مسیریابی وسایل نقلیه ناوگان ناهمگن ثابت به روش تولید ستون

اعظم دولت‌نژاد ثمرین، کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
سید علی میرحسنی، دانشیار، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
مجید یوسفی خوشبخت*، استادیار، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران
پست الکترونیکی نویسنده مسئول: yousefikhoshbakht@basu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۳/۰۵/۲۰- پذیرش: ۱۳۹۳/۱۰/۱۵

چکیده

مسئله مسیریابی وسیله نقلیه با ناوگان ناهمگن ثابت (HFFVRP) یکی از مهم‌ترین گسترش‌های مسئله مسیریابی وسایل نقلیه (VRP) است. هدف مسئله HFFVRP تحویل بهینه کالا به مشتریان از گره‌ای به نام انبار است به طوری که همه تقاضای مشتریان توسط ناوگانی ثابت و ناهمگن برآورده شود. حل این مسئله که دارای کاربردهای فراوان در بخش صنعت و خدمات است به راحتی امکان‌پذیر نمی‌باشد بنابراین، در این مقاله یک روش تولید ستون (CG) برای حل HFFVRP ارایه می‌شود. الگوریتم پیشنهادی بر روی شانزده مثال استاندارد شامل ۱۰ تا ۵۰ مشتری مورد آزمایش واقع می‌شود. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که روش ابتکاری مبتنی بر CG در مقایسه با روش دقیق می‌تواند جواب‌های مناسبی را در یک زمان کمتر به دست آورد.

واژه‌های کلیدی: ناوگان ناهمگن ثابت، مسیریابی وسایل نقلیه، روش ایجاد ستون

۱- مقدمه

مسئله مسیریابی وسیله نقلیه (VRP) یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین مسائل حمل و نقل است که سال‌ها است به آن پرداخته می‌شود و تاکنون توجه بسیاری از دانشمندان را به خود جلب کرده است (ظفری و همکاران، ۱۳۸۹). در این مسئله ناوگانی از وسایل نقلیه در نقطه‌ای به نام انبار وجود دارند که باید مقداری کالا را از این نقطه بارگیری کرده و به دیگر مشتریان، که در اطراف انبار وجود دارند، برسانند به شرط آنکه هر مشتری فقط یک‌بار و فقط توسط یکی از این وسایل نقلیه مورد ملاقات قرار گیرد و نیاز خود را برطرف کند. باید توجه کرد که در این مسئله علاوه بر اینکه فرض می‌شود که وسایل نقلیه همگی مشابه بوده و دارای ظرفیت کافی هستند، فقط یک نوع کالا وجود دارد که ناوگان وسایل نقلیه باید آن‌را به مشتریان تحویل دهد.

از طرف دیگر چون هزینه حمل و نقل یکی از مؤلفه‌های موثر در قیمت تمام شده کالا و همچنین سطح رضایت مشتری است از این‌رو همواره کاهش هزینه‌های مربوط به حمل و نقل کالاها مورد علاقه تولیدکنندگان بوده است تا بدین طریق با کاهش هزینه حمل و نقل، رقابت‌پذیری کالا را در مقایسه با دیگر کالاهای مشابه ارتقا داده و بتوانند مقدار سوددهی خود را افزایش دهند (Yousefikhoshbakht, Didehvar, and Rahmati, 2013). به همین علت این مسئله از دهه ۱۹۶۰ مورد بررسی قرار گرفته شده است و حالت‌های بسیاری از آن بر اساس کاربردهای متفاوتی که در دنیای واقعی دارند، معرفی شده‌اند به طوری که اکنون نسخه‌های زیادی مانند مسئله مسیریابی وسیله نقلیه باز (یوسفی خوشبخت و همکاران، ۱۳۹۱)، مسئله مسیریابی وسیله

نقلیه همراه با دریافت و تحویل هم‌زمان کالا (یوسفی خوشبخت و رحمتی، ۱۳۹۰)، مسئله مسیریابی وسیله نقلیه همراه با پنجره‌های زمانی (مهدوی، توکلی مقدم و قاضی زاده، ۱۳۸۹)، مسئله مسیریابی وسیله نقلیه با ناوگان ناهمگن (یوسفی خوشبخت، دیده‌ور، رحمتی و سعادتی اسکندری، ۱۳۹۱)، مسئله مسیریابی وسیله نقلیه چند انباره احتمالی (حسن‌پور، مصدق‌خواه، و توکلی‌مقدم، ۱۳۸۸) و غیره ارایه شده است. در صنعت حمل‌ونقل به ندرت از ناوگان همگن که در آن وسایل نقلیه با هم مشابهت کامل دارند، برای ارایه خدمات مختلف به مشتریان استفاده می‌شود زیرا یک ناوگان معمولاً برای یک دوره زمانی طولانی خریداری می‌شود و صاحبان شرکت‌های حمل و نقل به طور معمول تمایل دارند که دارای ناوگانی از وسایل نقلیه متفاوت برای فعالیت در زمینه‌های مختلف باشند. به علاوه در بسیاری از کاربردها نیاز است که برای صرفه‌جویی در هزینه حمل و نقل و همچنین محدودیت‌های موجود در جاده‌ها از یک ناوگان گوناگون برای حمل و نقل استفاده شود به طوری که هر کدام از آن‌ها دارای هزینه‌های متفاوتی مانند هزینه ثابت (نگهداری و تعمیر) و هزینه متغیر (بر اساس واحد مسافت پیموده شده) باشند. این مسئله مسیریابی وسیله نقلیه با ناوگان ناهمگن ثابت (*HFFVRP*) است که بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته است. در این مسئله باید ناوگانی از وسایل نقلیه مختلف در انبار کالا یک شرکت به تعدادی از مشتریان با تقاضای مشخص سرویس‌دهی کنند به شرط آن‌که هر وسیله نقلیه در هیچ جایی از مسیر بیش از ظرفیت خود بارگیری نکند و همچنین همه مشتریان تنها یک‌بار مورد ملاقات یکی از وسایل نقلیه قرار گیرند. از طرف دیگر فرض بر این است که از هر نوع از وسایل نقلیه، تعداد ثابت و مشخصی وجود دارد. به عبارت دیگر در این مسئله با مشخص بودن تعداد هر دسته از وسایل نقلیه، چگونگی استفاده بهینه از این ناوگان، برای سرویس‌دهی به مشتریان مورد نظر است به طوری که کم‌ترین هزینه حمل و نقل به دست آید.

مسئله *HFFVRP* یک مسئلهNP–سخت محسوب می‌شود چرا که از مسئله VRP سخت‌تر است و در حالت خاص به یک VRP تعدیل می‌شود. کافی است که در این مسئله، تمام وسایل نقلیه دارای ظرفیت یکسانی باشند و همچنین هزینه ثابت برای هر کدام از وسایل نقلیه صفر و هزینه متغیر برای هر کدام از وسایل نقلیه ۱ در نظر گرفته شود آن‌گاه مسئله *HFFVRP* به *VRP* تبدیل می‌شود. حال چون مسئله *VRP* یک مسئله NP–سخت است (Laporte, Louveaux, and Mercure, 1992)، بنابراین مسئله *HFFVRP* نیز یک مسئله NP–سخت محسوب می‌شود. بنابراین الگوریتم‌های دقیق دارای کارایی لازم برای حل این مسئله در ابعاد بالا نیستند و بیشتر از الگوریتم‌های ابتکاری برای این مسئله استفاده می‌شود. این الگوریتم‌ها برخلاف روش‌های دقیق، در یک زمان اندک به جواب می‌رسند هر چند که ممکن است این جواب دارای دقت کمتری نسبت به الگوریتم‌های دقیق باشد. این‌گونه از روش‌ها خود به دو دسته الگوریتم‌های ابتکاری، فراابتکاری دسته‌بندی می‌شوند. نکته مهم این است که در روش‌های ابتکاری که از پیچیدگی‌های زیادی برخوردار نیستند تکرار الگوریتم در بدست آوردن جواب‌های متفاوت، نقشی ندارد. از طرف دیگر در روش‌های فراابتکاری که میزان اجرای الگوریتم، برخلاف روش‌های ابتکاری، به تصمیم کاربر وابسته است، جواب‌ها تقریباً در یک زمان بیشتر از الگوریتم‌های ابتکاری و کمتر از روش‌های دقیق به دست می‌آید. جواب این روش‌ها از جواب روش‌های ابتکاری بهتر است و این‌گونه از الگوریتم‌ها از راهکارهایی استفاده می‌کنند که تا حد ممکن در بهینه‌های محلی (همانند شکل ۱) متوقف نشوند.

شکل ۱. بهینه‌های محلی و سراسری در یک مسئله کمینه‌سازی

باید توجه داشت که ضعف اصلی الگوریتم‌های فراابتکاری این است که بسیار ناپایدار هستند و معمولاً در تکرارهای مختلف الگوریتم جواب‌های متفاوتی را به دست می‌آورند. به علاوه پارامترهای زیادی در این الگوریتم‌ها وجود دارد که باید قبل از اجرای الگوریتم مقدار دهی شوند. یافتن روشی کارا برای تنظیم این پارامترها کار بسیار مشکلی هست. یک روش دیگر که برای مسائل برنامه‌ریزی خطی با مقیاس بزرگ بکار گرفته می‌شود، روش ایجاد ستون (CG) است. این روش، یک روش ابتکاری برای حل مسائل برنامه‌ریزی به وسیله اضافه کردن تدریجی متغیرها به مدل است. یکی از مشخصات اصلی این روش تعیین جواب بهینه مسئله بدون داشتن همه متغیرهایش است و برای مسائلی که دارای تعداد زیادی متغیر مثلاً n (ستون) و تعداد نسبتاً کمتری محدودیت مثلاً m می‌باشد $(n >> m)$ بسیار موثر است. به علت سختی مسئله *HFFVRP* که حتی ایجاد جواب شدنی را برای این مسئله با الگوریتم ابتکاری با مشکل روبرو می‌کند در این مقاله یک الگوریتم اصلاحی تولید ستون برای این مسئله ارایه می‌شود و نتایج آن با روش دقیق مورد مقایسه قرار می‌گیرد که در بخش‌های بعدی با جزییات کافی شرح داده می‌شود. باید توجه داشت که برای حل مسائل مسیریابی با این روش، قیمت‌های سایه به دست آمده از جواب مسئله خطی برای وزن‌دار کردن کمان‌های شبکه استفاده می‌شوند که در انتخاب مسیرهای پیشنهاد شده (ستون‌ها) با حل مسائل فرعی موثر می‌باشند. در تکنیک ایجاد ستون، همه‌ی مسیرهای شدنی ایجاد نمی‌شوند بلکه به مرور مسیرهای شدنی (ستون‌ها) ضروری تولید و به کار گرفته می‌شوند. این یک امتیاز روش پیشنهادی است که جواب‌های باکیفیت را برای مسائل با مقیاس بزرگ در زمانی منطقی به دست می‌آورد.

در بخش ۲ ادبیات موضوع مورد بررسی واقع و سپس در بخش ۳ به توضیح روش CG پرداخته و یک الگوریتم پیشنهادی ارایه می‌گردد. نتایج محاسباتی الگوریتم پیشنهادی در بخش ٤ مورد توجه قرار می‌گیرد. برای این منظور مثال‌هایی استاندارد در نظر گرفته می‌شود و الگوریتم پیشنهادی با جواب‌های روش دقیق مورد مقایسه قرار می‌گیرد. سرانجام نتیجه‌گیری و جهت‌گیری‌های آینده در بخش ۵ ارایه می‌شود.

۲- ادبیات موضوع

به علت ساختار بسیار مشکل مسئله *HFFVRP* الگوریتم‌های دقیق به ندرت برای این مسئله مورد استفاده واقع شده است اما الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری از اقبال بیشتری برخوردار بوده است. برای نمونه از الگوریتم‌های باکیفیت می‌توان به روش تولید ستون ترکیبی با جستجوی ممنوع (TS) ارایه شده توسط تایلارد اشاره کرد. این روش یکی از اولین روش‌ها برای حل مسئله *HFFVRP* بود (Taillard, 1996) که از روش حافظه تطابقی استفاده می‌کرد. در مرحله اول این الگوریتم یک مجموعه از جواب‌های با کیفیت برای هر کدام از وسایل نقلیه با تعداد بی‌نهایت تولید می‌شود. سپس روش TS مورد استفاده قرار گرفته و بعد از چندین تکرار، مسیرهای باکیفیت خوب در یک ماتریس تطابقی نگهداری می‌شود. باید توجه داشت که در این ماتریس، هر مسیر توسط یک ستون نشان داده شده است. پرینز دو الگوریتم ممتیک (*MA*) را برای حل مسئله *HFFVRP* و مسئله مسیریابی با تعیین اندازه و ترکیب ناوگان (*FSMVRP*) مورد استفاده قرار داد (Prins, 2002). در الگوریتم پیشنهادی ژنتیک هیبریدی (جستجوی محلی ژنتیک)، جواب به دست آمده با به‌کارگیری روش‌های جستجوی محلی تقاطع و جهش ارتقا می‌یافت. در این مقاله مثال‌های *FSMVRP* ارایه شده در (Taillard, 1999) مورد توجه واقع شد و در سه حالت فقط هزینه ثابت کامیون‌ها، فقط هزینه متغیر کامیون‌ها و هر دو هزینه محاسبه گردید. همین نویسنده در سال ۲۰۰۲ چندین روش ابتکاری برای این مسئله ارایه کرد که در آن امکان استفاده از یک کامیون برای چند مسیر وجود داشت (Prins, 2002). در روش پیشنهادی مسیرهای کوچک به شرطی که محدودیت ظرفیت کامیون‌ها رعایت شود، با هم ترکیب می‌شوند و جواب نهایی مسئله اصلی را می‌سازند. باید توجه کرد که در این مسئله دو هدف کمینه کردن کل زمان سفر و کمینه کردن تعداد کامیون‌ها در نظر گرفته شد. در انتها یک مسئله واقعی مربوط به کارخانه مبل که دارای ۷۷۵ مرکز فروش بود در نظر گرفته و بررسی شد.

توجه کنید که اگر چه یک شرکت حمل و نقل می‌تواند در بیشتر مواقع کار خود را با استفاده از ناوگانش انجام دهد اما در بعضی از مواقع ممکن است حالتی به وجود آید که ناوگان از

عهده تحویل به موقع کالا بر نیاید و یا اینکه زمان مورد نیاز برای استفاده از وسایل نقلیه بیشتر از حد ممکن باشد. در این حالت بهتر است که الگوریتم علاوه بر استفاده از ناوگان خود در صورت نیاز از یک ناوگان استیجاری نیز استفاده کند. به طور مثال در این زمینه می‌توان به مقاله چو اشاره کرد. این مقاله یک مدل ریاضی و یک روش ابتکاری برای انتخاب مشتریانی که باید به کامیون‌های اجاره شده اختصاص یابند، را برای مسئله *HFFVRP* ارایه کرد (Chu, 2005). در این مقاله حالتی در نظر گرفته شده که یک ناوگان ناهمگن ثابت از کامیون‌ها به همراه تعدادی متغیر از کامیون‌های اجاره‌ای وجود دارند. به عبارت دیگر کامیون‌های اجاره‌ای در صورت نیاز برای بازدید تعدادی از مشتریان استفاده می‌شوند. در این مقاله پنج مثال شامل ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۲ و ۲۹ مشتری در نظر گرفته شد و مورد حل قرار گرفت. هزینه کامیون‌های اجاره شده در این مثال‌ها شش برابر هزینه سفر از مبدأ تا مشتری اختصاص یافته به کامیون است. نتایج این الگوریتم با جواب‌های روش‌های دقیق مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج نشان داد که به علت ساختار مشکل مسئله، الگوریتم ارایه شده در این مقاله برای بعضی از مثال‌ها با ۱۵، ۲۲ و ۲۹ گره نمی‌تواند به جواب بهینه دست یابد.

یکی دیگر از مقاله‌هایی که در آن از ناوگان استیجاری استفاده شده است مقاله (Bolduc, Renaud, and Boctor, 2007) است که توسط بولداک و همکارانش ارایه شده است. در این الگوریتم علاوه بر ناوگان ثابت، تعدادی وسایل نقلیه استیجاری هم در نظر گرفته می‌شود. باید توجه کرد که در این مسئله وسایل نقلیه استیجاری در صورت نیاز مورد استفاده واقع می‌شوند. به این ترتیب که ابتدا مشتریانی که باید توسط کامیون‌های اجاره شده سرویس شوند، انتخاب شده و سپس جواب اولیه ساخته می‌شود. سپس این جواب اولیه با استفاده از الگوریتم ابتکاری بهبود دهنده چندگانه ارتقا می‌یافت. این عمل ادامه یافته و بعد از ساختن دومین جواب، مجدداً این جواب بهبود داده می‌شود. از بین دو جواب بهبود یافته، جوابی به عنوان جواب نهایی انتخاب می‌شود که دارای هزینه کمتر باشد.

این روش بر روی تعدادی از مثال‌های استاندارد مورد استفاده قرار گرفت و جواب‌های بهتری نسبت به الگوریتم ارایه شده در (Chu, 2005) به دست آورد.

اسمیدا و همکارانش در سال ۲۰۱۰ یکی از کاربردهای واقعی این مسئله را در دنیای امروزی مورد بررسی قرار دادند و آن‌را برای مسئله توزیع بتن آماده استفاده کردند (Schmida, Doerner, Hartl, and Salazar-González, 2010). یک روش دقیق در این مقاله برای حل مسئله مورد بررسی واقع شد که خود توسط روش جستجوی همسایگی بزرگ (*VLNS*) هدایت می‌شد. همچنین دو روش ترکیبی بر اساس جستجوی همسایگی متغیر مورد استفاده قرار می‌گرفت. روش دقیق پیشنهادی بر اساس فرمول‌بندی برنامه‌ریزی صحیح آمیخته بود که به وسیله نرم‌افزار XPRESS-MP حل شد. در این مسئله، هدف توزیع بتن‌های آماده به وسیله ناوگانی ثابت ناهمگن از وسایل نقلیه بود. در الگوریتم دوم مورد استفاده برای این مسئله، الگوریتم *VNS* برای تولید جواب اولیه شدنی و همچنین بهبود جواب در گام‌های میانی مورد استفاده قرار گرفت.

این روش بر روی ۲۰ مثال با اندازه‌های مختلف، که بر اساس داده‌های یک شرکت توزیع مصالح ساختمانی بود، مورد ارزیابی قرار گرفت. همچنین در همین سال ایوچی و همکاران الگوریتمی فراابتکاری که ترکیبی از الگوریتم جستجوی ممنوع و حافظه تطابقی بود را برای حل مسئله *HFFVRP* ارایه کردند (Euchi, and Chabchoub, 2010).

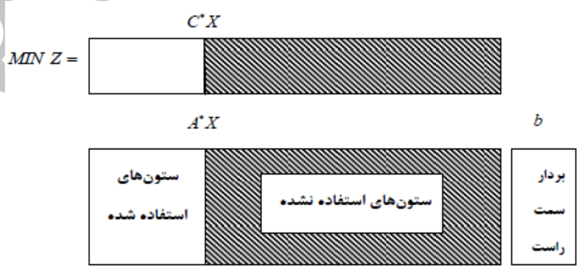
این روش بر روی مثال‌های ارایه شده در (Li, Golden, and Wasil, 2007) مورد تست قرار گرفت. در سال ۲۰۱۱ براندو یک الگوریتم جستجوی ممنوع را برای حل این مسئله ارایه کرد (Brandão, 2011) که بر اساس الگوریتم ارایه شده برای مسئله *FSMVRP* بود و بر روی مثال‌های ارایه شده در (Li, Golden, and Wasil, 2007) مورد استفاده واقع شد. همچنین برای ارزیابی کارایی این الگوریتم، یک مجموعه مثال جدید در نظر گرفته شد و الگوریتم بر روی آن‌ها مورد آزمایش قرار گرفت و نتایج آن با سایر الگوریتم‌های فراابتکاری مقایسه شد.

۳- روش مبتنی بر تولید ستون

ابتدا در این بخش روش تولید ستون با جزییات کافی بیان می‌شود و سپس الگوریتم پیشنهادی برای حل مسئله *HFFVRP* ارایه و مورد بررسی واقع می‌شود.

۳-۱-روش ایجاد ستون

روش ایجاد ستون روش موثر و کارایی برای مسائلی است که تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری زیادی در فرمول‌بندی ریاضی آن به کار گرفته شده است. در این روش، همه‌ی متغیرهای به کار گرفته شده در مسئله در نظر گرفته نمی‌شوند بلکه به صورت تدریجی، متغیرهای ضروری به مسئله اضافه می‌شوند و می‌توان یک جواب شدنی مساله را بدون داشتن همه‌ی متغیرهایش تعیین کرد. شکل ۲، یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی را نشان می‌دهد که قسمت هاشورخورده متغیرهایی که برای به دست آوردن جواب بهینه مورد نیاز نمی‌باشند را نشان می‌دهد و این متغیرها، در حل مسائل می‌تواند استفاده نشوند و مسئله با تعداد متغیرهای کمتری در زمان مناسب‌تری حل شود.



شکل ۲. یک مسأله برنامه‌ریزی خطی

در این روش، از مسئله اصلی یا مسئله اولیه (MP)، یک مسئله اصلی محدود (RMP)، که شامل زیر مجموعه‌ای از $1 \le l \le n$ متغیر از متغیرهای مسئله است به دست می‌آید که در آن بقیه $n-l$ متغیر صفر قرار داده می‌شوند. در ابتدا RMP، شامل این متغیرها و همه‌ی محدودیت‌های MP مرتبط با این متغیرها، می‌باشد (توجه شود که متغیرهایی که در RMP قرار می‌گیرند و این مسئله را تشکیل می‌دهند باید یک جواب شدنی را برای این مسئله تولید کنند). سپس ستون‌های (متغیرهای) بعدی با حل یک مسئله بهینه‌سازی خاص، که مسئله فرعی نامیده می‌شود، شناسایی و به RMP اضافه می‌شوند. هدف RMP، تعیین مقدار متغیرهای دوگان محدودیت‌های مسئله است. با در نظر گرفتن مسئله‌ی زیر، گام‌های روش ایجاد ستون در زیر نشان داده شده است.

$$Min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \forall i = 1,2,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad \forall j = 1,2,\dots,n$$

گام ۱: در ابتدا یک RMP شدنی با l متغیر تعریف می‌شود و سایر متغیرها به صفر کاهش می‌یابد. معمولاً RMP، با استفاده از یک روش ابتکاری ایجاد می‌شود یا با متغیرهای مصنوعی شروع بکار می‌کند.

$$RMP \quad Min\ Z^1 = \sum_{j=1}^{l} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij} x_j = b_i \qquad \forall i = 1,2,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad \forall j = 1,2,\dots,l$$

گام ۲: RMP با روش سیمپلکس یا سیمپلکس اصلاح شده، حل می‌شود و جواب بهینه مسئله تعیین و مقادیر متغیرهای x_1 تا x_l مشخص می‌شوند. این جواب همچنین برای MP شدنی است زیرا در RMP همه‌ی محدودیت‌های MP حفظ شده‌اند. در این گام قیمت‌های سایه تولید می‌شوند. باید توجه کرد که قیمت سایه ($\pi = c_B B^{-1}$)، میزان تغییر تابع هدف توسط افزایش بردار سمت راست است. در RMP، قیمت سایه برای تعریف متغیر ورودی بعدی و بررسی این‌که جواب به دست آمده بهینه است یا نه به کار گرفته می‌شود. در مسائل بزرگ مقیاس که هزاران متغیر وجود دارد، قیمت‌گذاری همه‌ی متغیرهای غیر پایه‌ای، کاری بس دشوار و خسته کننده است. در چنین وضعیتی، روش ایجاد ستون، نقش کلیدی و مهمی بازی می‌کند. ایده اصلی روش ایجاد ستون، آن است که با روشی موثر ستونی را یافته که قیمتی مناسب برای ورود به پایه داشته باشد.

گام ۳: مسئله فرعی $Z_{sub} = \min\{c_j - \sum_{j=1}^{m} \pi a_j\}$ حل می‌شود که این مسئله شامل c_j (ضرایب هزینه)، π (قیمت سایه) و a_j (ستون‌های ماتریس A) می‌باشد. به منظور به دست آوردن یک جواب شدنی از مسئله فرعی، چندین محدودیت باید در نظر گرفته شود. این محدودیت‌ها ناحیه‌ای از جواب‌های شدنی را نشان می‌دهند و بر اساس اطلاعات ساختاری هر مسئله فرعی، در نظر گرفته می‌شوند. اگر $Z_{sub} \geq 0$ باشد آن‌گاه جواب اخیر بدون در نظر گرفتن همه‌ی a_jها بهینه است. در غیر این صورت اگر $Z_{sub} < 0$ باشد آن‌گاه جواب اخیر، بهینه نیست و a_j نظیر برای متغیر خاص j وارد RMP می‌شود.

گام ٤: ستون جدید به RMP اضافه می‌شود. این ستون جدید در گام ۳ محاسبه شد و برای نمایش این ستون در پایه اخیر از رابطه $\overline{a}_j = B^{-1}a_j$ استفاده می‌شود. با اضافه کردن این ستون جدید به RMP، تعداد متغیرها به $l+1$ افزایش می‌یابد.

۳-۲-مدل ریاضی MP برای مسئله HFFVRP

برای مدل‌بندی مسئله HFFVRP لازم است که ابتدا علائم، مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرها به صورت زیر تعریف شوند تا بتوان تابع هدف و محدودیت‌های آن را نیز ارایه کرد.

K	مجموعه انواع وسایل نقلیه $k \in K,\ K = \{1, 2, \ldots, K\}$
R	مجموعه همه مسیرهای شدنی $r \in R$
I	مجموعه مشتریان $i \in I$
Q_k	ظرفیت وسیله نقلیه kام
q_k	درخواست کالای مشتری kام
$R(k)$	مجموعه مسیرهای اختصاص داده شده به وسیله نقلیه نوع $k \in K$ می‌باشد، بنابراین $\bigcup_{k \in K} R(k) = R$
a_{ir}^k	پارامتر باینری برابر با ۱ است اگر مشتری $i \in I$ در مسیر $r \in R$ توسط وسیله نقلیه نوع $k \in K$ سرویس‌دهی شود و در غیر این صورت برابر با صفر است.
c_r^k	هزینه سرویس‌دهی مسیر $r \in R$ توسط وسیله نقلیه نوع $k \in K$
y_{ij}^k	مقدار کالای بارگیری شده بر روی وسیله نقلیه kام در روی یال (i,j)
n_k	تعداد وسیله نقلیه نوع $k \in K$

با این تعاریف مسئله *HFFVRP* می‌تواند به شکل زیر مدل‌بندی شود.

$$(MP)\, Min \sum_{k \in K} \sum_{r \in T(k)} c_r^k x_r^k \qquad (۱)$$

Subject to

$$\sum_{k \in K} \sum_{r \in R(k)} a_{ir}^k x_r^k \geq 1 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۲)$$

$$\sum_{r \in R(k)} x_r^k \leq n_k \qquad \forall k \in K \qquad (۳)$$

$$x_r^k \in \{0,1\} \qquad \forall k \in K, r \in R(k) \qquad (٤)$$

در این مدل‌بندی تابع هدف (۱) کل هزینه را مینیمم می‌کند در حالی که محدودیت (۲) قید می‌شود که هر ایستگاه حداقل یک‌بار ملاقات شود. محدودیت (۳) تضمین می‌کند که حداکثر تعداد مسیرهای اختصاص داده به وسیله نقلیه نوع k به تعداد n_k محدود باشد. باید توجه کرد از آنجایی‌که فاصله کمان‌ها در نابرابری مثلثی صدق می‌کند، برای مینیمم‌کردن هزینه‌ها هر مشتری دقیقاً یک‌بار ملاقات می‌شود. فرض کنید MLP، مسئله خطی آزاد شده از MP باشد (مسئله MLP از صحیح بودن متغیرهای x_r^k در MP صرف‌نظر می‌کند) آن‌گاه هدف اصلی MLP به دست آوردن یک کران پایین برای MP است. توجه به این نکته ضروری است که در MLP تناظر یک

به یک بین ستون‌های اختصاص داده شده به متغیرها و جفت شدنی (مسیر– وسیله نقلیه) وجود دارد و از آنجائی‌که یافتن همه مسیرهای شدنی به عنوان یک مسئله NP– سخت مطرح شده است، روش ایجاد ستون با یک جواب ابتدایی، که شامل تعداد کمتری از مسیرهای شدنی (ستون‌ها) $R' \subset R$ است، شروع می‌کند و تنها در صورت نیاز مسیرهای جدید را به فرمول بندی بالا اضافه می‌کند. باید توجه داشت که مسیرهای اضافه شده به این مسئله همگی شدنی هستند. بنابراین روش تولید ستون با ایجاد یک مسئله خطی آزاد محدود، که به اختصار RMLP نامیده می‌شود و در آن R با R' جایگزین شده است، شروع به کار می‌کند. RMLP می‌تواند با روش سیمپلکس حل شود. فرض کنید Z^* جواب بهینه RMLP و π^* مقدار متغیرهای دوگان متناظر به محدودیت‌های (۲) و (۳) باشند، پس Z^* جواب بهینه برای MLP است اگر شرایط نامنفی ضرایب کاهش هزینه‌ی همه‌ی متغیرها، برآورده شود. این شرایط به صورت رابطه (۵) بیان می‌شود.

$$\sum_{i\in I}\pi_i^* a_{ir}^k + \pi_k^* \le c_r^k \quad \forall (r,k)\in R-R' \tag{۵}$$

این شرایط نامنفی چیزی جز شدنی بودن π^* برای دوگان MLP نیست. بنابراین می‌توان ستون‌های بیشتری را تولید کرد. به عبارت دیگر بهینگی جواب اخیر Z^* توسط حل مسئله (٦) بررسی می‌شود.

$$\begin{aligned}(SP)\quad Min \quad & \bar{c}_r^k = c_r^k - \sum_{i\in N-\{0\}} \pi_i^* a_{ir}^k - \pi_k^* \\ s.t \quad & (r,k)\in R-R'\end{aligned} \tag{٦}$$

اگر مقدار بهینه تابع هدف SP منفی باشد زوج (مسیر– وسیله نقلیه) که دارای کمترین ضریب کاهش هزینه است به عنوان ستون ورودی جدید به RMLP اضافه می‌شود و RMLP به روزرسانی شده، برای بدست آوردن جواب بهینه دوباره حل می‌شود. در غیر این‌صورت Z^* جواب بهینه یا یک کران پایین خوب برای MLP است.

۳-۳-مسئله‌ی فرعی

باید توجه داشت که مسئله اصلی MP و فرعی SP به عنوان دو مسئله مجزا در نظر گرفته می‌شوند که باید تصمیمات مشترکی اتخاذ کنند. مسئله‌ی فرعی، مسیرهای شدنی (ستون‌های جدید) را ایجاد می‌کند و MP تصمیم می‌گیرد که کدام‌یک از مسیرها در جواب نهایی قرار می‌گیرند. به علاوه MP، جواب دوگان مربوط به محدودیت‌های MP را به دست آورده و در مسئله فرعی مورد استفاده قرار می‌دهد. مسئله‌ی فرعی، ستون‌های (مسیرهای) جدید را برای اضافه‌کردن به MP ایجاد می‌کند و با ادامه همین روند جواب نهایی یک کران پایین خوب برای مسئله اولیه ایجاد می‌کند. توجه به این نکته ضروری است که مسئله‌ی فرعی SP، مسئله‌ای است که برای پیدا کردن زوج (مسیر– وسیله‌ی نقلیه) با مینیمم ضریب کاهش هزینه در R به کار می‌رود. این مسئله برای هر نوع وسیله نقلیه تعریف می‌شود.

$$SP(k): Min \quad f_k + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}^k x_{ij}^k \tag{۷}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij}^k \le 1 \qquad \forall j = 1,2,\dots,n \tag{۸}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = 1 \qquad i = 0 \tag{۹}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij}^k - \sum_{i=0}^{n} x_{ji}^k = 0 \qquad \forall j = 1,2,\dots,n \tag{۱۰}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^k = 1 \qquad j = n+1 \tag{۱۱}$$

$$\sum_{i=0}^{n} y_{ij}^{k} - \sum_{i=0}^{n} y_{ji}^{k} = q_j \sum_{i=0}^{n} x_{ij}^{k} \qquad \forall j = 1,2,...,n \qquad (۱۲)$$

$$q_j x_{ij}^{k} \le y_{ij}^{k} \le (Q_k - q_i) x_{ij}^{k} \qquad \forall i, j = 0,1,2,...,n, i \ne j \qquad (۱۳)$$

$$y_{ij}^{k} \ge 0 \qquad \forall i, j = 0,1,2,...,n \qquad (۱٤)$$

$$x_{ij}^{k} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j = 0,1,2,...,n, i \ne j \qquad (۱۵)$$

مسیر $r \in R(k)$ با مینیمم ضریب کاهش هزینه $\overline{c}_r^k$ را در نظر بگیرید به طوری‌که:

$$r = (i_0, i_1, ..., i_H, i_{H+1});\ i_0 = 0\ ,\ i_{H+1} = n+1$$

در این‌صورت:

$$\overline{c}_r^k = c_r^k - \sum_{i \in I} \pi_i^* a_{ir}^k - \pi_k^* = (\sum_{h=1}^{H} c_{i_{h-1},i_h}^k + f_k) - \sum_{h=1}^{H} \pi_{i_h}^* - \pi_k^* = \sum_{h=1}^{H+1} (c_{i_{h-1},i_h}^k - \pi_{i_h}^*) + f_k\ ,\ \pi_{i_{H+1}}^* = \pi_k^*$$

ضریب کاهش هزینه $\overline{c}_r^k$ با هزینه‌ی مسیر r (مجموع هزینه ثابت و هزینه‌ی کل کمان‌ها) روی زیر گراف جهت‌دار $G_k = (V, A_k)$ برابر است که با هزینه‌ی کمان‌ها $(i, j) \in A_k$ که به صورت $\overline{c}_{ij}^k = c_{ij}^k - \pi_j^*$ می‌باشد، تعریف می‌شود. همچنین اگر هزینه‌های بهبودیافته با $\overline{c}_{ij}^k$ نمایش داده شود و زوج (مسیر– وسیله نقلیه) با ضریب کاهش هزینه منفی در نظر گرفته شود آن‌گاه مسائل فرعی $SP(k)$ به صورت زیر بیان می‌شود. شکل ۳ فلوچارت روش ایجاد ستون را نشان می‌دهد.

$$SP(k): Min\ c_r^k = f_k + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_{ij}^k x_{ij}^k \qquad (۱٦)$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij}^{k} \le 1 \qquad \forall j = 1,2,...,n \qquad (۱۷)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k} = 1 \qquad i = 0 \qquad (۱۸)$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij}^{k} - \sum_{i=0}^{n} x_{ji}^{k} = 0 \qquad \forall j = 1,2,...,n \qquad (۱۹)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{k} = 1 \qquad j = n+1 \qquad (۲۰)$$

$$\sum_{i=0}^{n} y_{ij}^{k} - \sum_{i=0}^{n} y_{ji}^{k} = q_j \sum_{i=0}^{n} x_{ij}^{k} \qquad \forall j = 1,2,...,n \qquad (۲۱)$$

$$q_j x_{ij}^{k} \le y_{ij}^{k} \le (Q_k - q_i) x_{ij}^{k} \qquad \forall i, j = 0,1,2,...,n, i \ne j \qquad (۲۲)$$

٤- نتایج محاسباتی

نتایج محاسباتی جهت مقایسه این الگوریتم با روش شاخه و کران به عنوان یک روش دقیق (نرم افزار *Aimms* با حل کننده *GUROBI* 4.5) در این بخش ارایه شده است. این الگوریتم بر روی ۱٦ مثال از مسائل *HFFVRP* که توسط تایلارد پیشنهاد گردیده، اجرا شده است (Taillard, 1999). باید اضافه کرد که تایلارد این مثال‌ها را بر اساس تعدادی از بزرگ‌ترین مثال‌های گلدن، که مربوط به مسئله *FSMVRP* همراه با هزینه ثابت کامیون و بدون هزینه متغیر است، به این صورت ساخته است که

در بزرگ‌ترین مثال‌های گلدن و همکاران به جای هزینه ثابت f_k، هزینه متغیر α_k قرار داده است. به علاوه مقادیر α_k طوری انتخاب شده که هیچ کامیونی نسبت به دیگر کامیون‌ها خیلی بهتر یا بدتر نباشد. به عبارت دیگر که اگر هر مثال تایلارد به عنوان یک مسئله *FSMVRP* در نظر گرفته شود، آنگاه ترکیب ناوگانی که توسط الگوریتم تولید می‌شود شامل همه انواع کامیون‌ها باشد. از طرف دیگر در این الگوریتم مقادیر n_k (تعداد وسایل نقلیه دسته kاُم) نیز به گونه‌ای انتخاب می‌شود که علاوه بر اینکه مجموع ظرفیت ناوگان، حداکثر به اندازه دو برابر ظرفیت کوچک‌ترین کامیون و بیشتر از مجموع تقاضای مشتریان باشد، ناوگان حاصل متفاوت از ناوگان بهترین جواب مثال‌های گلدن باشد. خصوصیات مثال‌های تولید شده که ۱ تا ١٦ نامیده می‌شوند، در جدول ۱ نشان داده شده است.

این دسته از مثال‌ها دارای یک دامنه کوچک و متوسط از تعداد مشتری‌ها و وسائل نقلیه بوده و مسائل ما بین ۱۰ تا ۵۰ مشتری و ۵ تا ۱۷ وسیله نقلیه را مورد بررسی قرار می‌دهد. باید توجه کرد که این دسته از مثال‌ها به صورت تصادفی در اطراف مبدأ پراکنده شده‌اند، مختصات اقلیدسی آن‌ها داده شده و تقاضای آن‌ها ثابت و به صورت قطعی مشخص شده است. همچنین ناوگان شامل چند نوع کامیون با ظرفیت مشخص است که طول مسیر قابل پیمایش هر کامیون نیز محدودیتی ندارد. به علاوه چون محدودیت زمان سرویس‌دهی برای مشتریان وجود ندارد. بنابراین هر وسیله نقلیه دارای ظرفیت، در هر زمانی می‌تواند هر مشتری را مورد ملاقات قرار دهد.

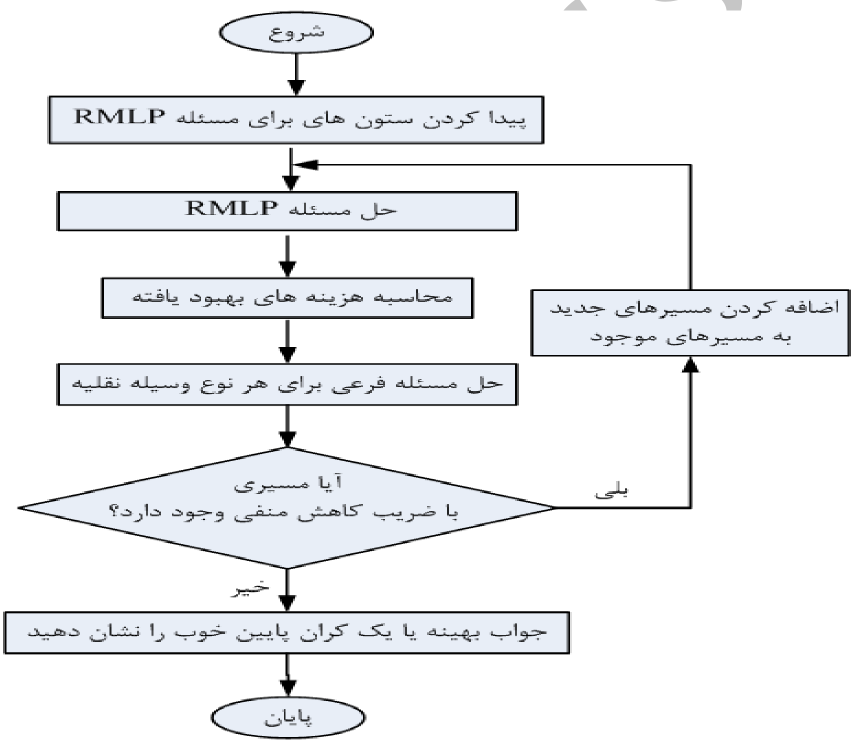
لازم به ذکر است که در این مثال‌ها، هزینه ثابت در محاسبات دخالت داده نشده و تنها هزینه متغیر کامیون‌ها منظور شده است زیرا در همه مقالاتی که این مثال‌ها را به کار برده‌اند، هزینه ثابت کامیون را در محاسبات در نظر نگرفته‌اند. در جدول ۲، مقادیر به دست آمده توسط الگوریتم پیشنهادی با روش دقیق مورد مقایسه قرار گرفته است. باید توجه داشت که در این جدول، ستون دوم تعداد مشتری‌های هر مثال بدون در نظر گرفتن انبار را نشان می‌دهد در حالی که ستون‌های سوم و چهارم به ترتیب، نتایج روش دقیق و الگوریتم پیشنهادی تولید ستون را نشان می‌دهد. در نهایت ستون پنجم جدول ۱، (#(r,k)) تعداد مسیرهای تولید شده توسط الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد.

با افزایش تعداد مشتری‌ها، این تعداد افزایش یافته است تا الگوریتم بتواند به نتایج بهتری دست یابد. باید توجه داشت که ستون الگوریتم دقیق در این جدول از چهار زیر ستون تشکیل شده است. در این زیر ستون‌ها دو زیر ستون اول و دوم نتایج زمان و هزینه الگوریتم دقیق را در حالتی نشان می‌دهد که روش تا رسیدن به بهترین جواب و یا متوقف شده خودکار ادامه داشته است. در حالی که زیر ستون‌های سوم و چهارم نتایج الگوریتم را در زمانی مشابه زمان الگوریتم پیشنهادی تولید ستون نشان می‌دهد. به عبارت دیگر برای مقایسه این دو الگوریتم، یک زمان مشخص به ثانیه در نظر گرفته شده است. نتایج در جدول ۲ نشان می‌دهد که الگوریتم از کارایی بسیار خوبی نسبت به الگوریت دقیق برخوردار است و توانسته که جواب‌های بسیار خوبی را به دست آورد. به عبارت دیگر الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با این روش فقط در مثال دقیق نه تنها نتوانسته به جواب خوبی دست یابد بلکه حتی به جواب شدنی نیز دست پیدا نکرده است در حالی که ۳ و ۱۱ جواب بدتری را به دست آورده است. از طرف دیگر الگوریتم در مثال ۱، جواب برابری را کسب کرده و در مثال‌های ۲، ۳، ٤، ٦، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ جواب‌های الگوریتم دقیق را ارتقا داده است. همچنین با افزایش تعداد مشتری در مثال‌های ۱۲، ۱۳، ١٤، ۱۵ و ١٦، الگوریتم در این مثال‌ها، الگوریتم پیشنهادی توانسته جواب‌شدنی را به دست آورد. بنابراین در کاربردهای روزمره این مسئله در صنعت و خدمات می‌توان در یک زمان اندک توسط الگوریتم پیشنهادی به جوابی با کیفیت مناسب دست یافت. برای بررسی زمان الگوریتم پیشنهادی در این مثال‌ها، شکل ۳ میزان افزایش زمان الگوریتم پیشنهادی را نسبت به افزایش تعداد مشتری در هر ١٦ مثال نشان می‌دهد. باید توجه کرد که در این شکل محور افقی تعداد مشتری‌های هر مورد آزمایش را نشان می‌دهد در حالی که محور عمودی حاصل تقسیم زمان الگوریتم نسبت به تعداد مشتری‌ها را ارایه می‌کند. نتایج

نشان داده شده در این شکل بیان می‌کند که الگوریتم پیشنهادی علاوه بر این که زمان اجرای بسیار خوبی نسبت به الگوریتم دقیق دارد، نسبت به افزایش تعداد مشتری‌های هر مثال نسبتاً پایدار بوده و زمان اجرای آن با افزایش تعداد مشتری‌های هر مثال به میزان قایل قبولی افزایش می‌یابد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک الگوریتم تولید ستون برای حل مسئله مسیریابی چندین وسیله نقلیه با ناوگان ناهمگن ثابت ارایه شد که توانست رقابت بسیار خوبی را با الگوریتم دقیق داشته باشد به طوری که اگر زمان اجرای دو الگوریتم در نظر گرفته شود آن‌گاه الگوریتم *CG* می‌تواند در زمان بسیار کمتری به جواب‌های بسیار خوبی دست یابد. از طرف دیگر اگر الگوریتم دقیق به طور عادی اجرا گردد آن‌گاه الگوریتم *CG* می‌تواند در زمان بسیار خوبی، تقریبا جواب‌های یکسانی را به دست آورد. به نظر می‌رسد که استفاده از یک روش ترکیبی فراابتکاری مانند روش جستجوی ممنوع و مورچگان برای یافتن جواب اولیه در این الگوریتم می‌تواند راهکار مناسبی برای افزایش کارایی الگوریتم باشد. به علاوه می‌توان این الگوریتم را برای نسخه‌های دیگر مسئله *HFFVRP* مانند مسئله مسیریابی چندین وسیله نقلیه باز با ناوگان ناهمگن ثابت یا مسئله مسیریابی چندین وسیله نقلیه همراه با دریافت و تحویل هم‌زمان کالا با ناوگان ناهمگن ثابت بکار برد.



شکل ۳. روش ایجاد ستون برای مسئله *HFFVRP*

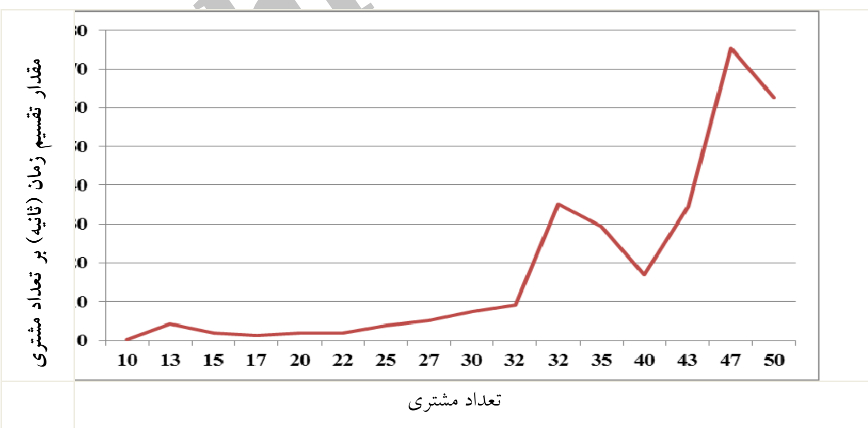
جدول ۱. مشخصات مثال‌های تولید شده

نام مثال	n	K	Q_k	f_k	α_k	n_k
۱	۱۰	۱	۲۰	۲۰	۱	۱
		۲	۳۰	٤۰	۱.۱	۱
		۳	٤۰	۷۰	۱.۳	۲
		٤	۷۰	۲۰۰	۱.۷	۱
۲	۱۳	۱	٦۰	۱۰۰	۱.۱	۱
		۲	۸۰	۲٥۰	۱.٥	۱
		۳	۱٥۰	۳۰۰	۲	۱
۳	۱٥	۱	۳۰	٦۰	۱	۱
		۲	٦۰	۱۰۰	۱.۱	۱
		۳	۸۰	۲٥۰	۱.٥	۱
		٤	۱٥۰	۳۰۰	۲	۱
٤	۱۷	۱	۲۰	٦۰	۱	۱
		۲	۲٥	۱۰۰	۱.۱	۲
		۳	٥۰	۲٥۰	۱.٥	۲
		٤	۱۲۰	۳۰۰	۲	۲
٥	۲۰	۱	۲۰	۷۰	۱	۱
		۲	۳٥	۱۲۰	۱.۱	۲
		۳	٥۰	۲۰۰	۱.۲	۲
		٤	۱۲۰	۲٥۰	۲	۳
٦	۲۲	۱	۲۰	۷۰	۱	۲
		۲	۳٥	۱۲۰	۱.۱	۲
		۳	٥۰	۲۰۰	۱.۲	۲
		٤	۱۲۰	۲٥۰	۲	۳
۷	۲٥	۱	۲٥	٥۰	۱	۲
		۲	۳٥	۸۰	۱.۱	۲
		۳	٥۰	۲۰۰	۱.۲	۳
		٤	۱۲۰	۲٥۰	۱.۷	۳
۸	۲۷	۱	۲٥	۳٥	۱	۳
		۲	۳٥	٥۰	۱.۱	۲
		۳	٥۰	۷٥	۱.۲	۳
		٤	۱۲۰	۱٥۰	۱.۷	٤
۹	۳۰	۱	۲٥	۳٥	۱	۳
		۲	۳٥	٥۰	۱.۱	۲
		۳	٥۰	۷٥	۱.۲	٤
۱۰	۳۲	۱	۳۰	۳٥	۱	۳

		٢	٤٠	٥٠	١.١	٢
		٣	٥٠	٧٥	١.٢	٤
		٤	١٢٠	١٥٠	١.٥	٤
١١	٣٢	١	٥٠	٦٠	١	١
		٢	١٢٠	٧٥	١.١	٢
		٣	١٦٠	١٠٠	١.٢	٣
١٢	٣٥	١	٥٠	٦٠	٠.٧	١
		٢	١٢٠	٧٥	١	٢
		٣	١٦٠	٢٠٠	١.١	٣
		٢	١٤٠	٧٥	١.٧	٢
		٣	١٠٠	٢٢٥	٢.٥	٢
		٤	٢٠٠	٤٠٠	٢	٢
١٣	٤٠	١	٢٥	٢٠	١	١
		٢	٣٥	٣٥	١.١	١
		٣	٤٠	٥٠	١.٢	٣
		٤	٧٠	١٢٠	١.٧	٤
		٥	١٠٠	٢٢٥	٢.٥	٢
		٦	٢٠٠	٤٠٠	٣.٢	١
١٤	٤٣	١	٢٥	٢٠	١	١
		٢	٣٥	٣٥	١.١	١
		٣	٤٠	٥٠	١.٢	٤
		٤	٧٠	١٢٠	١.٧	٤
		٥	١٠٠	٢٢٥	٢.٥	٢
		٦	٢٠٠	٤٠٠	٣.٢	١
١٥	٤٧	١	٢٥	٢٠	١	٢
		٢	٣٥	٣٥	١.١	٢
		٣	٤٠	٥٠	١.٢	٤
		٤	٧٠	١٢٠	١.٧	٤
		٥	١٠٠	٢٢٥	٢.٥	٢
		٦	٢٠٠	٤٠٠	٣.٢	١
١٦	٥٠	١	٢٠	٢٠	١	٤
		٢	٣٠	٣٥	١.١	٢
		٣	٤٠	٥٠	١.٢	٤
		٤	٧٠	١٢٠	١.٧	٤
		٥	١٢٠	٢٢٥	٢.٥	٢
		٦	٢٠٠	٤٠٠	٣.٢	١

جدول ۲. مقایسه مقادیر الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم دقیق

مثال	تعداد مشتری	الگوریتم دقیق				الگوریتم تولید ستون		#(r,k)
		هزینه	زمان	هزینه	زمان	هزینه	زمان	
۱	۱۰	۳۴۴.۶۱	۳.۶	۳۴۴.۶۱	۲.۲۳	۳۴۴.۶۱	۲.۲۳	۴۴
۲	۱۳	۳۷۴.۶۶	۱۴۳.۴۲	۳۸۵.۲۰	۵۴.۳۷	۳۷۴.۶۶	۵۴.۳۷	۸۷
۳	۱۵	۴۱۳.۶۷	۱۱۰۹	۴۹۴.۶	۲۷.۵۲	۴۱۵.۰۶	۲۷.۵۲	۱۰۷
۴	۱۷	۵۰۲.۲۴	۱۰۵.۷۲	۵۱۹.۴۰	۲۲.۵۶	۵۰۲.۲۴	۲۲.۵۶	۸۵
۵	۲۰	۶۱۳.۸۰	۱۰۹۷	۶۱۳.۸۰	۳۷.۳۳	۶۱۵.۲۴	۳۷.۳۳	۱۱۴
۶	۲۲	۶۷۰ (integer solution-Resource Interrupt)	۱۱۳۶۱	۷۰۱.۱۲	۴۲.۰۶	۶۷۱.۴۳	۴۲.۰۶	۱۰۴
۷	۲۵	۶۶۵	۶۴۵	۶۶۶.۶۰	۹۵.۸۰	۶۶۵.۳۹	۹۵.۸۰	۱۵۳
۸	۲۷	۶۷۸.۰۸	۱۰۴۹	۶۸۵.۰۹	۱۳۶.۴۳	۶۷۸.۰۸	۱۳۶.۴۳	۱۷۷
۹	۳۰	۷۳۰.۸۳	۴۰۲۲	۷۴۶.۸۳	۲۱۹.۸۵	۷۳۰.۸۳	۲۱۹.۸۵	۲۰۹
۱۰	۳۲	۷۴۲.۱۱ (integer solution-Resource Interrupt)	۲۰۳۹۵.۱۲	۷۶۹.۴۴	۲۹۱.۱۳	۷۴۵.۶۱	۲۹۱.۱۳	۲۲۰
۱۱	۳۲	۵۰۱.۷۰ (integer solution-Resource Interrupt)	۱۸۱۸۸.۶۹	۵۰۱.۷۰	۱۱۲۳.۳۹	۵۰۴.۴	۱۱۲۳.۳۹	۳۰۰
۱۲	۳۵	۴۷۹.۴۸ (integer solution-Resource Interrupt)	۲۹۵۲۱	Na	۱۰۳۰.۲۱	۵۱۰.۵۲	۱۰۳۰.۲۱	۳۰۴
۱۳	۴۰	-	-	Na	۶۷۴.۹۸	۱۳۲۲.۴۷	۶۷۴.۹۸	۳۳۲
۱۴	۴۳	-	-	Na	۱۴۸۵.۶۸	۱۴۰۳.۸۷	۱۴۸۵.۶۸	۳۶۷
۱۵	۴۷	-	-	Na	۳۵۴۴.۲۱	۱۴۸۹.۴۵	۳۵۴۴.۲۱	۳۸۷
۱۶	۵۰	-	-	Na	۳۱۳۲.۳۶	۱۵۲۵.۸۸	۳۱۳۲.۳۶	۴۰۰



شکل ٤. رابطه زمان اجرای الگوریتم پیشنهادی با افزایش تعداد مشتری

٦- مراجع

- ظفری، ع.، تشکری‌هاشمی، س. و یوسفی‌خوشبخت، م. (۱۳۸۹) "الگوریتم ترکیبی موثر ژنتیک برای حل مسئله مسیریابی وسیله نقلیه"، مهندسی صنایع و مدیریت تولید، جلد ۲۱، شماره ۲، ص. ٦٣-٧٦.

- مهدوی، ا.، توکلی مقدم، ر. و قاضی زاده، س. (۱۳۸۹) "مسیریابی وسایل نقلیه و تعیین تعداد ماشین‌های جمع‌آوری زباله با استفاده از یک روش فراابتکاری- یک مطالعه موردی"، پژوهشنامه حمل و نقل، سال هفتم، شماره ۱، ص. ۹۵-۱۰۲.

- یوسفی‌خوشبخت، م. و رحمتی، ف. (۱۳۹۰) "یک الگوریتم بهبود یافته جمعیت مورچگان برای حل مسئله مسیریابی وسیله نقلیه همراه با دریافت و تحویل همزمان کالا"، پژوهشنامه حمل و نقل، جلد ۸، شماره ۲، ص. ۱۸۳-۱۹۸.

- یوسفی خوشبخت، م.، دیده‌ور، ف.، رحمتی، ف. و صدیق‌پور، م.، (۱۳۹۰) "الگوریتم موثر رقابتی فراگیر برای حل مسئله مسیریابی وسیله نقلیه باز" ، پژوهشنامه حمل و نقل ۹ (۱)، ص. ۸۳-۹۵.

- یوسفی‌خوشبخت، م.، دیده‌ور، ف.، رحمتی، ف. و سعادتی اسکندری، ز.، (۱۳۹۱) "یک روش جمعیت مورچگان ترکیبی برای مسئله مسیریابی وسایل نقلیه با ناوگان ناهمگن ثابت"، پژوهشنامه حمل و نقل ۹ (۲)، ۱۳۹۱، ص. ۱۹۱-۲۰۷.

- حسن‌پور، ح.، مصدق‌خواه، م.، توکلی‌مقدم، ر.، (۱۳۸۸) "حل مساله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه در حالت چند هدفی، چند قرارگاهی و احتمالی، با استفاده از آنیلینگ شبیه‌سازی شده"، نشریه تخصصی مهندسی صنایع، ٤٣ (۱)، ص. ۲۵-٣٦.

- Brandão, J. (2011) "A tabu search algorithm for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem", Computers & Operations Research, Vol. 38, pp. 140-151.

- Bolduc, M.C., Renaud, J. and Boctor, F.F. (2007) "A heuristic for the routing and carrier selection problem", European Journal of Operational Research, Vol. 183, pp. 926–932.

-Choia E and Tchab D.W, " A column generation approach to the heterogeneous fleet vehicle routing problem", Computers & Operations Research, ARTICLE IN PRESS.

- Chu, C.W. (2005) "A heuristic algorithm for the truckload and less-than-truckload problem", European Journal of Operational Research, Vol. 165, pp. 657–667.

- Euchi, J. and Chabchoub, H. (2010) "A hybrid tabu search to solve the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem", Logistics Research, Vol. 2, pp. 3-11.

- Laporte, G., Louveaux, F. and Mercure, H. (1992) "The vehicle routing problem with stochastic travel times", Transportation Science, Vol. 26, No. 3, pp. 161-170.

- Li, F., Golden, B.L. and Wasil, E.A. (2007) "A record-to-record travel algorithm for solving the heterogeneous fleet vehicle routing problem", Computers & Operations Research, Vol. 34, pp. 2734–2742.

- Prins, C. (2002) "Efficient Heuristics for the Heterogeneous Fleet Multitrip VRP with Application to a Large-Scale Real Case", Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, Vol. 1, pp. 135-150.

- Schmida, V., Doerner, K. F., Hartl, R. F. and Salazar-González, J. (2010) "Hybridization of very large neighborhood search for ready-mixed concrete delivery problems", Computers & Operations Research, Vol. 37, pp. 559-574.

- Taillard, E.D. (1996) "A Heuristic Column Generation Method for the Heterogeneous Fleet VRP", Publication CRT-03-96, University Montreal.

- Taillard, E.D. (1999) "A heuristic column generation method for the heterogeneous fleet VRP", RAIRO Operations Research, Vol. 33, pp. 1-14.

- Yousefikhoshbakht, M. and Khorram, E. (2012) "Solving the vehicle routing problem by a hybrid meta-heuristic algorithm", Journal of Industrial Engineering International, Vol. 8, No. 1, pp. 1-9.