روشی برای بهینه‌سازی لگاریتم تابع درستنمایی جهت تخمین ضرایب مدلهای پیش‌بینی تصادفات

شهریار افندی‌زاده، دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
محمود عامری، دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
محمدحسن میرابی مقدم*، دانشجوی دکتری، دانشکدهٔ مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
E-mail:mhmirabi@hotmail.com
دریافت:۸۹/۰۶/۰۳ پذیرش: ۸۹/۱۰/۲۶

چکیده

در مدل سازی آماری تصادفات، تخمین دقیق ضرایب مدل به این دلیل که بیان کننده میزان و چگونگی ارتباط متغیر وابسته با هر یک از متغیرهای مستقل هستند، از اهمیت زیادی برخوردار است. برای تعیین این ضرایب، معمولاً یک تابع درستنمایی با استفاده از روشهای عددی "بردار گرادیان"، "شبه نیوتن" و "نیوتن- رافسون" بهینه‌سازی می شود که هر یک به ماتریس هسین وابسته بوده و به همین جهت از ضعفهایی نظیر کندی روند همگرایی، وابستگی شدید به مقدار اولیه و امکان همگرایی برای یک تابع در نقطه‌ای به غیر از بالاترین قله، برخوردارند.

در این مقاله با حذف عبارت ماتریس هسین از معادله طول گام بهینه روش بردار گرادیان به کمک تکنیکهای ریاضی، روشی ارایه شده است که ضعفهای یاد شده را به حداقل رسانده و امکان مناسب‌تری را برای مدلساز جهت تخمین ضرایب مدلهای پیش بینی تصادفات فراهم آورده است. یافته‌های حاصل از اجرای این روش بر روی یک تابع عملکرد ایمنی (که با استفاده از داده‌های تصادفات و حجم ترافیک ۱۶۰ قطعه راه شهری در ایران ساخته شده است)، نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در اجرای فرایند بهینه‌سازی به نقطه شروع حرکت وابسته نبوده و همچنین همگرایی برای یک تابع درستنمایی را در بالاترین قله ممکن ایجاد می‌کند.

واژه‌های کلیدی: مدل پیش‌بینی تصادفات، لگاریتم تابع درستنمایی، بهینه‌سازی، بردار گرادیان، طول گام بهینه

۱. مقدمه

مدل سازی آماری تصادفات[۱]، برازش یک مدل آماری (چند متغیره) به داده‌های موجود تصادفات و مجموعه‌ای از ویژگیهای ترافیکی، هندسی و محیطی خیابانها و تقاطع‌هاست که به یک معادله ریاضی موسوم به "مدل پیش‌بینی تصادفات" با متغیر فراوانی تصادفات در سمت چپ و تابعی از ویژگیهای این تسهیلات در سمت راست منجر می‌شود [Hauer, 2004]. شکل کلی این معادله که اغلب برای برآورد تصادفات در یک تسهیلات معین بکار می‌رود، به صورت رابطه (۱) است [Lord, 2000].

$$E\{k\}=f(X,\beta) \tag{۱}$$

که در آن :

$E\{k\}$ = تعداد تصادفات در واحد زمان، X = مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل یا توصیفی ($X_i,...,X_2,X_1$) و β = ضرایب مدل ($\beta_i,...,\beta_2,\beta_1$).

هدف اصلی معادله (۱) یافتن مقادیر ضرایب β است، که چگونگی ارتباط متغیرهای مستقل را با متغیر وابسته بیان کرده و میزان تأثیر هر یک از آنها را در میزان تصادفات مشخص می‌سازند. این هدف که اصطلاحاً "برازش مدل به داده‌ها" یا

* نویسنده مسئول

کالیبره کردن نامیده می‌شود، با استفاده از تکنیکهای آماری مختلفی محقق می‌گردد که کاربردی ترین آنها روشهای موسوم به "حداقل کردن مربع خطاها"[2] و "حداکثر کردن تابع درستنمایی"[3] هستند. از آنجا که تصادفات کمیتی اتفاقی، گسسته و غیر منفی بوده [Salifu, 2004] و به همین دلیل از تابع توزیع احتمال مشخصی نظیر پواسون و دوجمله ای منفی پیروی می‌کنند، حداکثر کردن تابع درستنمایی روش مناسب‌تری برای تخمین ضرایب مدلهای پیش بینی تصادفات محسوب می‌شود [Jongdae, 2007].

در مدل سازی آماری تصادفات، حداکثر کردن تابع درستنمایی اغلب با روشهای مبتنی بر تکرار نظیر " نیوتن- رافسون[4]"، "شبه نیوتن[5]" و " بردار گرادیان[6]" صورت می‌گیرد [Jongdae, 2007] که در انتخاب طول گام و جهت امتداد جستجو به "ماتریس هسین[7]" (مشتق مرتبه دوم) وابسته بوده و به همین جهت مشکلاتی از قبیل کاهش سرعت همگرایی، وابستگی شدید به نقطه شروع حرکت و امکان همگرایی برای یک تابع در نقطه‌ای به غیر از بالاترین قله دارند [رضایی پژند و سرافرازی، ۱۳۸٤]. در این مقاله، بر پایه مفاهیم بهینه‌سازی و استفاده از تکنیکهای ریاضی، طول گام بهینه جدیدی برای روش بردار گرادیان محاسبه شده است که در آن عبارت ماتریس هسین حذف و ضعفهای یاد شده در روش مذکور به حداقل کاهش یافته است.

۲. مبانی نظری و پیشینه تحقیق

تابع درستنمایی، یک تابع توأم مشاهدات یعنی $f(x_i|\beta)$ است که در آن احتمال وقوع هر مشاهده براساس مدل مورد استفاده برحسب پارامترهای مجهول محاسبه می‌شود. در این تابع، احتمال وقوع همزمان مشاهدات از حاصل ضرب احتمال وقوع یکایک مشاهدات به دست آمده و در حالت کلی به صورت رابطه (۲) نشان داده می‌شود [Aldrich, 1997].

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n} P_i \qquad (۲)$$

که در آن:

$L(\beta)$= تابع درستنمایی وقوع مشاهدات ۱ تا n به ازاء ضرایب β، P_i= احتمال وقوع هر مشاهده تابع درستنمایی به دلیل همنوایی و سهولت در محاسبه، اغلب به صورت لگاریتمی نشان داده شده [نیرومند،۱۳۸٤] و با توجه به نوع توزیع احتمال متغیر وابسته نیز به شکلهای مختلفی بیان می‌شود. برای مثال، رابطه (۳) نشان دهنده یک نوع لگاریتم تابع درستنمایی با توزیع دوجمله‌ای منفی است که دارای بیشترین کاربرد در مدلهای پیش‌بینی تصادفات است [Jongdae, 2007].

$$L(y,\mu,k)=\sum \log[f(y_i,\mu_i,k)]$$
$$l_i=\log[f(y_i,\mu_i,k)]$$
$$= y_i\log(k\mu_i)-\left(y_i+\frac{1}{k}\right)\log(1+k\mu_i)+\left[\frac{\Gamma(y_i+1/k)}{\Gamma(y_i+1)\Gamma(1/k)}\right] \qquad (۳)$$

که در آن:

$L(\ )$ = لگاریتم تابع درستنمایی، l_i= لگاریتم تابع درستنمایی هر مشاهده، y_i= تعداد تصادفات هر قطعه راه، μ_i = تابع میانگین، k= پارامتر پراکندگی توزیع دوجمله ای منفی و $\Gamma(\ )$ = تابع گاما.

در مدلهای پیش‌بینی تصادفات، ضرایب مدل با مشتق‌گیری جزئی از تابع درستنمایی و مساوی صفر قرار دادن آنها محاسبه می‌شوند که طی آن دستگاه معادلاتی با n معادله و n مجهول شکل می‌گیرد [نیرومند، ۱۳۸٤]. حل این دستگاه با روشهای جبری امکان‌پذیر نبوده و به همین جهت بیشتر از روشهای عددی استفاده می‌شود. اصول این روشها عبارت است از [رضایی پژند و سرافرازی، ۱۳۸٤]:

- نخست در چرخه i ام مقداری برابر با z_i برای متغیرها فرض می‌شود.
- در تکرار $(i+1)$ ام، نمو برداری Δz_i به z_i داده می‌شود، یعنی:

$$\overset{*}{Z}_{i+1}=\overset{*}{Z}_i+\overset{*}{\Delta z}_i \qquad (٤)$$

- به دلیل اثر زیاد طول و جهت بردار $\overset{*}{\Delta z}_i$ درطرح جدید، بردار مزبور معمولاً به صورت حاصل ضرب یک عدد مثبت(λ_i)

در برداری‌که ($\overset{*}{S}_i$) انتخاب می‌شود.

$$\Delta \overset{*}{Z}_i = \lambda_i \overset{*}{S}_i \qquad (5)$$

• با جایگزینی رابطه (٥) در رابطه (٤) پاسخ چرخه $(i+1)$ ام به صورت رابطه (٦) به دست می‌آید:

$$\overset{*}{Z}_{i+1} = \overset{*}{Z}_i + \lambda_i \overset{*}{S}_i \qquad (6)$$

که λ_i طول بردار نمو و $\overset{*}{S}_i$ جهت جستجو برای پاسخ جدید است. بر پایه اصول فوق، روشهای عددی مختلفی توسعه یافته‌اند که در انتخاب جهت جستجو و میزان طول گام متفاوت‌اند. سه روش "نیوتن- رافسون"، "شبه نیوتن" و " بردار گرادیان" از جمله این روشها هستند که در مدلهای پیش‌بینی تصادفات دارای بیشترین کاربرد بوده و در نرم‌افزارهای آماری نظیر SPSS و SAS نیز وجود دارند. مشخصات کلی این سه روش از نظر طول گام و جهت جستجو در جدول (١) ارایه شده است [رضایی پژند و سرافرازی، ١٣٨٤]. در این جدول λ طول گام در هر مرحله تکرار، S_i بردار امتداد جستجو، ∇^T بردار گرادیان و $[H]$ ماتریس هسین است.

عامری و همکاران در سال ١٣٨٨ بر پایه ایجاد تغییراتی در طول گام بردار گرادیان، روشی را در بهینه سازی تابع درستنمایی مورد استفاده قرار دادند که به اعتقاد آنها در اجرای فرآیند بهینه‌سازی به نقطه شروع حرکت وابسته نبوده و همگرایی برای یک تابع را در بالاترین قله ایجاد می‌کند [عامری و همکاران، ١٣٨٨]. علیرغم این ادعا، مبانی پیدایش چنین روشی مسکوت مانده و هیچ مقایسه‌ای نیز بین روش بردار گرادیان و روش پیشنهادی و نیز تأثیر آن در بهبود سایر مدلهای پیش‌بینی تصادفات صورت نگرفته است. در این مقاله با تشریح مبانی ریاضی روش مذکور و همچنین تعمیم آن به یک تابع عملکرد ایمنی، نواقص فوق برطرف شده است.

٣. اصول ریاضی روش پیشنهادی

روش پیشنهادی از اصلاح طول گام بهینه بردار گرادیان به شرح زیر به دست آمده است:

١- با توجه به اینکه در هر فرآیند بهینه‌سازی حداقل سه شرط نقطه شروع، نقطه پایان و نقطه بهینه وجود دارد، یک معادله درجه دوم از طول گام (λ) به صورت رابطه (٧) انتخاب و این معادله به منظور تعیین مقادیر ثابت C, B, A برای دو مقدار صفر و یک (یعنی محدوده تغییرات طول گام در روشهای عددی) برون‌یابی شده است.

$$f(\lambda) = A + B\lambda + C\lambda^2 \qquad (7)$$

٢- از آنجا که طول گام مقداری در حد فاصل دو تکرار است، معادله (٧) با استفاده از سری تیلور برای یک گام جلوتر($z_{i+1}^* = z_i^* + \lambda_i S_i$) بسط داده شده است، یعنی:

$$f(\lambda) = f(z_i^* + \lambda.S_i) + \nabla^T f(z_i^* + \lambda.S_i)$$
$$.\lambda.S_i + \tfrac{1}{2}\lambda.S_i^T[H].\lambda.S_i \qquad (8)$$

که با قرار دادن مقدار صفر برای λ در آن، داریم:

$$f(\lambda = 0) = f(z_i^*) \qquad (9)$$

و در نتیجه، مقدار پارامتر A با قرار دادن رابطه (٩) در معادله (٧) برای $\lambda = 0$ برابر است با:

$$A = f\left(z_i^*\right) \qquad (10)$$

برای تعیین مقدار B می‌توان چنین استدلال کرد که چون طول گام (λ) برای یک مرحله ما قبل تکرار، انتخاب شده است، پس مشتق رابطه (٨) باید مشتق رابطه (٧) را ارضا کند. به عبارتی:

$$\left.\frac{df\,(z_{i+1}^*)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = [\nabla^T f(z_i^*).\mathrm{S}_i + \qquad (11)$$
$$1/2\mathrm{S}_i^T[H]\lambda\mathrm{S}_i]|_{\lambda=0} = \nabla^T f(z_i^*).\mathrm{S}_i$$

که با جایگزین کردن آن در مشتق معادله (٧) به ازای $\lambda = 0$ داریم:

$$f'(\lambda) = B + 2C\lambda \Rightarrow$$
$$f'(0) = B \Rightarrow B = \nabla^T f(z_i^*).S_i \qquad (12)$$

برای به دست آوردن مقدار C نیز در رابطه (٨) به جای λ عدد یک را قرار داده و داریم:

$$f(\lambda = 1) = f(z_i^* + \mathrm{S}_i)$$
$$+ \nabla^T f(z_i^* + \mathrm{S}_i).\mathrm{S}_i + 1/2\mathrm{S}_i^T[H]\mathrm{S}_i \qquad (13)$$

که با صرف نظر کردن از جمله مشتقات مرتبه بالاتر(به دلیل ناچیز و قابل اغماض بودن مقدار) می‌توان نوشت:

$$f(\lambda = 1) = f(z_i^* + \mathrm{S}_i) + \nabla^T f(z_i^* + \mathrm{S}_i).\mathrm{S}_i \qquad (14)$$

که نشان می‌دهد به ازای طول گامی برابر با یک مقدار نقطه جدید طراحی برابر بـا $Z_i^* + S_i$ و مقـدار تـابع طراحـی نیـز برابـر بـا $f(z_i^* + S_i)$ است.

از طرفی معادله (۷) بازای $\lambda = 1$ برابر است با:

$$f(\lambda = 1) = A + B \times 1 + C \times 1^2 = A + B + C \quad (۱۵)$$

و در نتیجه با مساوی قرار دادن آن با مقـدار تـابع طراحـی یعنـی $f(z_i^{\bullet} + S_i)$، داریم:

$$f(\lambda = 1) = A + B + C = f(z_i^* + \mathrm{S}_i) \quad (۱۶)$$

بنابراین، مقدار پارامتر C برابر است با:

$$\begin{aligned} & A + B + C = f(z_i^* + S_i) \Rightarrow \\ & f(z_i^*) + \nabla^T f(z_i^*).S_i + C = f(z_i^* + S_i) \Rightarrow \\ & C = f(z_i^* + S_i) - f(z_i^*) - \nabla^T f(z_i^*).S_i \end{aligned} \quad (۱۷)$$

۳- با تعیین مقادیر A, B, C معادله (۷) را می‌توان بـه صـورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = {} & A + B\lambda + C\lambda^2 = f(z_i^*) \\ & + \nabla^T f(z_i^*).S_i.\lambda \\ & + \left[f(z_i^* + S_i) - f(z_i^*) - \nabla^T f(z_i^*).S_i \right] \lambda^2 \end{aligned} \quad (۱۸)$$

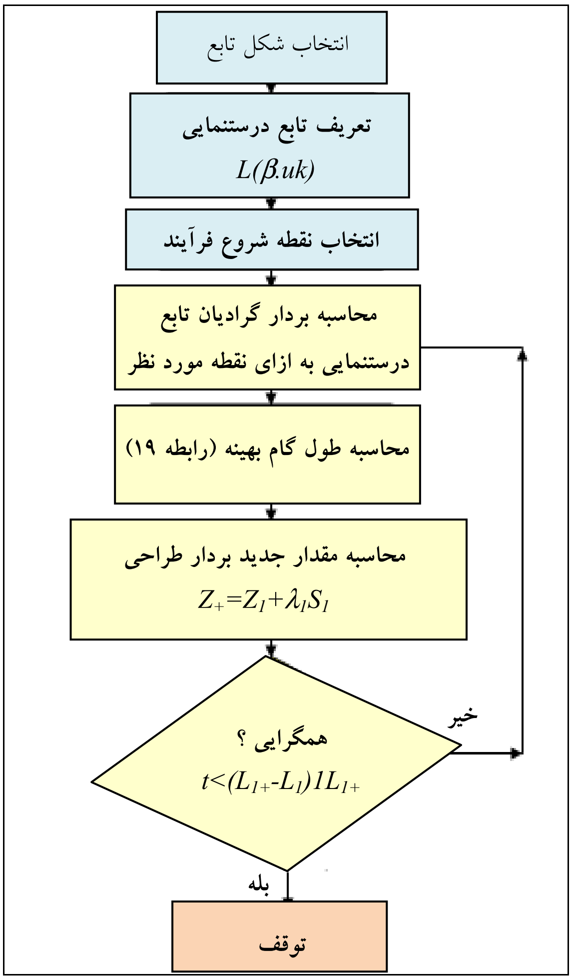
٤- با مشتق‌گیری از رابطه (۱۸) نسبت بـه λ و مسـاوی صـفر قرار دادن معادله حاصله، طول گام بهینه به شـرح زیـر بـه دسـت می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \nabla^T f(z_i^*).\mathrm{S}_i + 2[f(z_i^* + \mathrm{S}_i) \\ & - f(z_i^*) - \nabla^T f(z_i^*).\mathrm{S}_i]\lambda = 0 \\ & \lambda^{opt} = \frac{\nabla^T f(z_i^*).\mathrm{S}_i}{2[f(z_i^* + \mathrm{S}_i) - f(z_i^*) - \nabla^T f(z_i^*).\mathrm{S}_i]} \end{aligned} \quad (۱۹)$$

کـه در آن λ^{opt} طـول گـام بهینـه، S_i جهـت بـردار جسـتجو، $f(Z_i)$ تابع هدف و ∇^T بردار گرادیان است.

ملاحظه می‌شود که طـول گـام بهینـه در روش ابـداعی بـرخلاف روش بردار گرادیان معمولی(جدول ۱) به ماتریس هسین وابسـته نبـوده و در نتیجـه مشـکلات ناشـی از آن را در اجـرای فرآینـد بهینه‌سازی به میزان زیادی کاهش می‌دهد.

برنامه نوشته شده به زبان MATLAB کـه مـی‌توانـد در فرآینـد بهینه‌سازی توسط این روش مورد اسـتفاده قـرار گیـرد، در شـکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱. برنامه فرآیند بهینه‌سازی به روش پیشنهادی

جدول ۱. طول گام و جهت جستجوی روشهای عددی معمول در مدلهای پیش‌بینی تصادفات

روش	طول گام	جهت جستجو
نیوتن- رافسون	$\lambda_i = 1$	$S_i = -[H(z_i^*)]^{-1} \nabla^T f(z_i^*)$
شبه نیوتن	$\lambda_i = \min \begin{bmatrix} f(z_i^* \\ + \lambda \Delta z_i^*) \end{bmatrix}$	$S_i = -[H(z_i^*)]^{-1} \nabla^T f(z_i^*)$
بردار گرادیان	$\lambda_i^{opt} = -\frac{\nabla^T f(z_i^*)\mathrm{S}_i}{\mathrm{S}_i^T [H]\mathrm{S}_i}$	$\mathrm{S}_i = \nabla^T f(z_i^*)$

٤. نتایج عددی

برای بررسی قابلیتهای روش پیشنهادی و مزیت آن نسبت به روش بردار گرادیان، یک تابع عملکرد ایمنی(SPF)[8] برای راههای شهری براساس دو نوع داده اصلی این تابع یعنی تعداد تصادفات و حجم ترافیک ساخته شده است. این داده‌ها از ١٦٠ قطعه راه شهری در زاهدان (مرکز استان سیستان و بلوچستان) که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند و با استفاده از منابعی نظیر گزارشات تصادفات پلیس (فرمهای کام ١١٣) و برداشتهای میدانی در یک دوره زمانی ٣ ساله (١٣٨٦-١٣٨٤) جمع آوری شده‌اند که هر قطعه راه بین دو تقاطع اصلی انتخاب و حجمهای ترافیک ساعتی برداشت شده نیز با اعمال ضرایبی به حجمهای ترافیک روزانه تبدیل و برای سهولت در محاسبات بر عدد ١٠٠٠٠تقسیم شده‌اند [پیوست]. برای ساخت این تابع، از روش پیشنهادی هاور به شکل $y = f(x)$ استفاده شده است [Hauer, 2004]. در این روش:

- ابتدا شکلهای تابعی مختلفی برای متغیر مستقل با استفاده از روش انتگرال دیفرانسیل (ID)[9] کاندید می‌شوند که در آن یک تابع انتگرال تجربی براساس داده‌های مشاهده شده(نظیر شکل٢) از نظر انحنا و نقاط عطف، با منحنی توابع انتگرال شناخته شده (نمونه شکل ٣) مقایسه و با تشخیص تابع انتگرال مناسب، مشتق آن به عنوان شکل تابع برای متغیر مستقل انتخاب می‌شود [Hauer and Bamfo, 1997].
- با حداکثر کردن تابع درستنمایی به کمک روشهای بهینه‌سازی عددی، ضرایب توابع کاندید شده برآورد می‌شوند.
- از بین توابع کاندید شده، بهترین شکل تابع برای متغیر مستقل براساس آماره‌های BIC[10]یا AIC انتخاب می‌گردد. این آماره‌ها از روابط زیر قابل محاسبه هستند [Jongdae, 2007]:

$$BIC = -2L(\beta) + P.\log(S) \qquad (٢٠)$$

$$AIC = -2L(\beta) + 2p \qquad (٢١)$$

که در آن :

BIC = معیار اطلاعاتی بیزیشوارتس، $L(\beta)$ = مقدار لگاریتم تابع درستنمایی، P = تعداد پارامترها، S = تعداد مشاهدات و AIC = معیار اطلاعاتی آکایک

بر پایه متدولوژی ارایه شده، یک تابع عملکرد ایمنی به منظور مقایسه دو روش پیشنهادی و بردار گرادیان به شرح زیر ساخته شده و نتایج حاصل از آن مورد بحث قرار گرفته است.

الف) ابتدا با رسم نمودار تابع انتگرال تجربی که در شکل (٤) نشان داده است و مقایسه آن با منحنی توابع انتگرال شناخته شده، ٥ شکل تابعی برای متغیر حجم ترافیک نظیر توابع ارایه شده در جدول (٢)، کاندید شده است.

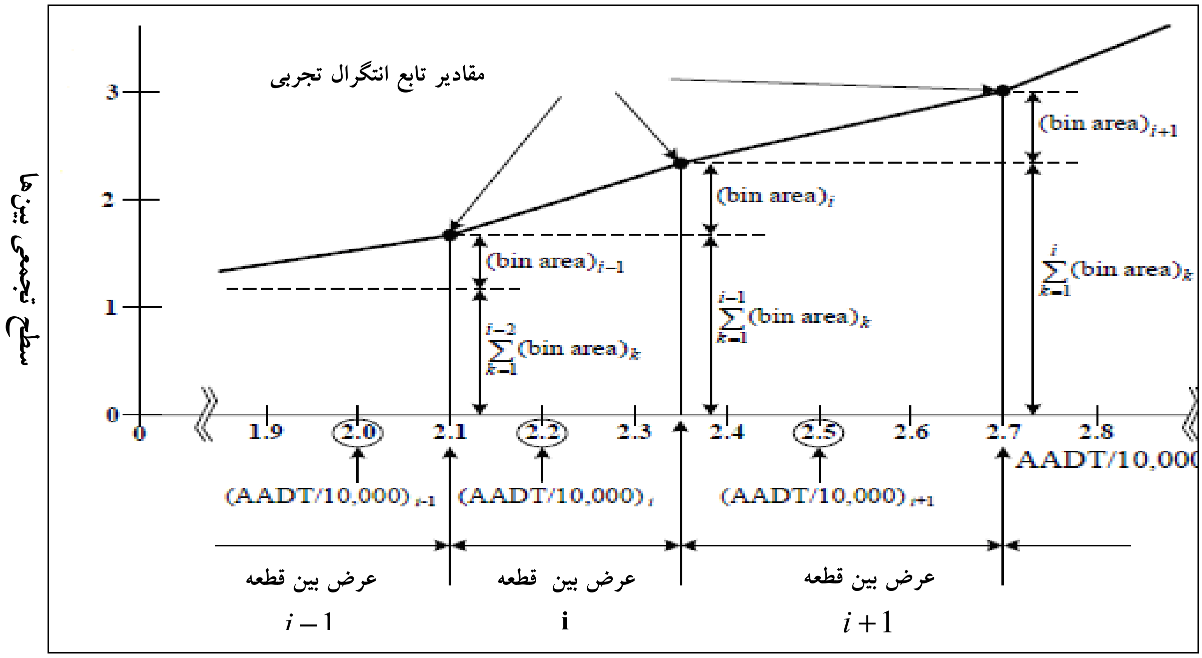
ب) توابع کاندیدشده با حداکثر کردن لگاریتم تابع درستنمایی با ساختار خطای دوجمله‌ای منفی(رابطه٣) و به روش پیشنهادی، بهینه‌سازی و ضرایب آنها تعیین شده است. این نتایج همراه با مقدار 2log likelihood- و آماره معیار اطلاعات بیزیشوارتس(BIC) درجدول (٢) نشان داده شده است. این دو آماره در مدل سازی تصادفات اغلب برای انتخاب بهترین شکل تابعی مورد استفاده قرار گرفته و کمترین مقادیر آنها بیانگر بهترین شکل تابع برای یک متغیر مستقل است [Jongdae, 2007].

با توجه به نتایج جدول (٢)، چون تابع ردیف دوم به شکل $\beta_0.x^{\beta_1}$ دارای کمترین مقدار BIC و نیز 2log likelihood- می‌باشد، به‌عنوان بهترین شکل تابع برای متغیر حجم ترافیک انتخاب شده است.

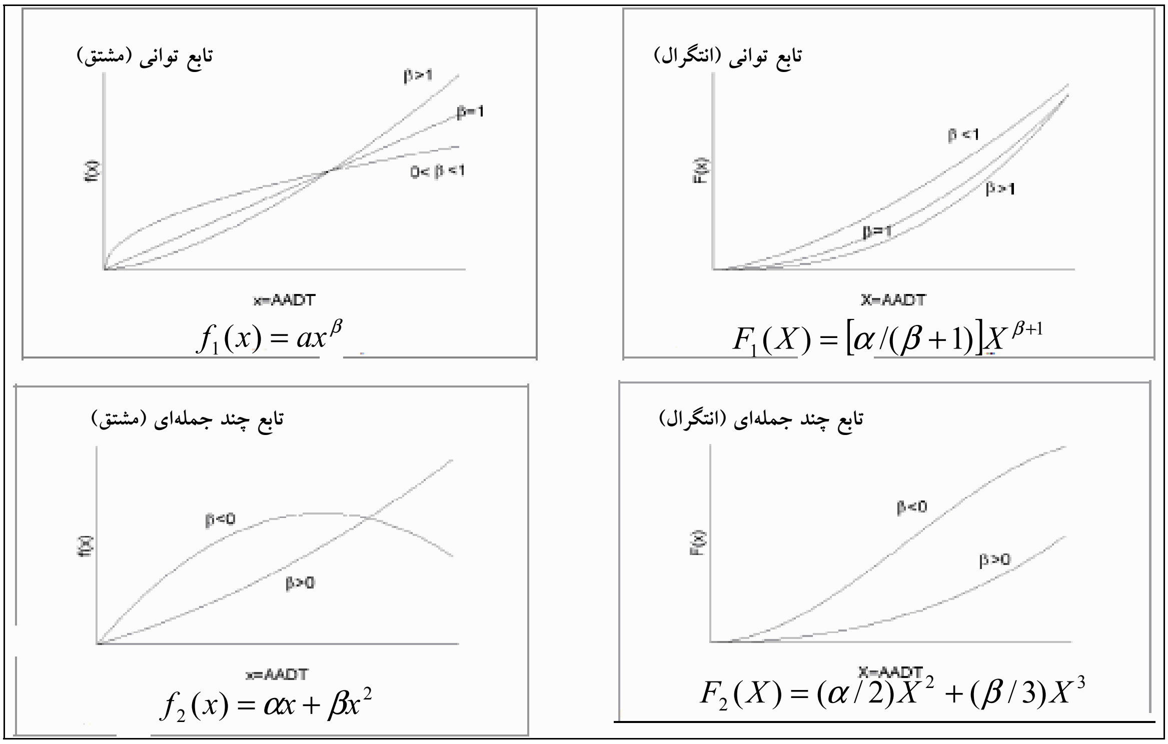
پ) در گام بعدی به منظور بررسی تأثیر هر یک از دو روش در انتخاب شکل تابع متغیر حجم ترافیک، توابع کاندید شده برای متغیر مورد نظر به کمک روش بردار گرادیان بهینه‌سازی شدند، که با انتخاب مقادیر اولیه‌ای یرای پارامترها یعنی k=٠/٥ β_1=١ و β=٢، نتایج حاصل از این روند در جدول (٣) نشان داده شده است. ملاحظه شد که در بهینه‌سازی[11] به روش بردار گرادیان، برخی از توابع نظیر تابع ردیف ٣ جدول همگرا نشده و مقادیر آماره BIC و 2log likelihood- نیز با نتایج حاصل از روش پیشنهادی متفاوت و در حقیقت مقادیر بیشتری برای این آماره‌ها به دست آمده است، به طوری که در تابع $\beta_0.x^{\beta_1}$ مقدار 2log likelihood- با استفاده از روش پیشنهادی برابر با ٨١٤/٤٢٢ و به روش بردار گرادیان این مقدار برابر با ٩٣٢/٣ است. به علاوه، این نتایج در انتخاب شکل تابع برای متغیر حجم ترافیک نیز اثر گذاشته و در روش بردار گرادیان، یک تابع خطی به شکل $\beta_0 + \beta_1.x$ براساس کمترین مقدار 2log likelihood- یا BIC انتخاب می‌شود که با مطالعات انجام شده در این زمینه همخوانی ندارد.

ت) برای بررسی تأثیر انتخاب مقادیر اولیه در فرآیند بهینه‌سازی، توابع کاندید شده با مقادیر اولیه مختلفی مورد آزمایش قرار گرفتند که نتایج آن برای روش بردار گرادیان در جدول (٤) و برای روش پیشنهادی در جدول (٥) نشان داده شده است.

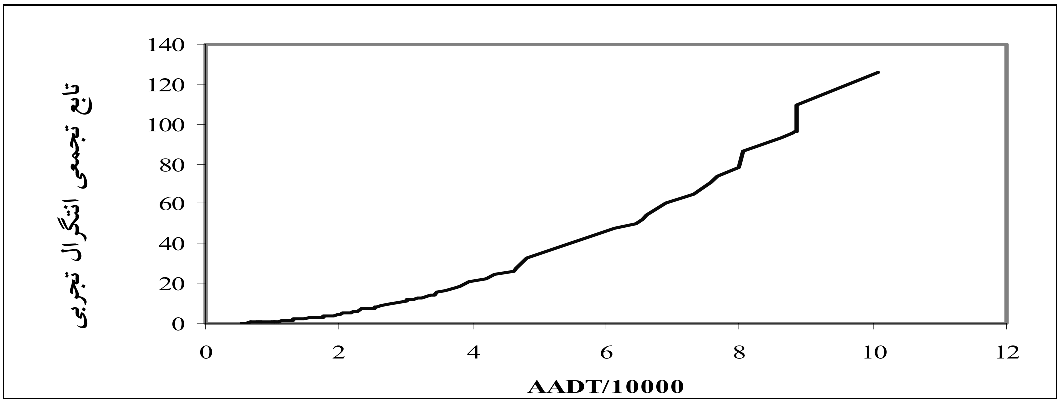
این نتایج به وضوح نشان می‌دهد که روش پیشنهادی برخلاف روش بردار گرادیان به انتخاب مقادیر اولیه پارامترها بستگی نداشته و در حقیقت با انتخاب هر نوع مقداری برای پارامترها، تقریباً نتایج یکسانی حاصل می‌شود.



شکل ۲. نمودار تابع انتگرال تجربی [Jongdae, 2007]



شکل ۳. نمونه‌ای از توابع انتگرال شناخته شده با تابع مشتق آنها [Hauer and Bamfo, 1997]



شکل ٤. نمودار تابع انتگرال تجربی متغیر حجم ترافیک

جدول ۲. ضرایب و مقادیر آماره توابع حجم ترافیک با بهینه‌سازی به روش ابداعی

BIC	-2 log likelihood	β_1	β_0	تابع	ردیف
۸۲۱/۰۴۳	۸۱۴/۴۲۲	۲/۶۳۴۱۹۵	−۰/۰۹۸۳۹	$\beta_0+\beta_1.x$	۱
۸۱۹/۹۱۵	۸۱۳/۲۹۵	۱/۰۱۵۶۴۹	۲/۵۴۲۲۶	$\beta_0.x^{\beta_1}$	۲
۸۲۸/۸۷۵	۸۲۲/۲۵۵	۰/۱۲۰۸۹۳	۱/۹۹۶۷	$\beta_0.x+\beta_1.x^2$	۳
۸۲۰/۳۵۱	۸۱۳/۷۳۰	۰/۰۱۰۷۳	۲/۳۹۰۲۶	$\beta_0.x.e^{\beta_1.x}$	٤
۸۲۳/۷۰۹	۸۱۷/۰۸۸	۰/۲۴۳۶٤۷	۱/۰٤۰۵۵۸	$\beta_0.x+e^{\beta_1.x}$	۵

جدول ۳. ضرایب و مقادیر آماره توابع حجم ترافیک با بهینه‌سازی به روش بردار گرادیان

BIC	-2 log likelihood	β_1	β_0	تابع	ردیف
۸۲۷/۸۰۱	۸۲۱/۱۸	۲/٦۰۷۷	−۰/۰٤۷۲۱	$\beta_0+\beta_1.x$	۱
۹۳۸/۹۲۱	۹۳۲/۳	۱/۵۵۲۷	۲/٦۷۲۹	$\beta_0.x^{\beta_1}$	۲
همگرا نشد				$\beta_0.x+\beta_1.x^2$	۳
۱۰۷۹/۱۲	۱۰۷۲/۵	۰/۵۵٤۹۷	۱/۲۷۱	$\beta_0.x.e^{\beta_1.x}$	٤
۸۲۹/۹۰۱	۸۲۳/۲۸	−۱/٦٤۷۳	۲/۵۵٤۲	$\beta_0.x+e^{\beta_1.x}$	۵

جدول ٤. تخمین ضرایب و تعیین مقادیر آماره به روش بردار گرادیان با مقادیر اولیه مختلف

BIC	-2 log likelihood	β_1	β_0	تابع	مقدار اولیه		
					β_0	β_1	k
۸۲۷/۸	۸۲۱/۱۸	۲/٦۲۷٤	−۰/۰۸۷۰۵	$\beta_0+\beta_1.x$	−۰/۱	۲/۵	۰/۰۵
۹۱۷/٦	۹۱۱	۰/۸۰۳۹۱	۲/۵۵۵۵	$\beta_0.x^{\beta_1}$	۲/۵	۱	۰/۲
۸۸٦/۷	۸۸۰/۱۲	۰/۲۰۹۵۹	۲/٦٦۳۳	$\beta_0.x+\beta_1.x^2$	۲	۰/۱	۰/۱
۱۱٤٤/۱	۱۱۳۷/٤٦	−۰/۱۲۷۰۷	۱/۳۲۲٦	$\beta_0.x.e^{\beta_1.x}$	۲/۵	۰/۰۱	۰/۱
۸۳۰/۲٤	۸۲۳/٦۲	−۱/٤۸۲۲	۲/۵٤۷۲	$\beta_0.x.e^{\beta_1.x}$	۱	۰/۲	۰/۱

جدول۵. تخمین ضرایب و مقادیر آماره به روش پیشنهادی با مقادیر اولیه مختلف

BIC	-2 log likelihood	β_1	β_0	تابع	مقدار اولیه		
					β_0	β_1	k
۸۱۹/۹۹۵۸	۸۱۳/۳۷۵۳	۱/۰۱۳۹۴۵	۲/۵۵۱۶۰۲	$\beta_0 .x^{\beta_1}$	۱	−۱	۰/۵
۸۱۹/۹۳۷۶	۸۱۳/۳۱۷۱	۱/۰۰۹۱۳۴	۲/۵۵۰۰۵۰۴	$\beta_0 .x^{\beta_1}$	۱	۱	۱
۸۱۹/۹۱۷۴	۸۱۳/۲۹۶۹	۱/۰۰۳۷۲۲	۲/۵۷۲۲۵۵	$\beta_0 .x^{\beta_1}$	۲	۲	۰/۵
۸۱۹/۹۱۷۴	۸۱۳/۲۹۶۹	۱/۰۰۳۱۲۱	۲/۵۶۷۹۸۴	$\beta_0 .x^{\beta_1}$	۱۰	۱۰	۰/۱
۸۱۹/۹۳۵۶	۸۱۳/۳۱۵۱	۱/۰۰۹۸۳۶	۲/۵۵۶۸۶۱	$\beta_0 .x^{\beta_1}$	۱۰	−۱۰	۰/۵
۸۱۹/۹۱۵۵	۸۱۳/۲۹۵	۱/۰۱۵۶۴۹	۲/۵۴۲۲۶۱	$\beta_0 .x^{\beta_1}$	۲/۵	۱	۰/۲

۵. نتیجه‌گیری

روشی که در این مقاله برای تخمین ضرایب مدلهای پیش‌بینی تصادفات پیشنهاد شده است، از اصلاح طول گام بهینه بردار گرادیان به دست آمده و روشی ساده و سریع برای بهینه‌سازی لگاریتم تابع درستنمایی محسوب می‌شود. با اجرای این روش بر روی یک تابع عملکرد ایمنی (نوعی مدل پیش‌بینی تصادفات) و مقایسه آن با روش بردار گرادیان نتایج زیر حاصل شده است:

- روش پیشنهادی برخلاف روش بردار گرادیان به نقطه شروع حرکت برای اجرای فرایند بهینه‌سازی وابسته نیست. در حقیقت، از آنجا که این روش با انتخاب مناسب طول گام بهینه (عددی بین صفر و یک) امکان همگرایی برای یک تابع غیرخطی را در بالاترین قله فراهم می‌آورد، بنابراین انتخاب مقادیر مختلف نقطه شروع حرکت در آن بی‌تأثیر بوده و با هر مقدار اولیه می‌توان به نتایج یکسانی دست یافت.
- با بکارگیری روش پیشنهادی در فرآیند بهینه‌سازی تابع درستنمایی، مقادیر کمتری برای 2log likelihood- در توابع مختلف حاصل می‌شود. از آنجا که مقادیر کمتر، وضعیت مناسب‌تری از بهینه‌سازی توابع غیرخطی را در بالاترین قله همگرایی به نمایش می‌گذارد، این روش در مقایسه با روش بردار گرادیان در انتخاب شکل تابعی مناسب برای مدلهای پیش‌بینی تصادفات از دقت و کارآیی بیشتر برخوردار است.
- فرآیند بهینه‌سازی نیز در این دو روش متفاوت است. به این معنی که در روش بردار گرادیان انتخاب مناسب نقطه شروع موجب همگرایی و انتخاب نامناسب آن می‌تواند منجر به عدم همگرایی یک تابع شود، اما در روش پیشنهادی با انتخاب هر مقداری برای نقطه شروع، امکان همگرایی برای یک تابع در بالاترین قله ممکن وجود دارد.

۶. پی‌نوشت‌ها

1. Statistical collision modeling
2. Minimizing squared residuals
3. Maximizing likelihood function
4. Newton-Raphson
5. Quasi-Newton
6. Gradient vector
7. Hessian matrix
8. Safety performance function
9. Integral-derivative
10. Schwarz Bayesian information criterion
11. Optimization

۷. مراجع

– رضایی پژند، محمد و سرافرازی، سیدرضا (۱۳۸۴) "مهندسی سیستمها و بهینه‌سازی"، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد.

– عامری، محمود، افندی‌زاده، شهریار و میرابی مقدم، محمد حسن (۱۳۸۸) "مدل برآورد تعداد تصادفات در راههای شهری"، پژوهشنامه حمل و نقل، سال ششم، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۸، شماره ۲۰، ص. ۲۵۷–۲۶۸.

– نیرومند، حسینعلی (۱۳۸۴) " الگوهای خطی تعمیم‌یافته با کاربردهای آن در مهندسی و علوم"، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

- Aldrich, John (1997) "R. A. Fisher and the making of maximum likelihood 1912–1922", Statistical Science 12 (3):pp. 162–176.

- Hauer, E. (2004) "Statistical road safety modeling" In Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, No. 1897. TRB, National Research Council, Washington, D.C, pp. 81 – 87.

- Hauer, E. and Bamfo (1997) "Two tools for finding what function links the dependent variable to explanatory variable" Proc. ICTCT97, International Cooperation on Theories and Concepts in Traffic Safety, Lund , Sweden.

- Jongdae, B. (2007) "Collision models for multilane highway segment in cooperating the effects of curbs", Ph.D. Dissertation, North Carolina State University.

- Lord, D. (2000) "The prediction of accident on digital networks: Characteristics and issues related to the application of accident prediction models. Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto, Canada.

- Salifu, M. (2004) "Accident prediction models for unsignalized urban junctions in Ghana". In: IATSS Research, pp. 68-81.

۸. پیوست

جدول داده‌های جمع‌آوری شده از شبکه معابر شهر زاهدان

کد قطعه	حجم ترافیک	تصادفات	کد قطعه	حجم ترافیک	میانگین تصادفات	کد قطعه	حجم ترافیک	تصادفات
١	١٠٣٢٠	١	٣٠	١٤٤٠٠	٧	٥٩	٢٨٨٠٠	٦
٢	١٠٣٢٠	٢	٣١	٣٩٦٠٠	١٠	٦٠	٢٨٨٠٠	١٠
٣	١٠٤٤٠	١	٣٢	٤٣٢٠٠	٨	٦١	٢٧٦٠٠	٣
٤	١٠٤٤٠	٢	٣٣	٤٣٢٠٠	١١	٦٢	٢٧٦٠٠	٧
٥	٢٨٨٠٠	٥	٣٤	٤٣٢٠٠	٦	٦٣	٢٦٤٠٠	٧
٦	٢٨٨٠٠	١٢	٣٥	٦٠٠٠	٢	٦٤	٦١٢٠٠	١٠
٧	٣٠٠٠٠	٧	٣٦	١١٤٠٠	١	٦٥	١٩٨٠٠	٥
٨	١٦٨٠٠	٥	٣٧	٢٢٥٦٠	٤	٦٦	٢٠٤٠٠	٧
٩	١٤٤٠٠	٣	٣٨	١٤٧٦١	٥	٦٧	٢٠٤٠٠	٤
١٠	١٤٤٠٠	٢	٣٩	١٤٤٠٠	٤	٦٨	١٨٠٠٠	٨
١١	١٤٤٠٠	٥	٤٠	٥٤١٣	١	٦٩	١٨٠٠٠	٣
١٢	٢٠٤٠٠	٣	٤١	٥٥٠٨	١	٧٠	١٦٨٠٠	٣
١٣	٢٠٤٠٠	٢	٤٢	٢١٧٠٣	١١	٧١	٦٠٠٠	١
١٤	٢٠٤٠٠	٤	٤٣	٢٠١٣٦	٨	٧٢	١٤٤٠٠	٢
١٥	١٩٢٠٠	٣	٤٤	١٩٢٠٠	٤	٧٣	١٣٢٠٠	٥
١٦	١٩٢٠٠	٨	٤٥	٦٨٤٠	٢	٧٤	٨٤٠٠	١
١٧	١٩٢٠٠	٥	٤٦	٨٤٠٠	٢	٧٥	٢١٣٦٠	٣
١٨	١٩٢٠٠	٧	٤٧	٦٠٠٠	١	٧٦	١٨٠٠٠	٥
١٩	١٥٦٠٠	٤	٤٨	٥٦٠٤	١	٧٧	١٩٢٠٠	٣
٢٠	١٥٦٠٠	٣	٤٩	٥٦٠٤	٢	٧٨	١٥٦٠٠	٣
٢١	١٤٤٠٠	٢	٥٠	٩٩٨٤	٢	٧٩	١٣٢٠٠	٢
٢٢	٧٨٠٠	١	٥١	٩٩٨٤	٢	٨٠	١٧٥٢٠	٦
٢٣	٨٠٤٠	٢	٥٢	٢٠٢٠٠	٤	٨١	١٣٢٠٠	٥
٢٤	٣٠٠٠٠	٥	٥٣	٢٣٤٢٢	٧	٨٢	١٠٠٨٠٠	٣٠
٢٥	٢٨٨٠٠	٢	٥٤	٨٤٠٠	١	٨٣	١٠٠٨٠٠	١
٢٦	١٤٤٠٠	٣	٥٥	٧٨٠٠	٢	٨٤	١٠٢٠٠	٣
٢٧	١٨٠٠٠	٣	٥٦	٧٨٠٠	١	٨٥	٢١٦٠٠	٥
٢٨	١٦٨٠٠	١	٥٧	٢٧٦٠٠	٧	٨٦	٢٥٨٠٠	٨
٢٩	١٤٤٠٠	٢	٥٨	١٠٨٠٠	٢	٨٧	١٣٦٨٠	٢

ادامه جدول داده‌های جمع‌آوری شده از شبکه معابر شهر زاهدان

کد قطعه	حجم ترافیک	تصادفات	کد قطعه	حجم ترافیک	میانگین تصادفات	کد قطعه	حجم ترافیک	تصادفات
٨٨	١٣٨٠٠	٤	١١٧	٣٤٨٠٠	٨	١٤٦	٢٥٢٠٠	٤
٨٩	١١٤٠٠	٣	١١٨	١٩٢٠٠	٥	١٤٧	٢٧٦٠٠	٨
٩٠	١١٤٠٠	٢	١١٩	١٩٢٠٠	٨	١٤٨	١٩٢٠٠	٢
٩١	١٢٠٠٠	٦	١٢٠	٣٣٦٠٠	٦	١٤٩	١٨١٦٩	٤
٩٢	٣٣٦٠٠	١٠	١٢١	٣٤٢٠٠	٩	١٥٠	١٧٧٦٠	٥
٩٣	٢٢٨٠٠	٣	١٢٢	٦٤٩١٤	١٥	١٥١	١١٩٨٤	٣
٩٤	٢٢٦٨٠	٦	١٢٣	٦٤٨٠٠	٢٠	١٥٢	١٢٠٠٠	٣
٩٥	٢٥٢٠٠	٥	١٢٤	٦٤٥٦٠	١٧	١٥٣	٣٢٣١٢	٩
٩٦	٢٥٢٠٠	٥	١٢٥	٨٨٣٩٨	٢٥	١٥٤	٣١٩٢٠	٣
٩٧	٢٥٢٠٠	٧	١٢٦	٨٧٨٤٠	٢٤	١٥٥	٨٦٤٠٠	٢٢
٩٨	٢٦٤٠٠	٨	١٢٧	٨٨١٤٠	١٨	١٥٦	٨٠٤٠٠	٢٧
٩٩	٦٠٠٠	١	١٢٨	٨٨٤٠٢	٢٦	١٥٧	٧٩٩٦٩	٢١
١٠٠	١٥٦٠٠	٢	١٢٩	٦٤٩١٥	١٧	١٥٨	١١٧٦٠	٣
١٠١	٣٨٠٦٩	١٢	١٣٠	٦٦٠٠٠	١٩	١٥٩	١١٤٠٠	٤
١٠٢	٣٨٠٦٩	٨	١٣١	٦٥٤٠٠	١٦	١٦٠	١١٥٢٠	٢
١٠٣	٣٣٦٠٠	٩	١٣٢	١٣٠٢٢	٣			
١٠٤	١٦١٥٦	٣	١٣٣	٢٢٢٢٣	٦			
١٠٥	١٨٦٦٤	٤	١٣٤	٢٢٨٠٠	٦			
١٠٦	١٨١٢٠	٥	١٣٥	٤٣٢٠٠	١٤			
١٠٧	٧٣٢٠٠	١٩	١٣٦	٣٦٠٠٠	٧			
١٠٨	٧٣٨٠٠	٢٣	١٣٧	٣٧٤٤٠	١١			
١٠٩	٧٤٤٠٠	١٨	١٣٨	٣٤٨٠٠	١٠			
١١٠	٧٥٦٠٠	٢٠	١٣٩	٣٦٠٠٠	٨			
١١١	٧٦٨٠٠	١٩	١٤٠	٣٦٠٠٠	١٠			
١١٢	١٠٠٨٠٠	٢٦	١٤١	١٩٨٠٠	٦			
١١٣	٦٩٠٠٠	١٥	١٤٢	٤٦٤٤٠	١٣			
١١٤	٤٨٠٠٠	١٥	١٤٣	٣١٢٠٠	٧			
١١٥	٤٦٢٠٠	١٦	١٤٤	٣٠٢٤٠	١٠			
١١٦	٤٦٢٠٠	٨	١٤٥	٢٥٨٠٠	٤			