

# طراحی شبکه مکان‌یابی - مسیریابی محورها تحت امکان ارتباط ناکامل محورها

## و ارتباط مستقیم بین غیر محورها

حسین کریمی، دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

مصطفی ستاک\*، استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

پست الکترونیکی نویسنده مسئول: [setak@kntu.ac.ir](mailto:setak@kntu.ac.ir)

دریافت: ۱۳۹۳/۰۴/۱۰ - پذیرش: ۱۳۹۳/۰۸/۰۵

### چکیده

در این مقاله، مدلی جامع برای مسئله مکان‌یابی - مسیریابی محور ارایه شده است که ساختار شبکه محوری و غیر محوری به هر گونه‌ای می‌تواند باشد. این مدل در شبکه‌های حمل و نقل عمومی کاربرد دارد. در این مدل علاوه بر مکان‌یابی و مسیریابی همزمان، از استراتژی تخصیص چندگانه برای اتصال بین غیر محورها و محورها به کارگیری شده است. همچنین غیر محورها هم می‌توانند به طور مستقیم ارتباط داشته باشند. هدف از این مدل، کمینه سازی هزینه‌های ایجاد شبکه و انتقال جریان در شبکه می‌باشد. جهت تسریع در حل مدل و بهبود حد پایین ناشی از آزاد سازی خطی مدل، تعدادی نامساوی معتبر و پیش پردازش، ارایه شده است. با توجه به پیاده‌سازی آن‌ها به روی مسئله‌های نمونه موجود در ادبیات تحقیق و یک نمونه واقعی، عملکردشان مورد سنجش قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از تمامی نامساوی‌ها و پیش پردازش‌ها بهترین روش حل در بین روش‌های حل دیگر پیاده‌سازی شده این پژوهش خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: مکان‌یابی محور ناکامل، تخصیص چندگانه، نامساوی معتبر، شبکه حمل و نقل، مسیریابی

### ۱- مقدمه

است و در سال‌های اخیر مقالات زیادی در زمینه ارایه مدل‌های مختلف و روش‌های حل این مسأله ارایه شده است (Campbell and O'Kelly, 2012).

مسئله مکان‌یابی محور، به طور معمول، شامل مکان‌یابی محورها و غیر محورها و تخصیص غیر محورها به محورها می‌باشد. در واقع، علاوه بر مکان‌یابی، تخصیص هم انجام می‌گیرد. مراکز محور به عنوان نقاطی هستند که جریان‌های کوچک را جمع‌آوری و آن‌ها را به یک جریان بزرگ تبدیل می‌کنند که این جریان به یک یا چند مرکز محور دیگر انتقال می‌یابد. این مرکز محور هم این جریان‌ها را از هم جدا کرده و

مکان‌یابی محور<sup>۱</sup> از مسائلی است که در سه دهه گذشته در مکان‌یابی مطرح شده است. استفاده از شبکه محورها و غیر محورها کاربرد وسیعی در صنایع ارتباطات و مخابرات (Carello et al., 2004, et al., 2005, Bollapragada et al., 2004) ، حمل و نقل هوایی (Dennis, 1994؛ Adler and Smilowitz, 2007) و خدمات زمینی (Ishfaq, 2003؛ Liu, Li and Chan, 2003) و خدمات پستی (Çetiner, Sepil؛ Ernst and Krishnamoorthy, 1996) (Süral, 2010 and) دارد. امروزه مسأله مکان‌یابی محور یکی از مسائلی است که روز به روز توجه بیشتری را به خود جلب می‌کند و مورد توجه بسیاری از محققان و دانشمندان قرار گرفته

بین نقاط مقصد توزیع می‌کند. پس، می‌توان گفت که این مراکز دارای پنج نقش اساس هستند. (۱) جمع‌آوری جریان‌های کوچک. (۲) تبدیل جریان‌های کوچک به یک جریان بزرگ. (۳) انتقال این جریان بزرگ. (۴) تبدیل جریان بزرگ به جریان‌های کوچک. (۵) توزیع جریان‌های کوچک. لازم به ذکر است که به طور حتم، در این نوع از مسائل، در ارسال جریان بین مبدأ و مقصد، مراکز محور از این پنج نقش استفاده نخواهند کرد، زیرا ممکن است که برای ارسال، تنها یک محور لازم باشد.

در مسأله مکان‌یابی محور که نوعی از مسائل بهینه‌سازی می‌باشد، هدف، یافتن مکان مناسب برای محورها و مسیرها جهت فرستادن کالا از یک سری مبدأ به یک سری مقصد است به گونه‌ای که هزینه جمع‌آوری و توزیع کالا کمینه شود. در این مسئله، شبکه‌های اتصالی میان گره‌های غیر محور و محورها، شبکه فرعی ۲ نامیده می‌شود، در حالی که شبکه اتصال دهنده محورها، شبکه اصلی ۳ نامیده می‌شود. مدل طراحی شده باید به جنبه‌های هر دو شبکه، مکان‌یابی محورها و مسیر تقاضاها بپردازد. تخصیص‌ها هم به گونه‌ای صورت می‌گیرد که میان هر جفت مبدأ و مقصد، مسیری وجود داشته باشد. در بعضی مقاله‌ها فقط به جنبه تخصیص پرداخته شده است (Kuby and Gray, 1993). اما نکته مهم این است که در طراحی شبکه محور هم مکان‌یابی و هم تخصیص، هر دو باید با هم مورد توجه قرار بگیرد چون هر دو از یکدیگر تأثیر می‌پذیرند (Campbell and O'Kelly, 2012).

در مسائل محور معمولاً سه فرض لحاظ شده است که به طور خلاصه عبارتند از: (۱) شبکه (گراف) محور کامل است؛ یعنی بین هر جفت محور ارتباط و اتصال وجود دارد. (۲) برای انتقال کالا میان هر دو محور، فاکتور تخفیف  $\alpha$  لحاظ می‌شود. (۳) هیچ گونه ارتباط مستقیمی بین دو گره غیر محور وجود ندارد. در مقاله حاضر، دو فرض اول و سوم در نظر گرفته نمی‌شوند. این موضوع باعث می‌شود که علاوه بر امکان ارتباط مستقیم بین دو غیر محور، ارتباط بین محورها به صورت ناکامل (غیرمستقیم) باشد. به طور کلی می‌توان شبکه ناکامل را به چهار دسته تقسیم کرد. مقالاتی که شبکه بین محورها (۱) از نوع شبکه درختی است؛ (۲) از نوع حلقه است؛ (۳) دارای شکل خاصی است؛ (۴) به هر

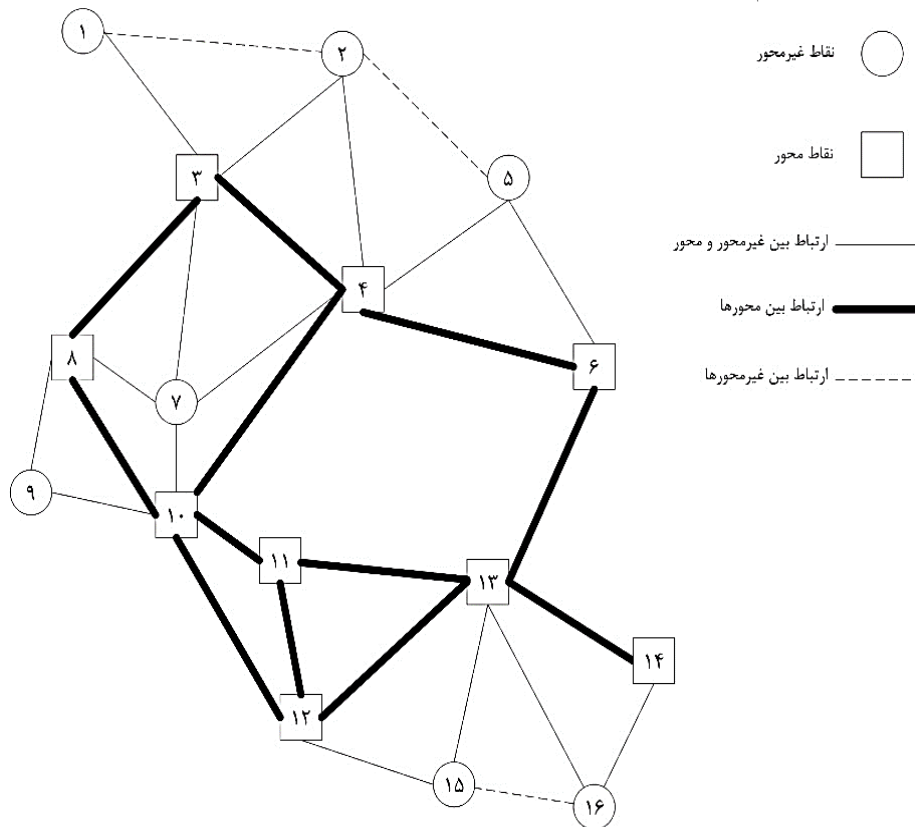
صورتی می‌تواند باشد (حتی می‌تواند کامل باشد)، یعنی حالتی کلی (جامع) دارد. در قسمت ادبیات تحقیق، پژوهش‌هایی که شبکه محوری در آن‌ها ناکامل است مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در مقاله حاضر، شبکه ناکامل بین محورها از نوع چهارم می‌باشد.

مسئله مکان‌یابی محور به طور کلی از سه نگاه طبقه‌بندی می‌شود. (۱) نوع تابع هدف: از انواع تابع هدف می‌توان به میانه، مرکز، پوششی (Campbell, 1994) و میانه ترتیبی (Puerto, Ramos and Rodriguez-Chia, 2010) نام برد. (۲) نوع تخصیص مراکز غیر محور به محور: که به دو دسته تخصیص یگانه و چندگانه تقسیم می‌شود. (۳) تعداد محور: شامل دو قسمت مشخص و نامشخص است.

اگر مشخص باشد از عبارت  $p$ -محور استفاده می‌کنند. در پژوهش حاضر تابع هدف از نوع میانه و تخصیص از نوع چندگانه است. همچنین تعداد محورها توسط مدل تعیین می‌شود. یکی از مسائل مهم و کاربردی که می‌توان آن را با مسئله مکان‌یابی محور مدل‌سازی کرد، مسئله حمل و نقل مسافر، به خصوص حمل و نقل عمومی و شهری، می‌باشد. این مسئله در ادبیات تحقیق، با توجه به مطالعات انجام شده ما، به ندرت مورد توجه قرار گرفته است. در ادبیات تنها به دو مدل نایکل<sup>۴</sup> و همکاران (Nickel, Schobel and Sonneborn, 2001) و گلاره<sup>۵</sup> و نایکل (Gelareh and Nickel, 2011) می‌توان اشاره کرد. در این نوع از مسائل به دلیل این که مسافر نمی‌خواهد توقف زیادی داشته باشد و همچنین می‌خواهد کم‌ترین فاصله را طی کند، از تخصیص چندگانه استفاده می‌شود (O'Kelly and Miller, 1994). از طرفی در حمل و نقل مسافر، ایجاد ارتباط بین تمامی محورها بسیار هزینه‌زا می‌باشد، به همین دلیل استفاده از شبکه کامل محوری، کاری ناکارآمد است (Contreras, Fernández and Marín, 2009). یکی دیگر از موضوعاتی که در این شبکه‌ها مهم است، ارتباط مستقیم بین غیر محورهاست، گاهی اوقات به دلیل عدم توقف زیاد و طی کردن فاصله کم با توجه به هزینه‌ها، داشتن این ارتباط مؤثرتر و دارای هزینه کم‌تر خواهد بود. به همین دلیل در این پژوهش از این شرایط استفاده شده است. شبکه‌ای که تحت شرایط بیان شده ایجاد می‌شود،

می باشد که خود نوعی تخصیص چندگانه است. در این شکل به عنوان مثال، جهت انتقال جریان بین نقاط ۲ و ۵ از هیچ محوری استفاده نمی شود و جریان به طور مستقیم ارسال می گردد. همچنین اگر جریانی بخواهد از نقطه ۲ به نقطه ۹ برود باید از محورهای ۳ و ۸ استفاده کند. این شکل تنها نشان دهنده نمونه ای از ساختار شبکه جواب است و نمی توان تمامی مسیرهای انتقال جریان را در این شکل نشان داد.

با توجه به طبقه بندی اوکلی و میلر ( O'Kelly and Miller, 1994)، جز پروتکل H است. مثالی از شبکه ای که توسط مدل پژوهش حاضر می تواند ایجاد شود، در شکل ۱ آورده شده است. در این شکل، ۱۶ نقطه وجود دارد که ۹ تای آنها محور و باقی آنها غیر محور هستند. تعداد ارتباطات بین محورها ۱۲ و ارتباط بین غیر محورها ۳ می باشد. تعداد یال های بین محور و غیر محورها برابر ۱۵ می باشد. ۶ غیر محور تخصیص چندگانه را انتخاب کردند و یک غیر محور هم تخصیص یگانه را دارا



شکل ۱. نمونه ای از شبکه جواب مدل طراحی شده

موجود در ادبیات شامل هزینه های مسیریابی و هزینه های ثابت مکان یابی محور، ایجاد ارتباطات محور، محور و غیر محور و پیوندهای غیر محوری است. علاوه بر این، تعدادی نامساوی معتبر برای تنگ کردن مدل، بهتر کردن حد پایین ناشی از آزادسازی خطی و افزایش زمان حل نیز پیشنهاد شده است. در قسمت دوم مقاله، ادبیات تحقیق مورد بررسی قرار خواهد گرفت. مدل سازی مسئله در قسمت سوم آورده شده است.

یکی از نوآوری های مقاله حاضر ارایه مدلی است که دارای شبکه ای کاملاً انعطاف پذیر است. یعنی با اضافه کردن محدودیت هایی قابلیت تبدیل به برخی از مدل های موجود در پیشینه پژوهش را دارد.

همچنین شبکه محوری آن ناکامل است و ارتباط مستقیم بین غیر محورها اجازه داده شده است. از دیگر نوآوری های این مقاله این است که تابع هدف در مدل پیشنهادی بر خلاف مقالات

آن به صورت ناکامل است به چهار قسمت طبقه‌بندی می‌شوند که در ادامه آن‌ها بررسی خواهند شد.

## ۲-۱-۱- شبکه محوری درختی

در این ساختار، تعداد یال‌های ارتباطی بین محورها، یکی کمتر از تعداد نقاط محور می‌باشد. در واقع برای رفتن از یک محور به محور دیگر، تنها یک مسیر وجود دارد. این ساختار شبکه محوری در ابتدا توسط کیم<sup>۹</sup> و تچا<sup>۱۱</sup> (Kim and Tcha, 1992) مطرح شد. در واقع آن‌ها شبکه محوری خود را یک شبکه دو سطحی نامیدند. در سطح اول که غیر محورها به محورها تخصیص دارند، شبکه ستاره‌ای وجود دارد و در سطح شبکه محوری، ساختار شبکه از نوع درخت است. همچنین، مدل درباره تعداد نقاط محوری تصمیم می‌گیرد. ژانگ<sup>۱۱</sup> (Zhang, 2009)، از این ساختار برای مسئله‌ای با تابع هدف مرکز استفاده کردند. همانند کارهای گذشته در شبکه محور درختی، از استراتژی تخصیص یگانه برای مدل خود که دارای تعداد مشخصی محور می‌باشد، بهره برده‌اند. کنتراس<sup>۱۲</sup> و همکاران (Contreras, Fernández and Marín, 2009)، مدلی مستحکم با استراتژی تخصیص یگانه و در نظر گرفتن تعداد مشخصی محور، برای مسئله مکان‌یابی محور دارای شبکه درختی ارائه کردند. این مدل هزینه انتقال جریان را نیز کاهش می‌دهد و همچنین مسیر انتقال بین نقاط را نیز مشخص می‌کند. در ادامه، کنتراس و همکاران (Contreras, Fernández and Marín, 2010)، مدل قبلی خود را از لحاظ تعداد متغیرها کاهش دادند و مدلی جدید تحت همان شرایط قبلی مطرح کردند.

## ۲-۱-۲- شبکه محوری حلقه‌ای

در ساختار حلقه‌ای، تعداد یال‌های ارتباطی بین محورها دقیقاً برابر تعداد محورها می‌باشد. هر محور، دارای یک خروجی و یک ورودی است و همانند ساختار جواب یک مسئله فروشنده دوره گرد می‌باشد و این بدان معنا است که یک تور بین محورها ایجاد خواهد شد. در این قسمت از ادبیات مطالعات کمی انجام شده است (Klincewicz, 1998). استراتژی تخصیص یگانه برای این مدل در نظر گرفته شده است. چيو<sup>۱۳</sup> و همکاران (Chiu, Lee and Ryan, 1995) هم از این ساختار در پژوهش خود استفاده کردند. همچنین وانگ<sup>۱۴</sup> و همکاران (Wang, Lin and Chang,

در بخش چهارم، گروهی از نامساوی‌های معتبر ارائه شده است که موجب ایجاد برش در فضای جواب آزادسازی خطی می‌شود. قسمت پنجم به بررسی این نامساوی‌ها و عملکرد آن‌ها به روی مجموعه داده‌هایی اختصاص داده شده است. یک مثال موردی برای شهرهای ایران در بخش ششم آمده است و در نهایت، نتیجه‌گیری پژوهش در بخش هفتم آورده شده است.

## ۲- پیشینه موضوع

مسئله مکان‌یابی محور، در ابتدا توسط اوکلی (O'Kelly, 1986) مدل‌سازی شد. اوکلی (O'Kelly, 1987) اولین مدل درجه دوم مسئله تسهیلات محور با شرط ارتباط تخصیص مراکز غیر محور به یک مرکز محور را مطرح کرد. تابع هدف این مدل، کم کردن هزینه کل حمل و نقل جریان‌های ارتباطی بود. او به دلیل صرفه اقتصادی در هزینه ارتباطی بین مراکز محور، عامل تخفیف  $\alpha$  را که عددی بین ۰ و ۱ است، مطرح کرد. این عامل برای ارتباطات بین محورها استفاده می‌شود. اولین مدل با در نظر گرفتن تخصیص چندگانه توسط کمبل (Campbell, 1992) مطرح شد. همچنین اولین مدل‌سازی خطی مسئله مکان‌یابی محور با در نظر داشتن تعداد مشخصی از محور توسط کمبل بیان شد (Campbell, 1994). در ادبیات تحقیق چند مقاله مروری همانند اوکلی و میلر (O'Kelly and Miller, 1994)، کلینسویچ<sup>۶</sup> (Klincewicz, 1998)، آلومار<sup>۷</sup> و کارا<sup>۸</sup> (Alumar and Kara, 2008) و زنجیرانی فراهانی و همکاران (Zanjirani Farahani et al., 2013) وجود دارد که خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای مطالعه بیشتر در این زمینه، به آن‌ها و منابع درونشان مراجعه نمایند. به دلیل استفاده از یک شبکه ناکامل برای محورها و استفاده از ارتباط بین غیر محورها، در ادامه به ادبیات این دو قسمت پرداخته می‌شود.

## ۲-۱- شبکه محوری ناکامل

همان‌طور که بیان شد، به طور معمول، شبکه بین محورها در ادبیات به صورت کامل در نظر گرفته می‌شود. اما در ادبیات مکان‌یابی محور، مقالات متعددی نیز وجود دارد که این فرض را در نظر نگرفته‌اند. همان‌طور که بیان شد، پژوهش‌هایی که شبکه

2006) نیز از ساختار حلقه‌ای برای محورها در سیستم‌های مخابراتی استفاده کرده‌اند.

## ۲-۱-۳- شبکه محوری دارای شکل خاص

منظور از شکل‌های خاص برای شبکه محوری، شکل‌هایی هستند که درختی و حلقه‌ای نمی‌باشند، بلکه از ساختارهای دیگری پیروی می‌کنند. به عنوان مثال، می‌توان به ساختاری که یک محور، تنها می‌تواند به تعداد مشخصی محور متصل شود نام برد که واسنر<sup>۱۵</sup> و زاپفل<sup>۱۶</sup> (Wasner and Zapfel, 2004) در مقاله خود از آن استفاده کردند. آن‌ها مدلی کاملاً غیر خطی با استراتژی تخصیص چندگانه ارائه کردند. کالیک<sup>۱۷</sup> و همکاران (Calik et al., 2009) مدلی مطرح کردند که برای رفتن از یک غیر محور به غیر محوری دیگری حداکثر می‌توان از چهار محور گذشت، این موضوع باعث می‌شود که شبکه محوری مدل آن‌ها به صورت درختی، حلقه‌ای و کامل محض، نباشد و دارای شکل خاصی است. آلومار و همکاران (Alumar, Kara and Karasan, 2009) مدلی ارائه کردند که در آن، تعداد محورها و ارتباطات بین محور از قبل تعیین می‌شود و جزء ورودی‌های مدل است. استراتژی به کار گرفته شده برای تخصیص در این مدل از نوع یگانه بوده است. در مدل آن‌ها، هزینه ایجاد محور و ارتباطات در نظر گرفته نشده است.

## ۲-۱-۴- شبکه محوری جامع

در این ساختار، شکل شبکه محوری توسط مدل تعیین می‌شود و هر ساختاری (درختی، حلقه‌ای و کامل) می‌تواند بگیرد. در ادبیات این قسمت از تحقیق، ابتدا یون<sup>۱۸</sup> و همکاران (Yoon, Beak and Tcha, 2000) یک مدل مکان‌یابی محور ارائه کردند که از ساختار شبکه محور جامعی برخوردار است. مدل آن‌ها، هزینه ایجاد محورها را در نظر نگرفته است. سپس، نایکل و همکاران (Nickel, Schobel and Sonneborn, 2001) مدلی ارائه کردند که دارای محدودیت‌ها و متغیرهای زیادی است. همچنین، هزینه احداث محورها، انتقال جریان و ایجاد ارتباطات محوری در نظر گرفته شده است. یون و کورنت<sup>۱۹</sup> (Yoon and Current, 2008) مدلی ارائه کردند که ساختاری جامع را برای

شبکه محوری در نظر می‌گیرد. آن‌ها، هزینه انتقال جریان و مسیریابی را در مدل خود در نظر نگرفتند. گلاره و نایکل (Gelareh and Nickel, 2011) مدلی با تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای کمتری ارائه کردند. مدل آن‌ها همانند پژوهش‌های قبلی در این زمینه، دارای شرایط تخصیص چندگانه بوده است. تابع هدف در این تحقیق همانند، مدل نایکل و همکاران (Nickel, Schobel and Sonneborn, 2001) بوده است. کاتانزارو<sup>۲۰</sup> و همکاران (Catanzaro et al., 2011) در مدلی دو لایه‌ای از ساختاری جامع برای شبکه محور استفاده کردند. آن‌ها، تنها، هزینه انتقال جریان کالا را در نظر گرفتند.

## ۲-۲- ارتباط بین غیر محورها

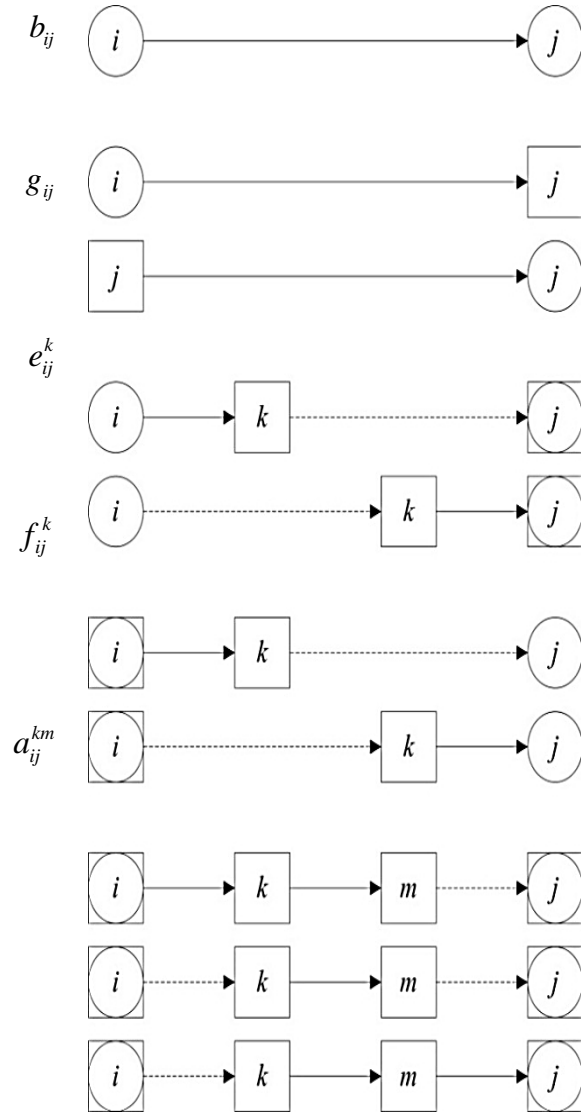
یکی دیگر از فرض‌های ابتدایی مکان‌یابی محور، نبود ارتباط مستقیم بین غیر محورها می‌باشد. این فرض در ابتدا توسط آیکین<sup>۲۱</sup> (Aykin, 1994) آزادسازی شد. در مدل او، تعداد مکان‌های محور از پیش تعیین شده بود. همچنین آیکین (Aykin, 1995) هم از این ساختار برای مدل پیشنهادی خود بهره برده و در هر دو مدل او از تخصیص یگانه استفاده شده است. استراتژی تخصیص چندگانه برای مدل در نظر گرفته شده است. نایکل و همکاران (Nickel, Schobel and Sonneborn, 2001) هم در مدل خود این ارتباط مستقیم را همانند یون و کورنت (Yoon and Current, 2008) و کاتانزارو و همکاران (Catanzaro et al., 2011) در نظر گرفتند. با توجه به ادبیات تحقیق، در همه مدل‌ها، هزینه ثابت ارتباط بین غیر محورها و محورها در نظر گرفته نشده است. عدم توجه به این موضوع باعث می‌شود که مدل‌ها برای ارتباطات بیشتری از این جنس تمایل پیدا کنند. برای دستیابی به این امر، متغیر جدیدی باید جهت تشخیص ایجاد ارتباط و یا عدم ارتباط در مدل مکان‌یابی- مسیریابی محور اضافه شود. همچنین، با توجه به این که مدل نایکل و همکاران (Nickel, Schobel and Sonneborn, 2001)، مدلی دارای شبکه محوری جامع و با در نظر گرفتن ارتباطات مستقیم بین غیر محورهاست، اما دارای محدودیت‌ها و متغیرهای زیادی است. در پژوهش حاضر، فرضیات آن‌ها در نظر گرفته شده است و مدل پیشنهادی از لحاظ اندازه، کوچک‌تر و

بهتر از مدل پیشین می‌باشد. در قسمت بعد، مدل پیشنهادی ارزیابی می‌گردد.

### ۳- مدل‌سازی

در این بخش به مدل‌سازی مسئله، تحت شرایط بیان شده، پرداخته می‌شود، سپس برخی از ویژگی‌های مدل، بیان خواهد شد. ابتدا شاخص‌ها و ورودی‌های مورد استفاده در مدل معرفی می‌شود. فرض می‌شود که تعداد نقاط ورودی مسئله برابر  $N$  است. شاخص‌های  $i, j, k$  و  $m$  شمارنده این نقاط هستند.  $\alpha$  ضریب تخفیف، برای انتقال جریان در مسیر بین دو محور است.  $C_{ij}$  هزینه انتقال جریان بین نقاط  $i$  و  $j$  می‌باشد و  $W_{ij}$  میزان جریان انتقالی بین نقاط  $i$  و  $j$  است که این میزان جریان بین همه نقاط بزرگتر از صفر در نظر گرفته شده است.  $I_{km}$  هزینه ایجاد ارتباط محوری بین  $k$  و  $m$  می‌باشد و  $J_{ij}$  هزینه ایجاد (یا نگهداری) ارتباط بین نقاط  $i$  و  $j$  است که حداکثر یکی از آن‌ها محور هستند. بعد از معرفی ورودی‌ها و شاخص‌ها، به معرفی متغیرها پرداخته می‌شود.  $a_{ij}^{km}$  برابر یک خواهد شد اگر برای رفتن از  $i$  به  $j$  از محورهای  $k$  و  $m$  عبور شود، در غیر این صورت برابر صفر می‌شود.  $e_{ij}^k$  برابر یک می‌شود، اگر برای رفتن از محور  $i$  به  $j$  از محور  $k$  عبور شود، در غیر این صورت مقدارش برابر صفر است.  $f_{ij}^k$  برابر یک است، اگر برای رفتن از  $i$  به  $j$  از محور  $k$  استفاده شود، در غیر این صورت برابر صفر خواهد شد.  $g_{ij}$  برابر یک خواهد شد اگر به طور مستقیم از  $i$  به  $j$  جریان انتقال پیدا کند (یعنی  $i$  به  $j$  متصل است) به شرطی که دقیقاً یکی از آن‌ها محور باشد، در غیر این صورت برابر صفر می‌شود.  $b_{ij}$  برابر یک خواهد شد اگر به طور مستقیم، جریان از غیر محورهای  $i$  و  $j$  انتقال پیدا کند (یعنی  $i$  به  $j$  متصل است)، در غیر این صورت برابر صفر می‌شود. در واقع اگر ارتباط مستقیم بین دو محوری ایجاد شود، این متغیر این موضوع را نشان می‌دهد. متغیرهایی که تا کنون بیان شده‌اند در شکل ۲ آورده شده‌اند. در این شکل، غیر محور با دایره و محور با مربع

نشان داده شده است. خطوط پیوسته یال (ارتباط مستقیم) را نشان می‌دهد و خط - فاصله‌ها هم مسیر را نمایش می‌دهند.



شکل ۲. متغیرهای مربوط به انتقال جریان

$Z_{km}$ ، ارتباط مستقیم بین دو محور  $k$  و  $m$  را نشان می‌دهد. اگر این ارتباط وجود داشته باشد، مقدارش برابر یک، در غیر این صورت برابر صفر خواهد شد و  $Y_k$  هم اگر برابر یک شد، یعنی نقطه  $k$  یک محور است، در غیر این صورت برابر صفر می‌شود. با توجه به مطالب بیان شده، مدل مسئله مکان‌یابی - مسیریابی، تحت شرایط ارتباط ناکامل شبکه محوری و امکان ارتباط مستقیم بین دو محور به صورت زیر خواهد بود.

$$\min \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m \alpha c_{km} w_{ij} a_{ij}^{km} + \sum_i \sum_j \sum_k w_{ij} (c_{ik} e_{ij}^k + c_{kj} f_{ij}^k) + \sum_i \sum_j c_{ij} w_{ij} g_{ij} + \quad (1)$$

$$\sum_i \sum_j c_{ij} w_{ij} b_{ij} + \sum_k F_k y_k + \sum_k \sum_{m>k} I_{km} z_{km} + \sum_i \sum_{j>i} J_{ij} (g_{ij} + b_{ij}) \quad (2)$$

$$\sum_{m \neq i} a_{ij}^{im} + \sum_{m \neq i} e_{ij}^m + g_{ij} + b_{ij} = 1 \quad \forall i, j, (i \neq j) \quad (2)$$

$$\sum_{m \neq j} a_{ij}^{mj} + \sum_{m \neq j} f_{ij}^m + g_{ij} + b_{ij} = 1 \quad \forall i, j, (i \neq j) \quad (3)$$

$$\sum_{m \neq i, k} a_{ij}^{km} + f_{ij}^m - \sum_{m \neq j, k} a_{ij}^{mk} + e_{ij}^m = 0 \quad \forall i, j, k, (i \neq j, i \neq k, j \neq k) \quad (4)$$

$$e_{ij}^k \leq 1 - y_i \quad \forall i, j, k, (i \neq j) \quad (5)$$

$$f_{ij}^k \leq 1 - y_j \quad \forall i, j, k, (i \neq j) \quad (6)$$

$$e_{ij}^k + \sum_{m \neq j, k} a_{ij}^{km} \leq y_k \quad \forall i, j, k, (i \neq j, i \neq k, j \neq k) \quad (7)$$

$$f_{ij}^k + \sum_{m \neq i, k} a_{ij}^{km} \leq y_k \quad \forall i, j, k, (i \neq j, i \neq k, j \neq k) \quad (8)$$

$$g_{ij} + \alpha a_{ij}^{ij} + \sum_{m \neq i, j} a_{ij}^{im} + \sum_{m \neq i, j} a_{ij}^{mj} \leq y_i + y_j \quad \forall i, j, (i \neq j) \quad (9)$$

$$g_{ij} \leq \alpha - y_i - y_j \quad \forall i, j, (i \neq j) \quad (10)$$

$$\alpha b_{ij} \leq \alpha - y_i - y_j \quad \forall i, j, (i \neq j) \quad (11)$$

$$\sum_k y_k \geq 2 \quad (12)$$

$$a_{ij}^{km} + a_{ij}^{mk} \leq z_{km} \quad \forall i, j, k, m, (i \neq j, k \neq m) \quad (13)$$

$$e_{ij}^k \leq g_{ik} \quad \forall i, j, k, (i \neq j) \quad (14)$$

$$f_{ij}^k \leq g_{kj} \quad \forall i, j, k, (i \neq j) \quad (15)$$

$$b_{ij} - b_{ji} = 0 \quad \forall i, j, (i \neq j) \quad (16)$$

$$g_{ij} - g_{ji} = 0 \quad \forall i, j, (i \neq j) \quad (17)$$

$$z_{km} - z_{mk} = 0 \quad \forall k, m, (k \neq m) \quad (18)$$

$$a_{ij}^{km} \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \quad (19)$$

$$e_{ij}^k \geq 0 \quad \forall i, j, k \quad (20)$$

$$f_{ij}^k \geq 0 \quad \forall i, j, k \quad (21)$$

$$b_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (22)$$

$$g_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (23)$$

$$z_{km} \in \{0, 1\} \quad \forall k, m \quad (24)$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \quad (25)$$

تابع هدف (۱) به دنبال کاهش چهار عامل در طراحی شبکه مسئله است. (۱) هزینه انتقال جریان در مسیر به دست آمده که شامل قسمت‌های اول، دوم، سوم و چهارم از تابع هدف می‌شوند؛ (۲) هزینه احداث محورها که شامل قسمت پنجم تابع هدف است؛ (۳) هزینه احداث ارتباطات محوری که قسمت ششم تابع هدف، این موضوع را نشان می‌دهد؛ (۴) هزینه ایجاد (یا نگهداری) ارتباطات بین محور و غیر محور و یا ارتباط مستقیم دو غیر محور که قسمت نهمی تابع هدف به دنبال این موضوع است. محدودیت‌های ۲-۴ که محدودیت‌های تعادل جریان نام دارند، به ترتیب برای مبادی، مقاصد و مسیرهای مابین می‌باشد. محدودیت‌های ۵ بیان می‌کنند که متغیرهای  $e_{ij}^k$  در صورتی می‌توانند مقدار بگیرند که نقطه  $i$  محور نباشد. همچنین، عملکرد محدودیت‌های ۶ برای این است که متغیرهای  $f_{ij}^k$  اگر نقطه  $j$  محور نباشد، می‌توانند مقدار بگیرند. محدودیت‌های ۷ و ۸ نشان می‌دهد که اگر  $k$  نقطه محور باشد، آنگاه می‌توان از آن نقطه محوری برای رفتن از یک مبدأ به مقصدی استفاده کرد. استفاده از یک یال برای انتقال جریان از مبدأیی به مقصدی، وابسته به وضعیت محور بودن یا نبودن مبدأ و مقصد است که این موضوع توسط محدودیت‌های ۹ بیان شده است. محدودیت‌های ۱۰ برای این است که اگر تنها یکی از نقاط  $i$  و  $j$  محور باشند، آنگاه  $g_{ij}$  می‌تواند مقدار بگیرد. اگر هیچ‌کدام از نقاط  $i$  و  $j$  محور نباشند، آنگاه  $b_{ij}$  می‌تواند مقدار بگیرد که این موضوع توسط محدودیت‌های ۱۱ مطرح شده‌اند. محدودیت ۱۲ برای این آورده شده است که برای استفاده از مفهوم محورها و استفاده از تخفیف بین محورها باید حداقل یک ارتباط محوری وجود داشته باشد که این موضوع با داشتن حداقل دو محور برقرار خواهد شد. اگر ارتباط محوری بین  $k$  و  $m$  موجود باشد، آنگاه متغیرهای  $a_{ij}^{km}$  یا  $a_{ij}^{mk}$  می‌تواند مقدار بگیرد که محدودیت‌های ۱۳، این شرایط را ایجاد می‌کنند. محدودیت‌های ۱۴ و ۱۵ بیان می‌کنند که اگر ارتباط بین یک غیر محور و محور وجود داشت، آنگاه می‌توان از این ارتباط در مسیر ارسال و یا دریافت غیر محور از آن استفاده کرد.

محدودیت‌های ۱۶-۱۸ به این دلیل آورده شده‌اند که به دلیل غیر جهت‌دار بودن ماتریس هزینه‌ها، مسیر ارسال همانند دریافت جریان است. در غیاب محدودیت‌های ظرفیت برای ارتباطات، متغیرهای مربوط به انتقال جریان، مقدار صفر یا یک می‌گیرند و نیازی به محدود کردن آن‌ها به صفر و یک نیست (Campbell, 1994).

این شرایط در محدودیت‌های ۱۹-۲۳ آورده شده است. در محدودیت‌های ۲۴ و ۲۵، متغیرهای مربوط به ایجاد محور و ارتباط محوری صفر و یکی در نظر گرفته شده‌اند.

مدل پیشنهادی دارای  $n^4 + 5n^3 + 4n^2 - 2n + 1$  محدودیت،  $n^4 + 2n^3 + 2n^2$  متغیر نامنفی و  $n^2 + n$  متغیر دودویی است، اما مدل نایکل و همکاران (Nickel, Schobel, and Sonneborn, 2001) به ترتیب  $2n^4 + 3n^3 + 5n^2$ ،  $2n^4$  و  $n^2 + n$  محدودیت، متغیر نامنفی و متغیر دودویی است. این نشان می‌دهد که علاوه بر گسترش مدل، تعداد محدودیت‌ها و متغیرها در مدل ما کمتر شده است. در ادامه دو ویژگی از مدل بیان می‌شود. ویژگی ۱. اگر محدودیت ۲۶ به مدل اضافه شود، استراتژی مدل، تخصیص یگانه خواهد شد.

$$\sum_{j < i} g_{ij} \leq 1 \quad \forall i \quad (26)$$

ویژگی ۲. اگر محدودیت ۲۷ به مدل اضافه شود، شبکه محوری، تبدیل به شبکه درختی می‌شود، زیرا در هر درخت تعداد یال‌ها یک واحد از تعداد نقاط درخت کمتر است. پس با توجه به محدودیت ۱۸، سمت راست معادله ۲۷ در ۲ ضرب شده است.

$$\sum_k \sum_{m \neq k} z_{ij} = 2 \sum_k y_k - 2 \quad (27)$$

با توجه به ویژگی‌های بیان شده، می‌توان به اکثر شبکه‌هایی که تاکنون در ادبیات وجود داشته است، دست یافت. برای مثال، اگر محدودیت‌های ۲۶ و ۲۷ استفاده شود، شبکه طراحی شده همانند شبکه مدل کونتراس و همکاران (Contreras, Fernández and Marín, 2009) و کونتراس و همکاران (Contreras, Fernández and Marín, 2010) خواهد شد.



با توجه به این موضوع، حداکثر مقدار عبارت بیان شده، مطابق عبارت ۳۱ است. برای عبارت ۳۲ هم همین شرایط برقرار است.

$$\sum_i \sum_{j \neq i} g_{ij} \geq 2(N - \sum_k y_k) \quad (33)$$

قضیه ۳. نامساوی‌های ۳۳ برای مدل ارائه شده معتبر است.

اثبات. همان‌طور که بیان شد، متغیر  $g_{ij}$  نشان‌دهنده وجود ارتباط بین محور و غیر محور هم هستند. مجموع این متغیرها هنگامی کم‌ترین مقدار خود را خواهند گرفت که تخصیص یگانه رخ دهد. پس دقیقاً به تعداد نقاط غیر محور، ارتباط وجود خواهد داشت، یعنی  $N - \sum_k y_k$ ، اما با توجه به محدودیت‌های ۱۷، این مقدار باید دو برابر شود.

$$\sum_{m \neq k} z_{km} \geq y_k \quad \forall k \quad (34)$$

قضیه ۴. نامساوی‌های (۳۴) برای مدل معتبر هستند.

اثبات. اگر نقطه  $k$  یک محور باشد. با توجه به محدودیت‌های ۲-۱۲، حتماً باید حداقل به یک محور دیگری مرتبط باشد. در نامساوی‌های ۳۴، اگر نقطه  $k$  محور باشد؛ آنگاه  $\sum_{m \neq k} z_{km} \geq 1$  برقرار می‌شود که موجب پیاده‌سازی شرایط بیان شده می‌شود.

$$\sum_{m \neq k} a_{ij}^{km} \leq y_k \quad \forall i, j, k, (i \neq j) \quad (35)$$

$$\sum_{k \neq m} a_{ij}^{km} \leq y_m \quad \forall i, j, m, (i \neq j) \quad (36)$$

قضیه ۵. نامساوی‌های (۳۵) و (۳۶) برای مدل این پژوهش معتبر هستند.

اثبات. همان‌طور که در تعریف متغیر  $a_{ij}^{km}$  آمده است،  $k$  و  $m$  باید محور باشند. پس برای رفتن از مبدأیی به مقصدی از طریق یک محور، در صورتی آن محور می‌تواند از مسیر محورهای دیگر جریان را ارسال یا دریافت کند، که خودش محور باشد. این موضوع در نامساوی‌های ۳۵ و ۳۶ نشان داده شده است.

البته باید برای تمامی مبادی و مقاصد، مقادیر  $b_{ij} = 0$  شود. در ادامه برای بهبود در زمان حل مسئله و افزایش حد پایین به دست آمده از آزادسازی خطی مسئله، گروهی نامساوی معتبر ارائه شده است.

#### ۴- نامساوی‌های معتبر

برای محدود کردن فضای جواب مدل آزاد شده خطی، شش نامساوی ارائه شده است که در ادامه ارائه می‌شوند.

$$z_{km} \leq y_k \quad \forall k, m, (k \neq m) \quad (29)$$

$$z_{km} \leq y_m \quad \forall k, m, (k \neq m) \quad (30)$$

قضیه ۱. نامساوی‌های ۲۹ و ۳۰ برای مدل معتبر است.

اثبات. در صورتی ارتباط بین دو محور  $k$  و  $m$  می‌تواند برقرار باشد که هر دو مکان  $k$  و  $m$  هم‌زمان محور باشند. لازم به ذکر است که این نامساوی‌ها به عنوان محدودیت در مدل مطرح نخواهند شد، زیرا ترکیب محدودیت‌های ۵-۹ و ۱۳ بیانگر این موضوع هستند.

$$\sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} e_{ij}^k \leq (N-2)(1-y_i) - \sum_{j \neq i} b_{ij} \quad \forall i \quad (31)$$

$$\sum_{i \neq j} \sum_{k \neq i} f_{ij}^k \leq (N-2)(1-y_j) - \sum_{i \neq j} b_{ij} \quad \forall j \quad (32)$$

قضیه ۲. نامساوی‌های ۳۱ و ۳۲ برای مدل ارائه شده معتبر هستند. اثبات. برای هر نقطه  $i$ ، اگر محور نباشد و به هیچ غیر محور دیگری هم مستقیماً متصل نباشد، حداکثر مقداری که  $\sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} e_{ij}^k$  می‌تواند بگیرد برابر  $N-2$  است؛ زیرا  $j \neq i$  و  $k \neq j$  است و همچنین هر نقطه می‌تواند به تمامی محورها هم متصل باشد. حال، اگر این نقطه ارتباط مستقیمی هم با نقاط غیر محور دیگری هم داشته باشد، باید آن‌ها را از این مقدار کم کرد.

## ۵- محاسبات رایانه‌ای

در این قسمت ابتدا برای تسهیل در محاسبات، چند پیش پردازش معرفی شده است. سپس، مدل و عملکرد پیش پردازش و نامساوی‌های معتبر برای داده‌هایی که در ادامه مطرح خواهد شد، مورد تحلیل قرار گرفته است. عبارات ۳۷-۳۹ می‌توانند قبل از حل مسئله پردازش شوند تا بهبودی در زمان حل مسئله ایجاد کند.

$$g_{ij} = 0 \quad \forall i \quad (37)$$

$$e_{ik}^k = 0 \quad \forall i, k \quad (38)$$

$$f_{ik}^k = 0 \quad \forall i, k \quad (39)$$

۲۰۰۰۰۰۰ و ۵۰۰۰ در نظر گرفته شده است. همچنین  $J_{ij} = 300 \cdot C_{ij}$  و  $I_{km} = 500 \cdot C_{km}$  برای داده‌های CAB و  $J_{ij} = 100 \cdot C_{ij}$  و  $I_{km} = 200 \cdot C_{km}$  برای داده‌های AP قرار داده شده است.

مسئله‌های استفاده شده، به صورت  $(\alpha \times 10)$  تعداد نقاط نام داده) نشان داده می‌شوند. مثلاً  $AP.10.7$  یعنی اینکه داده مورد استفاده از نوع AP است که دارای ۱۰ نقطه است و  $\alpha$  برابر ۰/۷ در نظر گرفته شده است.

## ۲-۵- بررسی عملکرد پیش‌پردازش‌ها و نامساوی‌های

### معتبر

- در این قسمت، برای بررسی بهتر عملکرد نامساوی‌های معتبر و پیش‌پردازش‌های پیشنهادی، مسئله‌ها به ۸ روش حل شده‌اند که به ترتیب در زیر تعریف شدند.
- ۱) بدون استفاده از هیچ‌گونه پیش‌پردازش و نامساوی معتبری.
  - ۲) استفاده از پیش‌پردازش‌ها.
  - ۳) استفاده از نامساوی‌های معتبر (۲۹) و (۳۰).
  - ۴) استفاده از نامساوی‌های معتبر (۳۱) و (۳۲).
  - ۵) استفاده از نامساوی‌های معتبر (۳۳).
  - ۶) استفاده از نامساوی‌های معتبر (۳۴).
  - ۷) استفاده از نامساوی‌های معتبر (۳۵) و (۳۶).
  - ۸) استفاده از تمامی پیش‌پردازش‌ها و نامساوی‌های معتبر.

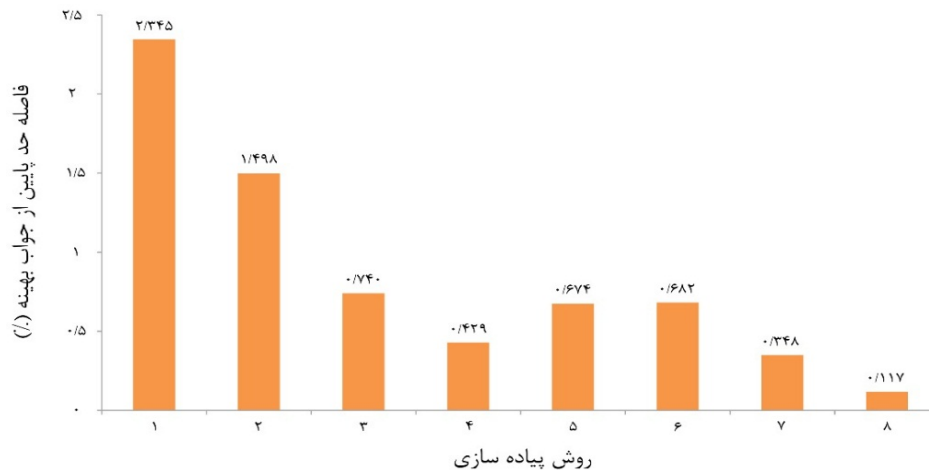
نتایج محاسباتی در جدول ۱ تا ۳ آورده شده است. در این جدول که به ترتیب برای عملکرد درصد فاصله حد پایین از جواب بهینه  $(100(Obj - LB) / LB)$  که مقدار بهینه و  $LB$  مقدار حد پایین بدست آمده است، زمان حل مسئله و تعداد گره‌های استفاده شده در روش حل نرم‌افزار CPLEX 12 هستند، نتایج هر ۸ روش به ترتیب در ستون‌ها آمده است. همچنین برای نمایش بهتر عملکرد هشت روش پیاده‌سازی شده، نمودارهای شکل ۳ تا ۵ ارائه شده‌اند.

## ۵-۱- مسئله‌های آزمایشی

در این قسمت از داده‌های پست استرالیا<sup>۲۲</sup> (AP)، و هواپیمایی آمریکا، که معروف به CAB<sup>۲۳</sup> است، استفاده شده است. داده‌های CAB توسط اوکلی (O'Kelly, 1986) در ادبیات مکان‌یابی محور مطرح شده است و دارای ۲۵ نقطه است. زیرمجموعه‌های ۵، ۱۰، ۱۵ و ۲۰ تایی ابتدایی این داده هم در ادبیات تعریف شده است و در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است.

ارنست و کریشنامورتی (Ernst and Krishnamoorthy, 1996) هم داده‌های پست استرالیا را مطرح کردند. جریان بین نقاط در این داده که حداکثر ۲۰۰ عدد می‌باشد، نامتقارن می‌باشد. از این ۲۰۰ نقطه، می‌توان مسئله‌های متفاوتی را استخراج کرد که نحوه آن را ارنست و کریشنامورتی (Ernst and Krishnamoorthy, 1996) توضیح داده‌اند.

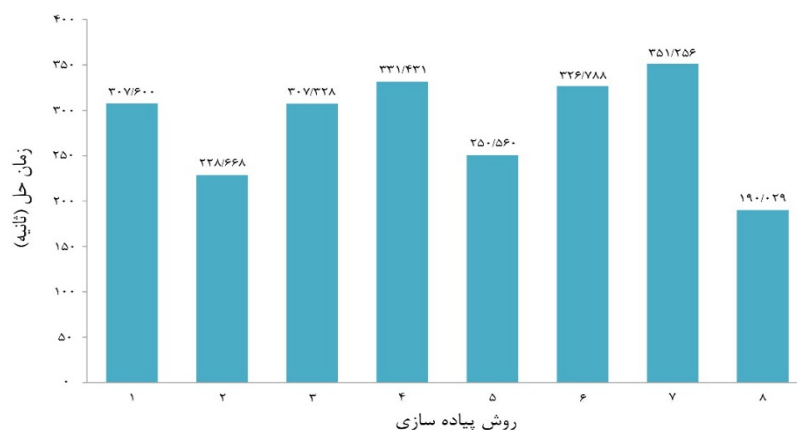
ما از داده‌هایی با ۱۰، ۱۵ و ۲۰ نقطه برای داده‌های پست استرالیا استفاده کردیم. به دلیل این که زمان حل مسئله‌های بزرگ‌تر از حد زمانی که برای حل فرض کرده‌ایم (یعنی ۴۸۰۰ ثانیه) بیشتر شده، داده‌های بزرگ‌تر مورد تحلیل قرار نگرفته است. مقادیر  $\alpha$  برابر ۰/۵، ۰/۷ و ۰/۹ انتخاب شده است. مقادیر هزینه احداث محورها برای داده‌های CAB و AP به ترتیب



شکل ۳. میانگین فاصله حد پایین از جواب بهینه برای نامساوی‌های معتبر و پیش پردازش‌ها برای داده‌های AP و CAB

جدول ۱. نتایج مربوط به فاصله حد پایین از جواب بهینه (%) برای داده‌های AP و CAB

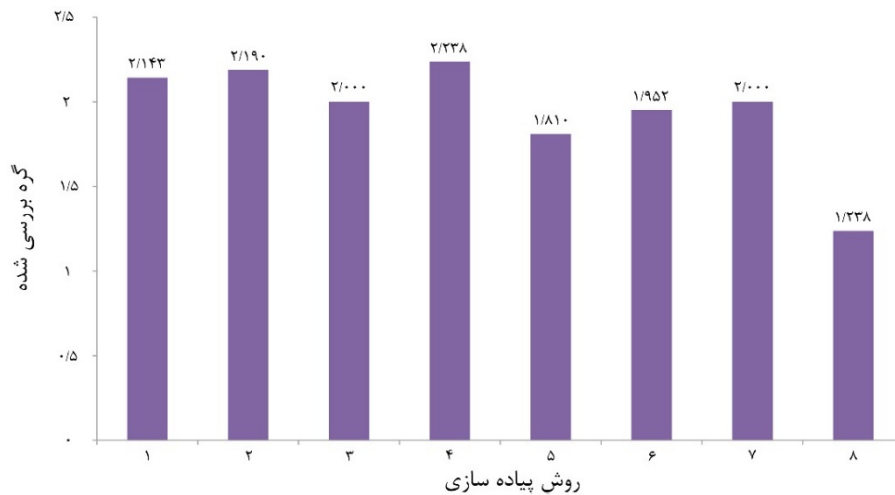
نام مسئله	Obj	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)
CAB.۵.۵	۱۸۱۸۱۳۶۱۳/۹۴۰	۸/۲۸۰	۸/۲۸۰	۸/۲۸۰	۳/۱۷۷	۴/۲۱۸	۴/۲۱۸	۱/۰۰۸	۰/۱۴۲
CAB.۵.۷	۱۹۷۵۳۶۱۵۱/۵۱۶	۳/۳۴۱	۳/۳۴۱	۱/۳۰۶	۰/۳۵۴	۲/۵۴۳	۲/۵۵۵	۰/۹۱۰	۰/۰۰۰
CAB.۵.۹	۲۰۸۸۴۶۹۲۱/۶۶۴	۱/۸۳۵	۱/۸۳۵	۰/۵۰۱	۰/۴۰۹	۰/۸۰۳	۰/۸۰۳	۰/۵۰۱	۰/۴۰۷
CAB.۱۰.۵	۵۵۲۱۷۸۶۶۴/۵۰۲	۲/۷۸۶	۲/۷۸۶	۰/۱۳۵	۰/۰۰۰	۰/۵۱۸	۰/۵۱۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
CAB.۱۰.۷	۶۵۴۷۵۸۶۸۰/۷۱۷	۴/۸۹۳	۴/۸۹۳	۰/۰۸۹	۰/۰۰۰	۰/۹۰۸	۰/۹۰۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
CAB.۱۰.۹	۷۰۴۶۰۶۸۰۴/۸۸۴	۰/۶۲۷	۰/۶۲۷	۰/۰۳۹	۰/۰۰۰	۰/۰۶۱	۰/۰۶۱	۰/۰۳۹	۰/۰۰۰
AP.۱۰.۵	۸۳۰۷۰/۵۳۱	۲/۱۴۷	۱/۴۶۳	۱/۰۱۹	۰/۹۶۹	۰/۸۴۴	۱/۰۱۹	۰/۹۴۸	۰/۱۹۲
AP.۱۰.۷	۸۷۵۸۳/۴۲۵	۳/۸۶۰	۲/۸۹۶	۱/۴۰۶	۱/۴۰۶	۱/۳۲۷	۱/۴۰۶	۱/۴۰۶	۰/۵۳۴
AP.۱۰.۹	۹۰۶۸۳/۹۸۵	۲/۳۶۵	۱/۶۲۹	۱/۲۲۲	۱/۲۲۲	۱/۲۱۳	۱/۱۱۷	۱/۲۲۲	۰/۲۵۳
CAB.۱۵.۵	۱۵۳۴۱۱۷۲۷۰/۵۸۰	۰/۱۵۲	۰/۱۵۲	۰/۰۵۲	۰/۰۰۰	۰/۱۵۲	۰/۱۵۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
CAB.۱۵.۷	۱۹۵۳۶۱۸۳۸۰/۴۶۷	۰/۰۵۸	۰/۰۵۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۵	۰/۰۵۸	۰/۰۵۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
CAB.۱۵.۹	۲۳۰۹۱۴۱۲۶۳/۷۹۰	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷
CAB.۲۰.۵	۳۱۰۵۵۳۱۷۱۰/۵۷۱	۰/۰۲۸	۰/۰۲۸	۰/۰۲۸	۰/۰۲۸	۰/۰۲۸	۰/۰۲۸	۰/۰۲۳	۰/۰۲۳
CAB.۲۰.۷	۴۰۹۴۶۱۱۷۰۸/۲۱۸	۰/۱۰۲	۰/۱۰۲	۰/۱۰۲	۰/۰۹۸	۰/۱۰۲	۰/۱۰۲	۰/۰۹۶	۰/۰۹۶
CAB.۲۰.۹	۵۰۰۹۲۶۸۴۶۲/۸۵۸	۰/۰۳۰	۰/۰۳۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۴	۰/۰۳۰	۰/۰۳۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
AP.۲۰.۵	۱۰۲۳۱۰/۰۰۸	۲/۳۰۰	۰/۱۸۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
AP.۲۰.۷	۱۰۸۱۹۸/۲۵۰	۴/۴۷۲	۱/۹۵۳	۰/۲۳۵	۰/۲۱۱	۰/۲۳۵	۰/۲۲۷	۰/۰۴۶	۰/۰۴۶
AP.۲۰.۹	۱۱۳۴۲۰/۳۳۲	۱/۸۸۹	۱/۱۱۹	۱/۰۴۵	۱/۰۴۵	۱/۰۴۵	۱/۰۴۵	۱/۰۴۵	۰/۷۰۴
CAB.۲۵.۵	۴۶۳۵۱۹۸۱۳۴/۴۰۹	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
CAB.۲۵.۷	۶۲۳۳۴۷۷۳۰۳/۸۴۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
CAB.۲۵.۹	۷۷۸۰۹۸۰۶۶۲/۲۲۴	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۱۳



شکل ۴. میانگین زمان حل مسئله‌های نمونه CAB و AP، برای نامساوی‌های معتبر و پیش پردازش‌ها

جدول ۲. نتایج مربوط به زمان حل (ثانیه) برای داده‌های CAB و AP

نام مسئله	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)
CAB.۵.۵	۰/۱۱۶	۰/۲۹۰	۰/۱۰۰	۰/۱۰۴	۰/۱۴۳	۰/۱۳۰	۰/۱۹۲	۰/۰۷۵
CAB.۵.۷	۰/۱۷۹	۰/۲۶۷	۰/۱۷۰	۰/۱۷۲	۰/۱۷۷	۰/۱۸۳	۰/۰۹۵	۰/۰۷۲
CAB.۵.۹	۰/۲۳۵	۰/۱۶۸	۰/۰۸۶	۰/۱۸۷	۰/۱۷۱	۰/۱۶۹	۰/۱۶۵	۰/۱۸۱
CAB.۱۰.۵	۱/۲۵۲	۱/۲۴۱	۱/۰۳۹	۱/۴۲۴	۱/۲۴۴	۱/۳۶۰	۱/۳۰۸	۱/۲۷۵
CAB.۱۰.۷	۱/۴۸۳	۱/۲۲۶	۱/۱۷۴	۲/۲۳۰	۱/۱۲۸	۱/۰۵۷	۰/۸۴۸	۱/۲۵۴
CAB.۱۰.۹	۱/۸۰۱	۱/۲۳۴	۱/۱۸۴	۱/۴۲۷	۱/۱۷۷	۱/۱۶۰	۱/۲۱۱	۱/۶۲۳
AP.۱۰.۵	۴/۴۰۳	۳/۰۷۳	۳/۶۲۰	۴/۲۷۹	۴/۰۶۱	۳/۱۷۴	۴/۶۷۶	۴/۷۹۲
AP.۱۰.۷	۴/۰۳۸	۵/۰۳۲	۴/۳۸۹	۸/۱۱۳	۷/۳۷۴	۳/۵۹۶	۵/۷۹۰	۴/۹۲۵
AP.۱۰.۹	۴/۳۵۹	۵/۹۳۶	۳/۳۱۰	۴/۴۱۷	۳/۵۸۷	۴/۲۴۷	۵/۶۴۷	۴/۱۱۶
CAB.۱۵.۵	۱۰/۲۰۷	۸/۴۰۳	۶/۱۵۱	۱۳/۱۷۵	۸/۵۳۷	۸/۳۸۸	۱۱/۰۵۷	۱۰/۸۷۵
CAB.۱۵.۷	۱۱/۱۳۹	۱۰/۵۵۲	۱۰/۰۴۳	۱۰/۸۷۳	۱۱/۶۶۲	۱۱/۴۳۵	۹/۲۱۳	۸/۱۴۵
CAB.۱۵.۹	۲۳/۷۵۰	۲۶/۵۶۶	۱۹/۶۹۱	۲۶/۰۰۷	۱۲/۶۰۲	۲۰/۶۸۰	۱۳/۸۰۲	۱۶/۲۹۱
CAB.۲۰.۵	۶۱/۵۹۷	۵۸/۶۰۴	۵۶/۶۴۲	۶۲/۷۰۰	۵۷/۱۹۱	۵۶/۰۴۰	۵۹/۶۵۱	۵۵/۲۴۱
CAB.۲۰.۷	۱۶۴/۲۲۳	۱۸۷/۷۸۹	۱۹۶/۶۴۶	۱۹۲/۳۶۱	۱۶۰/۳۹۸	۱۵۴/۰۳۰	۱۲۰/۹۶۶	۱۳۰/۵۲۸
CAB.۲۰.۹	۱۲۴/۲۲۸	۱۲۶/۵۳۰	۱۱۶/۲۱۰	۱۲۸/۲۱۷	۱۱۱/۸۳۷	۱۰۹/۷۸۴	۵۹/۶۰۴	۹۶/۵۲۴
AP.۲۰.۵	۱۵۸۴/۷۳۹	۱۰۳۵/۳۳۵	۱۴۶۷/۴۲۰	۱۴۶۱/۴۶۴	۱۱۶۰/۵۹۵	۱۳۹۰/۲۴۴	۱۸۳۰/۵۵۰	۱۱۰۲/۸۳۲
AP.۲۰.۷	۱۶۹۳/۵۲۱	۱۰۸۸/۴۵۱	۱۳۵۷/۳۷۷	۱۷۸۸/۸۱۲	۱۳۲۳/۷۷۶	۱۷۷۲/۴۷۴	۱۸۲۵/۴۸۰	۸۸۷/۶۶۵
AP.۲۰.۹	۲۱۸۵/۵۳۱	۱۷۲۱/۴۶۸	۲۶۷۳/۸۷۳	۲۳۶۳/۵۹۴	۱۸۴۳/۵۷۴	۲۷۵۰/۶۹۰	۲۸۵۱/۳۰۴	۱۲۲۵/۶۰۱
CAB.۲۵.۵	۴۰/۰۵۳	۳۶/۶۷۱	۴۰/۸۴۱	۴۲/۸۴۱	۴۵/۶۵۱	۳۵/۵۲۷	۳۲/۲۱۷	۳۹/۵۷۰
CAB.۲۵.۷	۶۳/۵۱۲	۵۱/۷۵۷	۶۱/۵۷۱	۶۹/۷۸۳	۵۹/۴۰۸	۵۸/۵۱۴	۶۳/۳۶۱	۶۱/۸۸۹
CAB.۲۵.۹	۴۷۹/۲۴۲	۴۳۱/۴۳۳	۴۳۲/۳۴۵	۷۷۷/۸۷۱	۴۴۷/۴۶۲	۴۷۹/۶۷۲	۴۷۹/۲۳۳	۳۳۷/۱۳۹



شکل ۵. میانگین گره‌های مورد استفاده در حل مسائل نمونه CAB و AP با روش‌های پیاده‌سازی مختلف

جدول ۳. نتایج مربوط به تعداد گره‌های مورد استفاده برای داده‌های AP و CAB

نام مسئله	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)
CAB.۵.۵	۱	۲	۰	۰	۲	۱	۰	۰
CAB.۵.۷	۵	۵	۳	۰	۰	۵	۰	۰
CAB.۵.۹	۰	۴	۰	۴	۰	۰	۲	۰
CAB.۱۰.۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
CAB.۱۰.۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
CAB.۱۰.۹	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
AP.۱۰.۵	۵	۵	۷	۷	۷	۳	۷	۳
AP.۱۰.۷	۷	۷	۵	۷	۷	۵	۷	۳
AP.۱۰.۹	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۳
CAB.۱۵.۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
CAB.۱۵.۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
CAB.۱۵.۹	۵	۳	۳	۵	۰	۳	۲	۳
CAB.۲۰.۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
CAB.۲۰.۷	۳	۵	۵	۳	۳	۳	۳	۴
CAB.۲۰.۹	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
AP.۲۰.۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
AP.۲۰.۷	۵	۳	۵	۷	۳	۷	۵	۳
AP.۲۰.۹	۹	۷	۹	۹	۹	۹	۹	۷
CAB.۲۵.۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
CAB.۲۵.۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
CAB.۲۵.۹	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

### ۳-۵- بررسی عملکردها

همان‌طور که در شکل‌های ۳ تا ۵ نشان داده شده است، بهترین روش حل مسئله، استفاده از تمامی نامساوی‌های معتبر و پیش‌پردازش‌ها است (یعنی روش پیاده‌سازی ۸). حد پایین به دست آمده در روش حل ۸ حدوداً ۲۰ برابر کمتر از عدم استفاده از نامساوی‌های معتبر و پیش‌پردازش‌های پیشنهادی است. بیش‌ترین تأثیر در بهبود حد پایین به نامساوی‌های ۳۸ و ۳۹ اختصاص دارد، اما زمان حل مسئله با توجه به این دو نامساوی معتبر، بیشتر از زمان حل عدم استفاده آن‌ها است. روش حل ۸، زمان حل را ۳۸٪ نسبتاً به حل مدل خالص، بهبود بخشیده است. در واقع، ۱/۶۸ برابر مسائل نمونه را سریع‌تر حل کرده است. همچنین به طور میانگین تعداد گره‌های کمتری نیز در حل CPLEX مسئله استفاده کرده است.

همان‌طور که در جدول ۴ آمده، تعداد محورها و ارتباطات در جواب بهینه ارایه شده است. این جدول نشان می‌دهد که هر چه  $\alpha$  بیشتر می‌شود، تمایل به احداث محور، کمتر می‌شود. در این حالت، با احتمال ۸۶٪ می‌توان گفت که تعداد ارتباطات غیر محوری کم نخواهد شد. پس، مدیران بر اساس مقادیر  $\alpha$  می‌توانند، مسئله را از لحاظ تعداد محورها مورد تحلیل قرار دهند تا تصمیم بهتری داشته باشند. با توجه به جدول ۲، زمان حل برای داده‌هایی با ۲۰ نقطه برای دو نمونه داده استفاده شده، کاملاً متفاوت است، یکی از دلایل این تفاوت در تعداد محورهای جواب بهینه است. هنگامی که تعداد محورهای جواب خیلی زیاد (نزدیک به همه نقاط) باشد. مسئله در زمان حل کم‌تری به جواب می‌رسد.

جدول ۴: نتایج مربوط به ساختار شبکه‌ای جواب‌های بهینه برای داده‌های CAB و AP

نام مسئله	محور	ارتباط محوری	ارتباط بین محور و غیر محور	ارتباط غیر محوری	نام مسئله	محور	ارتباط محوری	ارتباط بین محور و غیر محور	ارتباط غیر محوری
CAB.۵.۵	۲	۱	۴	۳	CAB.۱۵.۹	۶	۹	۲۴	۷
CAB.۵.۷	۲	۱	۵	۳	CAB.۲۰.۵	۱۸	۱۸	۳۶	۰
CAB.۵.۹	۲	۱	۴	۱	CAB.۲۰.۷	۱۶	۳۸	۱۹	۱
CAB.۱۰.۵	۶	۸	۸	۳	CAB.۲۰.۹	۱۱	۲۲	۳۱	۴
CAB.۱۰.۷	۵	۵	۱۱	۴	AP.۲۰.۵	۳	۲	۱۷	۰
CAB.۱۰.۹	۲	۱	۱۱	۹	AP.۲۰.۷	۳	۲	۱۹	۰
AP.۱۰.۵	۳	۲	۹	۱	AP.۲۰.۹	۳	۲	۲۰	۰
AP.۱۰.۷	۲	۱	۹	۵	CAB.۲۵.۵	۲۴	۵۹	۲	۰
AP.۱۰.۹	۲	۱	۱۰	۴	CAB.۲۵.۷	۲۴	۶۳	۲	۰
CAB.۱۵.۵	۱۳	۲۴	۱۳	۰	CAB.۲۵.۹	۱۵	۳۸	۳۵	۳
CAB.۱۵.۷	۱۱	۲۳	۱۵	۱					

## ۶- مثال موردی

با ضرب کردن هزینه تهیه شده در معکوس این ضریب‌ها، بردار هزینه ثابت محورها ایجاد شده است. هزینه ثابت بین محورها صد برابر ماتریس هزینه و هزینه ثابت بین محور و غیر محور و بین غیر محورها ده برابر ماتریس هزینه انتقال جریان است. جهت بررسی عملکرد مدل برای این داده‌ها، ضرایب تخفیف ۰/۳، ۰/۵، ۰/۷، ۰/۹ و ۱ استفاده شده است و نتایج مدل و نامساوی‌های معتبر در جداول (۴)، (۵) و (۶) آورده شده است. به دلیل این که تعداد گره استفاده شده در حل برای مثال موردی صفر شده، جدول مربوط به این بخش ارایه نشده است.

همچنین جواب نمونه واقعی هنگامی که ضریب تخفیف برابر ۰/۳ در نظر گرفته شده است، در شکل ۶ نشان داده شده است.

$$w_{ij} = 0.001 \times P_i \frac{P_j}{\sum_{k=1}^{28} P_k - P_i} \quad \forall i, j \quad (40)$$

در این پژوهش، داده‌هایی برای بیست و هشت شهر پر جمعیت کشور تهیه شده است. البته قابل ذکر است که شهرهای پرجمعیت اطراف تهران در نظر گرفته نشده است. ماتریس هزینه انتقال جریان بین این شهرها، یک صدم فاصله زمینی آن‌ها به کیلومتر در نظر گرفته شده است.

ماتریس جریان بین شهرها ماتریس حاصل از رابطه ۴۰ (Çetiner, 2003) که نوعی روش جاذبه سفر در حمل و نقل است، در نظر گرفته شده است. از آنجا که هزینه ثابت ایجاد محورها به عنوان یک عامل وزنی در تابع هدف هستند، چند عامل برای تهیه این هزینه‌ها استفاده شده است.

هزینه یک متر مربع واحد تجاری در هر شهر از مرکز آمار ایران تهیه و با توجه به سطح صنعتی بودن شهرها، حجم ورودی و خروجی بارها و وسعت شهرها ضریبی برای این هزینه‌ها ایجاد شده است.

جدول ۵. نتایج مربوط به ساختار شبکه‌ای جواب‌های بهینه برای مثال موردی

ضریب تخفیف	محور	ارتباط محوری	ارتباط بین محور و غیر محور	ارتباط غیر محوری
۰/۳	۸	۱۰	۴۲	۱۶
۰/۵	۵	۵	۴۴	۵۳
۰/۷	۴	۴	۴۸	۶۰
۰/۹	۲	۱	۳۸	۹۲
۱	۲	۱	۴۰	۹۳

جدول ۶. نتایج مربوط به زمان حل (ثانیه) برای مثال نمونه

ضریب تخفیف	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)
۰/۳	۳۵۶۲/۵۲۴	۲۲۶۳/۵۲۵	۳۶۸۳/۵۲۰	۳۴۷۳/۱۳۴	۲۳۷۳/۶۳۶	۳۶۲۴/۵۲۲	۳۶۲۰/۱۴۲	۱۹۰۲/۵۵۷
۰/۵	۳۳۶۲/۳۶۳	۲۰۴۲/۰۴۲	۳۲۶۳/۹۳۰	۳۴۷۳/۲۴۴	۲۱۶۳/۰۴۴	۳۳۷۴/۰۲۲	۳۴۲۱/۳۴۲	۱۷۹۸/۹۴۳
۰/۷	۲۴۹۲/۴۵۲	۱۵۲۶/۵۲۵	۲۴۹۳/۰۳۶	۲۵۸۳/۰۳۵	۱۶۲۵/۴۷۰	۲۴۷۵/۸۳۲	۲۵۲۴/۹۸۴	۱۱۶۸/۸۷۳
۰/۹	۱۴۷۳/۸۴۲	۹۳۴/۶۲۱	۱۴۸۲/۷۰۳	۱۵۸۲/۲۴۰	۱۰۴۲/۴۰۳	۱۴۷۵/۶۳۲	۱۴۹۳/۶۲۵	۶۷۱/۶۵۵
۱	۹۲۵/۵۲۶	۶۲۷/۸۳۲	۹۳۵/۵۲۵	۹۲۷/۳۱۵	۷۲۵/۵۳۲	۹۳۵/۰۴۳	۱۰۲۵/۶۳۲	۴۵۴/۷۰۴
میانگین	۲۳۶۳/۳۳۸	۱۴۷۸/۹۰۹	۲۳۷۱/۷۴۳	۲۴۰۷/۷۹۴	۱۵۸۶/۰۱۷	۲۳۵۷/۰۱۶	۲۴۱۷/۱۴۵	۱۱۹۹/۳۴۶

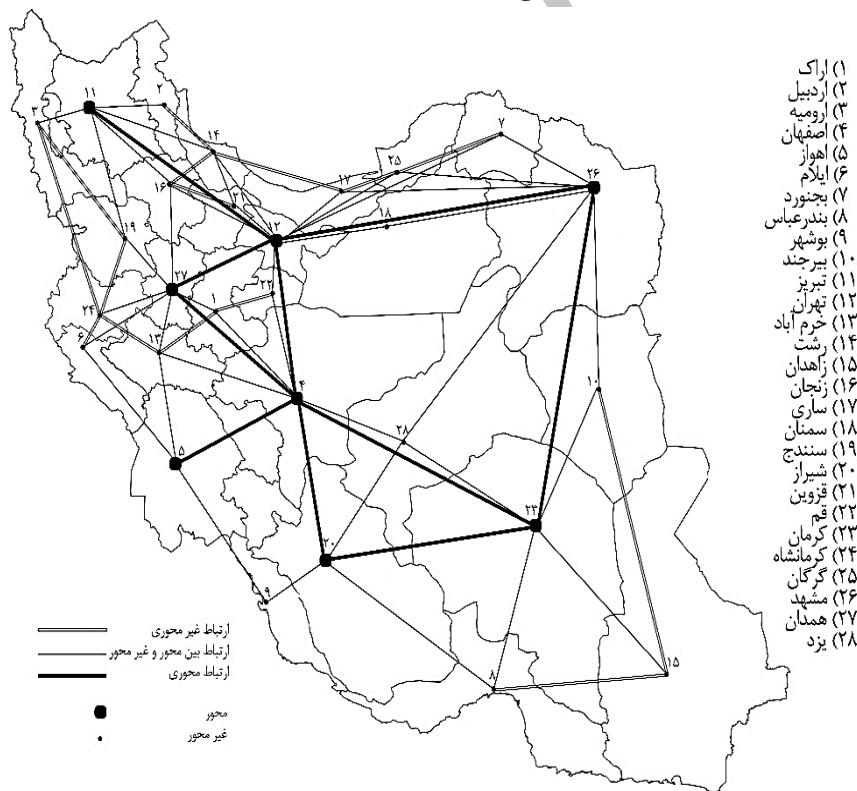
پژوهشنامه حمل و نقل، سال یازدهم، شماره دوم، تابستان ۱۳۹۳

جدول ۷. نتایج مربوط به فاصله حد پایین از جواب بهینه (%) برای مثال نمونه

ضریب تخفیف	Obj	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)
۰/۳	۱۴۶۶۹۱/۲۵۲	۴/۲۶۰	۴/۲۶۰	۴/۲۶۱	۳/۱۵۷	۳/۲۱۸	۳/۲۱۸	۱/۰۰۸	۰/۰۰۰
۰/۵	۱۷۶۴۴۴/۷۱۴	۳/۶۲۱	۳/۶۳۱	۱/۲۹۳	۰/۶۲۲	۲/۹۳۲	۱/۳۸۳	۰/۱۱۲	۰/۰۰۰
۰/۷	۱۹۵۳۳۴/۶۲۲	۲/۳۰۵	۲/۳۰۵	۱/۶۳۰	۰/۲۱۹	۰/۳۴۳	۰/۳۴۳	۰/۲۱۴	۰/۰۰۰
۰/۹	۲۰۵۳۳۴/۶۰۷	۱/۵۲۴	۱/۵۲۴	۱/۱۵۳	۰/۱۳۴	۰/۲۷۲	۰/۱۰۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱	۲۰۷۳۱۷/۴۱۱	۱/۷۶۴	۱/۷۶۴	۱/۴۲۵	۰/۰۳۴	۰/۲۱۵	۰/۰۱۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

حل شده‌اند. عملکرد نامساوی‌های معتبر برای این نمونه واقعی در جدول ۷ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از تمامی نامساوی‌های معتبر و پیش پردازش‌ها (روش پیاده‌سازی هشتم)، حد پایینی را ارائه می‌کند که با جواب بهینه برابر است. همچنین با توجه به جدول ۶، استفاده از این روش به طور میانگین زمان حل کمتری را خواهد گرفت.

همانطور که جدول ۵ نشان می‌دهد؛ روند تغییرات تعداد محورها با تغییرات ضریب تخفیف همانند نتایجی است که از داده‌های نمونه CAB و AP گرفته شده است. یعنی با افزایش میزان ضریب تخفیف تعداد محورها کم خواهد شد. همچنین در این حالت، تعداد ارتباطات غیر محوری کم نخواهد شد. جدول ۶ نشان می‌دهد که افزایش ضریب تخفیف موجب کاهش زمان حل خواهد شد. در نتیجه می‌توان مانند نتایج پیشین بیان کرد که جواب‌هایی که تعداد محور کمتری دارند، سریع‌تر



شکل ۶. جواب مربوط به ضریب تخفیف ۰/۳ به روی نقشه ایران

پژوهشنامه حمل و نقل، سال یازدهم، شماره دوم، تابستان ۱۳۹۳



مسائل دنیای واقعی در بخش ششم که مربوط به بررسی یک نمونه واقعی بوده، آورده شده است. علاوه بر این، اثرات تغییر ضریب تخفیف در تابع هدف و ساختار جواب می‌تواند مورد توجه مدیران بخش‌های حمل و نقلی قرار گیرد تا با توجه به این نتایج بتوانند تصمیمات بهتری اتخاذ نمایند. همچنین، جهت حل این مسائل، استفاده از تمامی پیش‌پردازش‌ها و نامساوی‌های معتبر ارایه شده رویه حل مدل را سریع‌تر و حدپایین مسئله آزاد شده خطی را بهبود می‌بخشد. برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود که ظرفیت محورها و همچنین ارتباطات بین محورها محدود شود.

#### ۸- پی‌نوشت‌ها

1. Hub
2. Tributary
3. Backbone
4. Nickel
5. Gelareh
6. Klineciewicz
7. Alumar
8. Kara
9. Kim
10. Tcha
11. Zhang
12. Contreras
13. Chiu
14. Wang
15. Wasner
16. Zapfel
17. Calik
18. Yoon
19. Current
20. Catanzaro
21. Aykin
22. Australian Post
23. Civil Aeronautics Board

#### ۹- مراجع

- Adler, N., & Smilowitz, K. (2007). "Hub-and-spoke network alliances and mergers: Price-location competition in the airline industry". *Transportation Research Part B*, Vol.41, pp.394-409.

شکل ۶ ساختار شبکه جواب نمونه واقعی را برای حالتی خاص نشان می‌دهد. در این شکل به عنوان مثال جهت انتقال جریان از بجنورد به بندر عباس مسیر محورهای مشهد و کرمان را طی خواهد کرد. این مسیر را متغیر  $a_{V,8}^{۲۶,۲۳}$  نشان می‌دهد، زیرا مقدار آن در جواب بهینه برابر یک شده است. جهت انتقال جریان بین این دو شهر، از دو محور استفاده شده است. همچنین، به عنوان مثالی دیگر، جهت انتقال جریان بین بجنورد و گرگان از هیچ محوری استفاده نمی‌شود و کالا به طور مستقیم ارسال خواهد شد. اگر بخواهید مثالی برای استفاده از چند محور جهت انتقال کالا در این شبکه بیان کنیم، باید به انتقال کالا بین ارومیه و بندرعباس اشاره کرد.

برای انتقال کالا بین این دو شهر باید از محورهای تبریز، تهران، اصفهان و شیراز استفاده کرد.

#### ۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک مدل انعطاف‌پذیر و جامع برای مسائل مکان‌یابی-مسیریابی محورها ارایه شده است که علاوه بر کاربرد آن در صنعت حمل و نقل، می‌تواند در شبکه‌های مخابراتی و بانکی نیز استفاده شود. برای افزایش سرعت حل مدل پیشنهادی، تعدادی نامساوی معتبر و پیش‌پردازش پیشنهاد شده است که عملکرد نسبتاً مناسبی برای مدل داشته‌اند. به نوآوری‌های این مقاله در ادامه اشاره شده است.

✓ ارایه مدلی که شبکه‌ای کاملاً انعطاف‌پذیر دارد، شبکه محوری آن ناکامل است و ارتباط مستقیم بین غیر محورها اجازه داده شده است.

✓ تابع هدف در مدل پیشنهادی بر خلاف مقالات موجود در ادبیات شامل هزینه‌های مسیریابی، مکان‌یابی محور، ایجاد ارتباطات محور، محور و غیر محور و غیر محوری است.

✓ تعدادی نامساوی معتبر برای ایجاد تنگ کردن مدل، بهتر کردن حد پایین ناشی از آزادسازی خطی و افزایش زمان حل نیز پیشنهاد شده است.

به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که مدل این مقاله، تقریب خوبی از کاربردهای دنیای واقعی مسائل مکان‌یابی-مسیریابی محور ارایه کرده است. نمونه‌ای از چگونگی استفاده از مدل در

- (Master of Science thesis, Middle East Technical University).
- Çetiner, S., Sepil, C., & Süral, H. (2010). "Hubbing and routing in postal delivery systems". *Annals of Operation Research*, Vol.181, pp.109-124.
  - Chiu, S., Lee, Y., & Ryan, J. (1995). "A Steiner ring star problem in designing survivable telecommunication networks". *INFORMS National Meeting*. New Orleans.
  - Contreras, I., Fernández, E., & Marín, A. (2009). "Tight bounds from a path based formulation for the tree of hub location problem". *Computers & Operation Research*, Vol.36, pp.3117-3127.
  - Contreras, I., Fernández, E., & Marín, A. (2010). "The Tree of Hubs Location Problem". *European Journal of Operational Research*, Vol.202, pp.390-400.
  - Dennis, N. (1994). Airline hub operations in Europe. *Journal of Transport Geography*, Vol.2, pp.219-233.
  - Ernst, A., & Krishnamoorthy, M. (1996). "Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem". *Location Science*, Vol.4, pp.139-154.
  - Gelareh, S., & Nickel, S. (2011). "Hub location problems in transportation networks". *Transportation Research Part E*, Vol.47, pp.1092-1111.
  - Ishfaq, R. (2012). "LTL logistics networks with differentiated services". *Computers & Operations Research*, Vol.39, pp.2867-2879.
  - Kim, J. G., & Tcha, D. W. (1992). "Optimal design of a two-level hierarchical network with tree-star configuration". *Computers and Industrial Engineering*, 22, 273-281.
  - Klincewicz, J. G. (1998). "Hub location in backbone/tributary network design: a review". *Location Science*, Vol.6, pp.307-335.
  - Kuby, M., & Gray, R. G. (1993). "The hub network design problem with stopovers and feeders: the case of federal express". *Transportation REsearch Part A*, Vol.27, pp.1-12.
  - Alumar, S., & Kara, B. Y. (2008). "Network hub location problems: The state of the art". *European Journal of Operational Research*, Vol.190, pp.1-21.
  - Alumar, S., Kara, B. Y., & Karasan, O. E. (2009). "The design of single allocation incomplete hub networks". *Transportation Research Part B*, Vol.43, pp. 936-951.
  - Aykin, T. (1994). "Lagrangian relaxation based approaches to capacitated hub-and-spoke network design problem". *European Journal of Operational Research*, Vol.79, pp. 501-523.
  - Aykin, T. (1995). "The hub location and routing problem". *European Journal of Operational Research*, Vol.83, pp. 200-219.
  - Bollapragada, R., Camm, J., Rao, U. S., & Wu, J. (2005). "A two-phase greedy algorithm to locate and allocate hubs for fixed-wireless broadband access". *Operations Research Letters*, Vol.33, pp.134-142.
  - Calik, H., Alumar, S., Kara, B. and Karasan, O. (2009). "A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over incomplete hub", *Computers and Operations Research*, Vol.36, pp.3088- 3096.
  - Campbell, J. F. (1994). "Integer programming formulations of discrete hub location problems". *European Journal of Operational Research*, Vol.72, pp.385-407.
  - Campbell, J. F., & O'Kelly, M. E. (2012). "Twenty-five years of hub location research". *Transportation Science*, Vol.46, pp.153-169.
  - Carello, G., Della Croce, F., Ghirardi, M., & Tadei, R. (2004). "Solving the hub location problem in telecommunication network design: a local search approach". *Networks*, Vol.44, pp.94-105.
  - Catanzaro, D., Gourdin, E., Labbe, M., & Ozsoy, F. A. (2011). "A branch-and-cut algorithm for the partitioning-hub location-routing problem". *Computers & Operations Research*, Vol.38, pp.539-549.
  - Çetiner, S. (2003). "An iterative hub location and routing problem for postal delivery systems",

- Yaman, H., Kara, B. Y., & Tansel, B. C. (2007). "The latest arrival hub location problem for cargo delivery systems with stopovers". *Transportation Research Part B*, Vol.41, pp.906-919.
- Yoon, M. G., & Current, J. (2008). "The hub location and network design problem with fixed and variable arc costs: Formulation and dual-based solution heuristic". *The Journal of the Operational Research Society*, Vol.59, pp.80-89.
- Yoon, M. G., Beak, Y. H., & Tcha, D. W. (2000). "Optimal design model for a distributed hierarchical network with fixed-charged facilities". *International Journal of Management Science*, Vol.6, pp.29-45.
- Zanjirani Farahani, R., Hekmatfar, M., Boloori, A., & Nikbakhsh, E. (2013). "Hub location problems: a review of models, classification, solution techniques, and applications". *Computers & Industrial Engineering*, Vol.64, pp.1096-1109.
- Zhang, L. (2009). "The tree-hub center allocation problem". *Proceedings of the 47<sup>th</sup> Annual Southeast Regional Conference*, (p. Article No. 44). Clemson.
- Lee, Y., Lim, B. H., & Park, J. S. (1996). "A hub location problem in designing digital data service networks: Lagrangian relaxation approach". *Location Science*, Vol.4, pp.185-194.
- Liu, J., Li, C. L., & Chan, C. Y. (2003). "Mixed truck delivery systems with both hub-and-spoke and direct shipment". *Transportation Research Part E*, Vol.39, pp.325-339.
- Nickel, S., Schobel, A., & Sonneborn, T. (2001). "Hub location problems in urban traffic networks". In M. Pursula, & J. Niittymaki, *Mathematics Methods and Optimization in Transportation Systems*. Springer.
- O'Kelly, M. E., & Miller, H. J. (1994). "The hub network design problem: A review and synthesis". *Journal of Transport Geography*, Vol.2, pp.31-40.
- Puerto, J., Ramos, A. B., & Rodriguez-Chia, A. M. (2010). "Single-allocation ordered median hub location problems". *Computers & Operations Research*, Vol.38, pp.559-570.
- Wang, Z., Lin, C., & Chan, C. K. (2006). "Demonstration of a single-fiber self-healing CWDM metro access ring network with unidirectional OADM". *Photonics Technology Letters, IEEE*, Vol.18, pp.163-165.