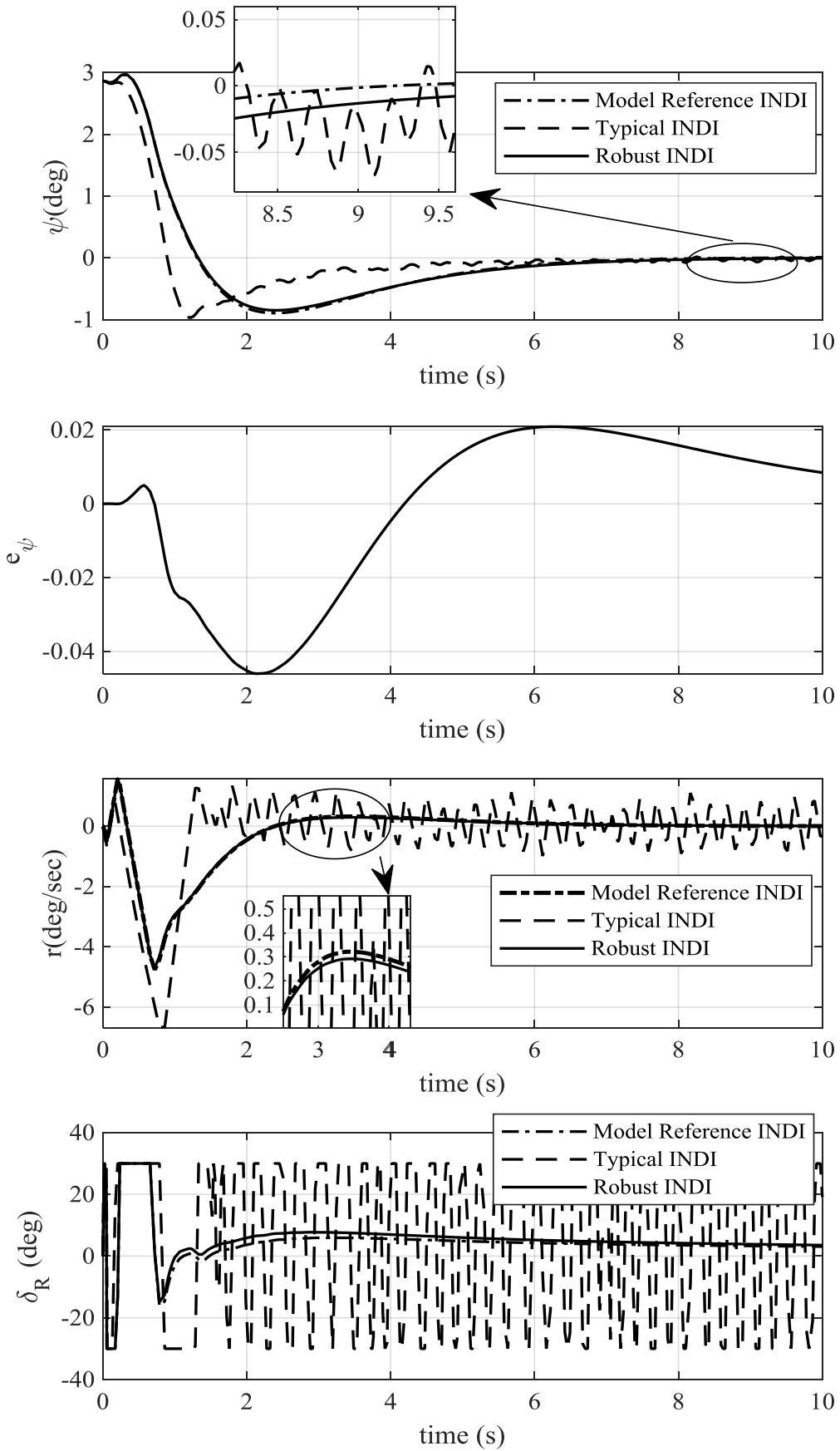
در مدل مرجع غیرخطی، نامعینی وجود ندارد. هدف این است که پاسخ روش پیشنهادی مانند مدل مرجع باشد. در شبیه‌سازی‌های انجام شده شش شکل کلی وجود دارد که در هر یک از آنها زوایای اوپلر و سرعت زاویه‌ای حاصل از آن و همچنین تلاش کنترلی مربوطه آورده شده است. سه شکل اول بدون ورودی است و حالت‌ها بایستی پس از شروع از یک حالت اولیه به مقدار صفر برسند، و سه شکل بعدی با توجه به فرمان‌های مرجع شکل (۷) می‌باشد. همانطور که در هر شش شکل مشاهده می‌شود روش پیشنهادی بدون چترینگ بوده و برتری آن نسبت به روش مرسوم کاملاً مشهود است. شکل‌های (۸) - (۱۰) پاسخ ورودی صفر سیستم را نشان می‌دهند. در شکل‌های اخیر، هر سه زاویه و سرعت‌های زاویه‌ای مربوطه به صفر میل کرده و در این مقدار مستقر شده‌اند. شایان ذکر است، بیشینه انحراف سطوح کنترلی برای ایلرون ± 45 ، الوپتور و رادر هم هر کدام ± 30 درجه در نظر گرفته شده است. همچنین، رفتار عملگر در این هواپیما به صورت تابع $\frac{10}{s+10}$ انتخاب شده است. این محدودیت‌ها به خاطر مشخصات دینامیکی عملگرها و سلامت فیزیکی آن‌ها می‌باشد. هر سه شکل این بخش، نشان‌دهنده اختلاف پاسخ روش پیشنهادی نسبت به مدل مرجع است. این اختلاف از روی خطای زاویه اوپلر مربوطه مشخص می‌باشد. پاسخ متغیرهای حالت و تلاش کنترلی مربوطه به فرمان‌های مرجع مورد نظر در شکل‌های (۱۱) - (۱۳) آورده شده است. همانند شکل‌های قبل، مقدار ± 30 درصد نامعینی به تمامی ضرایب آیرودینامیکی طولی و عرضی اعمال شده است، با این تفاوت که به هر سه محور به مقدار نامعلوم ولی کران‌دار اغتشاش پالسی به مدت یک ثانیه در زمان‌های مختلف در نظر گرفته شده است. کران اغتشاش ۱۰ درصد سرعت زاویه‌ای همان محور است. در محور x با اغتشاش پالسی در زمان ۶ تا ۷ ثانیه مواجه هستیم. همانطور که در شکل (۱۱) نمایان است زاویه φ و سرعت زاویه‌ای مربوطه به آن (p)، دچار تغییرات ناگهانی شده‌اند و ایلرون در بازه زمانی مغشوش به خوبی توانسته اغتشاش را دفع کند.



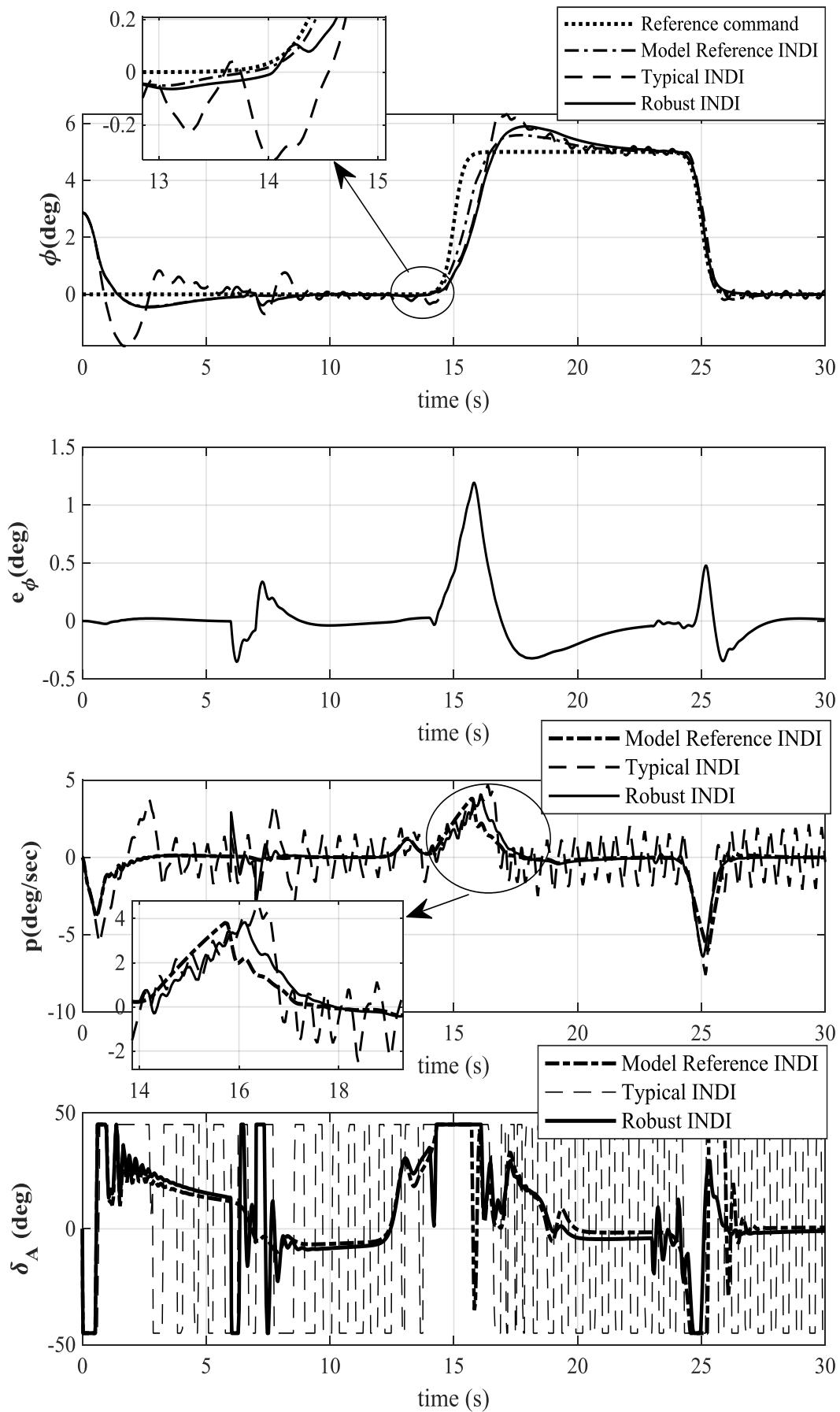
شکل ۸- پاسخ ورودی صفر سیستم برای محور x



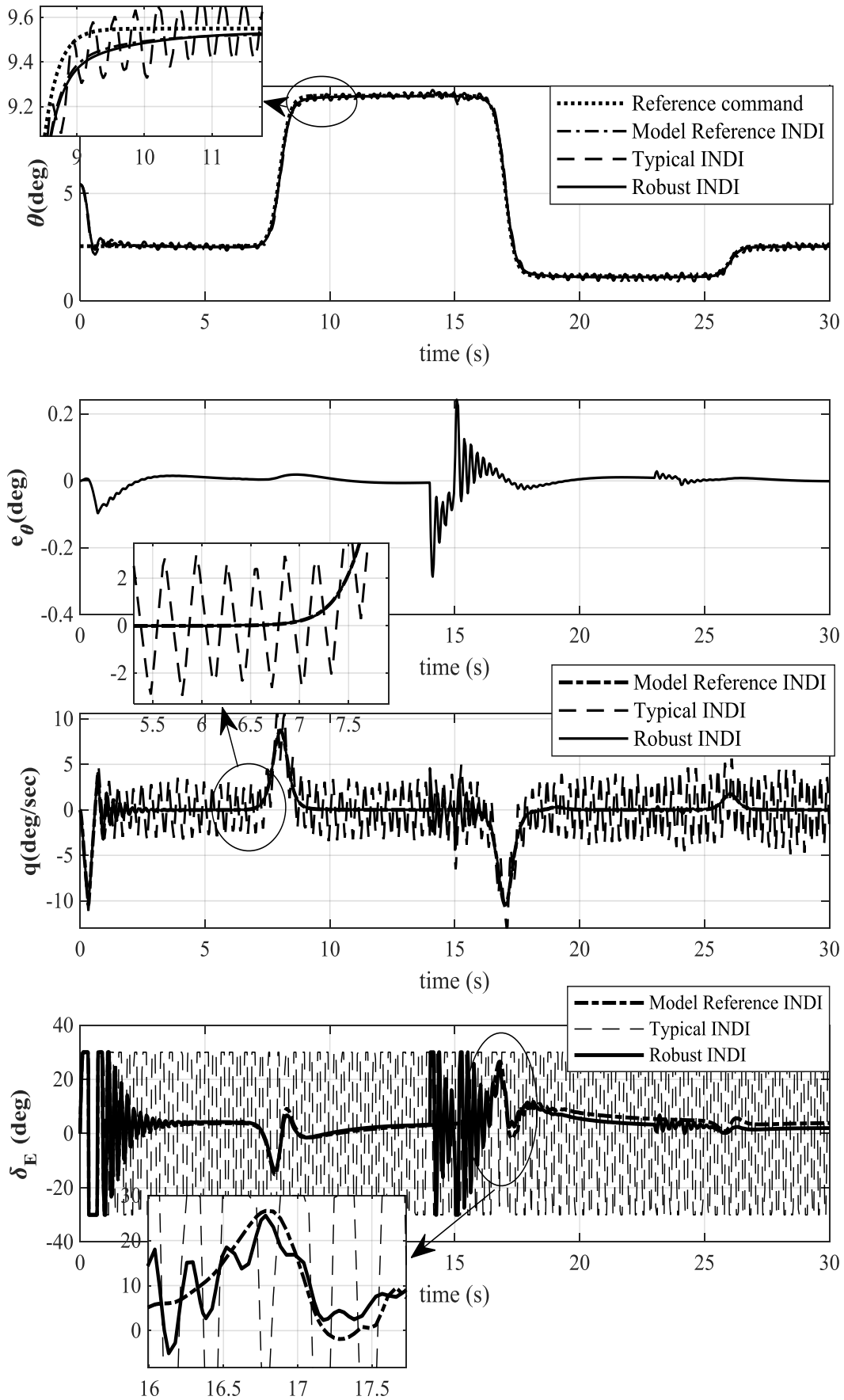
شکل ۹- پاسخ ورودی صفر سیستم برای محور y



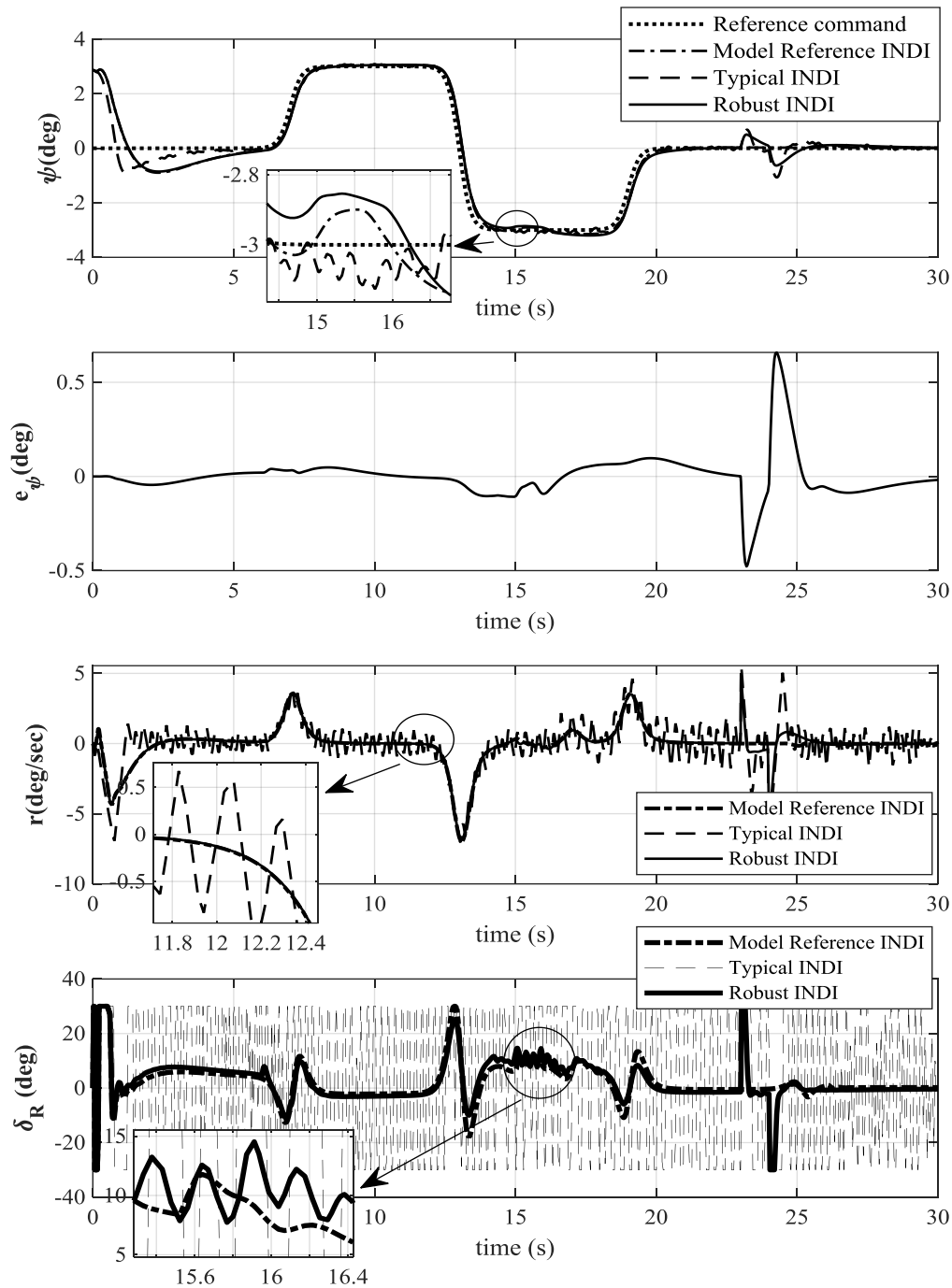
شکل ۱۰- پاسخ ورودی صفر سیستم برای محور z



شکل ۱۱- رفتار سیستم برای ردگیری فرمان ϕ



شکل ۱۲- رفتار سیستم برای ردگیری فرمان θ



شکل ۱۳- رفتار سیستم برای ردگیری فرمان ψ

جدول ۱- مقادیر عملکردی برای پاسخ پله سیستم

performance	زمان نشست (ثانیه) بالا زدگی (درصد)						خطای حالت دایم (درجه)		
	φ	θ	ψ	φ	θ	ψ	φ	θ	ψ
Model Reference	۱۱	۰	۰	۶/۸	۰/۵	۴	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۱۶
Typical INDI	۲۲	۱/۵	۴	۸/۱	non	non	۰/۱۱	۰/۲	۰/۲۱
Robust INDI	۱۵	۰	۰	۶/۹	۰/۶	۴/۵	۰/۰۳	۰/۰۱۱	۰/۱۸

برای محور y با اغتشاش پالسی در زمان ۱۴ تا ۱۵ ثانیه روبرو هستیم. همانطور که در شکل (۱۲) مشهود است زاویه θ و سرعت زاویه‌ای مربوطه به آن (q)، دچار تغییرات ناگهانی شده‌اند و در بازه زمانی مغشوش، الویتور به خوبی توانسته اغتشاش را دفع کند. برای مقایسه بهتر در همه شکل‌ها از بزرگنمایی استفاده شده است تا جزئیات برتری روش پیشنهادی به روش مرسوم متمایز گردد. با توجه به در نظر گرفتن تابع اشباع برای سطوح کنترلی، مشاهده می‌شود که دامنه تلاش کنترلی به مقدار تعیین شده محدود می‌شود. برای محور z با اغتشاش پالسی در زمان ۲۳ تا ۲۴ ثانیه روبرو هستیم. همانطور که در شکل (۱۳) نشان داده شده است زاویه ψ و سرعت زاویه‌ای مربوطه به آن (r)، دچار تغییرات ناگهانی شده‌اند و الویتور به خوبی قادر به دفع اغتشاش است. قابل ذکر است اغتشاش در این محور به معنای وزش باد یا هر نیروی خارجی دیگر از سمت کنار به بدنه هواپیما است. به طور کلی هر محوری که ممان اینرسی بزرگتری داشته باشد با اعمال مقدار کمتری از اغتشاش، مغشوش می‌شود. همچنین، تلاش کنترلی کمتری نیاز دارد. در هواپیمای بویینگ ۷۴۷ داریم $I_{zz} > I_{yy} > I_{xx}$. از این رو کنترل محور x که زاویه ϕ را می‌سازد به مراتب سخت‌تر و دارای عملکرد ضعیف‌تری نسبت به دیگر زوایا می‌باشد. در جدول (۱) عملکرد هواپیما برای هر سه زاویه اوپلر در قبال روش INDI مرسوم و روش پیشنهادی این مقاله آمده است. هر دو روش مرسوم و پیشنهادی تحت نامعینی‌های ذکر شده در قسمت‌های قبل هستند. همان‌طور که مشخص است عملکرد روش پیشنهادی به رفتار مدل مرجع بسیار نزدیک‌تر می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای کنترل زوایای اوپلر هواپیما روشی بر اساس وارون دینامیک ارائه شد. در روش پیشنهادی با توجه به تغییراتی که در حلقه‌های وارون دینامیک داده شد، یک روش وارون دینامیک افزایشی مقاوم پیشنهاد گردید که بر خلاف روش‌های قبلی، توانایی غلبه همزمان بر نامعینی و اغتشاش را دارد. همچنین قانون کنترل بر اساس مودلغزشی برای مودهای تند حلقه داخلی به گونه‌ای بدست آمده که چترینگ در سیگنال کنترلی حذف شده است. علاوه بر اثبات پایداری، شبیه‌سازی‌ها به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی آورده شده‌اند.

مراجع

- [1] Devasia, S., and Paden, B., "Nonlinear Inversion-based Output Tracking", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 41(7), pp. 930–942, (1996).
- [2] Khalil, H.K., "Nonlinear Systems", 3rd Edition, Upper Saddle River, (2002).
- [3] Rysdyk, R., and Calise, A.J., "Robust Nonlinear Adaptive Flight Control for Consistent Handling Qualities", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 13(6), pp. 896-910, (2005).

- [4] Bajodah, A.H., "Generalised Dynamic Inversion Spacecraft Control Design Methodologies", *IET Control Theory & Applications*, Vol. 3(2), pp. 239-251, (2009).
- [5] Hall, C.E., and Shtessel, Y.B., "Sliding Mode Disturbance Observer-based Control for a Reusable Launch Vehicle", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 29(6), pp. 1315-1328, (2006).
- [6] Hamayun, M.T., Edwards, C., and Alwi, H., "A Fault Tolerant Control Allocation Scheme with Output Integral Sliding Modes", *Automatica*, Vol. 49(6), pp. 1830-1837, (2013).
- [7] Shtessel, Y., Buffington, J., and Banda, S., "Multiple Timescale Flight Control Using Reconfigurable Sliding Modes", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 22(6), pp. 873-883, (1999).
- [8] Shtessel, Y., Buffington, J., and Banda, S., "Tailless Aircraft Flight Control Using Multiple Time Scale Reconfigurable Sliding Modes", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 10(2), pp. 288-296, (2002).
- [9] Shtessel, Y., Hall, C., and Jackson, M., "Reusable Launch Vehicle Control in Multiple-Time-Scale Sliding Modes", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 3(6), pp. 1013-1020, (2000).
- [10] Shtessel, Y.B., and Shkolnikov, I.A., "Aeronautical and Space Vehicle Control in Dynamic Sliding Manifolds", *International Journal of Control*, Vol. 76(9-10), pp. 1000-1017, (2003).
- [11] Wang, T., Xie, W., and Zhang, Y., "Sliding Mode Fault Tolerant Control Dealing with Modeling Uncertainties and Actuator Faults", *ISA Transactions*, Vol. 51(3) pp. 386-392, (2012).
- [12] Wu, Y., Yu, X., and Man, Z., "Terminal Sliding Mode Control Design for Uncertain Dynamic Systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 34(5), pp. 281-287, (1998).
- [13] Yu, S., et al., "Continuous Finite-time Control for Robotic Manipulators with Terminal Sliding Mode", *Automatica*, Vol. 41(11), pp. 1957-1964, (2005).
- [14] Defoort, M., et al., "A Novel Higher Order Sliding Mode Control Scheme", *Systems & Control Letters*, Vol. 58(2), pp. 102-108, (2009).
- [15] Sagliano, M., Mooij, E., and Theil, S., "Adaptive Disturbance-Based High-Order Sliding-Mode Control for Hypersonic-Entry Vehicles", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 40(3), pp. 521-536, (2017).
- [16] Wang, J., et al., "Continuous High Order Sliding Mode Controller Design for a Flexible Air-breathing Hypersonic Vehicle", *ISA Transactions*, Vol. 53(3), pp. 690-698, (2014).
- [17] Adams, R.J. and Banda, S.S., "Robust Flight Control Design using Dynamic Inversion and Structured Singular Value Synthesis", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 1(2), pp. 80-92, (1993).

- [18] Smith, P., "A simplified Approach to Nonlinear Dynamic Inversion Based Flight Control", 23rd Atmospheric Flight Mechanics Conferenc, August 10-12, Boston, MA, U.S.A., (2012).
- [19] Wang, X., et al., "Stability Analysis for Incremental Nonlinear Dynamic Inversion Control", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 42(5), p p. 1116-1129, (2019).
- [20] MacKunis, W., et al., "Asymptotic Tracking for Aircraft via Robust and Adaptive Dynamic Inversion Methods", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 18(6), pp. 1448-1456, (2010).
- [21] Sieberling, S., Chu, Q.P., and Mulder, J.A., "Robust Flight Control Using Incremental Nonlinear Dynamic Inversion and Angular Acceleration Prediction", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 33(6), pp. 1732-1742, (2010).
- [22] Li, X., et al., "Command Filtered Model-Free Robust Control for Aircrafts With Actuator Dynamics", *IEEE Access*, Vol. 7, pp. 139475-139487, (2019).
- [23] Qian, W. and Stengel, R.F., "Robust Nonlinear Flight Control of a High-performance Aircraft", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 13(1), pp. 15-26, (2005).
- [24] Simplicio, P., et al, "An Acceleration Measurements-based Approach for Helicopter Nonlinear Flight Control using Incremental Nonlinear Dynamic Inversion", *Control Engineering Practice*, Vol. 21(8), pp. 1065-1077, (2013).
- [25] Li, Y., Jing, Z., and Liu, G., "Maneuver-Aided Active Satellite Tracking Using Six-DOF Optimal Dynamic Inversion Control", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 50(1), pp. 704-719, (2014).
- [26] Bardawil, C., and Daher. N., "Combined Fuzzy and Nonlinear Dynamic Observer for Vehicle Longitudinal Velocity and Side-slip Angle", 11th International Symposium on Mechatronics and its Applications (ISMA), March 4-6, Sharjah, United Arab Emirates, (2018).
- [27] Boukezzoula, R., Galichet, S., and Foulloy, L., "Nonlinear Internal Model Control: Application of Inverse Model Based Fuzzy Control", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 11(6), pp. 814-829, (2003).
- [28] Boukezzoula, R., Galichet, S., and Foulloy, L., "Fuzzy Nonlinear Adaptive Internal Model Control (FNAIMC) part II: Fuzzy Model Inversion", *European Control Conference (ECC)*, September 1-3, Karlsruhe, Germany, (1999).
- [29] Wang, X., et al",. "Incremental Sliding-Mode Fault-Tolerant Flight Control", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 42(2), pp. 244-259, (2019).
- [30] Hovakimyan, N., Lavretsky, E., and Cao, C., "Adaptive Dynamic Inversion via Time-Scale Separation", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 19(10), pp. 1702-1711, (2008).

- [31] Smeur, E.J.J., Chu, Q., and Croon, G.C.H.E.d., "Adaptive Incremental Nonlinear Dynamic Inversion for Attitude Control of Micro Air Vehicles", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 39(3), pp. 450-461, (2016).
- [32] Selmic, R.R., and Lewis, F.L., "Neural Net Backlash Compensation with Hebbian Tuning using Dynamic Inversion", *Automatica*, Vol. 37(8), pp. 1269-1277, (2001).
- [33] Cao, S., et al. "Adaptive Incremental Nonlinear Dynamic Inversion Control Based on Neural Network for UAV Maneuver", *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, July 8-12, Hong Kong, China, (2019).
- [34] Edwards, C., and Shtessel, Y., "Adaptive Dual-layer Super-twisting Control and Observation", *International Journal of Control*, Taylor & Francis, Vol. 89(9), pp. 1759-1766, (2016).
- [35] Edwards, C., and Shtessel, Y.B., "Continuous Higher Order Sliding Mode Control Based on Adaptive Disturbance Compensation", *13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, June 29 - July 2, Nants, France, (2014).
- [36] Edwards, C., and Shtessel, Y.B., "Adaptive Continuous Higher Order Sliding Mode Control", *Automatica*, Vol. 65, pp. 183-190, (2016).
- [37] Zhu, Z. and Cao, S., "Back-stepping Sliding Mode Control Method for Quadrotor UAV with Actuator Failure", *The Journal of Engineering*, Vol. 22, pp. 8374-8377, (2019).
- [38] Zaihidee, F.M, Mekhilef, S., and Mubin, M., "Application of Fractional Order Sliding Mode Control for Speed Control of Permanent Magnet Synchronous Motor", *IEEE Access*, Vol. 7, pp. 101765-101774, (2019).
- [39] Hwang, C., Wu, H., and Hung, W., "Software/Hardware-Based Hierarchical Finite-Time Sliding-Mode Control With Input Saturation for an Omnidirectional Autonomous Mobile Robot", *IEEE Access*, Vol. 7, pp. 90254-90267, (2019).
- [40] Li, Z., et al., "Sensorless Vector Control of Permanent Magnet Synchronous Linear Motor Based on Self-Adaptive Super-Twisting Sliding Mode Controller". *IEEE Access*, Vol. 7, pp. 44998-45011, (2019).
- [41] Roskam, J., "*Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*", DARcorporation, ISBN 1884885179, (1998).

پیوست ۱

تدوین معادلات هواپیما بر اساس قوانین نیوتن و اوپلر می‌باشد. هر کدام از این دو بخش شامل سه متغیر حالت هستند. حرکت در راستای محورهای هواپیما و دوران حول مرکز ثقل هواپیما ایجاد شش درجه آزادی می‌کند که به آن‌ها معادلات معادلات شش درجه آزادی گفته می‌شود (6DOF). طبق قانون دوم نیوتن در (۵۱) داریم:

$$F = m \cdot \left[\frac{dV}{dt} \right]^I \quad (51)$$

که اندیس I مربوط به برقراری روابط در دستگاه اینرسی (inertia frame) است. تمامی متغیرها و حروف استفاده شده، در جدول (۲) آمده است. از رابطه مشتق اوپلر برای مشتق گیری از متغیر سرعت در دستگاه بدنه استفاده می‌شود. این مشتق از دید دستگاه اینرسی است. در (۵۲) رابطه مورد نظر آمده است.

$$D^I(X) = D^B(X) + \omega^{BI} \times X \quad (52)$$

که D اپراتور مشتق گیری است. با استفاده از (۵۱) و (۵۲) به رابطه (۵۳) خواهیم رسید.

$$F = m(\dot{V} + \omega \times V) \quad (53)$$

که $V = (u \ v \ w)^T$ و $\omega = (p \ q \ r)^T$ می‌باشد. برای ضرب خارجی $\omega \times V$ از ضرب داخلی $\Omega \cdot V$ استفاده می‌کنیم که Ω یک ماتریس skew symmetric از ω است و F ماتریس نیروها همانند (۵۴) است:

$$F = \begin{pmatrix} F_{Ax} + F_{Tx} + F_{gx} \\ F_{Ay} + F_{Ty} + F_{gy} \\ F_{Az} + F_{Tz} + F_{gz} \end{pmatrix} \quad (54)$$

پس از گسترش (۵۳) به معادلات زیر خواهیم رسید:

$$m.(\dot{u} - v.r + w.q) = m.g_x + F_{Ax} + F_{Tx} \quad (55)$$

$$m.(\dot{v} + u.r - w.p) = m.g_y + F_{Ay} + F_{Ty} \quad (56)$$

$$m.(\dot{w} - u.q + v.p) = m.g_z + F_{Az} + F_{Tz} \quad (57)$$

از رابطه (۵۸) برای بدست آوردن گشتاورهای حاصل از دوران حول محورهای بدنه استفاده می‌کنیم.

$$\dot{H} = m_B \quad (58)$$

با توجه به $H = I. \omega$ و مشتق گیری اوپلر در (۵۲) داریم:

$$\begin{cases} I. \dot{\omega} + \omega \times (I. \omega) = m_B \\ \dot{\omega} = I^{-1}(m_B - \omega \times (I. \omega)) \end{cases} \quad (59)$$

که $m_B = (L_A \ M_A \ N_A)^T$ و I ماتریس ممان اینرسی‌ها طبق (۶۰) است:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & -I_{zz} \end{pmatrix} \quad (60)$$

از گسترش رابطه (۵۹) روابط (۶۱)-(۶۳) بدست می‌آیند:

$$I_{xx} \cdot \dot{p} - I_{xz} \cdot \dot{p} - I_{xz} p \cdot q + (I_{zz} - I_{yy}) \cdot r \cdot q = L_A + L_T \quad (61)$$

$$I_{yy} \cdot \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz}) \cdot p \cdot r + I_{xz} \cdot (p^2 - r^2) = M_A + M_T \quad (62)$$

$$I_{zz} \cdot \dot{r} - I_{xz} \cdot \dot{p} + (I_{yy} - I_{xx}) \cdot p \cdot q + I_{xz} \cdot q \cdot r = N_A + N_T \quad (63)$$

پس از مرتب‌سازی روابط (۵۵)-(۵۷) و (۶۱)-(۶۳) معادلات شش درجه آزادی (روابط ۱ تا ۶ که در متن مقاله ذکر شده‌است) بدست می‌آید.

نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی و ضرایب مربوط به معادلات (۵۵)–(۵۷) و (۶۱)–(۶۳) از روابط (۶۴) و (۶۵) بدست می‌آید و بقیه ضرایب به صورت (۶۶)–(۸۵) تعریف می‌شوند.

$$\begin{pmatrix} F_{AxS} \\ F_{AzS} \\ M_{AS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ -L \\ M_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_D \cdot \bar{q} \cdot S \\ -C_L \cdot \bar{q} \cdot S \\ C_m \cdot \bar{q} \cdot S \cdot \bar{c} \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$\begin{pmatrix} L_{AS} \\ F_{AyS} \\ N_{AS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_A \\ F_{Ay} \\ N_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_l \cdot \bar{q} \cdot S \cdot b \\ -C_y \cdot \bar{q} \cdot S \\ C_n \cdot \bar{q} \cdot S \cdot b \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$L = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot \left[C_{l_0} + C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_p} \cdot \left(\frac{p \cdot b}{2V_T} \right) + C_{l_r} \cdot \left(\frac{r \cdot b}{2V_T} \right) + C_{l_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta_r \right] \quad (66)$$

$$M = \bar{q} \cdot S \cdot c \cdot \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \cdot \alpha + C_{m_{ih}} \cdot i_h + C_{m_q} \cdot \left(\frac{q \cdot c}{2V_T} \right) + C_{m_u} \cdot \left(\frac{V_T - u_1}{V_T} \right) + C_{m_{\delta e}} \cdot \delta_e \right] \quad (67)$$

$$N = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot \left[C_{n_0} + C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_p} \cdot \left(\frac{p \cdot b}{2V_T} \right) + C_{n_r} \cdot \left(\frac{r \cdot b}{2V_T} \right) + C_{n_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_r \right] \quad (68)$$

$$C_l = C_{l_0} + C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_p} \cdot \left(\frac{p \cdot b}{2V_T} \right) + C_{l_r} \cdot \left(\frac{r \cdot b}{2V_T} \right) + C_{l_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta_r \quad (69)$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \cdot \alpha + C_{m_{ih}} \cdot i_h + C_{m_q} \cdot \left(\frac{q \cdot c}{2V_T} \right) + C_{m_u} \cdot \left(\frac{V_T - u_1}{V_T} \right) + C_{m_{\delta e}} \cdot \delta_e \quad (70)$$

$$C_n = C_{n_0} + C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_p} \cdot \left(\frac{p \cdot b}{2V_T} \right) + C_{n_r} \cdot \left(\frac{r \cdot b}{2V_T} \right) + C_{n_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_r \quad (71)$$

$$C_D = C_{D_\alpha} \cdot |\alpha| + C_{D_{ih}} \cdot i_h + C_{D_u} \cdot \left(\frac{V_T - u_1}{V_T} \right) + C_{D_{\delta e}} \cdot \delta_e \quad (72)$$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \cdot \alpha + C_{L_{ih}} \cdot i_h + C_{L_q} \cdot \left(\frac{q \cdot c}{2V_T} \right) + C_{L_u} \cdot \left(\frac{V_T - u_1}{V_T} \right) + C_{L_\alpha} \cdot \left(\frac{\dot{\alpha} \cdot c}{2V_T} \right) + C_{L_{\delta e}} \cdot \delta_e \quad (73)$$

$$C_y = C_{y_0} + C_{y_\beta} \cdot \beta + C_{y_p} \cdot \left(\frac{p \cdot b}{2V_T} \right) + C_{y_r} \cdot \left(\frac{r \cdot b}{2V_T} \right) + C_{y_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{y_{\delta r}} \cdot \delta_r \quad (74)$$

$$j_0 = I_{xx} \cdot I_{zz} - I_{xz}^2 \quad (75)$$

$$j_1 = \frac{I_{zz}}{j_0} \quad (76)$$

$$j_2 = \frac{I_{xz}}{j_0} \quad (77)$$

$$j_3 = \frac{(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) \cdot I_{xz}}{j_0} \quad (78)$$

$$j_4 = \frac{I_{zz} \cdot I_{yy} - I_{zz}^2 - I_{xz}^2}{j_0} \quad (79)$$

$$j_5 = \frac{1}{I_{yy}} \quad (80)$$

$$j_6 = \frac{I_{xx}}{j_0} \quad (81)$$

$$j_7 = \frac{I_{xx}^2 - I_{xx} \cdot I_{yy} + I_{xz}^2}{j_0} \quad (82)$$

$$j_8 = \frac{I_{xz} \cdot (-I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})}{j_0} \quad (۸۳)$$

$$j_9 = \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \quad (۸۴)$$

$$j_{10} = \frac{I_{xz}}{I_{yy}} \quad (۸۵)$$

جزییات روابط (۱۳) و (۱۴) در روابط (۸۶)–(۹۳) آورده شده است.

$$\hat{L} = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot [C_{l_0} + C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_p} \cdot \left(\frac{p \cdot b}{2V_T}\right) + C_{l_r} \cdot \left(\frac{r \cdot b}{2V_T}\right)] \quad (۸۶)$$

$$\hat{M} = \bar{q} \cdot S \cdot c \cdot \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \cdot \alpha + C_{m_{i_h}} \cdot i_h + C_{m_q} \cdot \left(\frac{q \cdot c}{2V_T}\right) + C_{m_u} \cdot \left(\frac{V_T - u_1}{V_T}\right) \right] \quad (۸۷)$$

$$\hat{N} = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot [C_{n_0} + C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_p} \cdot \left(\frac{p \cdot b}{2V_T}\right) + C_{n_r} \cdot \left(\frac{r \cdot b}{2V_T}\right)] \quad (۸۸)$$

$$L_{\delta_a} = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot (j_2 \cdot C_{n_{\delta_a}} + j_1 \cdot C_{l_{\delta_a}}) \quad (۸۹)$$

$$L_{\delta_r} = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot (j_2 \cdot C_{n_{\delta_r}} + j_1 \cdot C_{l_{\delta_r}}) \quad (۹۰)$$

$$M_{\delta_e} = \bar{q} \cdot S \cdot c \cdot (j_5 \cdot C_{m_{\delta_e}}) \quad (۹۱)$$

$$N_{\delta_a} = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot (j_2 \cdot C_{l_{\delta_a}} + j_6 \cdot C_{n_{\delta_a}}) \quad (۹۲)$$

$$N_{\delta_r} = \bar{q} \cdot S \cdot b \cdot (j_2 \cdot C_{l_{\delta_r}} + j_6 \cdot C_{n_{\delta_r}}) \quad (۹۳)$$

پیوست ۲

تعریف و یکای تمامی متغیرهای استفاده شده در شرح مقاله در جدول (۲) آمده است.

جدول ۲- معنی و واحد متغیرها و ضرایب استفاده شده در مقاله

پارامتر	واحد	شرح	پارامتر	واحد	شرح
\times	-	عملگر ضرب خارجی	g_x	m/sec^2	جز شتاب جاذبه در امتداد محور X
b	m	وتر بال	g_y	m/sec^2	جز شتاب جاذبه در امتداد محور Y
\bar{c}	m	میانگین هندسی بال	g_z	m/sec^2	جز شتاب جاذبه در امتداد محور Z
C_D	-	ضریب پسا	\dot{H}	$kg \cdot m^2/sec^2$	تغییرات گشتاور زاویه‌ای
C_{D_α}	1/deg	تغییرات ضریب پسا با زاویه حمله	I	$kg \cdot m^2$	ممان اینرسی
$C_{D_{i_h}}$	1/deg	تغییرات ضریب پسا با زاویه پایدارساز	i_h	deg	زاویه دم پایدارساز نسبت به خط افقی
C_{D_u}	1/deg	تغییرات ضریب پسا با سرعت بدون بعد	L	kg	برا (لیفت)
$C_{D_{\delta_e}}$	1/deg	تغییرات ضریب پسا با زاویه الویتور	L_A	m.kg	گشتاور آیرودینامیکی حول محور X
C_l	-	ضریب گشتاور رول	L_T	m.kg	گشتاور حاصل از پیشرانه در امتداد محور X
C_{l_0}	-	ضریب گشتاور رول برای زاویه سرش جانبی و انحراف سطح کنترلی صفر	L_{A_S}	m.kg	گشتاور آیرودینامیکی حول محور X در دستگاه مختصات پایداری
C_{l_β}	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور رول با زاویه سرش جانبی	m	kg	جرم هواپیما
C_{l_p}	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور رول با نرخ رول	m_B	m.kg	بردار گشتاورهای همه محورها در مختصات بدنه

C_{I_r}	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور رول با نرخ یاو	M_A	m.kg	گشتاور آیرودینامیکی حول محور y
$C_{I_{\delta a}}$	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور رول با انحراف ایلرون	M_T	m.kg	گشتاور حاصل از پیشرانه در امتداد محور y
$C_{I_{\delta r}}$	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور رول با انحراف رادر	M_{A_s}	m.kg	گشتاور آیرودینامیکی حول محور y در دستگاه مختصات پایداری
C_L	-	ضریب لیفت	N_A	m.kg	گشتاور آیرودینامیکی حول محور z
C_{L_0}	-	ضریب لیفت در زاویه حمله صفر	N_T	m.kg	گشتاور حاصل از پیشرانه در امتداد محور z
C_{L_α}	1/deg	تغییرات ضریب لیفت با زاویه حمله	N_{A_s}	m.kg	گشتاور آیرودینامیکی حول محور z در دستگاه مختصات پایداری
$C_{L_{ih}}$	1/deg	تغییرات ضریب لیفت با زاویه پایدارساز	p	deg/sec	سرعت زاویه ای حول محور x
C_{L_q}	1/rad	تغییرات ضریب لیفت با نرخ پیچ بدون بعد	\dot{p}	deg/sec ²	نرخ سرعت زاویه ای حول محور x
C_{L_u}	-	تغییرات ضریب لیفت با سرعت بدون بعد	q	deg/sec	سرعت زاویه ای حول محور y
$C_{L_{\dot{\alpha}}}$	1/deg	تغییرات ضریب لیفت با تغییرات زاویه حمله بدون بعد	\bar{q}	kg/sec ²	فشار دینامیکی
$C_{L_{\delta e}}$	1/deg	تغییرات ضریب لیفت با انحراف الویتور	\dot{q}	deg/sec ²	نرخ سرعت زاویه ای حول محور y
C_m	-	ضریب گشتاور پیچ	r	deg/sec	سرعت زاویه ای حول محور z
C_{m_0}	-	ضریب گشتاور پیچ در زاویه حمله صفر	\dot{r}	deg/sec ²	نرخ سرعت زاویه ای حول محور z
C_{m_α}	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور پیچ با زاویه حمله	S	m ²	مساحت بال
$C_{m_{ih}}$	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور پیچ با زاویه پایدارساز	S	-	سطح لغزش برای مود لغزشی
C_{m_q}	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور پیچ با نرخ پیچ	T	kg	پیشرانه
C_{m_u}	-	تغییرات ضریب گشتاور پیچ با سرعت بدون بعد	u	m/sec	سرعت در راستای محور x
$C_{m_{\delta e}}$	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور پیچ با انحراف الویتور	\dot{u}	m/sec ²	شتاب در راستای محور x
C_n	-	ضریب گشتاور یاو	v	m/sec	سرعت در راستای محور x
C_{n_0}	1/deg	ضریب گشتاور یاو برای زاویه سرش جانبی و انحراف سطح کنترلی صفر	\dot{v}	m/sec ²	شتاب در راستای محور x
C_{n_β}	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور یاو با زاویه سرش جانبی	V	m/sec	بردار سرعت هواپیما در امتداد هر محور
C_{n_p}	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور یاو با نرخ رول	V_T	m/sec	برایند سرعت هواپیما
C_{n_r}	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور یاو با نرخ یاو	\dot{V}	m/sec ²	بردار شتاب هواپیما در امتداد هر محور
$C_{n_{\delta a}}$	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور یاو با انحراف ایلرون	w	m/sec	سرعت در راستای محور x

$C_{n\delta r}$	1/deg	تغییرات ضریب گشتاور یابو با انحراف رادر	\dot{w}	m/sec ²	شتاب در راستای محور X
C_y	-	ضریب نیروی جانبی	X	deg or deg/sec	متغیرهای حالت (مودهای کند و تند)
C_{y_0}	-	ضریب نیروی جانبی یابو برای زاویه سرش جانبی و انحراف سطح کنترلی صفر	X_1	deg	مودهای کند
$C_{y\beta}$	1/deg	تغییرات ضریب نیروی جانبی یابو با زاویه سرش جانبی	X_2	deg/sec	مودهای تند
C_{y_p}	1/deg	تغییرات ضریب نیروی جانبی یابو با نرخ رول	ϕ	deg	زاویه چرخش (رول)
C_{y_r}	1/deg	تغییرات ضریب نیروی جانبی یابو با نرخ یابو	$\dot{\phi}$	deg/sec	نرخ زاویه چرخش (رول)
$C_{y\delta a}$	1/deg	تغییرات ضریب نیروی جانبی یابو با انحراف ایلرون	θ	deg	زاویه پیچش
$C_{y\delta r}$	1/deg	تغییرات ضریب نیروی جانبی یابو با انحراف رادر	$\dot{\theta}$	deg/sec	نرخ زاویه پیچش
D	-	عملگر مشتق	ψ	deg	زاویه گردش (یابو)
D ^B	-	عملگر مشتق در دستگاه بدنه	$\dot{\psi}$	deg/sec	نرخ زاویه گردش (یابو)
D ^I	-	عملگر مشتق در دستگاه اینرسی	α	deg	زاویه حمله
F_{A_x}	N	نیروی آیرودینامیکی در امتداد محور X در دستگاه مختصات بدنه	β	deg	زاویه سرش جانبی
$F_{A_{x_s}}$	N	نیروی آیرودینامیکی در امتداد محور X در دستگاه مختصات پایداری	δ_a	deg	زاویه انحراف ایلرون
F_{A_y}	N	نیروی آیرودینامیکی در امتداد محور Y در دستگاه مختصات بدنه	δ_e	deg	زاویه انحراف الویتور
$F_{A_{y_s}}$	N	نیروی آیرودینامیکی در امتداد محور Y در دستگاه مختصات پایداری	δ_r	deg	زاویه انحراف رادر
F_{A_z}	N	نیروی آیرودینامیکی در امتداد محور Z در دستگاه مختصات بدنه	Δ	-	عملگر نامعینی
$F_{A_{z_s}}$	N	نیروی آیرودینامیکی در امتداد محور Z در دستگاه مختصات پایداری	ω	deg/sec	بردار سرعت‌های زاویه ای
F_{T_x}	N	نیروی پیشرانه در جهت محور X به دستگاه بدنه	ω^{BI}	deg/sec	بردار سرعت‌های زاویه ای از دستگاه اینرسی
F_{T_y}	N	نیروی پیشرانه در جهت محور Y	$\dot{\omega}$	deg/sec ²	بردار نرخ سرعت‌های زاویه ای
F_{T_z}	N	نیروی پیشرانه در جهت محور Z	Ω	deg/sec	ماتریس پادمتقارن سرعت‌های زاویه ای

Abstract

Nonlinear dynamic inversion is one of the well-known methods in the field of dynamic flight control, which its development refers to the Incremental Nonlinear Dynamic Inversion (INDI). Based on this, here, the non-linear slow and fast modes of the aircraft are separated into two parts and a distinct control is then considered for each part. In the outer and inner loops, the PID and the sliding mode controller are designed, respectively. In addition stability analysis, the simulation results for Boeing 747 are presented and compared with the reference model modes and the conventional INDI.